Partea VIII-a. ELEMENTELE DE CIRCUIT

Pentru analiza şi sinteza circuitelor electrice este esenţial să fie cunoscute caracteristicile *u-i* ale elementelor de circuit care intră în componenţa acestor circuite Din păcate, teoria circuitelor operează cu o mulţime destul de săracă de elemente de circuit *ideale*: rezistoare liniare, rezistoare neliniare, bobine, condensatoare, etc. Acestea au caracteristici *u-i* ideale care, în realitate, pot fi obţinute doar pentru anumite restricţii de comportare în timp a curenţilor şi tensiunilor bornelor.

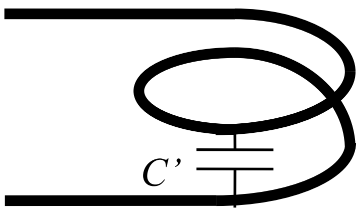

Fig.8.1. Bobină cu efecte capacitive îmtre spire

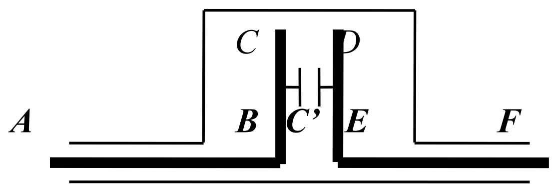

Fig.8.2. Linie microstrip

Vom da în continuare 2 exemple simple. Bobina reală schiţată în Fig.8.1. are o anumită rezistenţă în curent continuu. În regim sinusoidal apare efectul inductiv la frecvenţe joase şi medii, ca apoi, la înaltă frecvenţă, să devină important efectul capacitiv între spirele bobinei. Ipoteze mult simplificatoare sunt făcute pentru a evalua valorile unor condensatoare plasate între spire. Totodată componentele rezistive şi inductive se modifică cu frecvenţa, deoarece se modifică repartiţia câmpului electromagnetic si a densitatii de current in mediul conductor. În domeniul timp, răspunsul la excitaţie de tensiune (admitanţă operaţională) include comportarea bobinei reale la întreg spectrul de frecvenţe, mai ales dacă valorile tensiunilor şi curenţilor au variaţii rapide. Lucrurile se complică mult dacă bobina are şi un miez feromagnetic. Determinarea caracteristicii reale *u-i* necesită rezolvarea unei complicate probleme de câmp electromagnetic în regim variabil sau sinusoidal.

Al doilea exemplu simplu, schiţat în Fig.8.2., poate fi o structură de microunde. Justificarea comportării acestor structuri se face admiţând existenţa unui circuit echivalent în care elementele de circuit se calculează cu mari aproximaţii. De exemplu, porţiunile AB şi EF sunt considerate linii microstrip quasi-TEM (infinit lungi), iar pentru porţiunea BCDE se adaugă capacitatea C' obţinută cu multe ipoteze simplificatoare. De multe ori se alege calea măsurătorilor şi se modifică intuitiv dimensiunile structurii până la obţinerea comportării dorite. Sau, tot cu ajutorul măsurătorilor, se determină parametrii elementelor dintr-o schemă echivalentă, definită intuitiv. Oricum, rezultatele sunt valabile într-o mică plajă de frecvenţe. În realitate structura prezentată este sediul unei complicate repartiţii de câmp electromagnetic şi obţinerea caracteristicii *u-i* pentru această structură necesită rezolvarea problemei de câmp. Frecvenţele de rezonanţă necesită de asemenea rezolvarea unei complicate probleme de valori proprii.

Este evident că în afara elementelor uzuale de circuit, se mai poate imagina o uriaşă varietate de noi elemente de circuit (cu efect de câmp), având posibilitatea plasării diferitelor medii, cu diferite geometrii, în interiorul structurii.

Cu 40 de ani în urmă, R. Răduleţ, Al. Timotin şi A. Ţugulea au definit elementul electromagnetic de circuit ca o structură în care condiţiile de frontieră ale câmpului electromagnetic permit definirea bornelor, a curenţilor şi tensiunilor bornelor / R.Radulet, Al.Timotin, A.Tugulea, "The electromagnetic field of electric lines with losses", *Rev.Roum. Sci.Techn. - Elth.et Energ*., Tome 15, no.3, 1970, p.351-371, Al.Timotin, "Elementul electromagnetic de circuit", *St.Cerc. Electrotehn. Energ.,* 1971, p.341-356/. Pentru elementul electromagnetic de circuit sunt valabile teorema I a lui Kirchhoff şi teorema transferului puterii la borne. Elementele electromagnetice de circuit pot fi conectate pentru a obţine noi elemente de circuit sau circuite electrice. Trebuiesc adăugate condiţiile de circulaţie a intensităţii câmpului electric pe buclele ce apar prin conectare (teorema a II-a a lui Kirchhoff). Maxwell chiar a aratat necesitatea înlocuirii curentului electric cu curentul total în teoria circuitelor /James Clerk Maxwell, *"A Treatise on Electricity and Magnetism",* 1873./. Lucrarea a avut şi are încă o valoare extraordinară, fiind încă unică în lume. Ea constituie o lucrare de referinţă care revoluţionează teoria circuitelor electrice. Ele apar ca structuri de câmp.

Din păcate, determinarea caracteristicii *u-i* necesită rezolvarea unei probleme de câmp foarte complicate: configuraţii 3-D, regim variabil, medii neomogene, condiţii de frontieră specifice elementelor de circuit, diferite de condiţiile de frontieră impuse în problemele de câmp obişnuite.

Fie o structura de medii Ω mărginită de suprafaţa $\partial\Omega$ care au proprietăţile (Fig.8.3):

(α) există n+1 suprafeţe S_k, numite borne, unde componenta tangenţială a lui **E** este nulă:

$$\mathbf{E}_t = 0 \ \ pe\, S_k \subset \partial\Omega,\ \ k = 1,2,...,n+1;$$

borna $n+1$ se mai numeste şi bornă de masă.

(β) pe orice curbă inchisă $\Gamma \subset \partial\Omega$ circulaţia lui **E** este nulă:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad (\forall)\Gamma \subset \partial\Omega$$

(γ) componenta normală a lui *rot***H** este nulă în afara suprafeţelor S_k:

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{H} = 0 \quad pe\; S_0 = \partial\Omega - \bigcup_{k=1}^{n+1} S_k$$

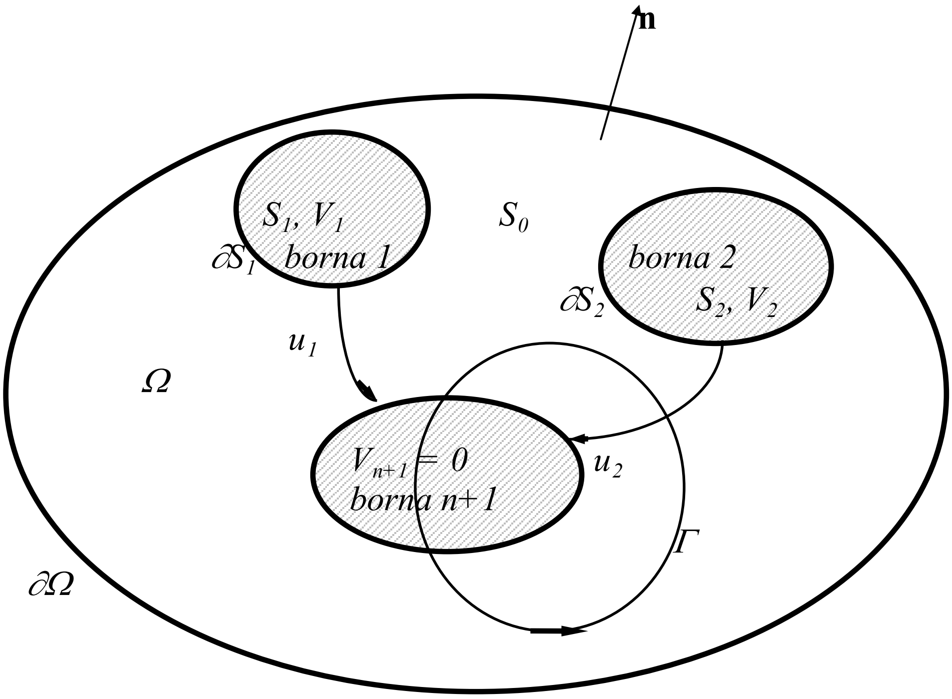

Fig. 8.3. Elementul de circuit

Observaţii. 1) Din condiţia (β) rezultă că putem defini potenţialul electric V pe $\partial\Omega$ astfel încât pe $\partial\Omega$:

$$\mathbf{E}_t = (-\,gradV)_t$$

2) Din condiţia (α) rezultă că bornele au potenţiale constante. Dacă alegem pentru masă potenţialul nul, atunci potenţialele bornelor sunt egale cu tensiunile lor faţă de masă.

3) Din condiţia (γ) şi din legea circuitului magnetic rezultă că pe S_0 componenta normală a densităţii totale de curent este nulă:

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)=0$$

4) Curentul total traversează doar bornele :

$$i_{T_k} = \oint_{\partial S_k} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{S_k}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathbf{n}\, dS$$

În domeniul Ω sunt valabile ecuaţiile (1.1)÷(1.5) ale câmpului electromagnetic:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ rot\mathbf{H} = \mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\ \mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}\,.$$

Consecinţe. I. *Prima teoremă a lui Kirchhoff:* suma curenţilor totali ai bornelor este nulă.

Demonstraţie. Deoarece $div(rot\mathbf{H})=0$, din formula lui Gauss rezultă:

$$\oint_{\partial\Omega} rot\mathbf{H}\cdot \mathbf{n}dS = 0$$

Ţinand cont de condiţia (γ) si de observaţiile 3) si 4), rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n+1} i_{T_k} = 0 \qquad \blacksquare$$

Se observă că prima teoremă a lui Kirchhoff este verificată de curenţii totali, nu de curenţii de conducţie. Această formă poate include si curenţii hertzieni $i_{H_k} = \int_{S_k}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\, dS$, care sunt importanţi atunci cand suprafaţa S_k trece prin dielectricul unui condensator. **Forma primei teoreme a lui Kirchhoff, cunoscută în teoria circuitelor, este valabilă atunci când curentul hertzian este nul.** Aşa cum am arătat la începutul primei părţi, în cazul corpurilor conductoare, curentul hertzian este neglijabil faţă de cel de conducţie $i_k = \int_{S_k} \mathbf{J}\cdot \mathbf{n}\, dS$ si prima teoremă a lui Kirchhoff poate fi scrisă doar pentru acesti curenţi:

$$\sum_{k=1}^{n+1} i_k = 0$$

II. *Teorema puterii transferate la borne:* puterea cedată la borne este:

$$P = \sum_{k=1}^{n} u_k i_{T_k} \tag{8.1}$$

Demonstraţie. Puterea transferată prin frontiera $\partial\Omega$, în afara elementului de circuit este dată de fluxul vectorului Poynting:

$$P = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot \mathbf{n} dS$$

Ţinand cont de observaţia 1), relaţia de mai sus devine:

$$P = -\oint_{\partial\Omega} (gradV \times \mathbf{H})\cdot \mathbf{n} dS$$

Deoarece $\nabla\times(V\mathbf{H}) = Vrot\mathbf{H} + gradV \times \mathbf{H}$ si deoarece integrala pe o suprafaţă închisă a unui *rotor* este nulă, relaţia de mai sus devine:

$$P = \oint_{\partial\Omega} Vrot\mathbf{H}\cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^{n+1} V_k \int_{S_k} rot\mathbf{H}\cdot \mathbf{n} dS$$

suprafeţele S_k fiind echipotenţiale. Ţinand cont de observaţia 4) si de prima teoremă a lui Kirchhoff , avem:

$$P = \oint_{\partial\Omega} Vrot\mathbf{H}\cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^{n+1} V_k i_{T_k} = \sum_{k=1}^{n} (V_k - V_{n+1}) i_{T_k} = \sum_{k=1}^{n} u_k i_{T_k} \qquad \blacksquare$$

Se observă că teorema puterii transferată la borne este verificată si ea **tot de curenţii totali, nu de curenţii de conducţie**. În cazul corpurilor conductoare, cand curentul hertzian este neglijabil faţă de cel de conducţie teorema puterii transferată la borne capătă forma cunoscută în teoria circuitelor, verificată de curenţii de conducţie:

$$P = \sum_{k=1}^{n} u_k i_k$$

III. *Teorema de unicitate.* Dacă se dau tensiunile bornelor u_k (sau curenţii totali i_{T_k}) şi valorile iniţiale ale inducţiilor electrice şi magnetice $\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0$, atunci câmpul electromagnetic este unic determinat în Ω şi deci sunt unic determinaţi curenţii totali ai bornelor (sau tensiunile bornelor).

Demonstraţie. Fie 2 câmpuri electromagnetice care verifică condiţiile din teoremă şi fie ($\mathbf{B}_d$, $\mathbf{H}_d$, $\mathbf{D}_d$, $\mathbf{E}_d$, $\mathbf{J}_d$) câmpul diferenţă. La fel ca la punctul anterior, se arată că:

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_d) \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^{n} u_{d_k} i_{dT_k}$$

Totodată, la fel ca la demonstraţia teoremei de unicitate 1.1 de la Par.2, avem:

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_d \times \mathbf{H}_d) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_d}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_d}{\partial t} dv + \int_{\Omega_c} \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{J}_d dv$$

Integrând în timp rezultă:

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{n} u_{d_k} i_{dT_k} \right) d\tau = \int_0^t \int_{\Omega_c} \sigma (\mathbf{E}_d)^2 dv dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{D}_d(t))^2}{\varepsilon} dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{B}_d(t))^2}{\mu} dv$$

(1.61)

Dacă tensiunile bornelor sau curenţii totali ai bornelor sunt nuli, atunci expresia (1.61) este nulă si egalitatea poate avea loc doar dacă $\mathbf{D}_d = 0$ si $\mathbf{B}_d = 0$, iar din relatiile (1.3), (1.4), (1.5) rezulta ca si $\mathbf{E}_d = 0$, $\mathbf{H}_d = 0$, $\mathbf{J}_d = 0$ în întreg domeniul Ω. ■

Din teorema de unicitate rezultă că, la condiţii iniţiale date, este bine definită relaţia *u-i* la bornele elementului de circuit.

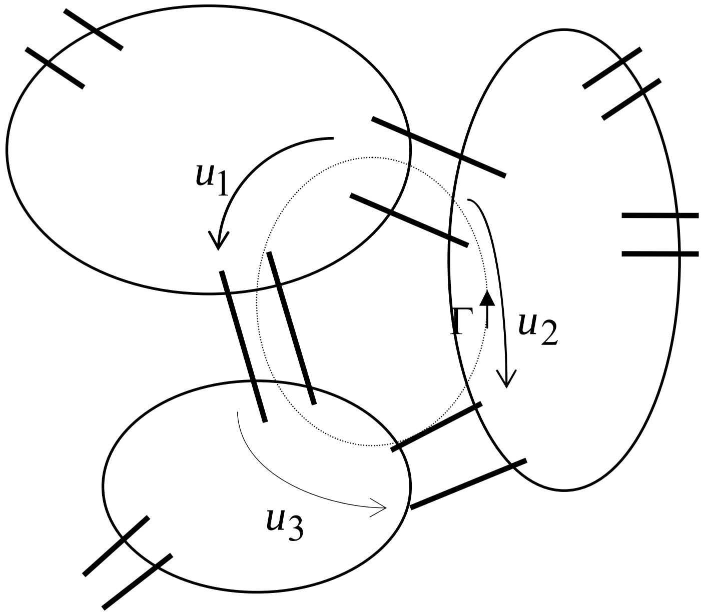

Fig.8.4. Conectarea elementelor de circuit

IV. *Conectarea elementelor de circuit.* Este important ca prin conectarea elementelor de circuit să se poată obţine noi elemente de circuit sau circuite electrice (Fig.8.4). Suprafaţa ce rezultă din reuniunea suprafeţelor elementelor de circuit componente îndeplineşte condiţiile (α) şi (γ) dar nu îndeplineşte condiţia (β). Există curbe ce înconjoară holurile nou apărute (vezi Γ în figura 1.7) pe care trebuie impusă condiţia (β):

$$u_1 + u_3 - u_2 = 0 \tag{8.2}$$

care este de fapt **a doua teoremă a lui Kirchhoff.**

Relaţia (8.2) este valbilă dacă fluxul magnetic pe suprafaţa mărginită de curba Γ este invariabil în timp.

Regimul sinusoidal

În cazul regimului sinusoidal al elementelor de circuit, se folosesc imaginile în complex ale mărimilor campului electromagnetic. Condiţiile de frontieră (α), (β), (γ) sunt verificate de imaginile în complex ale campului. Observaţiile si consecinţele prezentate mai sus răman valabile si pentru imagnile în complex. Apar diferenţe privind teorema puterii transferate la borne si a teoremei de unicitate.

Teorema puterii complexe transferate la borne: puterea completă cedată la borne este:

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k \underline{I}_{T_k}^{*} \tag{8.3}$$

Demonstraţie. Puterea complexă transferată prin frontiera $\partial\Omega$, în afara elementului de circuit este dată de fluxul vectorului Poynting complex (Par.7.):

$$\underline{P}_{c\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \left(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^{*}\right) \cdot \mathbf{n} dS$$

Urmand calea de la demonstraţia puterii instantanee transferate la borne, rezultă:

$$\underline{P}_{c\partial\Omega} = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k \underline{I}_{T_k}^{*}$$

care este chiar puterea complexă $\underline{S}$ cunoscută din teoria circuitelor. ■

Ţinand cont de relaţia (1.56), rezultă că puterea complexă absorbită de elementul de circuit este:

$$-\underline{S} = j\omega\left(\int_{\Omega} \mu H^2 dv - \int_{\Omega} \varepsilon E^2 dv\right) + \int_{\Omega_c} \sigma E^2 dv \tag{8.4}$$

Deci puterea activă absorbită de elementul de circuit este dată de pierderile prin conducţie:

$$P = \mathrm{Re}(-\underline{S}) = \int_{\Omega_c} \sigma E^2 dv \tag{8.5}$$

Se poate da o interpretare si puterii reactive: este proporţională cu valoarea medie a energiei campului magnetic minus valoarea medie a energiei campului electric, factor de proporţionalitate fiind pulsaţia:

$$Q = \mathrm{Im}(-\underline{S}) = \omega\left(\int_{\Omega} \mu H^2 dv - \int_{\Omega} \varepsilon E^2 dv \right) \tag{8.6}$$

Ca urmare, atunci cand valoarea medie a energiei campului magnetic este mai mare de cat cea a campului electric, elementul de circuit este inductiv. Daca inegalitatea este inversă, atunci elementul de circuit este capacitiv. Elementul de circuit se află la rezonanţă cand Q=0, deci cand cele două valori medii ale energiilor sunt egale.

Teorema de unicitate. Dacă se dau tensiunile bornelor $\underline{U}_k$ (sau curenţii totali $\underline{I}_{T_k}$), atunci câmpul electromagnetic este unic determinat în corpurile conductoare Ω_c şi deci sunt unic determinaţi curenţii totali ai bornelor (sau tensiunile bornelor).

Demonstraţie. Este asemănătoare cu cea de la elementele de circuit în regim variabil:

$$\oint_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}}_d \times \underline{\mathbf{H}}_d^*) \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_{d_k} \underline{I}_{dT_k}^*$$

La fel ca la demonstraţia teoremei 1.2. de la Par.5, avem:

$$\oint_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}}_d \times \underline{\mathbf{H}}_d^*) \cdot \mathbf{n} dS = j\omega\left(\int_{\Omega} \mu H_d^2 dv - \int_{\Omega} \varepsilon E_d^2 dv \right) + \int_{\Omega_c} \sigma E_d^2 dv = 0 \tag{8.7}$$

Rezultă unicitatea mărimilor campului electromagnetic din domeniul conductor Ω_c. ■

Dacă întreg mediul este izolant, atunci unicitatea nu mai este asigurată. Putem avea mai multe soluţii (de ex. de amplitudini diferite) dacă elementul de circuit se află la rezonanţă.