Capitolul 5
Energii și forțe în câmp electromagnetic

5.2. Forțe în câmp electromagnetic

f) Teoremele forțelor generalizate exercitate în câmp electric

Se consideră un sistem de n conductoare încărcate cu sarcinile q_k şi având potenţialele electrice V_k, situate într-un mediu dielectric, neîncărcat electric, infinit extins.

Configuraţia geometrică a sistemului poate fi caracterizată complet cu ajutorul a p variabile scalare corespunzătoare gradului de libertate ale sistemului. Pentru modificarea unei coordonate generalizate x_j trebuie să acţioneze o componentă a unei forţe generalizate X_j:

$$\mathrm{d}L_j = X_j \mathrm{d}x_j,$$

unde X_j poate fi o forţă, cuplu, tensiune superficială, presiune, iar x_j o lungime, un unghi, o suprafaţă, un volum. Prin însumare se obţine lucrul mecanic elementar al tuturor celor p variabile:

$$\mathrm{d}L = \sum_{j=1}^{p} X_j \mathrm{d}x_j.$$

Pentru a putea încărca n corpuri cu sarcini electrice, acestea trebuie să fie în legătură cu un sistem de surse de tensiune electrică, prin intermediul unor conductoare filiforme (multipol). Puterea debitată de acestea este:

$$P = \sum_{k=1}^{n} V_k i_k = \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_{ext}}{\mathrm{d}t},$$

iar energia elementară primită de multipol se scrie:

$$\mathrm{d}W_{ext} = \sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k.$$

Bilanţul energetic elementar al sistemului este:

$$\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}L = \mathrm{d}W_{ext}.$$

Evoluţia sistemului se poate face fără aport de sarcină electrică din exterior $q_k = \mathrm{ct.}$ sau cu aport de sarcină electrică la valori constante ale potenţialului electric $V_k = \mathrm{ct.}$

Calculul forţelor la sarcină electrică constantă

Dacă $q_k = \text{ct.}$ atunci $\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}L = 0$, iar lucrul mecanic se desfăşoară utilizînd energia internă a sistemului:

$$\mathrm{d}L = -\left(\mathrm{d}W_e\right)_{q_k=\text{ct.}}$$

astfel încât energia electrică se poate exprima în funcție de coordonatele generalizate și sarcinile electrice prezente în sistemul de conductoare sub forma:

$$W_e = W_e\left(x_1,...,x_p \ ; \ q_1...,q_n\right).$$

Componenta elementară a acestei energii, în funcție de mărimile de caracterizare se scrie:

$$\mathrm{d}W_e = \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial W_e}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j,$$

unde s-s considerat $\mathrm{d}q_k = 0$.

Rezulă prima teoremă a forţelor generalizate în câmp electric:

$$X_j = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right)_{q_k=\text{ct.}}.$$

Calculul forţelor la potenţial electric constant

Dacă $V_k = \text{ct.}$, lucrul mcanic elementar exercitat din exterior pentru creşterea energiei sistemului şi lucrul mecanic al forţelor generalizate sunt:

$$\mathrm{d}L_{ext} = -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}q_k\int_{M_\infty}^{M_k}\overline{E}\,\overline{\mathrm{d}l} = \sum_{k=1}^{n}V_k\,\mathrm{d}q_k = \mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty}V_k\,q_k\right) - \sum_{1}^{n}q\mathrm{d}V_k,$$

dar care se mai poate exprima și sub forma:

$$\mathrm{d}L_{ext} = \mathrm{d}L_{\text{int}} + \mathrm{d}W_e = \sum_{j=1}^{p}X_j\,\mathrm{d}x_j + \mathrm{d}W_e.$$

Egalând cele două relații se poate scrie:

$$\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty}V_k\,q_k\right) - \mathrm{d}W_e = \sum_{k=1}^{n}q_k\,\mathrm{d}V_k + \sum_{j=1}^{p}X_j\,\mathrm{d}x_j,$$

unde termenul din dreapta se poate considera drept componenta elementară a *energiei complementare* a sistemului de conductoare, notată $\mathrm{d}W_e^*$, astfel încât rezultă:

$$\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k\right) - \mathrm{d}W_e \;= \mathrm{d}W_e^*.$$

unde se consideră mărimea W_e^* ca fiind *coenergia* sau *energia complementară*.

Aceasta este egală cu: $W_e^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k - W_e$.

Deoarece $V_k = \mathrm{ct.}$ atunci $\mathrm{d}V_k = 0$, astfel încât rezultă $\mathrm{d}W_e^* = \sum\limits_{j=1}^{p} X_j \mathrm{d}x_j$.

Coenergia poate fi exprimată în funcţie de potenţialele electrice şi de coordonatele generalizate asociate cu sistemul de conductoare, sub forma: $W_e^* = W_e^*\left(x_1,...,x_p;V_1,...,V_n\right)$. Relaţia de definiţie se poate scrie sub forma:

$$\mathrm{d}W_e^* \;=\; \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial W_e^*}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_e^*}{\partial V_k}\mathrm{d}V_k,$$

dar, deoarece $\mathrm{d}V_k = 0$, rezultă cea de a doua teoremă a forţelor generalizate în câmp electric:

$$X_j = \left(\frac{\partial W_e^*}{\partial x_j}\right)_{V_k=\mathrm{ct.}}.$$

Pentru mediile liniare $\overline{D} = \varepsilon\,\overline{E}$, rezultă:

$$W_e^* = \sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k \;-\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k \;=\; 2W_e \;- W_e \;= W_e.$$

Observaţii.

1) Într-o stare dată forţele sunt unice

2) Semnul rezultatului unic obţinut indică sensul de variaţie al forţei. Dacă rezultatul este pozitiv, rezultă că forţa acţionează în sensul creşterii coordonatei generalizate.

Aplicaţie. Determinarea forţei de atracţie dintre armăturile unui condensator plan (Fig. 5.18).

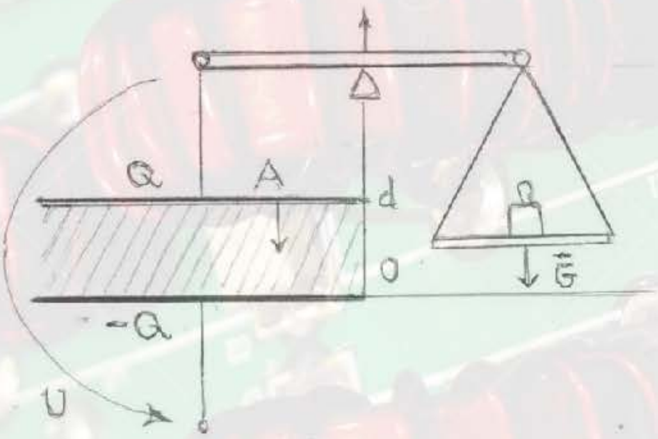

Fig.5.18

Din cele trei forme ale energiei electrice ale unui condensator plan utilizăm forma:

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

în care, pentru cazul unui condensator plan, utilizăm formula $C = \dfrac{\varepsilon A}{d}$, unde A este aria unei plăci, iar d distanţa dintre armături.

La sarcină electrică Q constantă forţa se calculează astfel:

$$F = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \mathrm{d}}\right)_{Q=\mathrm{ct.}} = -\frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{1}{C}\right)\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}Q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right).\frac{\partial C}{\partial d} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon A}{d^2} < 0.$$

La potenţial electric V constant, forţa se calculează astfel:

$$F = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial d}\right)_{V=\mathrm{ct.}} = \frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial d} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon A}{d^2} < 0$$

rezultatul fiind identic cu cel anterior, caracterizând o forţă de atracţie.

g) Teoremele forțelor generalizate exercitate în câmp magnetic

Pentru determinarea energiei şi a forţei în câmp magnetic considerăm un sistem de n bobine cuplate magnetic parcurse fiecare de un curent electric de conducţie i_k $(k = 1,\ldots,n)$. Se consideră că fiecare bobină este conectată local la bornele unui generator ideal de tensiune e_k, prezintă o rezistenţă electrică R_k a conductorului parcurs de i_k ce determină un flux magnetic Φ_k (Fig. 5.19).

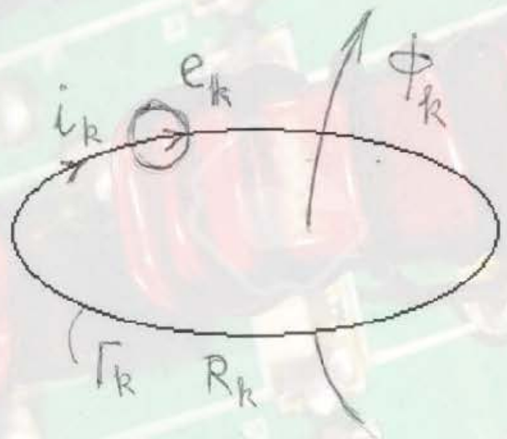

Fig. 5.19

Puterea absorbită de sistem este:

$$P_m = \sum_{k=1}^{n} u_k i_k .$$

Considerând o variație elementară a timpului $\mathrm{d}t$, aplicată relației de mai sus, se obține:

$$u_k \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Phi_k ,$$

$$P_m \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}W_m ,$$

astfel încât rezultă următoarea expresie:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k = \mathrm{d}W_m ,$$

unde $\mathrm{d}W_m$ reprezintă energia magnetică elementară a sistemului de bobine.

Dacă în sistem există p forţe generalizate, notate X_s $(s=1,\ldots,p)$, care efectuează lucru mecanic, atunci în expresia de mai sus, apare un termen adițional, al lucrului mecanic efectuat de aceste forţe:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k = \mathrm{d}W_m + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s,$$

care permite obținerea expresiei energiei magnetice elementare:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k - \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s.$$

Calculul forţelor la flux magnetic constant

Energia magnetică se poate exprima în funcţie de coordonatele generalizate şi de fluxurile magnetice ale sistemului de bobine sub forma:

$$W_m = W_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\, ;\; \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\right),$$

ce permite scrierea componetei elementare sub forma:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial W_m}{\partial x_s} \mathrm{d}\,x_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_m}{\partial \Phi_k} \mathrm{d}\,\Phi_k.$$

Deoarece se consideră că fluxurile magnetice sunt constante, unde $\mathrm{d}\Phi_k = 0$, se poate identifica expresia forţei generalizate la flux magnetic constant:

$$X_s = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_s}\right)_{\Phi=\mathrm{ct.}}.$$

Calculul forţelor la curent electric constant

Se exprimă energia magnetică în funcţe de coordonatele generalizate şi curenţii bobinelor:

$$W_m = W_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\, ;\; i_1, i_2, \ldots, i_n\right).$$

Se consideră expresia diferenţială a produsului $\Phi_k i_k$ sub forma:

$$\mathrm{d}\left(\Phi_k i_k\right) = i_k \mathrm{d}\Phi_k + \Phi_k \mathrm{d}i_k,$$

unde, prin înlocuirea expresiei energiei magnetice elementare obținută anterior, rezultă:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{d}(\Phi_k \, i_k) - \Phi_k \, \mathrm{d}i_k \right] - \sum_{s=1}^{p} X_s \, \mathrm{d}x_s$$

sau, prin asocierea unor termeni, se obține:

$$d\left[\sum_{k-1}^{n} \Phi_k i_k - W_m \right] = \sum_{k-1}^{n} \Phi_k \mathrm{d}i_k + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s .$$

Se va nota cu W_m^* mărimea denumită *coenergie* sau *energia magnetică complementară*, având expresia:

$$W_m^* = \sum_{k-1}^{n} \Phi_k i_k - W_m$$

a cărei componentă elementară este:

$$\mathrm{d}W_m^* = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \mathrm{d}i_k + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s .$$

Aceeași componentă elementară se poate scrie pe baza variabilelor de tip coordonată generalizată x_s și curent electric i_k sub forma:

$$dW_m^* = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial W_m^*}{\partial x_s} \mathrm{d}x_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_m^*}{\partial i_k} \mathrm{d}i_k .$$

Deoarece curentul electric i_k se consideră constant, atunci $\mathrm{d}i_k = 0,$ ceea ce permite, prin egalarea ultimelor două relații, expresia forței generalizate sub forma:

$$X_s = \left(\frac{\partial W_m^*}{\partial x_s} \right)_{i=\mathrm{ct.}} .$$

Aplicaţii:

1) Să se calculeze expresia forţei de interacţiune dintre un fir conductor, rectiliniu, infinit lung şi un cadru conductor dreptunghiular, coplanar cu firul. Conductoarele se consideră parcurse de curenţii de conducţie i_1, respectiv i_2. (Fig. 5.20).

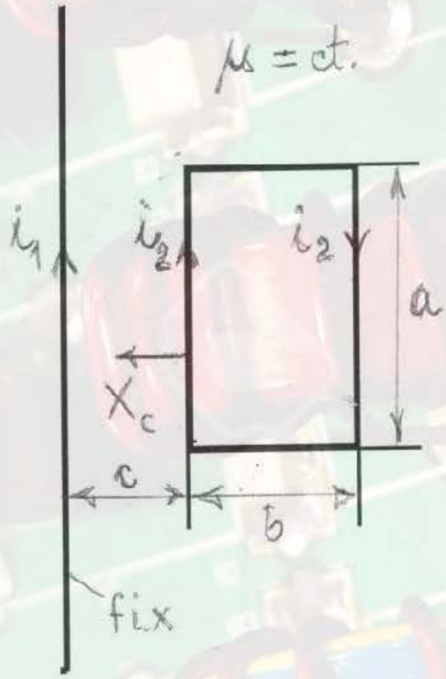

Fig.5.20

S-a demonstrat în cadrul subcapitolului 4.2.g expresia inductivităţii mutuale a geometriei considerate astfel:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right).$$

Energia magnetică din domeniul determinat de geometria analizată este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$$

în care, primii doi termeni sunt constanţi.

Forţa magnetică care acţionează asupra cadrului este:

$$X = \left(\frac{\partial W_m}{\partial c}\right)_{i=\text{ct.}} = \frac{\partial L_{12}}{\partial c} i_1 i_2 = \frac{\mu a}{2\pi} i_1 i_2 \frac{c}{b+c} \cdot \frac{c-b-c}{c^2} =$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi} \frac{ab}{c(b+c)} i_1 i_2 .$$

Forţa acţinează în sensul micşorării coordonatei generale c.

2) Cuplul de interacţine dintre un solenoid de lungime l şi o bobină plată (Fig. 5.21) ambele parcurse de curenţi de conducţie.

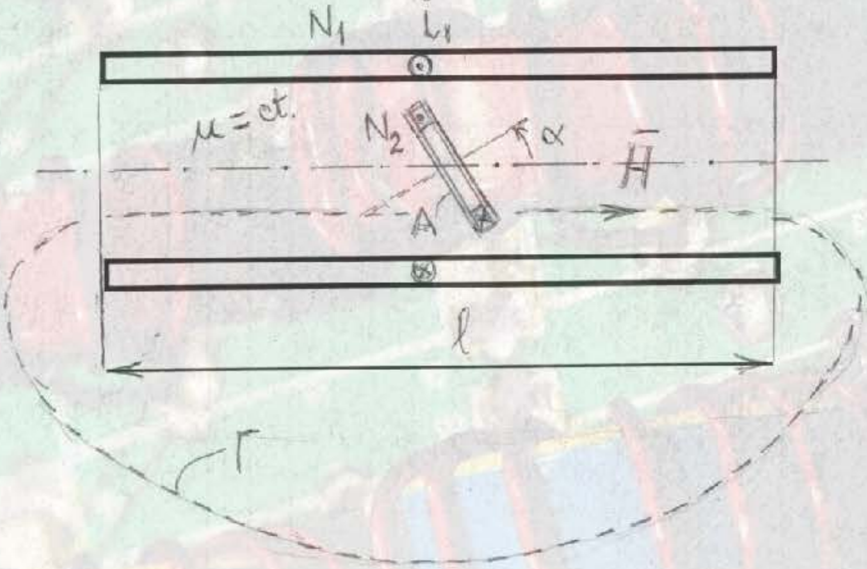

Fig.5.21

În cazul solenoidului expresia inducţiei magnetice este:

$$B = \frac{\mu N_1 i_1}{l}$$

Fluxul magnetic fascicular de cuplaj, considerând $i_2 = 0$, este:

$$\Phi_{f21} = AB\cos\alpha,$$

iar inductivitatea mutuală:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{f21}}{i_1} = \frac{N_2 AB \cos\alpha}{i_1} = \frac{\mu N_1 N_2 A \cos\alpha}{l}.$$

Utilizând notaţia $L_{21\max} = \dfrac{\mu N_1 N_2 A_2}{l}$ relaţia anterioară devine $L_{21} = L_{21\max} \cos\alpha$.

Energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11}\, i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{21}\, i_2\, i_1$$

relaţie în care primii doi termeni sunt constanţi.

Cuplul care acționează asupra bobinei mobile este:

$$C = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right)_{i=ct.} = i_1\, i_2 \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha} = -L_{21\max}\, i_1\, i_2 \sin\alpha < 0.$$

3) Forţa portantă a unui electromagnet cu N spire parcurse de un curent de conducţie de intensitate *i*, asupra unei bare feromagnetice. Electromagnetul are o lungime l şi prezintă un întrefier de grosime δ (Fig. 5.22).

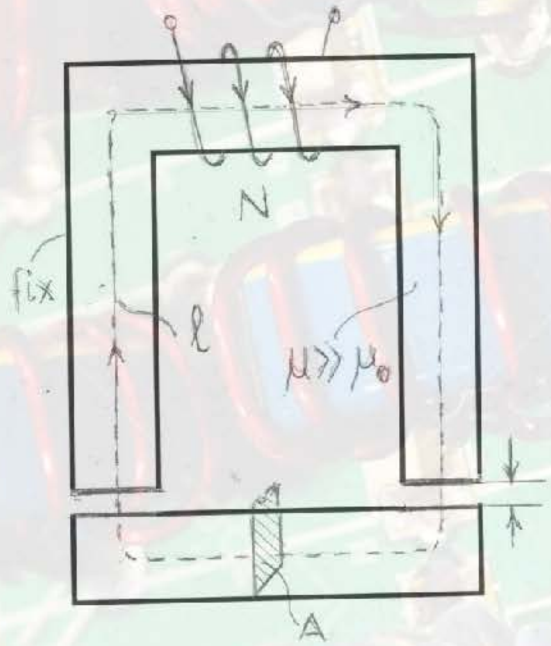

Fig.5.22

Reluctanţa circuitului magnetic format din structura feromagnetică și cele două zone de întrefier este:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} + \frac{2\delta}{\mu_0 A} \approx \frac{2\delta}{\mu_0 A}$$

deoarece $\mu >> \mu_0$ ceea ce implică $\dfrac{l}{\mu A} \ll \dfrac{2\delta}{\mu_0 A}$.

Inductivitatea proprie este:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{\mu_0 A N^2}{2\delta},$$

iar energia magnetică

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4\delta}.$$

Utilizând *a doua teoremă* a forţelor generalizate pentru curent electric constant, forţa de atracţie a armăturii are expresia:

$$X = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right)_{i=ct} = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4}\left(-\frac{1}{\delta^2}\right) = -\frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4\,\delta^2}.$$

Utilizând *prima teoremă* a forţelor generalizate pentru flux magnetic constant, trebuie exprimată energia magnetică sub forma:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L},$$

ceea ce determină expresia forţei magnetice:

$$X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right)_{\Phi=\mathrm{ct.}} = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L^2}\frac{\partial L}{\partial \delta} = \frac{1}{2}\, i^2 \frac{\partial L}{\partial \delta} = -\frac{1}{2}\, i^2 \frac{\mu_0 A N^2}{2\,\delta^2}.$$