

## 2. Marimi de natura magnetica

**2.1. Inducția magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$ .** În punctul  $P$  din vid, introducem un mic corp de probă, care, fiind electrizat, are o sarcină electrică  $q$ . Dacă, în punctul  $P$ , există câmp electric, atunci asupra corpului de probă, presupus imobil, se exercită o forță de natură electrică  $\mathbf{F}_e$ . Dacă însă corpul de probă trece prin punctul  $P$  cu viteza  $\mathbf{v}$ , se constată că, uneori, asupra lui se exercită o forță suplimentară  $\mathbf{F}_m$  (Fig. 2.1), deci o forță totală  $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e$ . Spunem că forța  $\mathbf{F}_m$  este de natură magnetică și că, în punctul  $P$ , există câmp magnetic. În urma experimentului, se constată că în orice punct  $P$  există un vector  $\mathbf{B}_v$ , independent de  $q$  și  $\mathbf{v}$ , cu proprietatea că forța  $\mathbf{F}_m$  poate fi exprimată prin relația:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_v \quad (2.1)$$

oricare ar fi  $q$  și  $\mathbf{v}$ . Vectorul  $\mathbf{B}_v$ , numit inducție magnetică în vid, este o mărime fizică ce caracterizează proprietatea punctului  $P$  din vid de a avea câmp magnetic.  $\mathbf{B}_v$  este o mărime primitivă definită prin relația (2.1). Unitatea de măsură în S.I este Tesla (T).

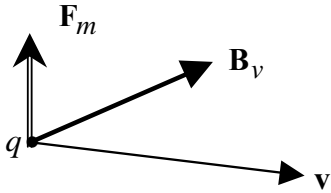


Fig. 2.1 Inducția magnetică în vid

Din modul în care au fost definite mărimile intensitatea câmpului magnetic în vid  $\mathbf{E}_v$  și inducție magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$ , rezultă că, dacă în punctul  $P$  avem câmp electric și magnetic, atunci forța ce se exercită asupra corpului de probă este:

$$\mathbf{F}_t = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v)$$

Dacă schimbăm sistemul de referință în care se face măsurarea (deci, viteza  $\mathbf{v}$ ), atunci, admitând că  $\mathbf{F}_t$  și  $q$  nu se modifică, rezultă că se modifică valorile lui  $\mathbf{E}_v$  și  $\mathbf{B}_v$ :

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_{v1} + \mathbf{E}_{v1} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v$$

unde  $\mathbf{E}_{v1}$  și  $\mathbf{B}_{v1}$  sunt valorile din noul sistem de referință. De exemplu, dacă noul sistem de referință se mișcă față de sistemul de referință inițial cu aceeași viteză ca și corpul de probă, atunci relația de transformare a lui  $\mathbf{E}_v$  din sistemul de referință inițial în cel al particulei este  $\mathbf{E}_{v1} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v$ . Realitatea fizică este câmpul electromagnetic, descris în punctul  $P$  din vid cu perechea de mărimi fizice  $(\mathbf{E}_v, \mathbf{B}_v)$ . Mărimea  $\mathbf{E}_v$  descrie componenta electrică a câmpului electromagnetic, iar  $\mathbf{B}_v$ , componenta magnetică.

**2.2. Câmpul magnetic în corpuri. Inducția magnetică  $\mathbf{B}$ . Intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$ .** Pentru explorarea câmpului magnetic din corpuri, se procedează la fel ca în cazul câmpului electric (par.1.3). Fie o fantă plată, de orientare  $\mathbf{n}$  cu centrul în punctul  $P$ , unde dorim să studiem câmpul magnetic (Fig.2.2). În punctul  $P$  din centrul fantei, inducția magnetică în vid este  $\mathbf{B}_v''(\mathbf{n})$ . Numim inducție magnetică în punctul  $P$  acel vector  $\mathbf{B}$  a cărui proiecție pe orientarea  $\mathbf{n}$  a fantei este egală cu proiecția vectorului  $\mathbf{B}_v''(\mathbf{n})$  pe orientarea fantei, oricare ar fi această orientare:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_v''(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (\forall) \mathbf{n} \quad (2.2)$$

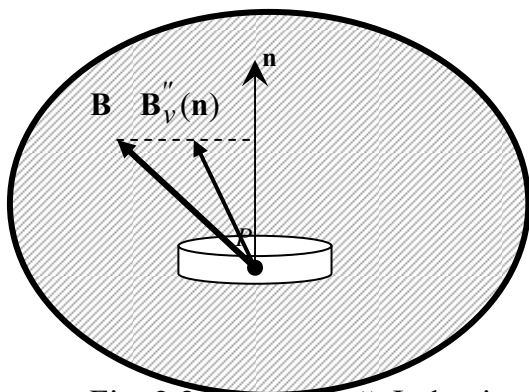


Fig. 2.2. Fanta plată. Inducția magnetică.

*Observații:* a)  $\mathbf{B}_v''(\mathbf{n})$  depinde, în general, de orientarea fantei, dar  $\mathbf{B}$  nu depinde de această orientare (în caz contrar,  $\mathbf{B}$  nu poate fi definit).

b) Mărimea  $\mathbf{B}$  este o mărime

derivată, definită cu ajutorul mărimii primitive inducția magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$ . Se măsoară tot în T.

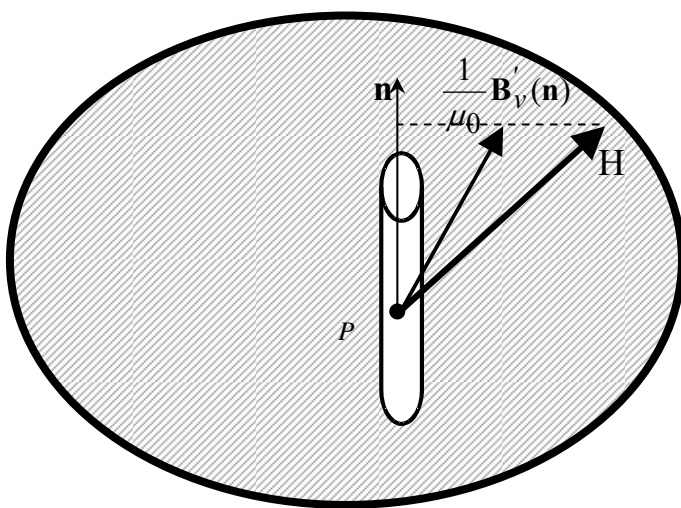
c) Alegerea cavității de forma fantei plate permite măsurarea, în principiu, a unor mărimi derivate din inducția magnetică (fluxul magnetic).

d) Practicarea unei fante în vid nu modifică cu nimic lucrurile. Ca urmare, în vid,  $\mathbf{B}_v''(\mathbf{n})$  nu depinde de  $\mathbf{n}$  și avem:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_v''(\mathbf{n}) \quad (2.3)$$

Fie o fantă lungă, de orientare  $\mathbf{n}$  cu centrul în punctul  $P$ , unde dorim să studiem câmpul magnetic (Fig.2.3). În punctul  $P$  din centrul fantei, inducția magnetică în vid este  $\mathbf{B}_v'(\mathbf{n})$ . Numim intensitate a câmpului magnetic în punctul  $P$  acel vector  $\mathbf{H}$  a cărei proiecție pe orientarea  $\mathbf{n}$  a fantei este proporțională cu proiecția vectorului  $\mathbf{B}_v'(\mathbf{n})$  pe orientarea fantei, oricare ar fi această orientare:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_v'(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (\forall) \mathbf{n} \quad (2.4)$$



Constanta  $\mu_0$ , numită permeabilitatea magnetică a vidului, are o valoare care depinde de sistemul de unități utilizat. În S.I:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ henry/metru} \\ (\text{H/m})$$

Fig. 2.3. Fantă lungă. Intensitatea câmpului

*Observații:* a)  $\mathbf{B}'_v(\mathbf{n})$  depinde, în general, de orientarea fantei, dar  $\mathbf{H}$  nu depinde de această orientare.

b) Mărimea  $\mathbf{H}$  este o mărime derivată, definită cu ajutorul mărimii primitive inducție magnetică în vid  $\mathbf{B}_v$ . Se măsoară în Amperi pe metru (A/m).

c) Alegerea cavității de forma fantei lungi permite măsurarea, în principiu, a unor mărimi derivate din inducția magnetică (tensiunea magnetică).

d) Practicarea unei fante în vid nu modifică cu nimic lucrurile. Ca urmare, în vid,  $\mathbf{B}'_v(\mathbf{n})$  nu depinde de  $\mathbf{n}$  și avem:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}'_v(\mathbf{n}), \quad (\forall) \mathbf{n} \quad (2.5)$$

e) Din relațiile (2.3) și (2.5), rezultă că în vid:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.6)$$

**2.3. Polarizația magnetică. Magnetizația.** Numim polarizație magnetică mărimea vectorială definită prin relația:

$$\mathbf{I} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.7)$$

Magnetizația este definită prin relația:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{I} \quad (2.8)$$

Din relația (2.6) rezultă că polarizația magnetică este nulă în vid.

*Observație.* Unele lucrări definesc polarizația magnetică ca o densitate de volum a unei mărimi numite moment magnetic, obținută, printr-o procedură de

măsurare, ca mărime primitivă. Atunci, relația (2.7) devine lege (legea legăturii dintre inducția magnetică, intensitatea câmpului magnetic și polarizația magnetică sau magnetizație). Am preferat definirea polarizației magnetice cu relația (2.7), deoarece procedura de măsurare a momentului magnetic nu este riguroasă.

**2.4. Legea legăturii dintre inducția magnetică  $B$  și intensitatea câmpului magnetic  $H$ .** Pentru majoritatea mediilor se poate defini o legătură algebrică între  $B$  și  $H$ . În funcție de această legătură, avem:

*a) medii liniare* (Fig.2.4a)

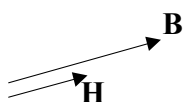


Fig. 2.4a.  
Medii liniare.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{sau} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (2.9a)$$

Unde constanta  $\mu$  se numește permeabilitate magnetică și cu bună aproximație  $\mu \geq \mu_0$ . Pentru o comparare mai ușoară a permeabilității  $\mu$  cu permeabilitatea vidului  $\mu_0$ , se definește mărimea adimensională, numită permeabilitate relativă, cu relația  $\mu_r = \mu / \mu_0$ . În particular, pentru vid, aer, gaze,  $\mu = \mu_0$ .

*b) medii liniare cu polarizație magnetică permanentă*

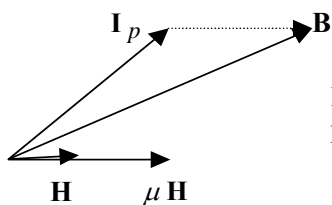


Fig.2.4b. Medii liniare cu polarizație permanentă.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{I}_p \quad (2.9b)$$

unde polarizația magnetică permanentă  $\mathbf{I}_p$  este valoarea inducției magnetice când intensitatea câmpului magnetic este nulă (Fig. 2.4b).

c) medii liniare anizotrope

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}} \mathbf{H} \quad (2.9c)$$

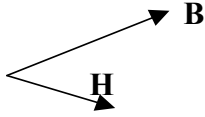


Fig. 2.4c. Medii liniare anizotrope.

La aceste medii, vectorii  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  nu sunt, în general, paraleli (Fig.2.4c), dar

legătura dintre  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  este liniară,  $\overline{\overline{\mu}}$  fiind un tensor numit tensorul permeabilității magnetice. Relația (2.9c) se mai poate scrie în sistemul cartezian astfel:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (2.9c')$$

*Observație.* Matricea permeabilitatii este simetrică și pozitiv definită. Există deci trei direcții ortogonale, numite direcții principale de magnetizare, în care legătura dintre  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{H}$  se scrie:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.9c'')$$

d) medii liniare, anizotrope, cu polarizație magnetică permanentă

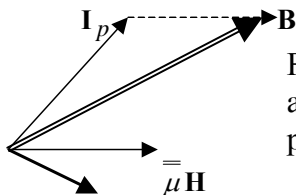
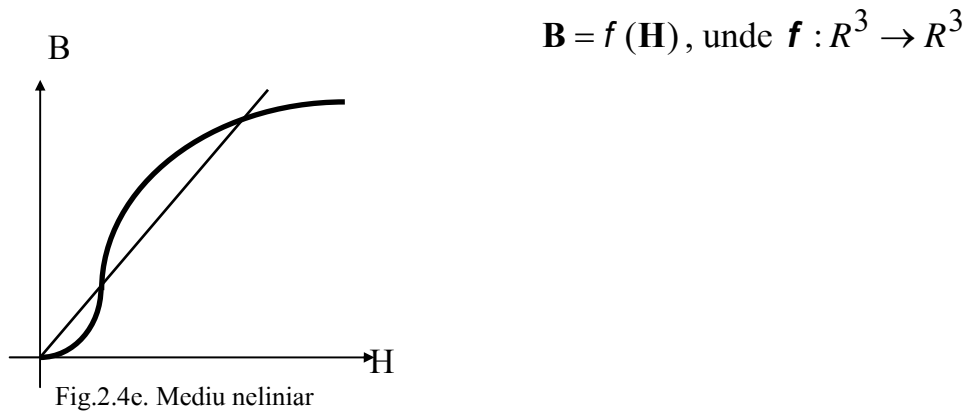


Fig.2.4d. Medii liniare anizotrope cu polarizație permanentă.

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}} \mathbf{H} + \mathbf{I}_p \quad (2.9d)$$

e) medii neliniare



De exemplu, în cazul mediilor feromagnetice izotrope, unde pe orice direcție avem aceeași relație B-H, graficul acestei relații arată ca în Fig.2.4e

f) *Medii neliniare în care dependența B - H nu poate fi descrisă printr-o relație algebrică B - H.* În aceste medii, numite medii cu histerezis, valoarea lui B depinde de H și de evoluția pe care au avut-o mărimile B și H. De exemplu, în cazul unui câmp uniform, unde B și H sunt coliniari, putem descrie calitativ dependența B - H (Fig. 2.4f). Presupunem că, inițial, mediul este nemagnetizat:  $B = 0$ ;  $H = 0$ . Atunci, în graficul B - H, ne aflăm în originea axelor O. Dacă mărim valoarea lui H până la  $H_{max}$ , atunci dependența B - H este descrisă de curba  $O\alpha$ , numită și curbă de primă magnetizare. Dacă, după atingerea valorii  $H_{max}$ , scădem valoarea lui H, dependența B - H nu mai este descrisă de curba de primă magnetizare, ci de curba  $\alpha\beta$ . Intersecțiile curbei  $\alpha\beta$  cu axele OB și OH au ordonata  $B_r$  (numită inducție remanentă) și respectiv abscisa  $-H_c$  ( $H_c$  numit câmp coercitiv). Presupunem că atingem valoarea  $-H_{max}$  și apoi creștem din nou valoarea lui H până la  $H_{max}$ . Obținem ciclul  $\alpha\beta\alpha$ , numit ciclul de histerezis. El este simetric față de origine. Dacă pe porțiunea descendentă  $\alpha\beta$  ne oprim în punctul  $\gamma$  și apoi creștem și scădem valoarea lui H, obținem curba  $\gamma\delta\gamma$ , numită ciclul secundar.

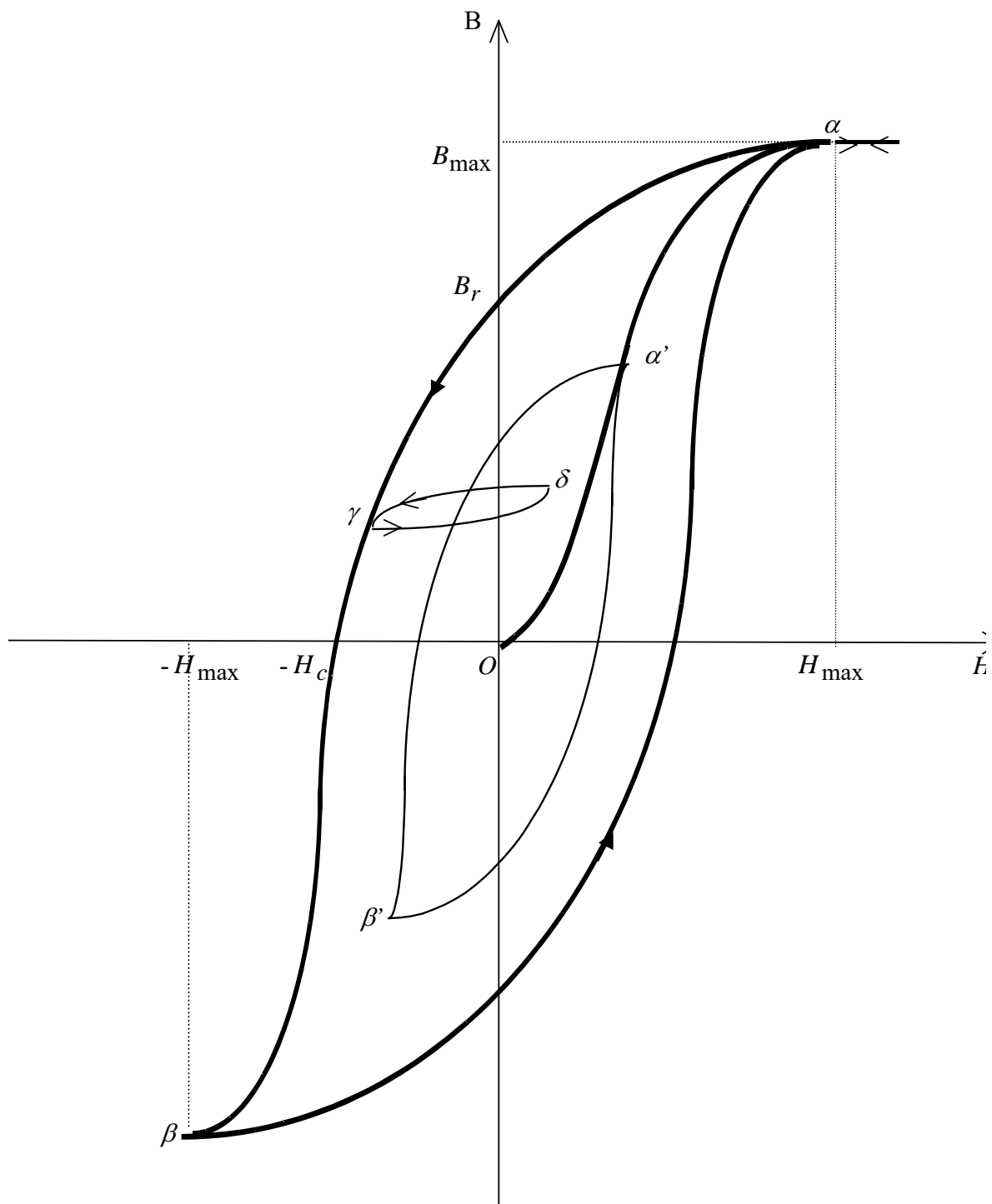


Fig. 2.4f. Relația B-H pentru un mediu cu histerezis.



Dacă pe curba de primă magnetizare ne oprim la o valoare a lui  $H$  mai mică decât  $H_{max}$ , atunci obținem un ciclu de histerezis  $\alpha'\beta'\alpha'$ , interior lui  $\alpha\beta\alpha$ , iar dacă ne oprim la o valoare mai mare decât  $H_{max}$ , obținem un ciclu exterior lui  $\alpha\beta\alpha$ . Există însă o valoare limită lui  $H_{max}$ , a cărei depășire nu conduce la modificarea ciclului de histerezis. Există deci un ciclu de histerezis limită care, în Fig.2.4f, este chiar  $\alpha\beta\alpha$ . Se va arăta (Partea VI) că energia care se transformă, pe unitatea de volum, din forma electromagnetică în căldură este egală cu aria ciclului de histerezis (Teorema lui Warburg). Ca urmare, în multe utilizări tehnice, unde câmpul magnetic este variabil în timp, se încearcă folosirea unor materiale cu ciclul de histerezis foarte îngust, numite și materiale magnetice moi. În cazul acestor materiale, se poate considera cu bună aproximație curba de primă magnetizare. Pierderile specifice (pe unitatea de volum) prin histerezis sunt date apoi cu bună aproximație de valoarea maximă a lui  $B$  și de frecvență.

Există utilizări tehnice în care sunt dorite materiale cu ciclul de histerezis cât mai larg (magneți permanenți). Se va arăta (Partea a IV-a) că energia câmpului magnetic produs de magneții permanenți în afara lor este cu atât mai mare, cu cât ciclul de histerezis este mai lat (mai exact, cu cât produsul  $-BH$  este mai mare). Fabricanții de magneți permanenți dau curba  $\alpha\beta\alpha$  a ciclului de histerezis limită sau, uneori, numai inducția remanentă  $B_r$ , câmpul coercitiv  $H_c$  și “energia maximă”  $-(BH)_{max}$ , corespunzătoare ciclului limită. Pentru a atinge însă acest ciclu limită este necesar să obținem pentru  $H_{max}$  o valoare de cca 4-5 ori mai mare decât valoarea lui  $H_c$  dată în catalog.

În cazul în care  $B$  și  $H$  nu sunt coliniari, dependența  $B - H$  se complică foarte mult.

**1.5. Tensiunea magnetică  $u_m$**  Fie o curbă orientată  $C$  (Fig.2.5) și un câmp magnetic cu intensitatea  $\mathbf{H}$ . Numim tensiune magnetică de-a lungul curbei  $C$  mărimea:

$$u_{mc} = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.10)$$

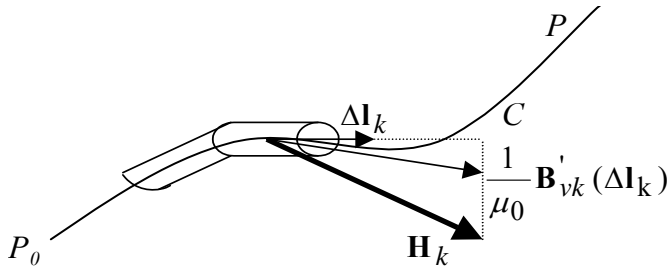


Fig. 2.5. Tensiunea magnetică.

Tensiunea magnetică  $u_{mc}$  este o integrală curbilinie de speța a 2-a, asemănătoare cu lucrul mecanic. Ea depinde atât de câmpul vectorial  $\mathbf{H}$ , cât și de curba  $C$ . Tensiunea magnetică

se măsoară în Amperi (A).

*Observație.* În principiu, tensiunea magnetică poate fi măsurată dacă ținem cont de felul în care a fost definită intensitatea câmpului magnetic, cu ajutorul fantelor lungi. Intr-adevăr, dacă plasăm curba  $C$  într-un șirag de fante lungi (Fig.2.5), atunci, în vidul fiecărei fante  $k$ , putem măsura  $\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}'_{vk}$  care, pe orientarea  $\Delta \mathbf{l}_k$  a fantei are aceeași componentă ca și  $\mathbf{H}_k$ :

$$\mathbf{H}_k \cdot \Delta \mathbf{l}_k = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}'_{vk}(\Delta \mathbf{l}_k) \cdot \Delta \mathbf{l}_k$$

Însumând în raport cu indicele  $k$  și făcând lungimile  $\Delta \mathbf{l}_k$  arbitrar de mici, avem:

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}'_v \cdot d\mathbf{l}$$

**2.6. Potențialul magnetic scalar  $V_m$ . Teorema potențialului magnetic scalar.**

Există, uneori, domenii  $\Omega$  în care tensiunea magnetică pe orice curbă închisă din domeniu este nulă (v. teorema lui Ampere, par.3.3):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (\forall) \Gamma \subset \Omega \quad (2.11)$$

**Teorema potențialului magnetic scalar.** Dacă, în domeniul  $\Omega$ , este îndeplinită condiția (2.11), atunci se poate defini un potențial magnetic scalar prin relația:

$$V_m(P) = V_m(P_0) - \int_{P_0}^P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.12)$$

unde integrala se face pe orice drum de la  $P_0$  la  $P$ , iar  $P_0$  este un punct cu potențial de referință fixat arbitrar.

**Consecință.** Dacă relația (2.11) este valabilă atunci este valabilă forma locală a teoremei potențialului magnetic scalar:

Există câmpul de scalari  $V_m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât:

$$\mathbf{H} = -\text{grad} V_m = -\nabla V_m \quad (2.12')$$

$$-\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Demonstrația se găsește în /1/

**1.7. Fluxul magnetic.** Fie  $S$  o suprafață orientată. Numim flux magnetic mărimea definită prin:

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.13)$$

*Observație.* În principiu, fluxul magnetic poate fi măsurat, dacă ținem cont de felul în care a fost definită inducția magnetică, cu ajutorul fantelor plate. Într-adevăr, dacă “placăm” suprafața  $S$  cu fante plate (Fig.2.6), atunci, în vidul fiecărei fante  $k$ , putem măsura  $\mathbf{B}_{vk}''$  care, pe orientarea  $\mathbf{n}_k$  a fantei, are aceeași componentă ca și  $\mathbf{B}_k$ :

$$\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k = \mathbf{B}_{vk}'' \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k$$

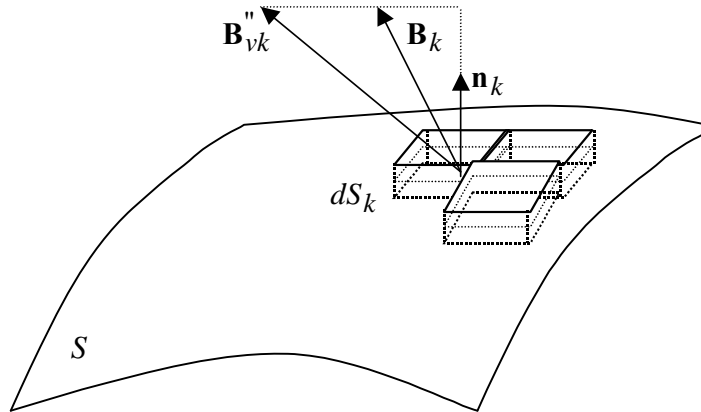


Fig. 2.6. Fluxul magnetic.

Însumând în raport cu indicele  $k$  și făcând ariile  $\Delta S_k$  arbitrar de mici, avem:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{B}_v'' \cdot \mathbf{n} dS$$

**2.6. Legea fluxului magnetic.** În urma experimentelor, se constată următoarea proprietate:

*Fluxul magnetic pe orice suprafață închisă este nul (Fig. 2.7):*

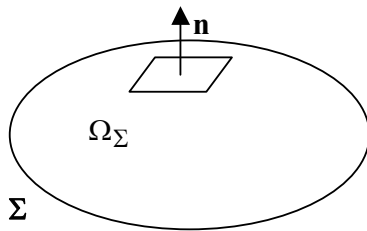


Fig. 2.7. Legea fluxului magnetic.

$$\Phi_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.14)$$

*Observație:* Nu există sarcină magnetică, analogă sarcinii electrice

*Consecințe:* i) *Forma locală a legii fluxului magnetic:*

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

*Demonstrație.* Aplicăm formula lui Gauss în membrul stâng al relației (2.14). Rezultă:

$$\int_{\Omega_\Sigma} \text{div} \mathbf{B} dv = 0$$

Deoarece suportul de integrare  $\Omega_\Sigma$  este arbitrar, rezultă relația (2.15). ■

ii) *Toate suprafețele cu aceeași bordură au același flux magnetic.*

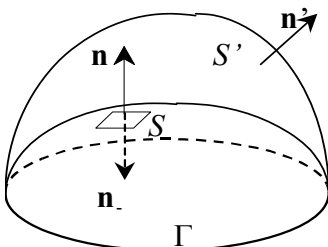


Fig. 2.8. Invarianța fluxului magnetic.

*Demonstrație.* Fie două suprafețe  $S$  și  $S'$  cu aceeași bordură  $\Gamma$  și fie  $S_-$ , suprafața care ocupă în spațiu aceeași poziție ca și  $S$ , dar este orientată invers

(normala  $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}$ ). Pe suprafața închisă  $\Sigma = S' \cup S_-$ , este valabilă legea fluxului magnetic:

$$\int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS + \int_{S_-} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_- dS = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' dS - \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Deci  $\Phi_S = \Phi_{S'}$ . ■

iii) Exista o funcție vectorială  $\mathbf{A}$ , numită potențial magnetic vector, cu proprietatea:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Se vede imediat că, dacă  $\mathbf{B}$  verifică relația (2.15), atunci verifică și legea fluxului magnetic. O expresie pentru potențialul magnetic vector poate fi dată de formula Biot-Savart-Laplace (Partea a IV-a, Cap.4, par.4.2). Pentru o inducție magnetică dată, relația (2.16) nu definește unic potențialul magnetic vector: putem să-i adăugăm  $\text{grad} \varphi$ , cu  $\varphi$  arbitrar și obținem aceeași valoare pentru  $\mathbf{B}$  ( $\text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad} \varphi) = \text{rot} \mathbf{A}$ ). De obicei, se impune lui  $\mathbf{A}$  o restricție suplimentară, numită condiție de etalonare. De exemplu, dacă impunem  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ , spunem că avem condiția de etalonare Coulomb.

**2.7. Legea inducției electromagnetice.** În urma experimentelor, se constată următoarea proprietate:

*Tensiunea electrică pe o curbă închisă  $\Gamma$  este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic pe orice suprafață  $S_\Gamma$  cu bordura  $\Gamma$ , sensul pozitiv al fluxului magnetic prin  $S_\Gamma$  fiind dat de regula burghiului față de sensul de parcurgere al curbei  $\Gamma$  (Fig. 2.9):*

$$u_\Gamma = -\frac{d}{dt} \Phi_{S_\Gamma} \quad (2.17)$$

Utilizând relațiile de definiție a tensiunii electrice (1.6) și a fluxului magnetic (2.13), relația (2.17) se mai scrie:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.17')$$

*Observații:* a) Curbele, suprafețele, corpurile sunt formate din puncte materiale și deplasările tuturor varietăților sunt definite de deplasările punctelor materiale din care ele sunt formate. În teoria macroscopică Maxwell-Hertz a câmpului electromagnetic, mărimile sunt definite în sisteme de referință atașate punctelor, care pot fi în mișcare. Spunem că sunt utilizate sisteme de referință locale pentru definirea mărimilor. De exemplu, în punctul  $P$  de pe curba  $\Gamma$ ,

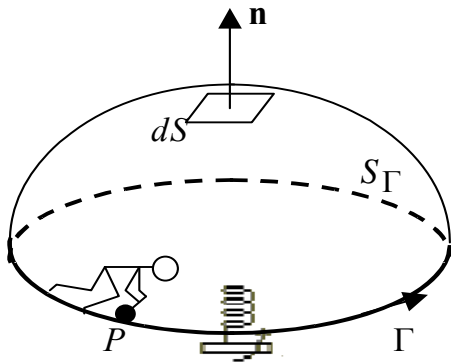


Fig. 2.9. Pentru legea inducției electromagnetice.

intensitatea câmpului electric se măsoară cu un corp de probă ce se mișcă o dată cu punctul  $P$ . De aici, rezultă că modul de introducere a mărimilor primitive din vid,  $\mathbf{E}_v$  (par. 1.1) și  $\mathbf{B}_v$  (par.2.1) nu este riguros. În teoria Maxwell-Hertz este necesară substanța pentru a putea defini sistemele de referință locale, deci nu putem avea vid. De fapt, vidul este o stare

limită de rarefiere a substanței. Mărimile intensitatea câmpului magnetic în vid ar trebui definită ca o limită de mărimi  $\mathbf{E}_n$ , definite cu ajutorul forței de natură electrică (par.1.1) și corespunzând unor rarefieri cât mai mari, caracterizate, de exemplu, de presiunile  $p_n \rightarrow 0$ .

b) Dacă mișcarea curbei  $\Gamma$  este impusă de deplasarea punctelor materiale din care ea este formată, deplasarea suprafeței  $S_{\Gamma}$  poate fi “eliberată” de această

restricție, așa cum rezultă din consecința ii) a legii fluxului magnetic. Evident, suprafața  $S_\Gamma$  trebuie să fie mărginită de curba  $\Gamma$ .

c) Fluxul magnetic poate să varieze în timp atât datorită faptului că inducția magnetică  $B$  variază în timp, cât și datorită faptului că suprafața  $S_\Gamma$  se modifică.

### Exemple

i) Într-un câmp magnetic uniform, se rotește o spiră dreptunghiulară, având axa de rotație perpendiculară pe liniile de câmp (Fig. 2.10). Să se determine tensiunea electrică indusă în spiră.

*Rezolvare.* Se alege un sens pentru calculul tensiunii electrice în spiră (o orientare a curbei  $\Gamma$ ), de exemplu, cel din Fig. 2.10. Alegem ca suprafață cu bordura  $\Gamma$  chiar suprafața plană mărginită de  $\Gamma$ . Sensul pozitiv al fluxului prin  $S_\Gamma$  este dat de regula burghiului în raport cu sensul de parcurgere a curbei  $\Gamma$ . Deci, normala la  $S_\Gamma$  este orientată în jos. Fluxul magnetic prin  $S_\Gamma$  este:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_\Gamma} B \cos \alpha dS = B \cos \alpha \int_{S_\Gamma} dS = AB \cos \alpha$$

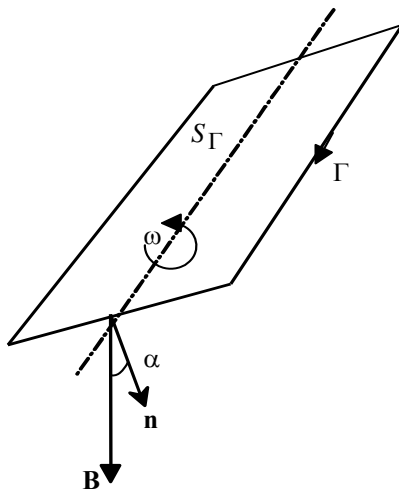


Fig. 2.10. Spiră dreptunghiulară învârtindu-se în câmp magnetic uniform

unde  $A$  este aria dreptunghiului mărginit de spiră, iar  $\alpha$  este unghiul dintre normala  $n$  și inducția magnetică  $B$ . Deci:

$$u_\Gamma = -\frac{d}{dt} \Phi_{S_\Gamma} = -AB \frac{d}{dt} \cos \alpha = \omega AB \sin \alpha$$

ii) Într-un câmp magnetic uniform de inducție magnetică  $\mathbf{B}$ , se învâрте, cu viteza unghiulară  $\omega$ , un disc perfect conductor de



rază  $a$ , axul discului, tot perfect conductor, fiind paralel cu inducția magnetică  $\mathbf{B}$  (Fig.2.11). La periferia discului și pe axul de rotație, alunecă două perii colectoare care fac legătura cu două borne  $A$  și  $B$  (generatorul homopolar). Care este tensiunea electrică  $u$  de la borne?

*Rezolvare.* Încadrăm curba tensiunii de la borne într-o curbă închisă, astfel încât pe restul curbei să cunoaștem tensiunea electrică. Fie  $\Gamma(t)=ABCoDA$  această curbă la timpul  $t$ . Deoarece discul, axul și legăturile  $BC$  și  $DA$  sunt perfect conductoare, intensitatea câmpului electric este nulă în acestea (v. Cap.3). Deci:

$$u_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{BCoDA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 + u \quad (2.18)$$

Alegem ca suprafață cu bordura  $\Gamma(t)$  suprafața plană mărginită de această curbă.

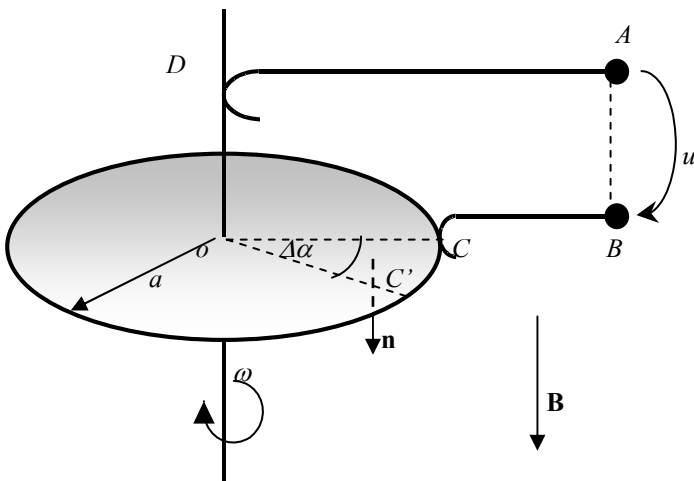


Fig. 2.11. Generatorul omopolar.

Ținând cont că deplasarea curbei  $\Gamma(t)$  este definită de deplasarea punctelor din care ea este formată, la timpul  $t+\Delta t$ , porțiunea  $Co$  a curbei se deplasează în  $C'o$  și curba va deveni  $\Gamma(t+\Delta t)=ABCC'oDA$ . Putem alege ca suprafață de bordură  $\Gamma(t+\Delta t)$  reuniunea

dintre suprafața plană cu bordura  $\Gamma(t)$  și suprafața plană  $CC'o$  definită de sectorul de cerc de unghi  $\Delta\alpha$  parcurs de  $Co$  în timpul  $\Delta t$ . Variația de flux magnetic de la timpul  $t$  la  $t+\Delta t$  este dată de fluxul magnetic de pe sectorul de cerc:

$$\Delta\Phi = \int_{CC'o} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = B \frac{a^2 \Delta\alpha}{2} \quad (2.19)$$

ținând cont că  $\mathbf{B}$  și  $\mathbf{n}$  sunt paraleli și că aria sectorului de cerc este  $\frac{a^2 \Delta \alpha}{2}$ . Ca urmare, din (2.17), (2.18) și (2.19), rezultă:

$$u = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -B \frac{a^2}{2} \omega \quad (2.20)$$

Consecințe: i) *Forma locală a legii inducției electromagnetice pentru medii imobile.* Dacă mediile sunt imobile, atunci suportul integralei de suprafață din relația (2.17') este constant în timp și derivata în raport cu timpul intră sub semnul de integrare:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.21)$$

Aplicând formula lui Stokes în membrul stâng al relației (2.21) rezultă:

$$\int_{S_{\Gamma}} \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.22)$$

Deoarece suportul de integrare este arbitrar, rezultă că integranzii sunt egali:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.23)$$

Relația (2.23) este forma locală a legii inducției electromagnetice, cunoscută și sub numele de legea lui Faraday sau a doua lege a lui Maxwell.

ii) *Forma locală a legii inducției electromagnetice pentru medii în mișcare.*

Dacă mediul este în mișcare, atunci suportul integralei de suprafață din relația (2.17') este variabil în timp și derivata în raport cu timpul intră sub semnul de integrare sub forma derivatei substanțiale de flux (Anexa A):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{d_f \mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.24)$$

unde (v. Anexa A):

$$\frac{d_f \mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.25)$$

Dacă ținem cont de forma locală a legii fluxului magnetic (2.15), avem:

$$\frac{d_f \mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.26)$$

La fel ca la punctul precedent, aplicăm formula lui Stokes în membrul stâng al relației (2.24) și obținem

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{d_f \mathbf{B}}{dt} \quad (2.27)$$

sau

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right) \quad (2.27')$$

*Observație.* Pentru relația (2.27') sunt necesare două sisteme de referință: sistemul de referință local, în care sunt definite mărimile câmpului electromagnetic, și sistemul de referință al laboratorului, în care este definită viteza. Cei doi termeni

din membrul drept al relației (2.27') depind de alegerea celui de-al doilea sistem de referință, dar suma lor este independentă de această alegere.

iii) Dacă, într-un domeniu, fluxurile magnetice nu variază în timp, atunci, din legea inducției electromagnetice, rezultă că este îndeplinită condiția definirii potențialului electric scalar (v. par.1.7 relația (1.18))

iv) *Teorema a 2-a a lui Kirchhoff*. (Fig.2.12). Dacă fluxurile magnetice ale suprafețelor marginite de buclele din graful de tensiuni ale laturilor unui circuit sunt constante, atunci suma tensiunilor laturilor buclelor este nula (Fig.2.12):

$$u_1 - u_4 + u_5 = 0$$

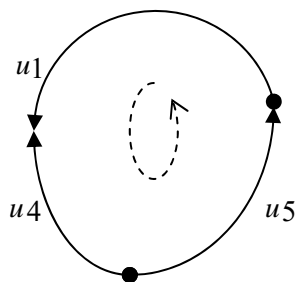


Fig.2.12. Teorema K2

*Observatie.* Exista sarcina magnetica? Incercarea de a dezvolta investigatiile din campul magnetic asemanator cu cele din campul electric au esuat din cauza ca nu a fost detectata sarcina magnetic, asemantoare cu cea electrica. O incercare simpla este descrisa mai jos.

