SCURTA RECAPITULARE A
LEGILOR TEORIEI MACROSCOPICE MAXWELL-HERZ

I. Legile generale

1. Legea fluxului electric

Fluxul electric pe o suprafaţă închisă este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeţei (Fig. 1.1):

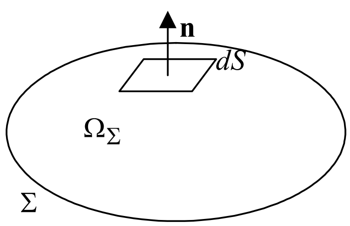

Fig. 1.1. Legea fluxului electric.

$$\Psi_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_\Sigma \qquad (1.1)$$

unde Ψ_Σ - Fluxul electric pe suprafata Σ (C), **D** – Inductia electrica (C/m^2), q_Σ - Sarcina electrica (C)

Consecinţe. i) *Forma locală a legii fluxului electric*:

$$div\mathbf{D} = \rho_v \qquad (1.2)$$

$$div\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

unde ρ_v - densitatea de volum a sarcinii electrice (C/m^3),

ii) *Saltul componentei normale a inducţiei electrice în vecinătatea suprafeţelor este egal cu densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice*:

$$D_{n1} - D_{n2} = div_s \mathbf{D} = \rho_S \qquad (1.3)$$

unde ρ_s - densitatea de suprafata a sarcinii electrice (C/m^2).

de 2. Legea fluxului magnetic

Fluxul magnetic pe orice suprafaţă închisă este nul (Fig. 2.1):

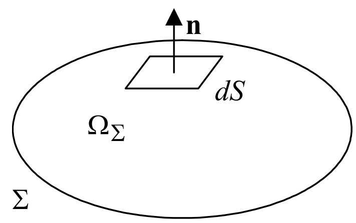

Fig. 2.1. Legea fluxului magnetic.

$$\Phi_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \qquad (2.1)$$

unde Φ_Σ - Fluxul electric pe suprafata Σ (Wb), $\mathbf{B}$ – Inductia magnetica (T).

Observaţie: Nu există sarcină magnetică, analoagă sarcinii electrice.

Consecinţe: i) *Forma locală a legii fluxului magnetic:*

$$div\mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2.2)$$

ii) *Toate suprafeţele cu aceeaşi bordură au acelaşi flux magnetic.*

iii) Exista o funcţie vectoriala $\mathbf{A}$, numită potenţial magnetic vector, cu proprietatea:

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad (2.3)$$

iv) *În vecinătatea suprafeţelor, componenta normală a inducţiei magnetice se conservă* (Fig.2.2):

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad div_s\, \mathbf{B} = \mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \qquad (2.4)$$

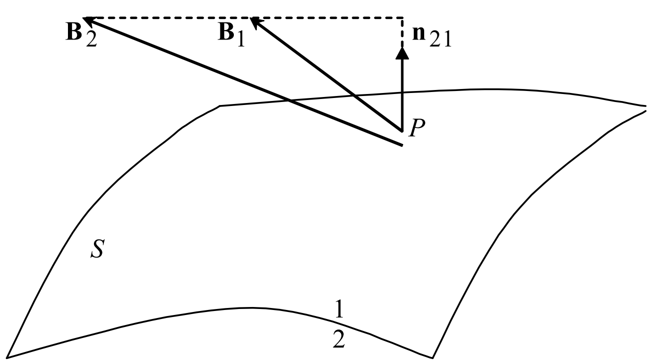

Fig. 2.2. Inducţia magnetică pe cele două feţe ale unei suprafeţe *S*.

3. Legea inducţiei electromagnetice

Tensiunea electrică pe o curbă inchisa Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic pe orice suprafaţă* S_Γ *cu bordura* Γ*, sensul pozitiv al fluxului magnetic prin* S_Γ *fiind dat de regula burghiului faţă de sensul de parcurgere al curbei* Γ (Fig. 2.9):

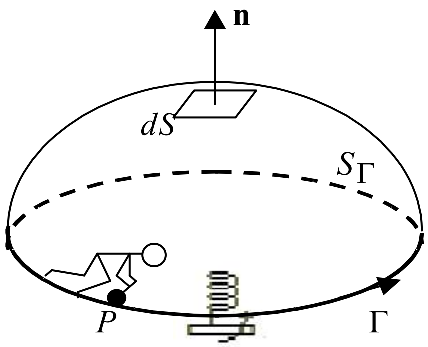

Fig. 2.9. Pentru legea inducţiei electromagnetice.

$$u_\Gamma = -\frac{d}{dt}\Phi_{S_\Gamma} \tag{3.1}$$

unde u_Γ - tensiunea electrica pe curba Γ, Φ_{S_Γ} - fluxul magnetic pe suprafata S_Γ.

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS \tag{3.1'}$$

unde **E** – intensitatea campului electric (V), **B** – inductia magnetica (T).

Observaţie: Mărimile sunt definite în sisteme de referinţă ataşate punctelor, care pot fi în mişcare (Fig.2.9.)

Consecinţe: i) *Forma locală a legii inducţiei electromagnetice pentru medii imobile.*

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.2}$$

ii) *Forma locală a legii inducţiei electromagnetice pentru medii în mişcare.*

$$rot\mathbf{E} = -\frac{d_f\mathbf{B}}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + rot(\mathbf{B}\times\mathbf{v})\right) \tag{3.3}$$

unde $\frac{d_f\mathbf{B}}{dt}$ este derivate substantiala de flux, **v** – viteza particolelor fata de sistemul de referinta.

iii) *În vecinătatea suprafeţelor ce separă medii care deplasează cu aceeaşi viteză, componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric se conservă*:

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2} \tag{3.4}$$

unde $\mathbf{E}_{t_1}$ şi $\mathbf{E}_{t_2}$ sunt proiecţiile pe planul tangent τ, din punctul P, ale valorilor de pe cele două feţe ale lui $\mathbf{E}$ (Fig. 3.2). Sau:

$$rot_s\,\mathbf{E} = \mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

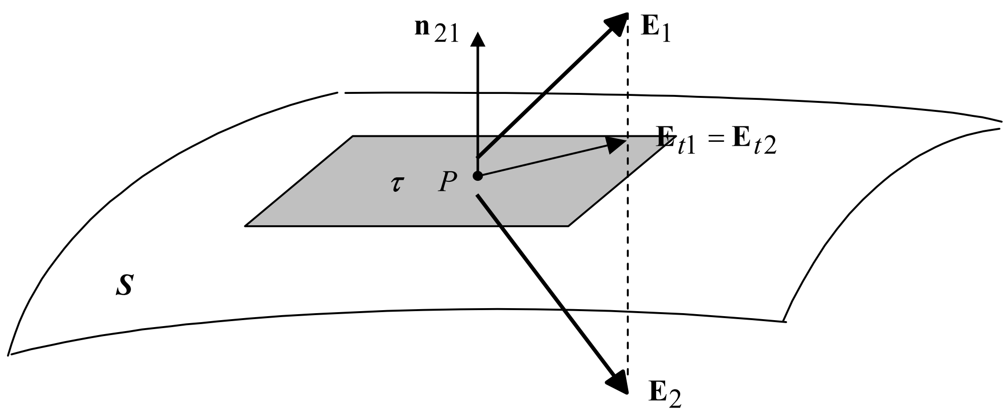

Fig. 3.2. Conservarea componentei tangenţiale a intensităţii campului electric în vecinătatea suprafeţelor.

4. Legea circuitului magnetic

Tensiunea magnetică pe o curbă inchisa Γ *este egală cu intensitatea curentului electric pe orice suprafaţă* S_Γ *cu bordura* Γ, *adunată cu viteza de creştere a fluxului electric pe suprafaţa* S_Γ*, sensul pozitiv prin* S_Γ *fiind dat de regula burghiului faţă de sensul de parcurgere al curbei* Γ (Fig. 4.1):

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d}{dt}\Psi_{S_\Gamma} \tag{4.1}$$

unde $u_{m\Gamma}$ - tensiunea magnetica pe curba Γ (A), i_{S_Γ} - intensitatea curentului electric pe suprafaţa S_Γ (A), Ψ_{S_Γ} - Fluxul electric pe suprafata S_Γ (C).

Sau

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS \tag{4.1'}$$

unde **H** – Intensitatea campului magnetic (A/m), **J** – Densitatea curentului electric (A/m^2), **D** – inductia electrica. Termenul $i_H = \dfrac{d}{dt}\Psi_{S_\Gamma}$ se numeste curent electric hertzian.

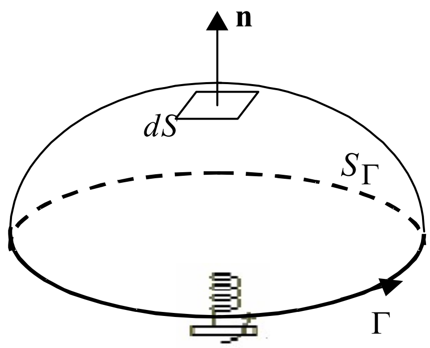

Fig. 4.1. Pentru legea circuitului magnetic.

Consecinte: i) *Forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii imobile.*

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (4.2)$$

ii) *Forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii în mişcare*:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d_f \mathbf{D}}{dt} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v}\rho_v + rot(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \qquad (4.3)$$

- $\mathbf{J}$, densitatea curentului de conducţie;
- $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, densitatea curentului de deplasare;
- $\mathbf{J}_c = \mathbf{v}\rho_v$, densitatea curentului de convecţie;
- $\mathbf{J}_R = rot(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$, densitatea curentului Roentgen theoretic;

$\mathbf{J}'_R = rot(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$, curentul Roentgen experimental.

iii) *Teorema lui Ampere***.** Dacă neglijăm curentul hertzian $i_H = \frac{d}{dt}\Psi_{S_\Gamma}$, rezultă:

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} \qquad (4.4)$$

sau:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \qquad (4.4')$$

Forma locală a teoremei lui Ampere:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (4.5)$$

iv) *Teorema conservării sarcinii electrice. Intensitatea curentului electric printr-o suprafaţă închisă este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice din interiorul suprafeţei.*

$$i_\Sigma = -\frac{d}{dt} q_\Sigma \qquad (4.6)$$

unde q – Sarcina electrica (C)

Forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice pentru medii imobile.

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad (4.7)$$

unde ρ_v - densitatea de volum a sarcinii electrice (C/m^3)

v) *În vecinătatea suprafeţelor fără pânză de curent, ce separă medii care deplasează cu aceeaşi viteză, componenta tangenţială a intensităţii câmpului magnetic se conservă*:

$$\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2} \qquad (4.9)$$

vi) *Saltul componentei normale a densităţii de volum a curentului electric, în vecinătatea suprafeţelor ce separă medii care deplasează cu aceeaşi viteză, este egal cu viteza de scădere a densităţii de suprafaţă a sarcinii electrice*:

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \qquad (4.10)$$

unde ρ_S - densitatea de suprafata a sarcinii electrice (C/m^2).

5. Legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie

Densitatea de volum a puterii care se transformă din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie, este

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (5.1)$$

unde p – densitatea de volum a puterii (puterea specifica) (w/m^3), **E** – intensitatea campului electric (V/m), **J** – Densitatea curentului electric (A/m^2).

Pt medii liniare,

$$p = \sigma E^2 = \rho J^2 \geq 0 \qquad (5.2)$$

unde σ - conductivitatea electrica (S/M), ρ - rezistivitatea ($\Omega \cdot m$). Puterea electromagnetica se transforma ireversibil in caldura.

Pentru medii linire, cu câmp electric imprimat,

$$p = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_i \qquad (5.3)$$

unde $\mathbf{E}_i$ - intensitatea campului electric imprimat, semnificand cause de natura neelectrica ce pot produce current electric. Termenul $\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_i$ poate fi negativ si reprezinta partea din puterea electromagnetic ace se poate transforma reversibil in alte forme.

II. Legile de material (Relatiile constitutive)

***6. Legea legăturii dintre inducţia electrică* D *şi intensitatea câmpului electric* E**

<u>*a) medii liniare*</u>

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}\,; \tag{6.1}$$

unde ε - permitivitate (F/m), $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ **- permitivitaate relative,** $\varepsilon_r \geq 1$

b) medii liniare cu polarizaţie electrică permanentă $\mathbf{P}_p$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} + \mathbf{P}_p \tag{6.2}$$

c) medii liniare anizotrope

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\mathbf{E} \tag{6.3}$$

d) medii liniare, anizotrope, cu polarizaţie electrică permanentă

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\mathbf{E} + \mathbf{P}_p \tag{6.4}$$

e) medii neliniare

$$\mathbf{D} = f\,(\mathbf{E}) \text{ unde } \boldsymbol{f} : R^3 \to R^3$$

f) medii în care legătura dintre **D** *şi* **E** *nu poate fi exprimată algebric*

***7. Legea legăturii dintre inducţia magnetică* B *şi intensitatea câmpului magnetic* H**

a) medii liniare (Fig.7.1)

$$\underline{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}} \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{H} = \nu\mathbf{B} \tag{7.1}$$

unde μ - permeabilitate (H/m), $\mu_r = \mu / \mu_0$, permeabilitate delativa $\mu \geq \mu_0$

b) medii liniare cu polarizaţie magnetică permanentă

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{I}_p \tag{7.2}$$

***c)** medii liniare anizotrope*

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\,\mathbf{H} \tag{7.3}$$

d) medii liniare, anizotrope, cu polarizaţie magnetică permanentă

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\,\mathbf{H} + \mathbf{I}_p \tag{7.4}$$

e) medii neliniare

$$\mathbf{B} = f\,(\mathbf{H}),\ \text{unde}\ \boldsymbol{f} : R^3 \to R^3$$

f) Medii neliniare în care dependenţa **B - H** *nu poate fi descrisă printr-o relaţie algebrică* **B - H**.

8. *Legea legăturii dintre densitatea curentului electric* J *şi intensitatea câmpului electric* E *(Legea conducţiei)*

a) *Medii liniare*

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E} \qquad \text{sau} \qquad \mathbf{E}=\rho\mathbf{J} \tag{8.1}$$

Uunde unde σ - conductivitatea electrica (S/M), ρ - rezistivitatea **(**$\Omega \cdot m$**).** Dacă ρ=0, mediul este perfect conductor, σ=0, spunem că mediul este perfect izolant. În general $\sigma \geq 0$.

b) *Medii liniare cu câmp electric imprimat*

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \tag{8.2}$$

unde $\mathbf{E}_i$, intensitatea câmpului electric imprimat şi reprezintă cauze neelectrice, care pot conduce la apariţia curentului electric

c) Medii neliniare

$$\mathbf{J}=f(\mathbf{E})$$

Avem 5 legi generale si 3 legi de material. Legile 3,4 sunt legi de evolutie.

Sistemul celor 8 legi care descriu campul electromagnetic formeaza un system complet (definesc unic campul electromagnetic) si necontradictoriu (nu exista consecinte ale legilor care sa fie contradictorii).