

3. MĂRIMI DE NATURĂ ELECTROKINETICĂ

3.1. Intensitatea curentului electric i

Într-un punct P , unde avem câmp magnetic de inducție magnetică \mathbf{B} și nu avem câmp electric, introducem un corp metalic filiform, rectiliniu, din care un mic segment $\Delta\mathbf{l}$ este legat de restul firului prin două fine resoarte metalice, astfel încât să fie permisă mișcarea micului segment și să poată fi măsurate forțele ce se exercită asupra lui (Fig. 3.1). Se constată că, uneori, asupra micului segment se exercită o forță $\Delta\mathbf{F}$ care nu este de natură electrică, pentru că nu avem câmp electric. Forța nu are nici natura celei de la par.2.1, deoarece micul segment nu se mișcă. Forța poate să apară chiar dacă micul segment nu are sarcină electrică. Spunem că micul segment are proprietatea de a fi parcurs de curent electric. Făcând mai multe măsurători, se constată că este valabilă relația:

$$\Delta\mathbf{F} = i\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.1)$$

unde i este o constantă ce nu depinde de inducția magnetică \mathbf{B} și caracterizează proprietatea micului segment de a fi parcurs de curent electric. Se numește intensitatea curentului electric și este o mărime primitivă definită prin procedura de măsurare dată de relația (3.1). Orientarea lui $\Delta\mathbf{l}$ definește sensul lui i prin

micul segment. Unitatea de măsură pentru i este Amper-ul (A).

Observație. De multe ori, când nu există riscul unor confuzii, spunem pe scurt “curent electric” sau chiar “curent”, în loc de intensitatea curentului electric.

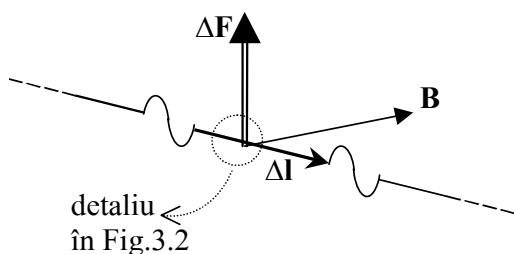


Fig. 3.1. Intensitatea curentului electric.

3.2. Densitatea curentului electric \mathbf{J}

Dacă “punem sub lupă” un detaliu din micul segment de la paragraful anterior, observăm că apariția curentului electric este însoțită de deplasarea unor purtători de sarcină electrică (Fig.3.2). Făcând analogia cu debitul masic al unui fluid printr-o conductă, putem spune că, în cazul curentului electric, avem un debit de purtători de sarcină electrică printr-o suprafață transversală a conductorului. În cazul fluidelor, putem asocia debitul la orice suprafață orientată. În baza analogiei mai sus menționate, extindem și noțiunea de curent electric la o suprafață orientată (debitul purtătorilor de sarcină prin acea suprafață). Fie Δi_n intensitatea curentului electric asociată unei mici suprafețe plane ΔS , de orientare \mathbf{n} , cu centrul în punctul P . Fie:

$$J_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta i_n}{\Delta A} \quad (3.2)$$

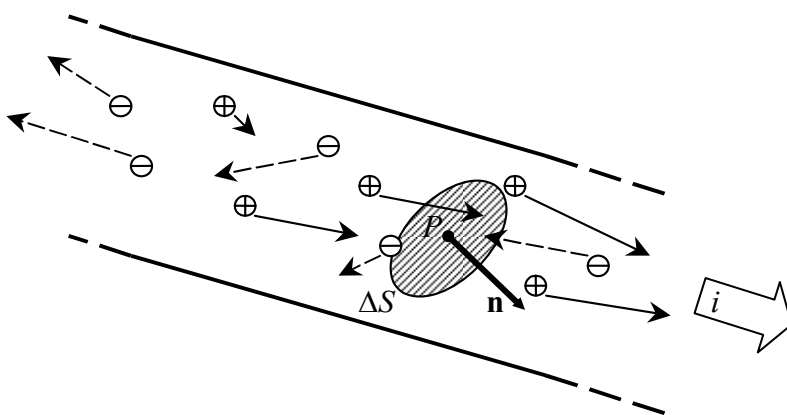


Fig. 3.2. Mișcarea purtătorilor de sarcină.

unde ΔA este aria micii suprafețe ΔS care se “strânge” în jurul punctului P , păstrând orientarea \mathbf{n} . Fie $J_{n_{\max}}$ valoarea maximă a lui J_n , obținută pentru orientarea \mathbf{n}_{\max} . Numim densitatea curentului electric în punctul P , mărimea vectorială:

$$\mathbf{J} = J_{n_{\max}} \mathbf{n}_{\max} \quad (3.3)$$

Densitatea curentului electric este analoagă cu $\tau \mathbf{v}$, unde \mathbf{v} este viteza fluidului, iar τ este densitatea de masă. Pentru o direcție arbitrară \mathbf{n} , avem:

$$J_n = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \quad (3.4)$$

Pentru o suprafață orientată arbitrară S , avem (Fig. 3.3):

$$i_S = \sum_k \Delta i_{n_k} \quad (3.5)$$

Conform relației (3.2), pe fiecare mică suprafață ΔS_k , avem:

$$\Delta i_{n_k} = J_{n_k} \Delta S_k = \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k$$

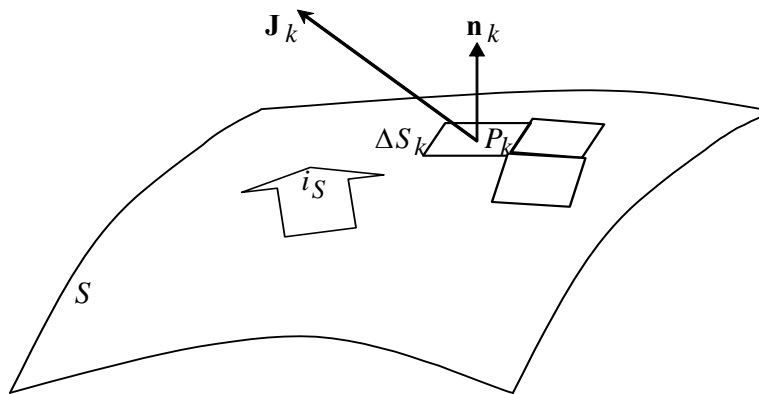


Fig. 3.3. Curentul electric i_S printr-o suprafață S .

și relația (3.5) devine:

$$i_S = \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k \quad (3.6)$$

Când divizarea suprafeței S în mici suprafețe ΔS_k este arbitrar de fină, relația (3.6) devine, la limită:

$$i_S = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.7)$$

Observație. Definirea densității curentului electric suferă de lipsă de rigurozitate. Într-adevăr, dacă ținem cont de modul în care a fost definit curentul electric, măsurarea forței asociate unei suprafețe ΔS nu are sens. Extinderea mărimii intensitatea curentului electric la suprafața ΔS se face doar intuitiv, pe baza analogiei cu debitul unui fluid, iar această analogie presupune existența unui “supermicroscop”, cu ajutorul căruia se vede deplasarea unor sarcini electrice. De fapt, se face apel la modelul microscopic al curentului electric, în afara unei teorii macroscopice. În plus, relația (3.4) este admisă tot în baza analogiei cu debitul unui fluid. De fapt, această relație ne permite să spunem că densitatea de volum a curentului electric este vector. Valoarea maximă din relația (3.3) nu definește neapărat un vector decât dacă (3.4) este valabilă. Definirea riguroasă a densității curentului electric și a curentului electric se poate face prin relația dată de legea circuitului electric, dar, din păcate, această variantă ar lipsi noțiunea de curent electric de sensul ei fizic.

3.3. Legea circuitului magnetic

În urma experimentelor, se constată următoarea proprietate:

Tensiunea magnetică pe o curbă Γ este egală cu intensitatea curentului electric pe orice suprafață S_Γ cu bordura Γ adunată cu viteza de creștere a fluxului electric pe suprafața S_Γ , sensul pozitiv prin S_Γ fiind dat de regula burghiului față de sensul de parcurgere al curbei Γ (Fig. 3.4):

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d}{dt} \Psi_{S_\Gamma} \quad (3.8)$$

Termenul $i_H = \frac{d}{dt} \Psi_{S_\Gamma}$ se numește curent electric hertzian. Utilizând relațiile de definire a tensiunii magnetice (2.10), a intensității curentului electric (3.7) și a fluxului electric (1.23), relația (3.8) se mai scrie:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.8')$$

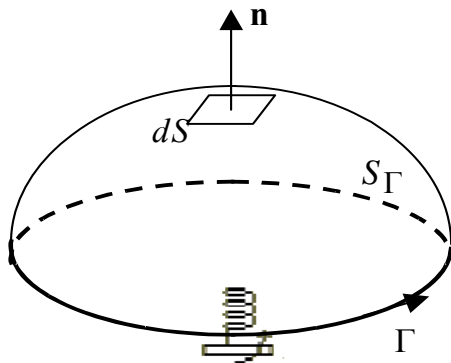


Fig. 3.4. Pentru legea circuitului magnetic.

Consecințe: i) *Forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii imobile.* Dacă mediile sunt imobile, atunci suportul integralei de suprafață din relația (3.8') este constant în timp și derivata în raport cu timpul intră sub semnul de integrare:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.9)$$

Aplicând formula lui Stokes în membrul stâng al relației (3.9), rezultă:

$$\int_{S_\Gamma} \text{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.10)$$

Deoarece suportul de integrare este arbitrar, rezultă că integranzii sunt egali:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.11)$$

Relația (3.11) este forma locală a legii circuitului magnetic, cunoscută și sub numele prima lege a lui Maxwell sau formula generalizată a lui Ampere.

ii) ***Forma locală a legii circuitului magnetic pentru medii în mișcare.***

Dacă mediul este în mișcare, atunci suportul integralei de suprafață din relația (3.8') este variabil în timp și derivata în raport cu timpul intră sub semnul de integrare sub forma derivatei substanțiale de flux (Anexa A):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\Gamma}} \frac{d_f \mathbf{D}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.12)$$

unde (v. Anexa A):

$$\frac{d_f \mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (3.13)$$

Dacă ținem cont de forma locală a legii fluxului electric (1.25), avem:

$$\frac{d_f \mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \rho_v + \operatorname{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (3.14)$$

La fel ca la punctul precedent, aplicăm formula lui Stokes în membrul stâng al relației (3.12) și obținem:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d_f \mathbf{D}}{dt} \quad (3.15)$$

sau:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \rho_v + \operatorname{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (3.15')$$

În relația (3.15'), avem:

- \mathbf{J} , densitatea curentului de conducție;
- $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, densitatea curentului de deplasare;
- $\mathbf{J}_c = \mathbf{v} \rho_v$, densitatea curentului de convecție;
- $\mathbf{J}_R = \operatorname{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$, densitatea curentului Roentgen teoretic.

Integralele de suprafață ale densităților de curent de mai sus definesc curenții de conducție, de deplasare, de convecție și, respectiv, Roentgen teoretic.

Observație. Ultimul termen din relația (3.15') nu este verificat experimental. Este verificat doar curentul Roentgen experimental, în care intră polarizația electrică \mathbf{P} , în loc de inducție electrică:

$$\mathbf{J}'_R = \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$$

Din fericire, contribuția acestui termen în membrul drept al relației (3.15') este importantă doar în cazul mediilor puternic polarizate electric și care se deplasează cu viteze mari.

iii) **Teorema lui Ampere.** Dacă în relațiile (3.8) și (3.8') neglijăm curentul hertzian $i_H = \frac{d}{dt} \Psi_{S_\Gamma}$, rezultă:

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} \quad (3.16)$$

sau:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.16')$$

Aplicând relația lui Stokes în membrul stâng, rezultă și forma locală a teoremei lui Ampere:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.17)$$

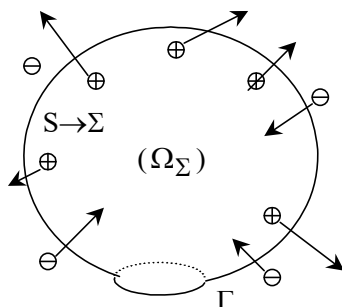


Fig. 3.5. Teorema conservării sarcinii electrice.

iv) **Teorema conservării sarcinii electrice.**

Intensitatea curentului electric printr-o suprafață închisă este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice din interiorul suprafeței.

Demonstrație. Fie o suprafață S cu bordura Γ arbitrar de mică, tinzând către un punct (Fig.3.5). Atunci, suprafața S tinde către o

suprafață închisă Σ . Membrul stâng al relației (3.8') tinde către 0 și relația (3.8') devine:

$$0 = \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

Dacă ținem cont de legea fluxului electric (par.1.9, relația (1.24)) și dacă notăm

$$i_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ rezultă:}$$

$$i_{\Sigma} = -\frac{d}{dt} q_{\Sigma} \quad (3.18) \blacksquare$$

Dacă sarcina electrică este distribuită în volum cu densitatea de volum ρ_v , atunci mai putem scrie:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho_v dv \quad (3.18')$$

Forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice pentru medii

imobile. În cazul mediilor imobile, derivata din membrul drept al relației (3.18') intră sub semnul de integrare sub forma derivatei parțiale și, dacă aplicăm formula lui Gauss în membrul stâng, avem:

$$\int_{\Omega_{\Sigma}} \operatorname{div} \mathbf{J} dv = - \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Suportul de integrare fiind arbitrar, rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (3.19)$$

Forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice pentru medii în

mișcare. Dacă mediile sunt în mișcare, atunci, suportul de integrare Ω_{Σ} fiind

variabil în timp, derivata în raport cu timpul intră sub semnul de integrare sub forma derivatei substanțiale de volum (/1/ Anexa A):

$$\int_{\Omega_{\Sigma}} \text{div} \mathbf{J} dv = - \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{d_v \rho_v}{dt} dv$$

și rezultă:

$$\text{div} \mathbf{J} = - \frac{d_v \rho_v}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v} \rho_v) \right) \quad (3.20)$$

Observații: a) Tot la relația (3.20) se poate ajunge și aplicând operatorul div în membrul stâng al relației (3.15'). Deoarece $\text{div}(\text{rot}(\))=0$, rezultă:

$$0 = \text{div} \mathbf{J} + \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v} \rho_v)$$

Ținând cont de forma locală a legii fluxului electric (par.1.9, relația (1.25)), avem:

$$\text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{D} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

și rezultă relația (3.20).

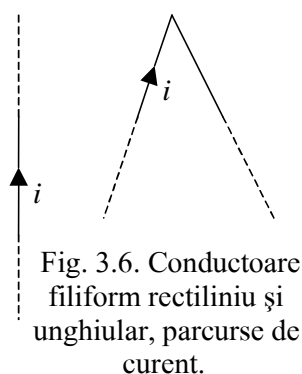
b) Deși legea circuitului magnetic nu este întotdeauna verificată experimental, teorema conservării sarcinii electrice, care este dedusă din această lege, este totuși verificată experimental. Se observă că “abaterea” de la experiment, din relația (3.15'), este dată de diferența dintre densitățile curenților Roentgen experimental și teoretic:

$$\mathbf{J}'_R - \mathbf{J}_R = \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}) - \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_0 \text{rot}(\mathbf{E} \times \mathbf{v})$$

Prin aplicarea operatorului div relației (3.15'), această mărime dispare.

c) În foarte multe lucrări, teorema conservării sarcinii electrice este denumită lege. Un motiv este faptul că afirmația făcută de această teoremă este ușor de admis, fără demonstrație, dacă facem uz de analogia dintre debitul unui fluid și curentul electric, ca debit de purtători de sarcină. “legea” conservării sarcinii electrice este analoagă cu cea a conservării masei. Curentul electric prin suprafața închisă Σ apare când purtătorii de sarcină electrică traversează această suprafață, părăsind domeniul V_{Σ} (sau purtătorii de sarcină electrică negativă intră în domeniul V_{Σ}). Atunci sarcina electrică din domeniul V_{Σ} scade. Prin comparație, afirmația din cadrul legii circuitului magnetic este mult mai complicată și mult mai greu de admis direct, fără demonstrație.

d) *Argumentare pentru legea circuitului magnetic.* De fapt, formularea legii



circuitului magnetic a rezultat din teorema lui Ampere, din “legea” conservării sarcinii electrice și din legea fluxului electric. Intr-adevăr, teorema lui Ampere poate fi relativ ușor de intuit, cel puțin în aer, stabilind câmpul magnetic produs de un fir rectiliniu infinit lung (v. Partea a IV-a, Cap.4, par.4.2) și de un conductor filiform în formă de unghi (Fig. 3.6), apoi, prin superpoziție, câmpul

magnetic produs de un conductor de forma unghiului teșit (Fig.3.7) și, în final, câmpul magnetic produs de o spiră filiformă de formă oarecare (Fig.3.8).

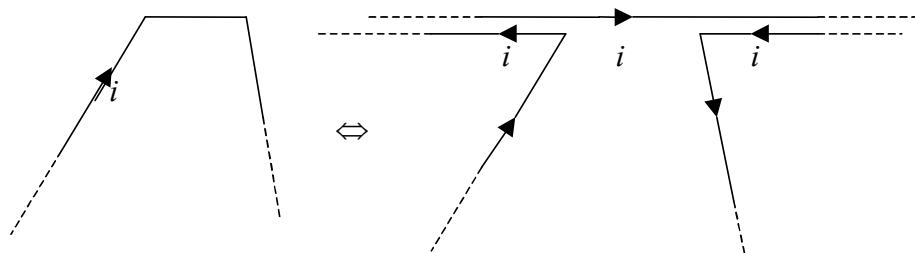


Fig.3.7. Formarea unui conductor filiform de forma unghiului teșit prin suprapunerea unui conductor filiform și a două conductoare unghiulare.

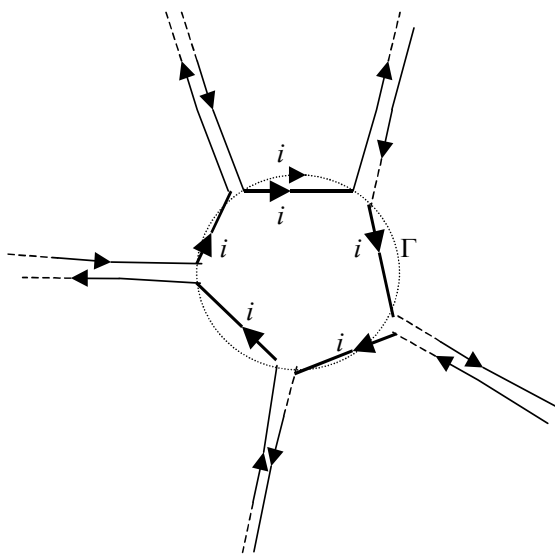


Fig.3.8. Formarea unui conductor filiform oarecare Γ din conductoare de forma unghiului teșit.

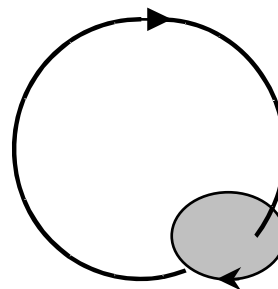


Fig. 3.9. Pentru teorema lui Ampere.

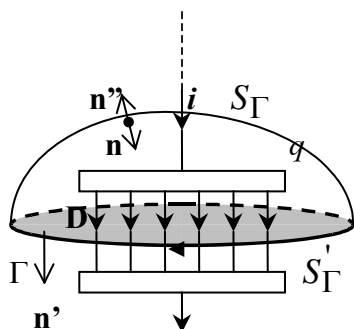


Fig. 3.10. Justificarea curentului de deplasare.

Aplicarea teoremei lui Ampere pentru conductoare închise se face fără probleme (Fig.3.9). Dacă însă la capetele conductoarelor se poate aduna sarcină electrică (v. condensatorul, la Partea a II-a, Cap.2), atunci, la aplicarea teoremei lui Ampere, apare o contradicție. Când suprafața S_Γ de bordură Γ taie conductorul, teorema este verificată, tensiunea magnetică pe curba Γ fiind egală cu curentul pe suprafața S_Γ .

Dar dacă suprafața S'_Γ cu aceeași bordură Γ trece prin mediul izolant de la capătul conductorului (Fig.3.10), unde se poate aduna sarcină electrică, atunci curentul pe suprafața S'_Γ este nul și rezultă că tensiunea magnetică pe curba Γ nu este bine definită (absurd: $u_{m\Gamma} = \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$). Dacă admitem valabilitatea “legii” conservării sarcinii electrice, atunci:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3.21)$$

Într-adevăr, fie suprafața S''_{Γ} care ocupă în spațiu aceeași poziție ca și S_{Γ} , dar este orientată invers. Relația (3.21) rezultă din aplicarea “legii” conservării sarcinii electrice pe suprafața închisă $\Sigma = S''_{\Gamma} \cup S'_{\Gamma}$. Totodată, din legea fluxului electric rezultă:

$$q = \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

și din (3.21) rezultă:

$$i = \frac{d}{dt} \int_{S'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = i_{H_{S'}} \quad (3.22)$$

unde $i_{H_{S'}}$ este curentul hertzian de pe suprafața S' . Relația (3.22) sugerează ca în teorema lui Ampere să înlocuim curentul de conducție i cu suma dintre acest curent și curentul hertzian pe aceeași suprafață de bordură Γ :

$$i_T = i + i_H \quad (3.23)$$

astfel încât, dacă suprafața de bordură Γ trece prin conductor (S_{Γ}), se obține curentul de conducție, dar, dacă suprafața cu aceeași bordură trece prin mediul izolant de la capătul conductorului, unde se poate aduna sarcină electrică (S'_{Γ}), atunci, în membrul drept, obținem curentul hertzian, egal cu curentul i și contradicția semnalată în teorema lui Ampere dispare. Modificarea (3.23) adusă teoremei lui Ampere reprezintă de fapt legea circuitului magnetic.

3.4. Legea legăturii dintre densitatea curentului electric \mathbf{J} și intensitatea câmpului electric \mathbf{E} (Legea conducției)

Pentru majoritatea mediilor, se poate defini o legătură între \mathbf{J} și \mathbf{E} . În funcție de această legătură, avem:

a) Medii liniare.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.24)$$

sau

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (3.24')$$

unde σ se numește conductivitate, iar ρ se numește rezistivitate. Dacă $\rho=0$, spunem că mediul este perfect conductor, iar dacă $\sigma=0$, spunem că mediul este perfect izolant. În general $\sigma \geq 0$.

b) Medii liniare cu câmp electric imprimat.

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (3.25)$$

unde \mathbf{E}_i se numește intensitatea câmpului electric imprimat și reprezintă cauze neelectrice, care pot conduce la apariția curentului electric (pentru $\mathbf{E}=0$, putem avea $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_i$). Aceste cauze pot fi de natura mecanică (de exemplu corpuri accelerate), de natură chimică (de exemplu diferențe de mobilități pentru ioni sau contacte între metale diferite), termică (de exemplu diferență de temperatură între cele două puncte de sudură, ale unor fire metalice cu compoziții diferite) etc.

c) Medii neliniare

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E})$$

3.5. Legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme, prin conducție

În urma experimentelor, se constată următoarea proprietate:

Densitatea de volum a puterii care se transformă din forma electromagnetică în alte forme, prin conducție, este

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (3.26)$$

Dacă mediul este liniar (2.24), atunci

$$p = \sigma E^2 = \rho J^2 \geq 0 \quad (3.27)$$

și că în cazul mediilor liniare, energia electromagnetică se transformă ireversibil în căldură (efectul Joule). Dacă mediul este liniar, cu câmp electric imprimat (2.25), atunci

$$p = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_i \quad (3.28)$$

Primul termen din membrul drept al relației (3.28) este pozitiv și reprezintă puterea electromagnetică care se transformă ireversibil în căldură, în timp ce al doilea termen poate fi negativ sau pozitiv; el reprezintă partea de putere electromagnetică care se poate transforma reversibil în alte forme de putere.