Capitolul 5
Energii și forțe în câmp electromagnetic

5.2. Forțe în câmp electromagnetic

a) Teorema localizării forțelor exercitate în câmp electromagnetic

În orice sistem format din corpuri în interacțiune cu câmpul electromagnetic, se dezvoltă din partea acestuia din urmă anumite forțe pe care le numim electromagnetice. Forțele exercitate asupra corpurilor depind numai de mărimile de stare electrică și magnetică ale corpurilor și se anulează odată cu dispariția câmpului. Câmpul fiind localizat în spațiu, forțele de asemenea sunt distribuite spațial.

Densitatea de volum a forței electromagnetice este:

$$\overline{f} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta v} = \frac{\delta \overline{F}}{\delta v} = \frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}v},$$

iar forța din întregul spațiu considerat D_Σ este $\overline{F} = \int_\Sigma \overline{f}\,\mathrm{d}v + \overline{F}_\Sigma,$

în care $\overline{F}_\Sigma$ este forța de natura unor tensiuni, numite tensiuni maxwelliene exercitate asupra unor porțiuni ale suprafeței Σ, atunci când acestea constituie suprafețe de discontinuitate pentru proprietățile câmpului. Ca efect al interacțiunii câmpului cu corpurile, acestea se pot deplasa sau deforma.

Pentru mediile liniare, izotrope:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}\ ,\ \varepsilon = \varepsilon\left(\overline{r}, \tau\right)$$

$$\overline{B} = \mu \overline{H},\ \ \mu = \mu\left(\overline{r}, \tau\right),$$

unde τ este densitatea de masă $\tau = \tau\left(\overline{r}, t\right)$.

Ecuațiile Maxwell-Hertz sunt următoarele:

$$\mathrm{rot}\ \overline{H} = \overline{J} + \frac{\mathrm{d}_s \overline{D}}{\mathrm{d}t} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{v}\rho_v + \mathrm{rot}\left(\overline{D} \times \overline{v}\right)$$

$$\mathrm{rot}\ \overline{E} = -\frac{\mathrm{d}_s \overline{B}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\left(\overline{v} \times \overline{B}\right).$$

Bilanțul energetic elementar pentru un domeniu infinit extins este $-\dfrac{dW}{dt} = P_j + P_{mec}$

sau,

$$-\int_{D_\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D} + \frac{1}{2}\overline{H}\,\overline{B}\right) = \int_{D_\infty} \overline{E}\,\overline{J}\,\mathrm{d}v + \int_{D_\infty} \overline{f}\,\overline{v}\,\mathrm{d}v$$

în care, densitatea de forță $\overline{f}$ are două componente, una electrică și una magnetică $\overline{f} = \overline{f}_e + \overline{f}_m$.

Aceste componente au următoarele expresii:

$$\overline{f}_e = \rho_v \overline{E} - \frac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}E^2 \tau \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right) - \overline{D}\times \operatorname{rot}\overline{E}$$

$$\overline{f}_m = -\frac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}H^2 \tau \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) - \overline{B}\times \operatorname{rot} H\,,$$

$\overline{f}_e^{\,'} = \rho_v \overline{E}$ este densitatea de volum a forței exercitată asupra unui corp încărcat plasat în câmp electric,

$\overline{f}_e^{\,''} = -\dfrac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon$ și $\overline{f}_m^{\,''} = -\dfrac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu$ (Fig 5.09 și 5.10) sunt densități de volum ale forțelor care acționează asupra corpurilor cu ε si μ neomogene:

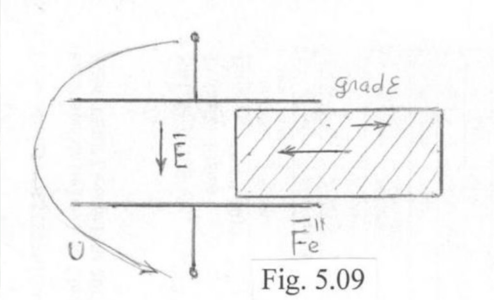

Fig. 5.09

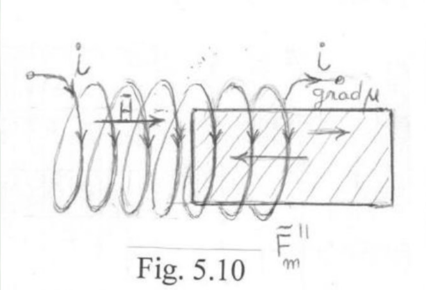

Fig. 5.10

$\overline{f}_{es} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}E^2\tau\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right)$ și $\overline{f}_{ms} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}H^2\tau\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$ sunt densități de volum ale forțelor de electrostricțiune și magnetostricțiune

$$\overline{f}'''_e = -\overline{D}\times\operatorname{rot}\overline{E} = \overline{D}\times\frac{\mathrm{d}_s\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\overline{f}'''_m = -\overline{B}\times\operatorname{rot}\overline{H} = -\overline{B}\times\left(\overline{J}+\frac{\mathrm{d}_s\overline{D}}{\mathrm{d}t}\right) = \overline{J}\times\overline{B} + \frac{\mathrm{d}_s\overline{D}}{\mathrm{d}t}\times\overline{B}$$, în care notăm

$$\overline{f}'_m = \overline{J}\times\overline{B} \quad \text{și} \quad \overline{f}''_m = \frac{\mathrm{d}_s\overline{D}}{\mathrm{d}t}\times\overline{B}.$$

Densitățile de forță $\overline{f}'''_e$ și $\overline{f}''_m$ corespund variației în timp a unei forme particulare de impuls numit *impuls electromagnetic*:

$$\overline{f}''' = \overline{f}'''_e + \overline{f}''_m = \frac{\mathrm{d}_s\left(\overline{D}\times\overline{B}\right)}{\mathrm{d}t},$$

adică derivata substanțială a unei mărimi notate cu $\overline{g} = \overline{D}\times\overline{B}$ reprezentând densitatea de volum a impulsului electromagnetic. (Lebedev a arătat presiunea exercitată de lumină asupra corpurilor opace.)

b) Forțe exercitate în câmp electric asupra unor corpuri încărcate electric

Un caz este cel al unui corp încărcat cu o densitate ρ_v a sarcinii electrice plasat într-un câmp electric exterior $\overline{E}$. Densitatea de volum a forței electrice și forța electrică sunt:

$$\overline{f}_e' = \rho_v \overline{E} \quad ;$$

$$\overline{F}_e = \int_{D_\Sigma} \overline{f}_e' \, \mathrm{d}v = \int_{D_\Sigma} \rho_v \overline{E} \, dv = \overline{E} \int_{D_\Sigma} \rho_v \, \mathrm{d}v = q \overline{E} .$$

Un alt caz este cel a două sarcini punctuale q_1 și q_2 plasate într-un mediu liniar, izotrop și omogen (Fig. 5.11).

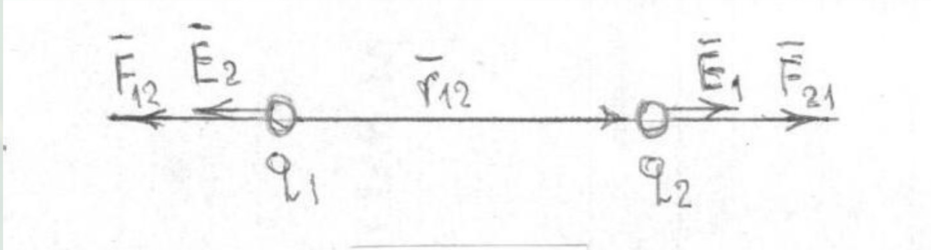

Fig. 5.11

Forța care acționează asupra corpului cu sarcina q_2 plasat în câmpul

$$\overline{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1}{r_{12}^2} \overline{u}_{12}$$ al primului corp este

$$\overline{F}_{21} = q_2 \overline{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \overline{u}_{12} \quad \text{cu} \quad \overline{u}_{12} = \frac{\overline{r}_{12}}{r_{12}} .$$

Analog rezultă: $$\overline{F}_{12} = q_1 \overline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \left(-\overline{u}_{12} \right) .$$

O altă problemă este cea a determinării lucrului mecanic efectuat pentru deplasarea unui mic corp încărcat, plasat în câmp electric (Fig. 5.12).

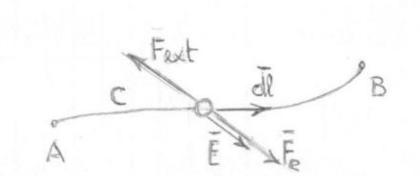

Fig. 5.12

Lucrul mecanic efectuat de forța exterioară de-a lungul curbei C între punctele A și B ale curbei este:

$$L = \int_{A,(C)}^{B} \overline{F}_{ext} \overline{\mathrm{d}l} = -\int_{A,(C)}^{B} \overline{F}_{e} \overline{\mathrm{d}l} = -q \int_{A,(C)}^{B} \overline{E} \overline{\mathrm{d}l} = -q\, u_{AB}$$

c) Forța exercitată de un câmp magnetic asupra conductoarelor parcurse de curenți

Se consideră un tronson conductor cu o arie a secțiunii continuu variabilă (Fig. 5.13).

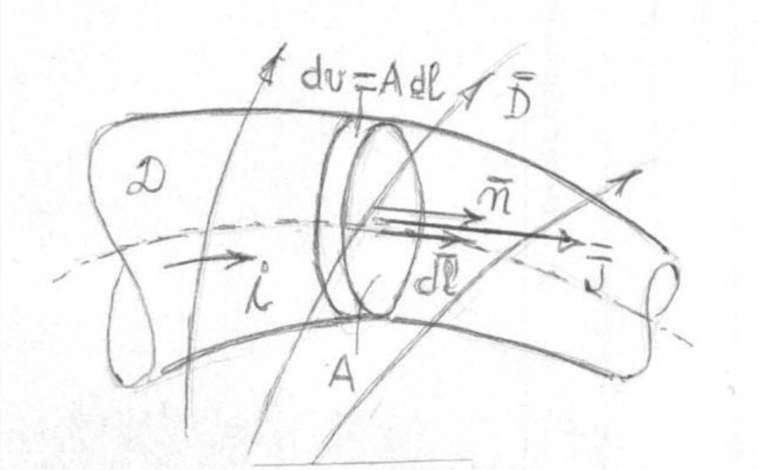

Fig. 5.13

Folosind notațiile din figură se integrează densitatea de volum a forței magnetice $\overline{f}_m = \overline{J} \times \overline{B}$ observând că $\overline{d\,l} \uparrow\uparrow \overline{n} \uparrow\uparrow \overline{J}$ se obține:

$$\overline{F}_m = \int_D \overline{f}_m \mathrm{d}\,v = \int_D \left(\overline{J} \times \overline{B}\right) \mathrm{d}v = \int_D \left(\overline{J} \times \overline{B}\right) A\left(\overline{n}\,\overline{\mathrm{d}l}\right) = \int_D \left(\overline{d\,l} \times \overline{B}\right) A\left(\overline{n}\overline{J}\right) = i \int_C \overline{\mathrm{d}l} \times \overline{B}$$

numită *forța Laplace*, expresii în care s-au făcut înlocuirile: $\overline{n}\ \overline{J} = J$, $J\,A = i$, $\mathrm{d}\,v = A\left(\overline{n}\overline{\mathrm{d}\,l}\right)$.

În cazul particular al unei porțiuni de lungime l dintr-un conductor subțire rectiliniu foarte lung parcurs de un curent de conducție i (Fig. 5.14)

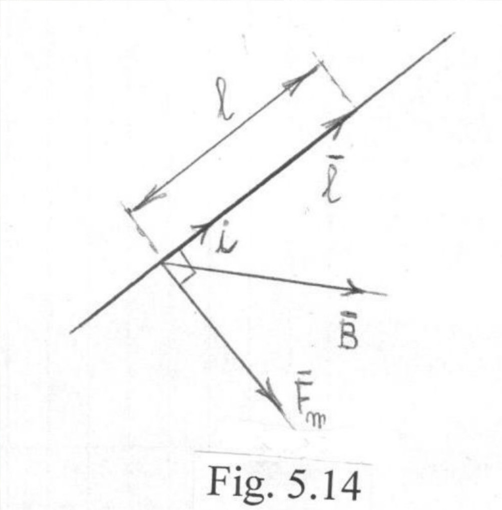

Fig. 5.14

și plasat într-un câmp magnetic omogen de inducție $\overline{B}$ forța care acționează asupra porțiunii este:

$$\overline{F}_m = i\left(\overline{l} \times \overline{B}\right) = i\,\overline{l} \times \overline{B}.$$

Se consideră acum două conductoare filiforme, rectilinii, străbătute de curenți electrici de conducție, plasate într-un mediu liniar, izotrop omogen și infinit extins. (Fig. 5.15). Se cere să se determine forța Laplace dintre conductoare.

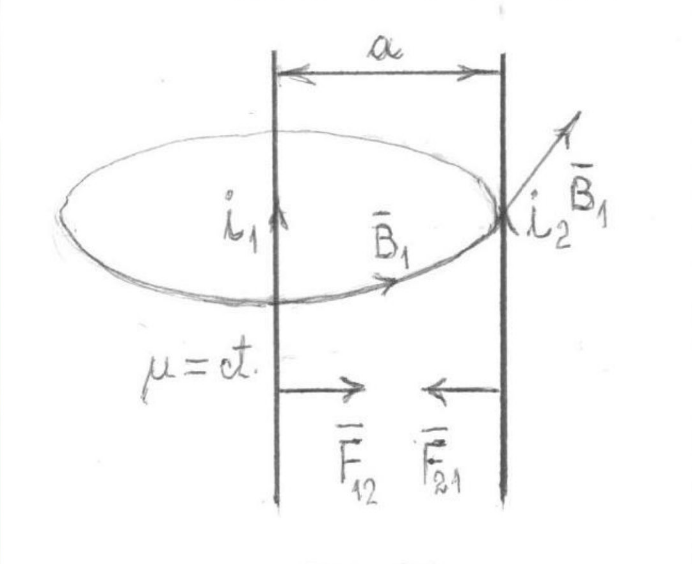

Fig. 5.15

Se obține:

$$F_{21} = i_2 l\, B_1 = i_1\, l\, \frac{\mu i_1}{2\pi a} = \mu\, l\, \frac{i_1 i_2}{2\,\pi\, a}.$$

d) Electrostricțiunea

Se numește *efect electrostrictiv* sau *piezoelectric direct* efectul de deformare a unui dielectric introdus într-un câmp electric. Efectul rezistiv *invers* constă în polarizarea a dielectricului supus unei deformări mecanice. Densitatea de volum a forței de electrostricțiune este:

$$\overline{f}_{es} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right),$$

în care ε depinde de densitatea de masă.

Efectul electrostrictiv are loc și în cazul unor dielectrici neîncărcați electric și omogeni fizic, pentru care permitivitatea nu variază cu natura dielectricului:

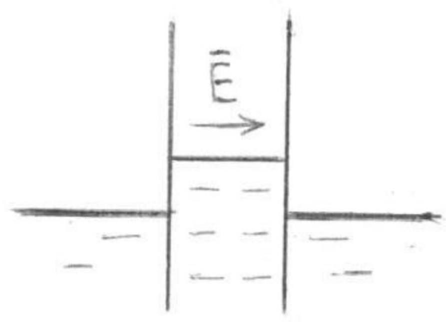

Fig. 5.16

$$\overline{f}_e = -\frac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\,\varepsilon + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}E^2\tau\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}E^2\frac{d\varepsilon}{d\tau}\mathrm{grad}\,\tau + \tau\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{1}{2}E^2\frac{d\varepsilon}{d\tau}\mathrm{grad}\,\tau$$

$= \mathrm{grad}\,p \quad \int_{p_0}^{p}\frac{1}{\tau}\mathrm{d}p = \frac{1}{2}E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}$; p_0 este presiunea în absența câmpului.

Integrând primul membru se obține $\quad p - p_0 = \frac{1}{2}\tau E^2\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}$.

În cazul lichidelor care sunt incompresibile $\tau = \mathrm{const.}$

În cazul gazelor presupunem că este valabilă ecuația de stare a gazului perfect:

$$pV = \frac{m}{M} R\,T,$$

în care M - este masa molară a gazului , R - constanta universală a gazelor, T - temperatura absolută. Avem:

$$\tau = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}; \qquad \int_{p_0}^{p} \frac{RT}{pM} \mathrm{d}\,p = \frac{1}{2} E^2 \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}; \qquad \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}\,p}{p} = \frac{1}{2} E^2 \frac{M}{RT} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau},$$

de unde rezultă

$$p = p_0 \exp\left(\frac{1}{2} E^2 \frac{M}{RT} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau} \right).$$

e) Magnetostricțiunea

Efectul magnetostrictiv *direct* constă în deformarea unui corp introdus într-un câmp magnetic exterior. Efectul magnetostrictiv *invers* (efectul Villari) constă în magnetizarea corpului supus unei deformări mecanice. Magnetostricțiunea devine importantă la corpurile caracterizate prin comportament magnetic în special datorită structurii de domenii magnetice.

Aplicații: frecvențmetrele mecanice cu lamele vibrante, (fig.5.17) traductoarele ultrasonice etc.

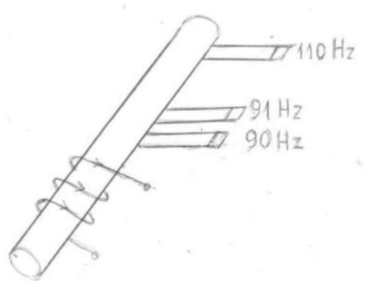

Fig. 5.17

Densitatea de volum a forței magnetostrictive este dată de expresia:

$$\overline{f}_{ms} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}H^2\tau\,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

aceasta reprezentând condiția dependenței $\mu = \mu(\tau)$.