Capitolul 2
Legile și principalele teoreme ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

2.6. Legea fluxului electric

g) Calculul câmpului electrostatic generat de corpuri cu simetrie perfectă încărcate uniform cu sarcină electrică (Metoda Gauss)

Relații de bază:

- Legea fluxului electric:

$$\Psi_{(\Sigma)} = q_{(D_\Sigma)} \Rightarrow \oint_{(\Sigma)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = q_{(D_\Sigma)}$$

- Legea legăturii în câmp electric pentru medii liniare, omogene și izotrope, fără polarizație permanentă:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}$$

- Expresiile diferitelor tipuri de distribuții ale sarcinii electrice:

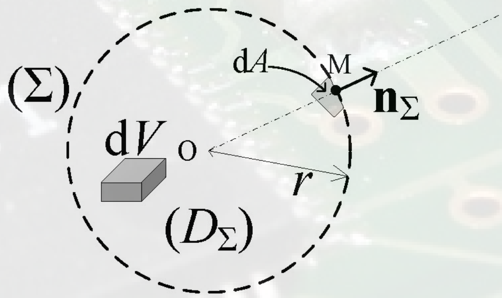
$$q_{(D_\Sigma)} = \int_{(D_\Sigma)} \mathrm{d}q = \int_{(D_\Sigma)} \rho_V \mathrm{d}V$$

$$q_{(D_\Sigma)} = \int_{(S_\Gamma)} \mathrm{d}q = \int_{(S_\Gamma)} \rho_s \mathrm{d}A$$

$$q_{(D_\Sigma)} = \int_{(C)} \mathrm{d}q = \int_{(C)} \rho_l \mathrm{d}l$$

Corpurile încărcate cu sarcină electrică q se consideră a avea forme geometrice de bază, care să permită identificarea unor simetrii. Astfel putem să avem următoarele tipuri de simetrii:

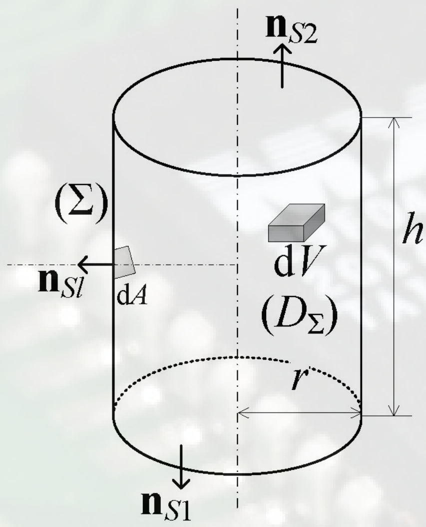
- **Simetrie sferică** (corpurile prezintă un *punct central* față de care domeniul de aplicare a legii fluxului electric este simetric distribuit)



Volumul sferei: $V_{sferei} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

Aria sferei: $A_{sferei} = 4\pi r^2$

- **Simetrie cilindrică** (corpurile prezintă o *axă centrală* față de care domeniul de aplicare a legii fluxului electric este simetric distribuit)

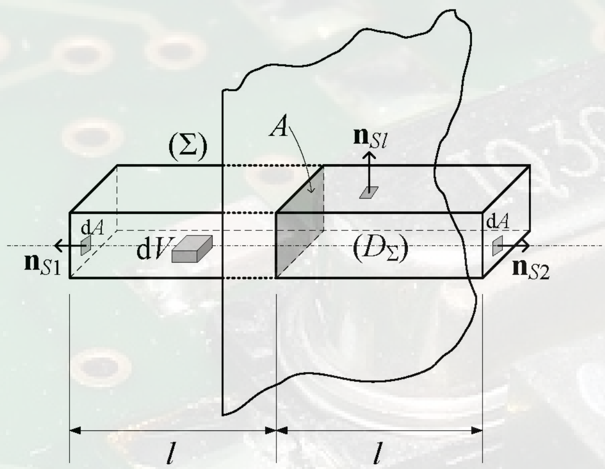


Volumul cilindrului: $V_{cilindru} = \pi r^2 h$

Aria laterală a cilindrului:

$A_{lat-cilindru} = 2\pi r h$

- **Simetrie plană** (plan-paralelă) (corpurile prezintă un *plan central* față de care domeniul de aplicare a legii fluxului electric este simetric distribuit)



Volumul paralelipipedului:

$V_{paralelipiped} = 2Al$

Aria secțiunii transversale a paralelipipedului:

$A_{sectiune} = A$

Aplicații

1) O sferă de rază a încărcată cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasată în vid. Să se determine inducția electrică $\boldsymbol{D}$ și intensitatea câmpului electric $\boldsymbol{E}$ în interiorul și exteriorul sferei.

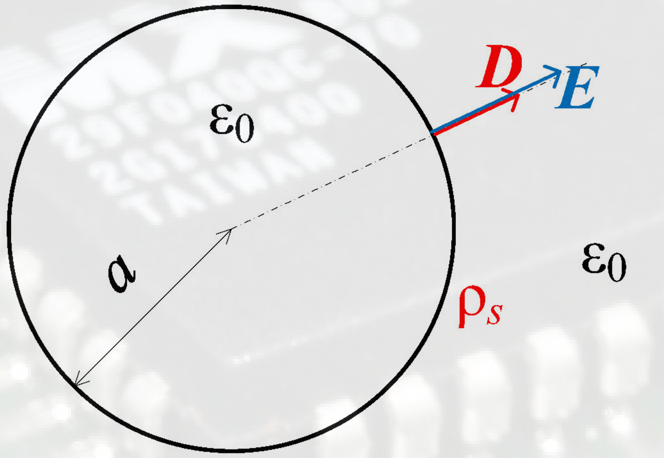
OBS.:

Sursa de câmp electric este o sferă încărcată cu $\rho_s > 0$

Liniile de câmp electric sunt distribuite radial și pleacă de pe suprafața sferei.

Tipul de simetrie utilizat este simetria sferică.

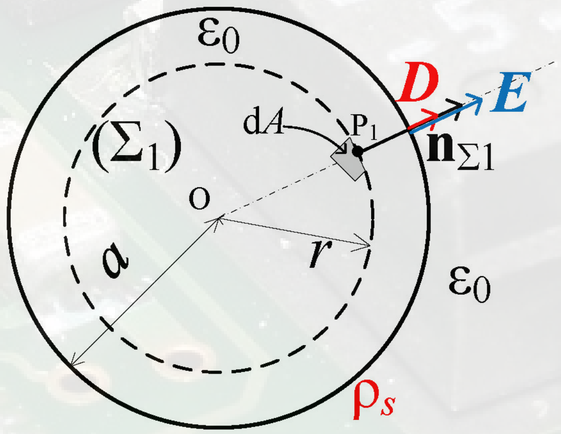
Pentru analiza la interior se va considera suprafața închisă (Σ_1) de forma unei sfere de rază $r < a$, iar pentru exterior se va considera suprafața închisă (Σ_2) de forma unei sfere de rază $r > a$



Liniile de câmp electric au o distribuție radială și pleacă de pe suprafața corpului de probă, care este încărcat cu densitate de sarcină electrică $\rho_s > 0$. Deoarece sfera este plasată în vid (sau aer), un mediu liniar, omogen și izotrop, vectorii $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{E}$ vor fi colineari, tangenți la liniile de câmp electric.

Se va analiza cazul $r < a$

Pentru aceasta se consideră suprafața închisă (Σ_1), având o rază oarecare $r < a$, pentru a definii domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric. Această suprafață este caracterizată printr-un element de arie $\mathrm{d}A$ și de normala la suprafața închisă $\mathbf{n}_{\Sigma 1}$



Calculul expresiilor fluxului electric și a sarcinii electrice conținută în domeniul $\left(D_{\Sigma_1}\right)$, se va realiza într-un punct P_1 aflat la intersecția suportului liniilor de câmp electric cu suprafața închisă $\left(\Sigma_1\right)$.

Pentru fluxul electric se obține:

$$\Psi_{(\Sigma_1)} = \int_{(\Sigma_1)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(\Sigma_1)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(\Sigma_1)}\mathrm{d}A = \int_{(\Sigma_1)} |\boldsymbol{D}|\left|\mathbf{n}_{(\Sigma_1)}\right|\cos\left(\boldsymbol{D},\mathbf{n}_{(\Sigma_1)}\right)\mathrm{d}A = D\int_{(\Sigma_1)}\mathrm{d}A = D4\pi r^2 .$$

În cazul expresiei de calcul a sarcinii electrice din interiorul domeniului $\left(D_{\Sigma_1}\right)$, se observă că, datorită distribuției de suprafață a sarcinii electrice aceasta nu există în interiorul corpului sferei încărcate, astfel încât aceasta este nulă:

$$q_{\left(D_{\Sigma_1}\right)} = \int_{(\Sigma_1)}\rho_s \mathrm{d}A = 0\int_{(\Sigma_1)}\mathrm{d}A = 0$$

Se egalează cele două expresii pentru a definii legea fluxului electric:

$$\Psi_{(\Sigma_1)} = q_{\left(D_{\Sigma_1}\right)} \Rightarrow D4\pi r^2 = 0 .$$

și se observă că în interior inducția electrică este nulă:

$$D = 0$$

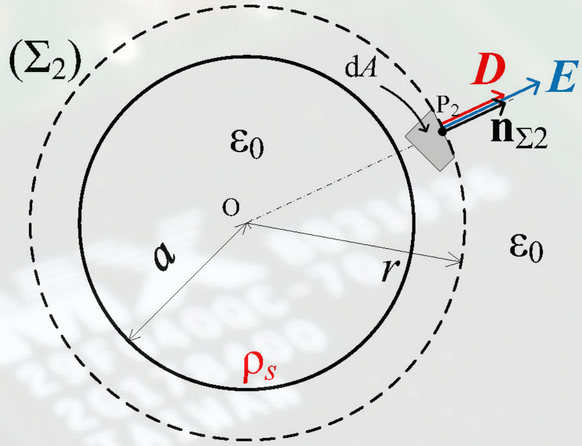
Deoarece mediul în interiorul corpului de probă este vid se obține pentru modulul vectorului intensitate câmp electric:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = 0$$

Se va analiza cazul $r > a$

Pentru aceasta se consideră suprafața închisă $\left(\Sigma_2\right)$, având o rază oarecare $r > a$, pentru a definii domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric. Această suprafață este caracterizată printr-un element de arie $\mathrm{d}A$ și de normala la suprafața închisă $\mathbf{n}_{\Sigma 2}$.

Calculul expresiilor fluxului electric și a sarcinii electrice conținută în domeniul $\left(D_{\Sigma_2}\right)$, se va realiza într-un punct P_2 aflat la intersecția suportului liniilor de câmp electric cu suprafața închisă $\left(\Sigma_2\right)$. Acest punct de calcul P_2 se poate considera punct de referință pentru vectorii $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{E}$.



Expresia analitică a fluxului electric calculat în punctul P$_2$ are aceeaşi formă ca în cazul analizat anterior:

$$\Psi_{(\Sigma_2)} = \int_{(\Sigma_2)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(\Sigma_2)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(\Sigma_2)}\mathrm{d}A = \int_{(\Sigma_2)} |\boldsymbol{D}|\left|\mathbf{n}_{(\Sigma_2)}\right|\cos\left(\boldsymbol{D},\mathbf{n}_{(\Sigma_2)}\right)\mathrm{d}A = D\int_{(\Sigma_2)}\mathrm{d}A = D4\pi r^2 .$$

Pentru calculul expresiei sarcinii electrice din interiorul domeniului $\left(D_{\Sigma_2}\right)$ se va considera că sarcina electrică există în spaţiu doar până la limita corpului conductor electric. Astfel domeniul de integrare $\left(D_{\Sigma_2}\right)$ se va împărţii în două componente, separate de limita de rază a. Se obţine expresia:

$$q_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} = \int_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} \mathrm{d}q = \int_{\left(V_{sferă}\right)} \mathrm{d}q + \int_{\left(D_{\Sigma_2}\right)\setminus\left(V_{sferă}\right)} \mathrm{d}q =$$
$$= \int_{\left(A_{sferă}\right)} \rho_s \mathrm{d}A + \int_{(\Sigma_2)\setminus\left(A_{sferă}\right)} 0\mathrm{d}A = \rho_s \int_{\left(A_{sferă}\right)} \mathrm{d}A = \rho_s 4\pi a^2$$

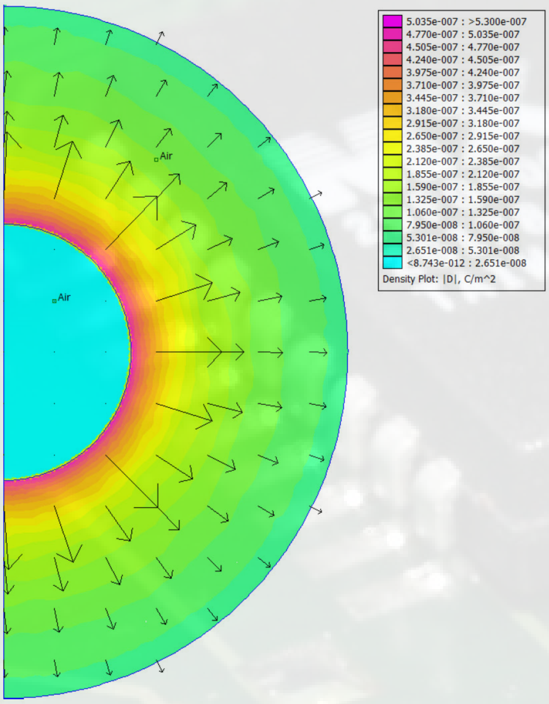
Prin egalarea celor două expresii se obţine formula de calcul a modului vectorului inducţie electrică pentru exteriorul sferei:

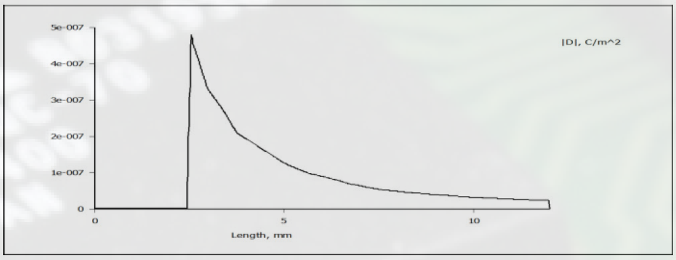
$$\Psi_{(\Sigma_2)} = q_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} \Rightarrow D4\pi r^2 = \rho_s 4\pi a^2 \Rightarrow D = \frac{\rho_s a^2}{r^2},$$

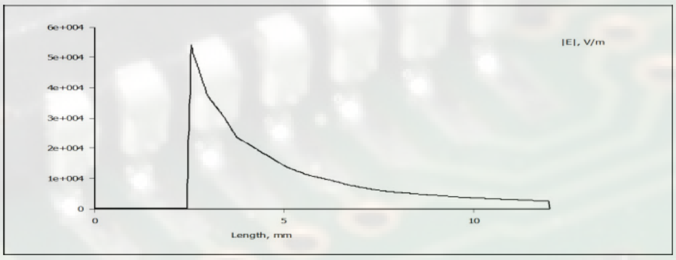
iar expresia intensităţii câmpului electric este:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Simularea numerică furnizează următoarele rezultate privind harta de culoare pentru distribuţia valorilor inducţiei electrice şi liniile de câmp electric. Reprezentare grafică a variaţiei modulului vectorului inducţie electrică, respectiv a modulului vectorului intensitate câmp electric, în funcție de lungimea razei r identifică zona cu valori nule pentru cazul $r < a$ și graficul descrescător în funcție de $1/r^2$ pentru cazul $r > a$.







2) Un cilindru infinit lung de rază a încărcat cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasat în vid. Să se determine inducția electrică $\boldsymbol{D}$ și intensitatea câmpului electric $\boldsymbol{E}$ în interiorul și exteriorul cilindrului.

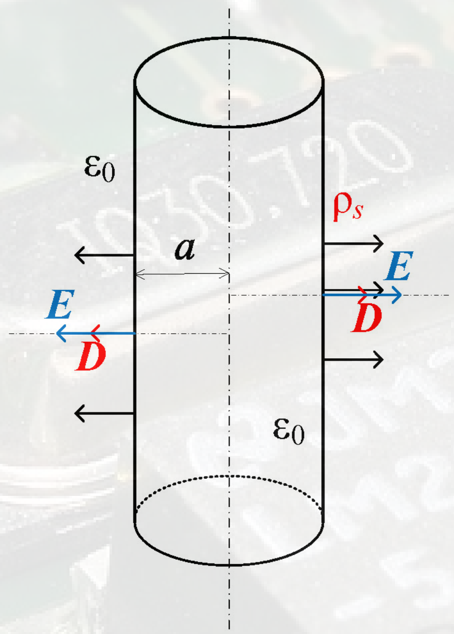
OBS.:

Sursa de câmp electrostatic este un cilindru infinit lung încărcat cu $\rho_s > 0$

Cilindru infinit lung = se neglijează efectul suprafețelor plane, de terminație, ale cilindrului finit.

Liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe suprafața laterală, orientate spre exterior.

Tipul de simetrie utilizat este simetria cilindrică. Pentru analiza la interior se va considera suprafața închisă (Σ_1) forma unui cilindru de rază $r < a$ și înălțime h, iar pentru exterior se va considera suprafața închisă (Σ_2) de forma unui cilindru de rază $r > a$ și înălțime h

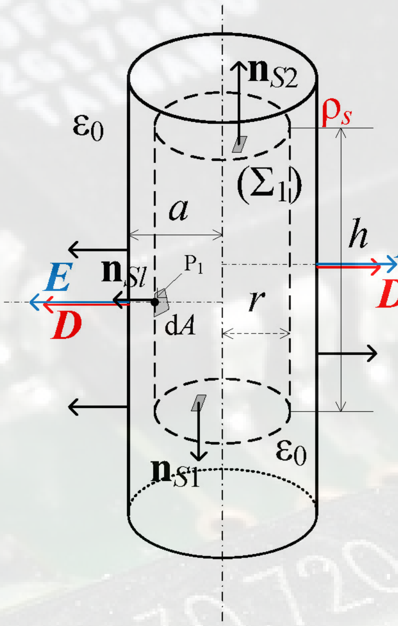


Liniile de câmp electric au o distribuție axială și pleacă de pe suprafața corpului de probă, care este încărcat cu densitate de sarcină electrică $\rho_s > 0$. Deoarece cilindrul este plasat în vid (sau aer), un mediu liniar, omogen și izotrop, vectorii $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{E}$ vor fi colineari, tangenți la liniile de câmp electric.

Se va analiza cazul $r < a$

Se consideră suprafața închisă (Σ_1) de forma unui cilindru, având o rază oarecare $r < a$ și înălțime h, pentru a defini domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric.

Această suprafață închisă este compusă din trei suprafețe deschise: S_1, S_2 reprezentând bazele, respectiv S_l suprafața laterală, ale cilindrului. Astfel domeniul de integrare se poate scrie $\Sigma_1 = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ fiecare suprafață fiind caracterizată de o normală la suprafața respectivă $\mathbf{n}_{S1}, \mathbf{n}_{S2}$ și $\mathbf{n}_{Sl}$. Se poate observa că $\mathbf{n}_{S1} \perp \boldsymbol{D}, \mathbf{n}_{S2} \perp \boldsymbol{D}$. Calculul expresiei inducției electrice și cea a intensității câmpului electric se vor realiza în punctul P_1.



Fluxul electric pentru cazul la interior are expresia:

$$\Psi_{(\Sigma_1)} = \int_{(\Sigma_1)} \boldsymbol{D} \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(S_1)} \boldsymbol{D} \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_{(S_2)} \boldsymbol{D} \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_{(S_l)} \boldsymbol{D} \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(S_l)} |\boldsymbol{D}| \left|\mathbf{n}_{(Sl)}\right| \cos\left(\boldsymbol{D}, \mathbf{n}_{(Sl)}\right) \mathrm{d}A = D \int_{(S_l)} \mathrm{d}A = D 2\pi r h,$$

iar sarcina electrică este nulă pentru că nu există suportul din material conductor în acest caz:

$$q_{\left(D_{\Sigma_1}\right)} = \int_{(\Sigma_1)} \rho_s \mathrm{d}A = 0 \int_{(\Sigma_1)} \mathrm{d}A = 0.$$

Prin aplicarea legii fluxului electric se obține:

$$\Psi_{(\Sigma_1)} = q_{\left(D_{\Sigma_1}\right)} \Rightarrow D 2\pi r h = 0$$

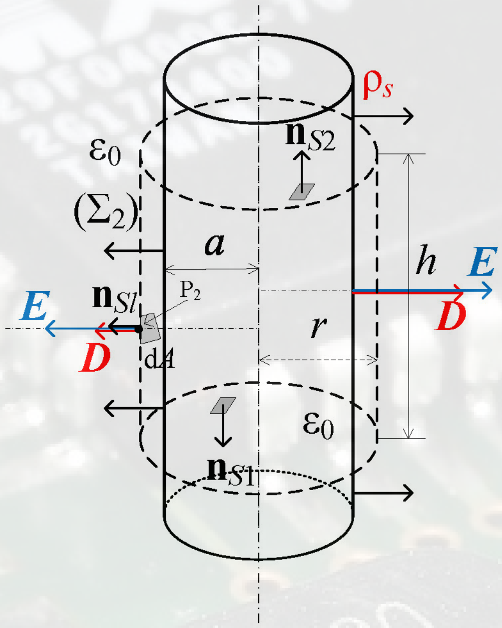
Astfel încât modulele vectorilor ce caracterizează câmpul electric sunt nule:

$$D = 0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = 0.$$

Se va analiza cazul $r > a$

Se consideră suprafața închisă (Σ_2) de forma unui cilindru, având o rază oarecare $r > a$ și înălțime h, pentru a definii domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric. Se va aplica în mod similar ca în cazul interior. Punctul de calcul se consideră P2.



Fluxul electric pentru cazul la exterior are expresia, similar ca în cazul la interior:

$$\Psi_{(\Sigma_2)} = \int_{(\Sigma_2)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(S_1)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_{(S_2)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_{(S_l)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(S_l)} |\boldsymbol{D}|\left|\mathbf{n}_{(Sl)}\right| \cos\left(\boldsymbol{D}, \mathbf{n}_{(Sl)}\right)\mathrm{d}A = D\int_{(S_l)} \mathrm{d}A = D2\pi rh.$$

Pentru calculul expresiei sarcinii electrice din interiorul domeniului $\left(D_{\Sigma_2}\right)$ se va considera că sarcina electrică există în spațiu doar până la limita corpului conductor electric. Astfel domeniul de integrare $\left(D_{\Sigma_2}\right)$ se va împărții în două componente, separate de limita de rază a. Se obține expresia:

$$q_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} = \int_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} \mathrm{d}q = \int_{\left(V_{cilindru}\right)} \mathrm{d}q + \int_{\left(D_{\Sigma_2}\right)\setminus\left(V_{cilindru}\right)} \mathrm{d}q =$$
$$= \int_{\left(A_{lat\_cilindru}\right)} \rho_s \mathrm{d}A + \int_{(\Sigma_2)\setminus\left(A_{lat\_cilindru}\right)} 0\mathrm{d}A = \rho_s \int_{\left(A_{lat\_cilindru}\right)} \mathrm{d}A = \rho_s 2\pi ah.$$

Legea fluxului electric se identifică sub forma:

$$\Psi_{(\Sigma_2)} = q_{\left(D_{\Sigma_2}\right)} \Rightarrow D2\pi rh = \rho_s 2\pi ah,$$

rezultând expresia modulului vectorului inducție electrică:

$$D = \frac{\rho_s a}{r}.$$

Punctul de calcul P_2 se găsește în vid, deci un mediu liniar, omogen și izotrop, ceea ce permite exprimarea modulului intensității câmpului electric, cu ajutorul legii legăturii în câmp electric, sub forma:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_0 r}.$$

3) Un conductor filiform infinit lung, încărcat cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_l > 0$ se află plasat în vid. Să se determine inducția electrică $\boldsymbol{D}$ și intensitatea câmpului electric $\boldsymbol{E}$ determinate de conductor.

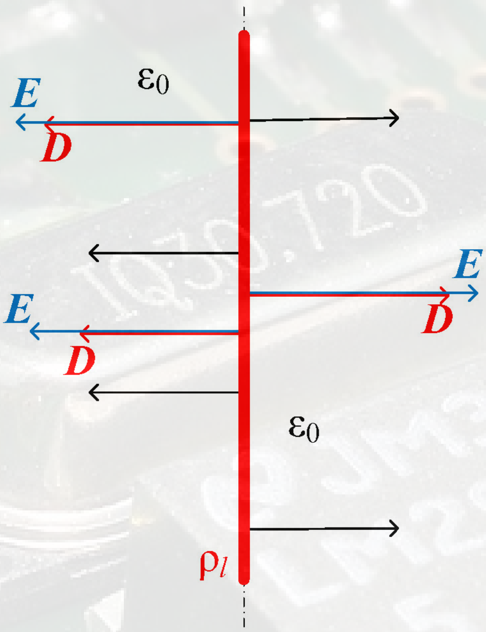
OBS.:

Sursa de câmp electrostatic este un fir infinit lung încărcat cu $\rho_l > 0$

Liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe conductorul filiform, orientate spre exterior.

Tipul de simetrie utilizat este simetria cilindrică. Pentru calculul mărimilor electrice se va considera o suprafața închisă (Σ) forma unui cilindru de rază r și înălțime h

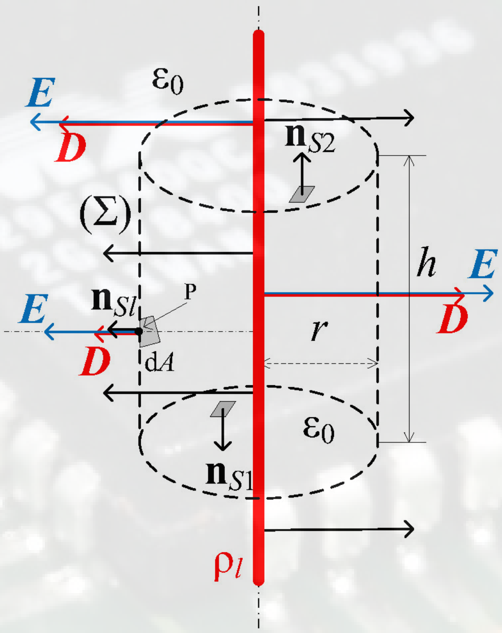
Se poate aplica, de asemenea, formula integralei coulombiene determinată anterior considerând $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.



Liniile de câmp electric au o distribuție axială și pleacă de pe conductorul infinit lung, care este încărcat cu densitate de sarcină electrică $\rho_l > 0$. Deoarece conductorul este plasat în vid (sau aer), un mediu liniar, omogen și izotrop, vectorii $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{E}$ vor fi colineari, tangenți la liniile de câmp electric.

Se consideră suprafața închisă (Σ) de forma unui cilindru, având o rază oarecare r și înălțime h, pentru a definii domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric. Această suprafață închisă este compusă din trei suprafețe deschise: S_1, S_2 reprezentând bazele, respectiv S_l suprafața laterală, ale cilindrului. Astfel domeniul de integrare se poate scrie

$\Sigma_1 = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ fiecare suprafață fiind caracterizată de o normală la suprafața respectivă $\mathbf{n}_{S1}, \mathbf{n}_{S2}$ și $\mathbf{n}_{Sl}$. Rezolvarea se face în mod similar ca în cazul problemei 2 pentru exterior.



$$\Psi_{(\Sigma)} = \int\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int\limits_{(S_1)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(S1)}\mathrm{d}A + \int\limits_{(S_2)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(S2)}\mathrm{d}A \int\limits_{(S_l)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(Sl)}\mathrm{d}A = $$

$$= \int\limits_{(S_l)} |\boldsymbol{D}| \left|\mathbf{n}_{(Sl)}\right| \cos\left(\boldsymbol{D}, \mathbf{n}_{(Sl)}\right) \mathrm{d}A = D \int\limits_{(S_l)} \mathrm{d}A = D 2\pi r h$$

$$q_{(D_\Sigma)} = \int_{(\Sigma)} \rho_l \mathrm{d}l = \rho_l \int_{(Lungime\_cilindru)} \mathrm{d}l = \rho_l h$$

$$\Psi_{(\Sigma)} = q_{(D_\Sigma)} \Rightarrow D 2\pi r h = \rho_l h \Rightarrow D = \frac{\rho_l}{2\pi r}.$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

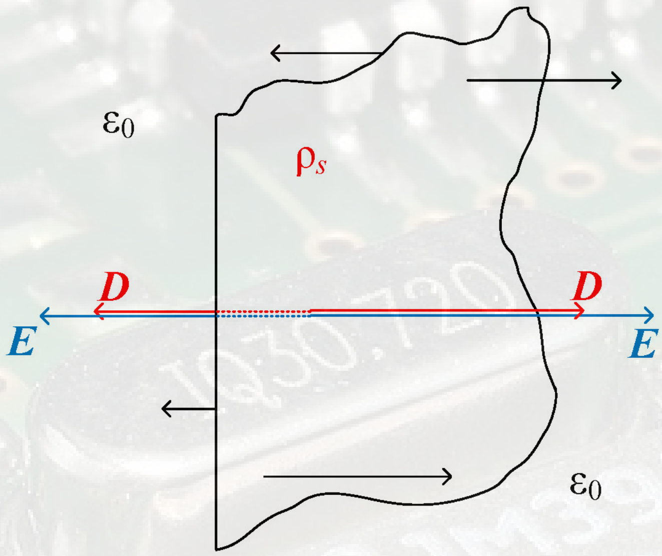
4) Un plan infinit lung, încărcat cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasat în vid. Să se determine inducția electrică $\boldsymbol{D}$ și intensitatea câmpului electric $\boldsymbol{E}$ determinate de plan.

OBS.:

Sursa de câmp electrostatic este un plan infinit lung încărcat cu $\rho_s > 0$

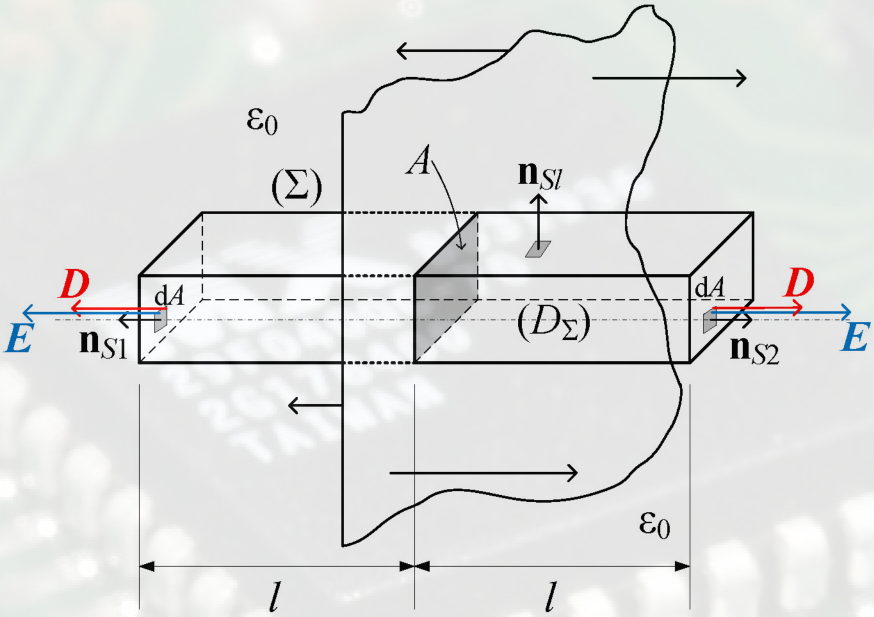
Liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe plan, orientate spre exterior.

Tipul de simetrie utilizat este simetria plan-paralelă. Pentru calculul mărimilor electrice se va considera o suprafața închisă (Σ) de forma unui paralelipiped cu aria secțiunii transversale A și lungime $2l$



Liniile de câmp electric au o distribuție plană și pleacă de pe planul infinit lung, care este încărcat cu densitate de sarcină electrică $\rho_s > 0$. Deoarece planul este plasat în vid (sau aer), un mediu liniar, omogen și izotrop, vectorii $\boldsymbol{D}$ și $\boldsymbol{E}$ vor fi colineari, tangenți la liniile de câmp electric.

Se consideră suprafața închisă (Σ) de forma unui paralelipiped, având o arie a secțiunii transversale A și o lungime $2l$, pentru a definii domeniul de integrare utilizat în aplicarea legii fluxului electric. Această suprafață închisă este compusă din trei suprafețe deschise: S_1, S_2 reprezentând bazele, respectiv S_l suprafața laterală, ale paralelipipedului. Astfel domeniul de integrare se poate scrie $\Sigma_1 = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ fiecare suprafață fiind caracterizată de o normală la suprafața respectivă $\mathbf{n}_{S1}, \mathbf{n}_{S2}$ și $\mathbf{n}_{Sl}$. Se poate observa că $\mathbf{n}_{Sl} \perp \boldsymbol{D}$.



$$\Psi_{(\Sigma)} = \int_{(\Sigma)} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{(S_1)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(S1)}\mathrm{d}A + \int_{(S_2)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(S2)}\mathrm{d}A \int_{(S_l)} \boldsymbol{D}\mathbf{n}_{(Sl)}\mathrm{d}A =$$

$$= 2\int_{(S_1)} |\boldsymbol{D}||\mathbf{n}_{(S1)}|\cos\left(\boldsymbol{D},\mathbf{n}_{(S1)}\right)\mathrm{d}A = 2D\int_{(S_1)} \mathrm{d}A = 2DA.$$

$$q_{(D_\Sigma)} = \int_{(\Sigma)} \rho_s \mathrm{d}A = \rho_s \int_{(Arie\_paralelipiped)} \mathrm{d}A = \rho_s A\,.$$

$$\Psi_{(\Sigma)} = q_{(D_\Sigma)} \Rightarrow 2DA = \rho_s A \Rightarrow D = \frac{\rho_s}{2}\,.$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,.$$

5) Se consideră structura din figură plasată in vid. Aceasta este formată dintr-o sferă de rază b cu permitivitatea electrică relativă ε_r încărcată uniform cu o sarcină electrică având densitatea de volum ρ_v. În interiorul sferei se realizează o cavitate vidată, neîncărcată electric, de raza a $(b > a)$

Considerând metoda superpoziției să se calculeze expresiile inducției electrice $\boldsymbol{D}$ şi ale intensității câmpului electric $\boldsymbol{E}$ în cazurile:

A) $r < a$; B) $a < r < b$; C) $r > b$.

Calcul numeric: $a = 2\,\text{cm}, b = 5\,\text{cm}, \varepsilon_r = 3, \rho_v = 4000\,\mu\text{C}/\text{m}^3$