

2. TEOREMA DE UNICITATE

Pentru a dovedi că regimul cvasistaționar este bine definit de ecuațiile (1.1)÷(1.4), este necesar să dovedim că aceste ecuații asigură unicitatea soluției de câmp.

Condițiile inițiale (CI)

Deoarece ecuațiile (1.1)÷(1.4) descriu un proces evolutiv, este necesar să avem informații privitoare la momentul începerii acestui proces. Deoarece în ecuația (1.1) apare derivata în raport cu timpul a inducției magnetice, la $t=0$ trebuie cunoscută valoarea ei: $\mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}_i$. Evident, se impune $\text{div}\mathbf{B}_i = 0$. Aplicând operatorul div relației (1.1), rezultă că la orice moment este verificată legea fluxului magnetic.

Condițiile de frontieră(CF)

Domeniul analizat Ω este doar o subregiune a spațiului în care avem câmp electromagnetic. Interacțiunea dintre câmpul electromagnetic exterior domeniului Ω și cel interior acestui domeniu este pus în evidență de comportarea mărimilor câmpului pe frontiera $\partial\Omega$. Se pot impune mai multe tipuri de condiții de frontieră. Toate au proprietatea că, în cazul valorilor nule, expresia de forma $\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ se anulează. Vom vedea (Partea VI) că această expresie are natura schimbului de putere de natură electromagnetică ce se produce pe frontieră.

*Condiție de frontieră de **tip electric**.* Cea mai simplă condiție de frontieră, pe care o întâlnim cel mai frecvent în literatura de specialitate, este (Fig.1.1):

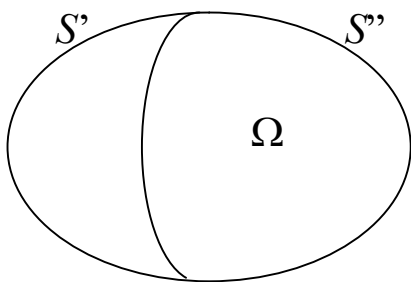


Fig.1.1.Domeniul Ω

(α) Pe o parte S' a frontierei, se dă componenta tangențială a lui \mathbf{H} : $\mathbf{H}_t = \mathbf{f}$;

(β) Pe restul frontierei $S'' = \partial\Omega - S'$, se dă componenta tangențială a lui \mathbf{E} : $\mathbf{E}_t = \mathbf{g}$;

Observații. 1) Din punct de vedere tehnic,

condiția de frontieră (α), sub formă omogenă

(nulă) este realizată în vecinătatea corpurilor perfect conductoare magnetice ($\mu = \infty$).

2) Condiția (β) sub formă omogenă este realizată în vecinătatea corpurilor perfect conductoare.

3) Deoarece, în condiția (β), intervine intensitatea câmpului electric, spunem că avem condiție de frontieră de tip electric.

Teorema 1.1. Ecuațiile (1.1)÷(1.4), împreună cu condițiile de frontieră de (CF) și condițiile inițiale (CI), definesc unic componentele ($\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$) în domeniul Ω și componenta \mathbf{E} în domeniul conductor Ω_c .

Demonstrație. (Facultativ) Vom prezenta demonstrația pentru cazul simplu al condițiilor de frontieră de tip electric, procedură care va fi utilă și pentru alte demonstrații. Presupunem că două câmpuri electromagnetice distincte îndeplinesc condițiile enunțului teoremei și fie ($\mathbf{B}_d, \mathbf{H}_d, \mathbf{E}_d, \mathbf{J}_d$) câmpul diferență. Acest câmp verifică relațiile (1.1), (1.2) și are condiții de frontieră și condiții inițiale nule. Notăm:

$$\mathbf{E} = \int_0^t \mathbf{E}_d d\tau$$

Atunci, datorită condițiilor inițiale, legea inducției electromagnetice (1.1) devine:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{B}_d \quad (2.1)$$

Din condiția de frontieră (β), rezultă că, pe S'' , $E_t = 0$, iar din condiția (α), $\mathbf{H}_{dt} = 0$ pe S' . Atunci:

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_d) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.2)$$

Mai avem:

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_d) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \text{rot } \mathbf{E} \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}_d \, dv$$

Conform (2.1), (1.2) și (2.2), rezultă:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{B}_d \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \, dv = 0 \quad (2.3)$$

unde am notat:

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{J}_d \, d\tau$$

Din relația (1.3), rezultă că $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ în domeniile conductoare Ω_c , în rest fiind nulă.

Atunci, (2.3) devine:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{B}_d \, dv + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \sigma E^2 \, dv = 0$$

După integrare în timp, avem:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{B}_d \, dv \, dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma E^2 \, dv = 0 \quad (2.4)$$

Ținând cont de (1.4), relația (2.4) devine:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_d^2 dv dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma E^2 dv = 0 \quad (2.5)$$

Membrul stâng al relației (2.5) poate fi nul doar dacă \mathbf{B}_d și, prin urmare, \mathbf{H}_d sunt nule în Ω , iar \mathbf{E} și, prin urmare, \mathbf{E}_d și \mathbf{J}_d sunt nule în Ω_c . ■

Observatii. 1) Din relația (2.4), rezultă că teorema de unicitate este valabilă și pentru medii neliniare în care relația constitutivă $\mathbf{H} = F(\mathbf{B})$ este coercitivă:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot (F(\mathbf{B}_1) - F(\mathbf{B}_2)) > 0, \quad \forall \mathbf{B}_1 \neq \mathbf{B}_2$$

2) Intensitatea câmpului electric nu este unic determinată în domeniile izolante, ci doar în cele conductoare.

Din Teorema de unicitate rezultă că inducția magnetică \mathbf{B} poate fi considerată mărime de stare în cazul câmpului electromagnetic cvasistationar: cunoașterea ei la timpul $t=0$ definește unic evoluția câmpului electromagnetic.

3. ECUATIILE DE ORDINUL 2

Din sistemul (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) putem obține, prin substituție, ecuații diferențiale cu derivate parțiale, de ordin superior, dar conținând o singură necunoscută. Astfel, din relațiile (1.4) și (1.1) rezultă:

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Aplicând operatorul rot în relația de mai sus și ținând cont de relațiile (1.2) și (1.3), rezultă:

$$rot\left(\frac{1}{\mu}rot\mathbf{E}\right)+\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0 \quad (3.1)$$

valabilă pentru mediile conductoare. Este convenabil să utilizăm ecuația (3.1) atunci când dorim să determinăm câmpul electromagnetic într-un domeniu Ω care este în întregime conductor, iar condițiile de frontieră sunt impuse pentru \mathbf{E}_t .

Ținând cont de relația (1.3), relația (1.2) devine, pentru medii conductoare:

$$\frac{1}{\sigma}rot\mathbf{H}=\mathbf{E}$$

Aplicând operatorul rot și ținând cont de relațiile (1.1), (1.4), rezultă:

$$rot\left(\frac{1}{\sigma}rot\mathbf{H}\right)+\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0 \quad (3.2)$$

Este convenabil să utilizăm ecuația (1.13) atunci când dorim să determinăm câmpul electromagnetic într-un domeniu Ω care este în întregime conductor, iar condițiile de frontieră sunt impuse pentru \mathbf{H}_t .

Ecuațiile (3.1) și (3.2) sunt ecuații diferențiale cu derivate parțiale de tip parabolic, care descriu procese de difuzie a câmpului electromagnetic.

În cazul în care domeniul de calcul Ω are medii conductoare și medii izolante, ecuațiile (3.1) și (3.2) rămân valabile pentru mediile conductoare, în timp ce pentru mediile izolante sunt valabile ecuațiile stabilite în cazul regimurilor staționare [1]. Pe suprafețele de separare se pun condițiile de conservare a diferitelor componente ale câmpului electromagnetic. În general, determinarea câmpului electromagnetic în regimul staționar nu se poate face decât numeric, în

aceasta direcție îndreptându-se numeroase cercetări ale specialiștilor din ingineria electrică /2/.

Dacă mediul conductor este omogen $\sigma = ct.$, $\mu = ct.$, atunci, din legea fluxului magnetic (1.5) rezultă: $\text{div}\mathbf{H} = 0$. Din teorema lui Ampère (1.2) rezultă, prin aplicarea operatorului div : $\text{div}\mathbf{J} = 0$. Ca urmare, în mediul conductor omogen, unde $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, avem: $\text{div}\mathbf{E} = 0$. Relația (1.12) devine:

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

si cum $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}$, rezultă ecuația:

$$-\Delta\mathbf{E} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.1')$$

La fel, ecuația (3.2) devine:

$$-\Delta\mathbf{H} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (3.2')$$

4. REGIMUL CVASISTATIONAR SINUSOIDAL

În regimul sinusoidal, toate mărimile câmpului electromagnetic sunt funcții sinusoidale de aceeași pulsație. De exemplu, intensitatea câmpului electric este un vector care, într-un sistem de coordonate carteziane, are forma:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{i}E_x(x, y, z, t) + \mathbf{j}E_y(x, y, z, t) + \mathbf{k}E_z(x, y, z, t)$$

unde cele 3 componente sunt funcții sinusoidale de aceeași pulsație:

$$E_x(x, y, z, t) = E_{x_{ef}}(x, y, z) \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_x(x, y, z))$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{y_{ef}}(x, y, z) \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_y(x, y, z))$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{z_{ef}}(x, y, z) \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_z(x, y, z))$$

$E_{x_{ef}}$, $E_{y_{ef}}$, $E_{z_{ef}}$ și φ_x , φ_y , φ_z fiind valorile efective și, respectiv, fazele inițiale ale celor 3 componente. La fel ca în cazul regimului sinusoidal al circuitelor electrice, vom utiliza imaginile în complex ale componentelor sinusoidale. De exemplu, pentru componenta axei ox avem:

$$\underline{E}_x(x, y, z) = E_{x_{ef}}(x, y, z) [\cos(\varphi_x(x, y, z)) + j \sin(\varphi_x(x, y, z))]$$

Ca urmare, imaginea în complex a vectorului intensității câmpului electric este:

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \mathbf{i} \underline{E}_x(x, y, z) + \mathbf{j} \underline{E}_y(x, y, z) + \mathbf{k} \underline{E}_z(x, y, z)$$

Ținând cont de faptul că operatorul de derivare $\frac{\partial}{\partial t}$ are ca imagine în complex

înmulțirea cu $j\omega$, ecuațiile (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) devin :

$$\text{rot} \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad (4.1)$$

$$\text{rot} \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} \quad (4.2)$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_0 \quad (4.3)$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}} \quad (4.4)$$

Relațiile (4.1)÷ (4.4) pot fi privite ca un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute **B**, **H**, **E**, **J**.

Prin aplicarea operatorului *div* în relația (4.1), se obține imaginea în complex a relației (1.5):

$$\operatorname{div}\underline{\mathbf{B}}=0$$

Deci imaginea în complex a legii fluxului magnetic rezultă din forma în complex a legii inducției electromagnetice (1.14).

Asemănător cu puterile regimului sinusoidal al circuitelor electrice, este util ca, pornind de la relația (1.6), să definim în fiecare punct densitatea de volum a puterii active, ce se transforma din forma electromagnetică în alte forme, prin conducție:

$$p_a(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T p(x, y, z, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) \cdot \underline{\mathbf{J}}(x, y, z, t) dt \quad (4.15)$$

unde T este perioada: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Exprimând vectorii **E** și **J** pe componente, avem:

$$\begin{aligned} p_a(x, y, z) = & \frac{1}{T} \int_0^T E_x(x, y, z, t) J_x(x, y, z, t) dt \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T E_y(x, y, z, t) J_y(x, y, z, t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T E_z(x, y, z, t) J_z(x, y, z, t) dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ținând cont de expresiile lui E_x și J_x :

$$E_x(x, y, z, t) = E_{x_{ef}}(x, y, z) \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_x(x, y, z))$$

$$J_x(x, y, z, t) = J_{x_{ef}}(x, y, z) \sqrt{2} \sin(\omega t + \phi_x(x, y, z))$$

primul termen din membrul drept al relației (1.19) se poate scrie:

$$\frac{1}{T} \int_0^T E_x J_x dt = E_{x_{ef}} J_{x_{ef}} \cos(\varphi_x - \phi_x)$$

Imaginile în complex ale lui E_x și J_x sunt:

$$\underline{E}_x(x, y, z) = E_{x_{ef}}(x, y, z) [\cos(\varphi_x(x, y, z)) + j \sin(\varphi_x(x, y, z))]$$

$$\underline{J}_x(x, y, z) = J_{x_{ef}}(x, y, z) [\cos(\phi_x(x, y, z)) + j \sin(\phi_x(x, y, z))]$$

Deci:

$$\frac{1}{T} \int_0^T E_x J_x dt = \operatorname{Re}(\underline{E}_x \underline{J}_x^*)$$

unde \underline{J}_x^* este conjugatul lui \underline{J}_x . Expresii asemănătoare se obțin pentru ultimii termeni din membrul drept al relației (1.19):

$$\frac{1}{T} \int_0^T E_y J_y dt = \operatorname{Re}(\underline{E}_y \underline{J}_y^*), \quad \frac{1}{T} \int_0^T E_z J_z dt = \operatorname{Re}(\underline{E}_z \underline{J}_z^*)$$

Rezultă că densitatea de volum a puterii active, ce se transformă din forma electromagnetică în alte forme, prin conducție, mai poate fi obținută cu relația:

$$p_a = \text{Re}(\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*) \quad (4.17)$$

La fel ca în cazul circuitelor electrice, putem defini și densitatea de volum a puterii complexe prin relația:

$$\underline{p}_c = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \quad (4.18)$$

precum și densitatea de volum a puterii reactive:

$$p_r = \text{Im}(\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*) \quad (4.19)$$

În cazul unui mediu conductor linar, în care relația dintre $\underline{\mathbf{E}}$ și $\underline{\mathbf{J}}$ este $\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$, densitatea puterii complexe este egală cu densitatea de putere activă:

$$\underline{p}_c = p_a = \sigma E^2 = \rho J^2 \quad (4.20)$$

unde E este modulul (norma) lui $\underline{\mathbf{E}}$:

$$E = \sqrt{\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^*} = \sqrt{E_{x_{ef}}^2 + E_{y_{ef}}^2 + E_{z_{ef}}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}^2 dt} \quad (4.21)$$

5. (Facultativ) TEOREMA DE UNICITATE PENTRU REGIMUL SINUSOIDAL

Pentru a dovedi că regimul cvasistaționar sinusoidal este bine definit de ecuațiile (1.14)÷(1.17), este necesar să dovedim că aceste ecuații asigură unicitatea

soluției de câmp. Spre deosebire de ecuațiile (1.1)÷(1.4) ce descriau evoluția în timp a câmpului electromagnetic cvasistaționar, ecuațiile (1.14)÷(1.17) nu descriu un proces evolutiv și nu se pune problema definirii unor condiții inițiale pentru imaginile în complex ale mărimilor câmpului. În realitate, câmpul electromagnetic (originalul) este variabil în timp, dar dependența de timp este sinusoidală. Această condiție este o restricție cel puțin la fel de tare ca și condiția inițială.

Condițiile de frontieră (CF): *sunt date de imaginile în complex ale condițiilor de frontieră prezentate la Cap.2.*

Teorema 1.2. Ecuațiile (1.14)÷(1.17), împreună cu condițiile de frontieră (CF), definesc unic componentele $(\underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{J}})$ în domeniul Ω și componenta $\underline{\mathbf{E}}$ în domeniul conductor Ω_c .

Demonstrație. Vezi Partea VI

6. ECUATIILE DE ORDINUL 2, IN REGIM SINUSOIDAL

Imaginile în complex ale ecuațiilor (3.1), (3.2) rezultă prin înlocuirea derivatei $\frac{\partial}{\partial t}$ cu înmulțirea cu factorul $j\omega$:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\underline{\mathbf{E}}\right) + j\omega\sigma\underline{\mathbf{E}} = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}\underline{\mathbf{H}}\right) + j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} -\Delta\underline{\mathbf{E}} + \underline{\gamma}^2\underline{\mathbf{E}} &= 0 \quad \underline{\gamma}^2 = \mu\sigma j\omega \\ -\Delta\underline{\mathbf{E}} + \underline{\gamma}^2\underline{\mathbf{E}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1')$$

$$-\Delta\underline{\mathbf{H}} + \underline{\gamma}^2\underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (6.2')$$

unde:

$$\underline{\gamma} = \alpha(1+j) \quad \underline{\gamma}^2 = \alpha^2(1+j)^2 = \alpha^2(1+2j-1) = 2j\alpha^2 = 2j\frac{\omega\mu\sigma}{2} = j\omega\mu\sigma \quad (6.3)$$

și:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (6.4)$$

7. APLICATII

7.1. Patrunderea câmpului electromagnetic în semispațiul conductor

Fie domeniul Ω definit de semispațiul conductor $z>0$, omogen și linear, de conductivitate σ și permeabilitate magnetică μ . La suprafața semispațiului ($z=0$), intensitatea câmpului electric este:

$$\mathbf{E}(x, y, 0, t) = \mathbf{E}_p(x, y, t) = \mathbf{i}E_0\sqrt{2}\sin(\omega t) \quad (7.1)$$

deci constantă pe întreg peretele semispațiului și sinusoidală în timp. Ne propunem să determinăm câmpul electromagnetic sinusoidal din semispațiu, precum și pierderile specifice prin curenți turbionari. Folosind imaginile în complex, condiția de frontieră se scrie:

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, 0) = \underline{\mathbf{E}}_p = \mathbf{i}E_0 \quad (7.2)$$

Admitem că, în întreg semispațiul, intensitatea câmpului electric este orientată pe direcția axei ox și depinde doar de coordonata z :

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z) = \mathbf{i} \underline{E}(z) \quad (7.3)$$

Este valabilă ecuația (6.1'):

$$-\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} + \underline{\gamma}^2 \underline{E} = 0 \quad (7.4)$$

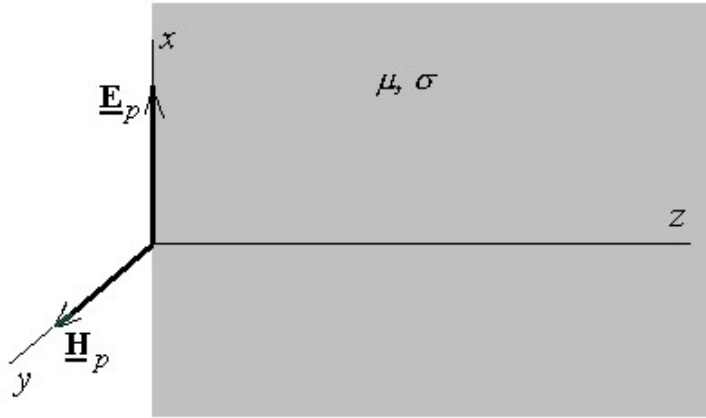


Fig.1.2. Semispațiu conductor

Soluțiile ecuației caracteristice $s^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ asociate ecuației (7.4) are soluțiile $\pm \underline{\gamma}$.

Soluția ecuației (7.4) este de forma:

$$\underline{E}(z) = \underline{A}e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{B}e^{\underline{\gamma}z} \quad (7.5)$$

Deoarece $\underline{\gamma} = \alpha(1 + j)$, cu $\alpha > 0$ dat de relația (6.3), și deoarece $\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = 0$, rezultă $\underline{B} = 0$. Din condiția de frontieră (7.2) rezultă $\underline{A} = E_0$. Deci soluția ecuației diferențiale (1.32) este:

$$\underline{E}(z) = E_0 e^{-\underline{\gamma}z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\alpha z} \quad (7.6)$$

În domeniul timp, expresia intensității câmpului electric rezultă din originalul expresiei (7.6):

$$E(z, t) = E_0 \sqrt{2} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \alpha z) \quad (7.8)$$

Graficul dependenței intensității câmpului electric, raportată la valoarea maximă $E_{\max} = E_0 \sqrt{2}$, în funcție de distanța $z' = \alpha z$ este prezentat în Fig.1.3. Este o sinusoidă rapid amortizată cu distanța z . În tehnică, este deosebit de util să se definească adancimea de pătrundere a câmpului electromagnetic, ca distanța $z = \delta$ la care valoarea efectivă a intensității câmpului electric:

$$E_{ef} = E_0 e^{-\alpha z} \quad (7.9)$$

scade de e ori. Ținând cont de (7.9), rezultă:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (7.10)$$

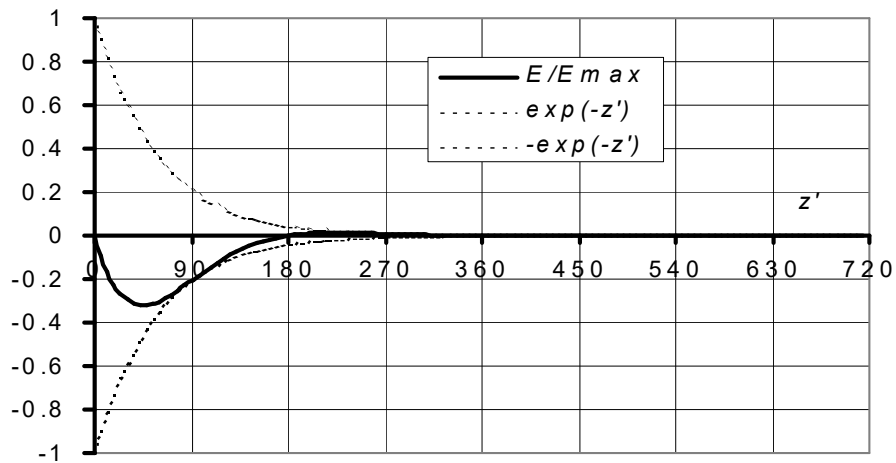


Fig.1.3. Pătrunderea intensității câmpului electric

Observații: 1. Evident, semispațiul conductor nu poate exista în realitate. El este însă un model deosebit de eficient pentru a aprecia pătrunderea câmpului electromagnetic în orice domenii mărginite de suprafețe suficient de netede (Fig.1.4) în comparație cu adâncimea de pătrundere, dată de relația (7.10).

2. Impunerea condiției de frontieră prin componenta tangențială a intensității câmpului electric poate să rezulte prin impunerea tensiunii la bornele bobinei, în ipoteza că această are rezistență neglijabilă:

$$E_0 = \frac{U}{NL}$$

unde U este valoarea efectivă a tensiunii, N este numărul de spire al bobinei și L este lungimea unei spire.

3. Un calcul asemănător se face atunci când pe frontieră se dă componenta tangențială a intensității câmpului magnetic. Ea poate să rezulte prin impunerea curentului din bobină:

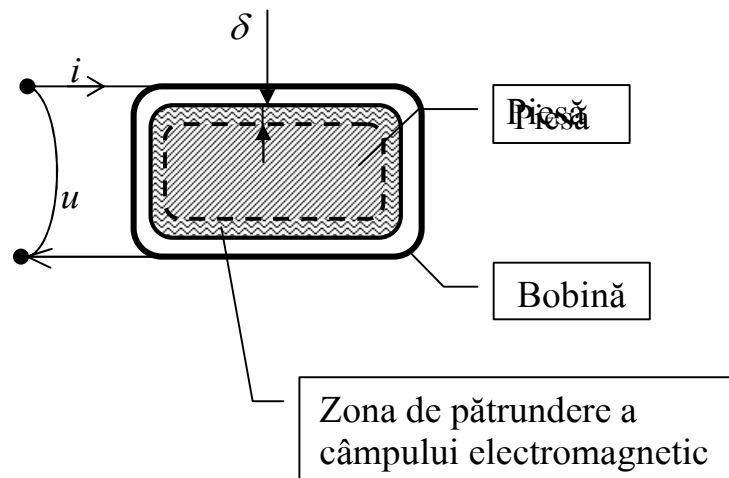


Fig.1.4. Piesă oarecare

$$H_0 = \frac{NI}{\Delta}$$

unde I este valoarea efectivă a curentului și Δ este înălțimea bobinei (perpendiculară pe planul figurii 1.4.).

Călirea superficială prin curenți turbionari

Pierderile specifice prin curenți turbionari (densitatea de volum a puterii active) rezultă din relația (7.10):

$$p_a = \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z} = \sigma E_0^2 e^{-2\frac{z}{\delta}} \quad (7.11)$$

Rezultă că putem utiliza câmpul electromagnetic pentru a încălzi un mediu conductor la suprafață. Putem astfel ridica temperatura zonei superficiale a unei piese până în zona austenitică și, în urma răcirii, putem obține o suprafață dură, păstrând elasticitatea materialului în volumul piesei. Aceasta procedura tehnologică se folosește des în industrie pentru călirea suprafețelor pinioanelor, axelor etc. Adâncimea zonei călite este sugerată de relația (1.37)

7.2. (Facultativ) Pierderi specifice în tolele feromagnetice

Foarte multe echipamente electrotehnice au părți feromagnetice parcurse de fluxuri magnetice variabile în timp. Conform legii inducției electromagnetice, în aceste zone se induc tensiuni electrice și, ca urmare, apar curenți turbionari care conduc la apariția unor pierderi nedorite. O modalitate de a reduce aceste pierderi

este folosirea tolelor pentru porțiunile parcurse de fluxuri magnetice variabile în timp.

Vom căuta soluția sinusoidală a problemei de câmp electromagnetic. Fie tola infinit extinsă, de lățime $2a$, din Fig.1.5. Inducția magnetică este orientată pe direcția axei oy , depinde doar de coordonata x : $\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{j}B(x,t)$. Imaginea în complex a inducției magnetice este: $\underline{\mathbf{B}}(x) = \mathbf{j}\underline{B}(x)$. Presupunem cunoscut fluxul magnetic pe o înălțime de 1m în lungul axei oz :

$$\varphi(t) = \varphi_{ef} \sqrt{2} \sin(\omega t) \quad (7.12)$$

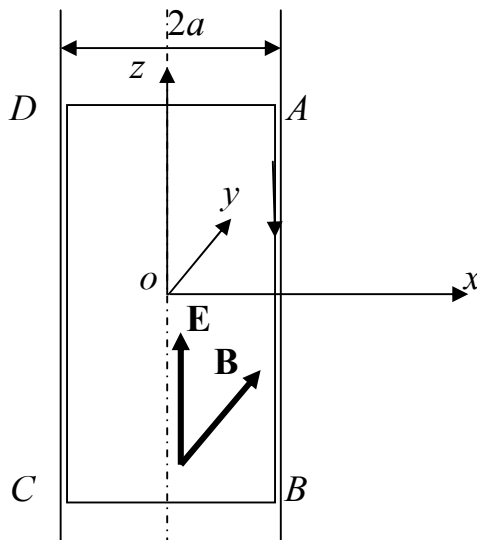


Fig.1.5. Tola feromagnetică

cu imaginea în complex: $\underline{\varphi} = \varphi_{ef}$. Admitem că intensitatea câmpului electric este orientată pe direcția axei oz și depinde, de asemenea, doar de coordonata x . Referindu-ne la ipotezele ce le facem de multe ori înaintea rezolvării unei probleme de câmp electromagnetic, este util de observat că inginerul poate intui comportarea marimilor câmpului, simplificându-si astfel rezolvarea problemei. Dacă soluția obținută verifică

ecuațiile câmpului electromagnetic, atunci, conform teoremei de unicitate, ea este singura soluție valabilă, deci ipotezele făcute sunt bune.

Fie curba închisă ABCDA, de formă dreptunghiulară, cu $\|AB\| = 1\text{m}$, pe care aplicăm forma în complex a legii inducției electromagnetice:

$$\int_A^B \underline{E}(a) \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \underline{E}(x) \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \underline{E}(-a) \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \underline{E}(x) \cdot d\mathbf{l} = -j\omega\varphi$$

Ținând cont de orientarea lui \underline{E} , avem: $\underline{E}(x) \cdot d\mathbf{l} = 0$ pe BC și AD, iar $\underline{E}(a) \cdot d\mathbf{l} = -\underline{E}(a)dl$, pe AB și $\underline{E}(-a) \cdot d\mathbf{l} = \underline{E}(-a)dl$, pe CD. Putem admite că $\underline{E}(x)$ este funcție impară de x și ca urmare: $\underline{E}(-a) = -\underline{E}(a)$. Ca urmare, din relația de mai sus rezultă:

$$\underline{E}(a) = j\omega\varphi_{ef} \quad (7.13)$$

Relația (7.13) este condiția de frontieră pentru problema de câmp electromagnetic. Ecuația (6.1') capătă forma:

$$-\frac{d^2 \underline{E}}{dx^2} + \underline{\gamma}^2 \underline{E} = 0 \quad (7.14)$$

cu soluțiile ecuației caracteristice $\pm \underline{\gamma}$ (vezi și §7.1). În acest caz, este mai convenabil să scriem soluția generală a ecuației (7.14) sub forma: $\underline{E}(x) = \underline{A}sh(\underline{\gamma}x) + \underline{B}ch(\underline{\gamma}x)$. Cum $\underline{E}(x)$ este funcție impară, rămâne: $\underline{E}(x) = \underline{A}sh(\underline{\gamma}x)$. Impunând condiția de frontieră (7.13), rezultă:

$$\underline{E}(x) = j\omega\varphi_{ef} \frac{sh(\underline{\gamma}x)}{sh(\underline{\gamma}a)} \quad (7.15)$$

Densitatea de volum a pierderilor este:

$$p_a = \sigma E^2 = \sigma \underline{E} \underline{E}^* = \sigma \omega^2 \varphi_{ef}^2 \frac{sh(\underline{\gamma} x) sh(\underline{\gamma}^* x)}{sh(\underline{\gamma} a) sh(\underline{\gamma}^* a)} \quad (7.16)$$

Ținând cont de relația: $sh(x)sh(y) = \frac{1}{2}(ch(x+y) - ch(x-y))$ și de expresia coeficientului $\underline{\gamma}$ (6.3) și (6.4), avem:

$$p_a(x) = \sigma \omega^2 \varphi_{ef}^2 \frac{ch(2\alpha x) - \cos(2\alpha x)}{ch(2\alpha a) - \cos(2\alpha a)} \quad (6.17)$$

unde am folosit relația $ch(ix) = \cos(x)$. În Fig. 1.6 sunt reprezentate pierderile în funcție de coordonata x . pentru o tolă cu lățimea $2a=1\text{mm}$, cu rezistivitatea

$\rho = \frac{1}{\sigma} = 1 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ și permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = 2000$, la frecvența de 50Hz. Se observă localizarea acestora la marginea tolei.

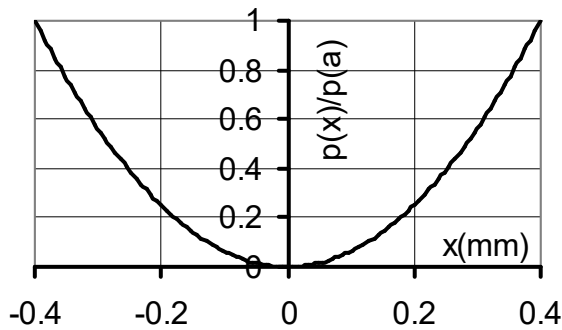


Fig.1.6. Densitatea de volum a pierderilor

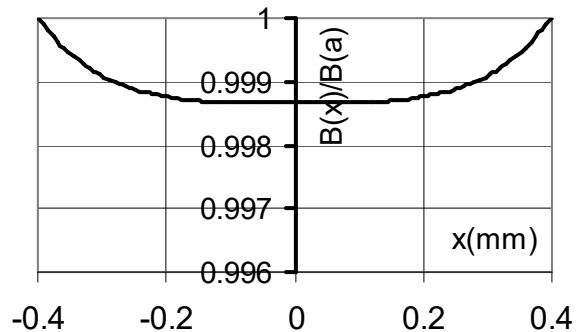


Fig.1.7. Valoarea efectivă a inducției magnetice

Inducția magnetică se obține din legea inducției electromagnetice:

$$rot \underline{\mathbf{E}} = \nabla \times \underline{\mathbf{k}} E(x) = -\underline{\mathbf{k}} \times \nabla E(x) = -\underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{i}} \frac{dE}{dx} = -\underline{\mathbf{j}} \frac{dE}{dx} = -j\omega \underline{\mathbf{j}} B$$

Deci, avem:

$$\underline{B}(x) = \underline{\gamma} \varphi_{ef} \frac{ch(\underline{\gamma} x)}{sh(\underline{\gamma} a)} \quad (7.18)$$

Valoarea efectivă a inducției magnetice este dată de:

$$B^2 = \underline{B} \underline{B}^* = \omega \mu \sigma \frac{ch(2\alpha x) + \cos(2\alpha x)}{ch(2\alpha a) - \cos(2\alpha a)}$$

În Fig.1.7. este desenat graficul valorii efective a inducției magnetice. Se vede ușor că, cel puțin în cazul valorilor numerice de mai sus, inducția magnetică este practic constantă. Din acest motiv, este mult mai util să se exprime fluxul magnetic în funcție de media valorii efective sau maxime a inducției magnetice:

$$\varphi_{ef} = 2a \tilde{B}_{ef} = \sqrt{2} a \tilde{B}_{\max} \quad (7.19)$$

Valoarea medie a pierderilor este:

$$\tilde{p} = \frac{1}{a} \int_0^a p_a(x) dx = \frac{\sigma \omega^2 \varphi_{ef}^2}{2\alpha a} \frac{sh(2\alpha a) - \sin(2\alpha a)}{ch(2\alpha a) - \cos(2\alpha a)} \quad (7.20)$$

Sau, folosind (7.19) și notând $\xi = 2\alpha a$:

$$\tilde{p} = \frac{2\sigma \omega^2 a^2 \tilde{B}_{\max}^2}{\xi} \frac{sh\xi - \sin\xi}{ch\xi - \cos\xi} \quad (7.21)$$

În cazul numeric de mai sus, argumentul funcțiilor din relația (7.21) are o valoare $2\alpha a \cong 0,5$. Ca urmare, o formă mai simplă a relației (7.21) se obține prin dezvoltarea în serie a funcțiilor din această relație:

$$\tilde{p} \cong \frac{2\sigma\omega^2 a^2 \tilde{B}_{\max}^2}{\xi} \frac{\frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots - \frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^3}{3!} \dots}{1 + \frac{\xi^2}{2!} + \dots - 1 + \frac{\xi^2}{2!} \dots}$$

Deci:

$$\tilde{p} \cong \frac{2}{3} \sigma\omega^2 a^2 \tilde{B}_{\max}^2 \quad (7.22)$$

8. REGIMUL CVASISTATIONAR PERIODIC

În regimul periodic, mărimile câmpului sunt funcții periodice de aceeași perioadă T .

Generatoare de curent continuu. Vom prezenta o proprietate interesantă din punct de vedere tehnic, pentru câmpul electromagnetic cvasistaționar periodic. Definim, în domeniile conductoare, mărimea:

$$E_c = \int_0^t \mathbf{E} d\tau$$

Din legea inducției electromagnetice avem:

$$\text{rot } E_c = -\mathbf{B}(t) + \mathbf{B}(0)$$

Deci, în regim periodic: $\text{rot } E_c(T) = 0$ și ca urmare, $E_c(T) = -\text{grad}\phi$. Din teorema lui Ampère rezultă:

$$\text{rot} \int_0^T \mathbf{H} d\tau = \int_0^T \mathbf{J} d\tau = \sigma E_c(T) = -\sigma \text{grad}\phi \quad (8.1)$$

unde, la suprafața corpului conductor,

$$J_n = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (8.2)$$

Din (8.1) rezultă:

$$\text{div}(\sigma \text{grad}\phi) = 0 \quad (8.3)$$

și ținând cont de condiția de frontieră (8.2), rezultă că $\text{grad}\phi = 0$. Deci:

$$\int_0^T \mathbf{E} d\tau = 0 \quad \text{și} \quad \int_0^T \mathbf{J} d\tau = 0$$

Rezultă proprietatea: *nu se poate produce curent continuu în regimul periodic, dacă mediul conductor este liniar*. Pentru a produce curent continuu este necesar să utilizăm medii conductoare cu relație constitutivă $\mathbf{E}-\mathbf{J}$ dependentă de timp (este necesară comutația) sau cu relație constitutivă neliniară (comutație statică).

Analiza regimului periodic.

Condiția de periodicitate, împreună cu condițiile de frontieră de tip magnetic, asigură unicitatea soluției sistemului de ecuații (1.1)÷(1.4) (Anexa A).

Analiza Fourier. Dacă mediile sunt liniare, atunci cea mai comodă procedură de analiză a câmpului electromagnetic periodic este descompunerea soluției în serie Fourier și determinarea fiecărei componente prin utilizarea imaginilor în complex. De exemplu, pentru o intensitate a câmpului electric periodică avem:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z = \sum_k \mathbf{E}_k \quad (8.4)$$

unde componentele lui \mathbf{E}_k pe cele trei axe sunt armonicile componentelor E_x , E_y , E_z . Ecuatiile (1.1)÷(1.4) rămân valabile și pe componente, proprietate ce poate fi dovedită prin proiectare pe funcțiile $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$.

Repetarea valorii mărimii de stare. O altă procedură de determinare a câmpului electromagnetic periodic, aplicabilă și în cazul mediilor neliniare, este analiza în domeniul timp. Admițând o valoare arbitrară pentru mărimea de stare \mathbf{B} , se determină evoluția în timp a câmpului electromagnetic, regimul periodic instalându-se atunci când mărimea de stare se repetă după o perioadă.