

Capitolul 2

Legile și principalele teoreme ale teoriei macroscopice a câmpului electric

2.6. Legea fluxului electric

h) Teorema echivalenței dintre un dipol și un mic corp polarizat

Un mic corp polarizat de moment electric \bar{p} și un dipol electric de moment electric dipolar \bar{p}_d sunt echivalenți atât din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare exercitate asupra lor de un câmp electric exterior, cât și al câmpului electric propriu pe care și le asociază:

$$\bar{p} = \bar{p}_d$$

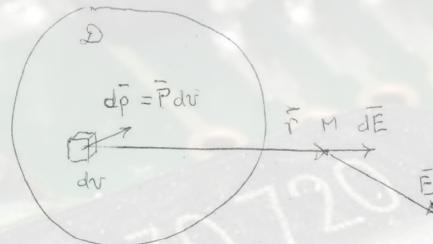


Fig.3.12

Pe baza acestei echivalențe și a formulei (4), câmpul electric într-un punct M din exteriorul unui corp masiv polarizat cu polarizația \bar{P} este (Fig. 3.12)

$$\bar{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\bar{P} \cdot \bar{r})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{P}}{r^3} \right] dv \quad (5)$$

i) Forța și cuplul asupra unui dipol plasat într-un câmp electric exterior

Forța și cuplul care acționează asupra unui mic corp polarizat sunt date de expresiile:

$$\bar{F} = (\bar{p} \nabla) \bar{E} \quad \text{și} \quad \bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}$$

Forța care acționează asupra dipolului situat într-un punct O al unui câmp exterior \bar{E} este (Fig. 3.13)

$$\begin{aligned} \bar{F}_d(O) &= q \bar{E}(\bar{r} + \Delta \bar{l}) - q \bar{E}(\bar{r}) = \\ &= q \left[\bar{E}(\bar{r}) + (\Delta \bar{l} \nabla) \bar{E} - \bar{E}(\bar{r}) \right] = (\bar{p}_d \nabla) \bar{E} = \bar{p}_d \times \bar{E} \end{aligned}$$

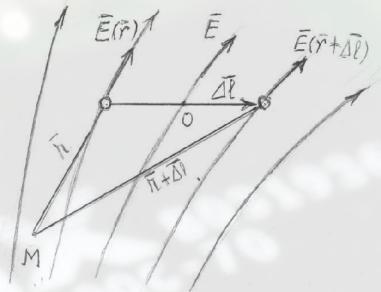


Fig. 3.13

Cuprul se calculează în felul următor:

$$\begin{aligned}\bar{C}_d(O) &= -\frac{\bar{\Delta l}}{2} \times \left[-q\bar{E}\left(-\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) \right] + \frac{\bar{\Delta l}}{2} \times \left[q\bar{E}\left(\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) \right] = \frac{q\bar{\Delta l}}{2} \times \bar{E}\left(-\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) + \frac{q\bar{\Delta l}}{2} \times \bar{E}\left(\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) = \\ &= \bar{p}_d \times \frac{1}{2} \left[\bar{E}\left(\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) + \bar{E}\left(-\frac{\bar{\Delta l}}{2}\right) \right] \approx \bar{p}_d \times \bar{E}\end{aligned}$$

Aceste expresii care s-au obținut pentru dipol, o forță și un cuplu, sunt identice cu cele obținute pentru un mic corp polarizat.

j) Sarcinile electrice de polarizație

Considerăm un corp masiv polarizat electric D_Σ . Pe baza echivalenței dintre un mic corp polarizat și un dipol electric, se pot înlocui elementele de volum ale corpului cu dipoli elementari (Fig. 3.14).

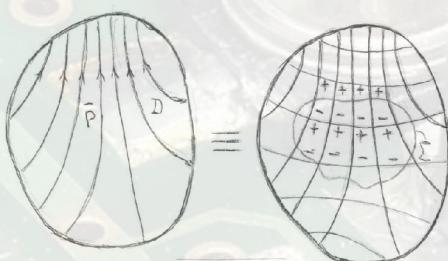


Fig. 3.14

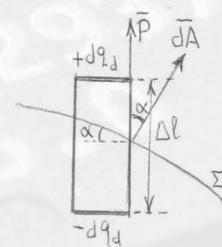


Fig. 3.15

Din Fig. 3.15 se poate scrie $PdV = dq_d \Delta l$ sau $P dA_t \Delta l = dq_d \Delta l$ în care, $dq_d = P dA \cos \alpha$ cu $dA \cos \alpha = A_t$ rezultă, $dq_d = \bar{P} dA$

Sarcina de polarizație din corpul masiv D_Σ se află pe suprafața interioară a acestuia

$$q_{p,\Sigma} = - \oint_{\Sigma} dq_d = - \oint_{\Sigma} \bar{P} dA = - \int_{D_\Sigma} \operatorname{div} \bar{P} dA$$

De altă parte, această sarcină se poate exprima și cu ajutorul densității de volum a sarcinii de polarizație:

$$q_{p,\Sigma} = \int_{D_\Sigma} \rho_{v,p} dv$$

Întrucât D_Σ este oarecare, se pot egala mărurile din integrale. Reținem deci următoarele rezultate:

$$q_{p,\Sigma} = -\oint_{\Sigma} \overline{P} \cdot d\overline{A} \quad (6)$$

$$\rho_{v,p} = -\operatorname{div} \overline{P} \quad (7)$$

Pentru corpuri polarizate diferit între care există o *suprafață de discontinuitate* (Fig. 3.16).

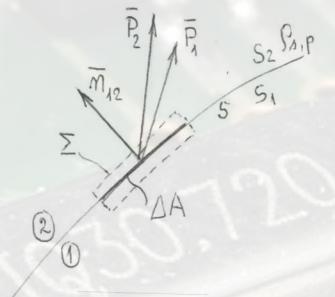


Fig. 3.16

Suprafața închisă de calcul Σ este foarte aplatizată și are cele două fețe ΔA de o parte și de alta a suprafeței de discontinuitate. Exprimăm sarcina $q_{p,\Sigma}$ din interiorul suprafeței Σ atât cu ajutorul fluxului polarizației electrice cât și cu ajutorul densității de suprafață a sarcinii de polarizație

$$\begin{aligned} q_{p,\Sigma} &= -\oint_{\Sigma} \overline{P} \cdot \overline{n} dA \approx -(-\overline{P}_1 \cdot \overline{n}_{12} \Delta A + \overline{P}_2 \cdot \overline{n}_{12} \Delta A) = \\ &= -\overline{n}_{12} (\overline{P}_2 - \overline{P}_1) \Delta A \end{aligned}$$

$$q_{p,\Sigma} = \rho_{s,p} \Delta A$$

Egalând rezultatele, se obține

$$\rho_{s,p} = \overline{n}_{12} (\overline{P}_1 - \overline{P}_2) = -\operatorname{div}_s \overline{P} \quad (8)$$

Un *cas particular* este cel al densității de suprafață a sarcinii de polarizație $\rho_{s,p}$ care apare la suprafața unui corp polarizat cu polarizația \bar{P} când în exteriorul lui este vid. Această densitate se obține din relația (8) considerând particularizările (Fig. 3.17)

$$\bar{P}_1 \equiv \bar{P}, \quad \bar{P}_2 = 0 \quad \text{și} \quad \bar{n}_{12} = \bar{n}.$$

Se obține

$$\rho_{s,p} = \bar{P} \bar{n}$$

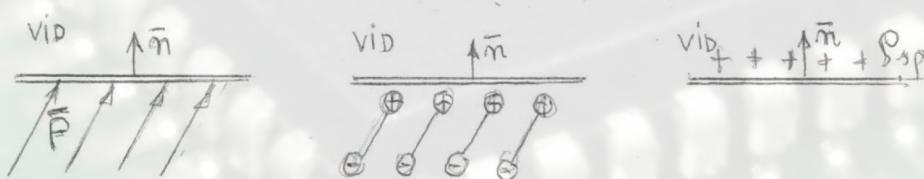


Fig.3.17

2.7. Legea fluxului magnetic

Enunț: Fluxul magnetic printr-o suprafață închisă este nul

$$\oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot \overline{n} \, dA = 0 \quad (1)$$

a) Forma integrală

$$\oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot \overline{n} \, dA = 0 \quad (1')$$

Concluzii:

- Prin comparație cu legea fluxului electric, legea fluxului magnetic stabilește că nu există un analog magnetic al sarcinii electrice
- Liniile de câmp magnetic sunt curbe închise.
- Fluxul magnetic prin orice suprafață deschisă care se sprijină pe o curbă închisă este nul

b) Forma locală

$$\oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot \overline{n} \, dA = \int_{D_{\Sigma}} \operatorname{div} \overline{B} \, dv = 0$$

de unde rezultă

$$\operatorname{div} \overline{B} = 0 \quad (2)$$

Câmpurile de vectori de divergență nulă de numesc câmpuri solenoidale (liniile de câmp sunt linii închise)

c) Cazul suprafețelor de discontinuitate

La o suprafață de separație (Fig. 3.18) se definește divergența de suprafață a inducției magnetice. Suprafața închisă Σ are forma asemănătoare cu cea din Fig. 3.06

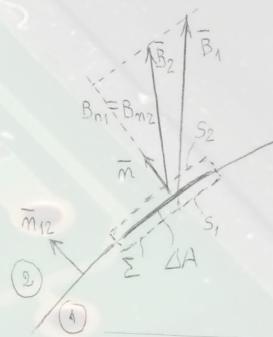


Fig. 3.18

$$\Phi_{\Sigma} \cong - \int_{S_1} \bar{B}_1 \bar{n}_{12} dA + \int_{S_2} \bar{B}_2 \bar{n}_{12} dA = - \bar{B}_1 \bar{n}_{12} \Delta A + \bar{B}_2 \bar{n}_{12} \Delta A = \bar{n}_{12} (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \Delta A = 0$$

Expresia obținută este divergența de suprafață a inducției magnetice :

$$\bar{n}_{12} (\bar{B}_2 - \bar{B}_1) = 0 \quad \text{divs } \bar{B} = 0, \quad (3)$$

de unde

$$B_{1n} = B_{2n}$$

Traversarea unei suprafețe de discontinuitate de către liniile de câmp ale fluxului magnetic se face întotdeauna cu *conservarea componentei normale a inducției magnetice*

Identitatea algebrică:

$$\text{div rot } \bar{G} \equiv 0 \quad (4)$$

(în care \bar{G} este un vector oarecare) permite introducerea unui vector \bar{A} numit **potențial magnetic vector**. Cu ajutorul acestuia, relația (2) se mai poate scrie astfel:

$$\text{div rot } \bar{A} = 0$$

în care s-a înlocuit

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A} \quad (5)$$

Pentru definirea completă a acestui câmp de vectori se adoptă relația:

$$\text{div } \bar{A} = 0 \quad (6)$$

numită condiția de etalonare a câmpului.

Astfel, relația $\text{div } \bar{B} = \nabla \cdot \bar{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$ este utilă pentru diverse calcule analitice și numerice.

Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă limitată de o curbă închisă Γ poate fi exprimat cu ajutorul circulației potențialului magnetic, vector folosind teorema Stokes:

$$\Phi_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{B} \cdot \bar{n} dA = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \bar{A} \cdot \bar{n} dA = \oint_{\Gamma} \bar{A} \cdot d\bar{l}$$

2.8. Legea inducției electromagnetice

Numim *inducție electromagnetică* fenomenul constatat experimental prin care se produce o tensiune electromotoare (t.e.m.) într-un circuit sau de-a lungul oricărora curbe închise, ca urmare a variației fluxului magnetic, care străbate orice suprafață deschisă mărginită de acea curbă. Tot experimental se arată că o t.e.m. nenulă se obține și în situația în care câmpul magnetic este invariabil în timp, dar mediul se află în mișcare antrenând astfel de curbe.

Enunț: *Tensiunea electromotoare în lungul unei curbe închise este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic prin orice suprafață deschisă mărginită de acea curbă închisă*

$$e_r = -\frac{d\Phi_{S_r}}{dt} \quad (1)$$

Aceasta este o lege generală (nu intervin constante de material), dinamică (intervine timpul) (Fig. 3.33).

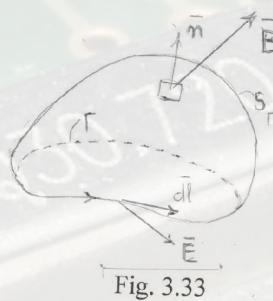


Fig. 3.33

Observații

- Curba Γ poate fi luată în lungul unui conductor electric filiform. În general acest lucru nu este necesar, curba Γ putând avea orice formă fiind dusă prin izolați sau vid
- Dacă mediul considerat este în mișcare curba Γ este atașată corpului în mișcarea lui.
- Sensul t.e.m. este de așa natură încât efectele ei se opun sursei care i-a dat naștere (regula lui Lenz)

a) Forma integrală

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \overline{B} \cdot \overline{n} \, dA = - \int_{S_{\Gamma}} \left[\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \operatorname{div} \overline{B} + \operatorname{rot}(\overline{B} \times \overline{v}) \right] \overline{n} \, dA = \\ = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{n} \, dA + \oint_{\Gamma} (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot d\overline{l}$$

unde s-a considerat conform legii fluxului magnetic $\operatorname{div} \overline{B} = 0$, s-a folosit teorema Stokes pentru transformarea integralei simple în integrală dublă pentru membrul din dreapta, iar \overline{v} este viteza punctelor suprafeței S_{Γ} mărginită de curba Γ antrenată de corpul aflat în mișcare.

Mărimile

$$e_t = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot \overline{n} \, dA$$

reprezintă t.e.m. indușă prin transformare (caracteristică obținerii tensiunii electrice în transformatorul electric), respectiv

$$e_m = \oint_{\Gamma} (\overline{v} \times \overline{B}) \cdot d\overline{l}$$

este t.e.m. indușă prin mișcare (caracteristică producerii tensiunii electrice în cazul generatoarelor electrice).

Observație Suma celor doi termeni depinde de sistemul de referință ales

Aplicații

- 1) Un conductor de lungime orientată \overline{l} taie transversal un câmp magnetic uniform și constant în timp de inducție \overline{B} cu viteza \overline{v} . Să se determine t.e.m. indușă în bară.

Soluție. Formăm un contur Γ care cuprinde bara în mișcare și linii prin aer (punctate) care închid conturul (Fig. 3.34).

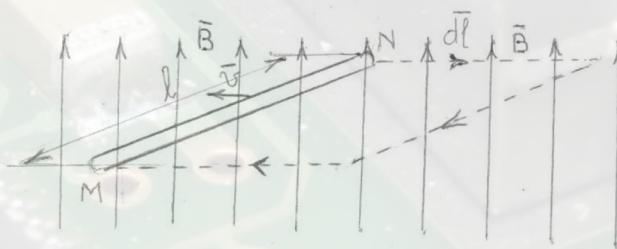


Fig. 3.34

Aplicăm forma integrală a legii inducției electromagnetice sub forma

$$e_m = \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$$

Deoarece vectorii $(\bar{v} \times \bar{B})$ și $d\bar{l}$ sunt omo-paraleli, se obține:

$$e_m = \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = (\bar{v} \times \bar{B}) \bar{l} = v B \sin \frac{\pi}{2} l \cos 0^\circ = Blv$$

Observație. Dacă oricare din vectorii \bar{v} , \bar{B} , \bar{l} sunt paraleli atunci $e_{misc} = 0$. Se induce o t.e.m. doar dacă bara întretele liniile de câmp magnetic.

2) Un disc metalic de rază a se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axului său, într-un câmp magnetic uniform, invariabil în timp, de inducție \bar{B} (discul Faraday). Să se determine tensiunea la bornele între punctele P și P' din Fig. 3.35.

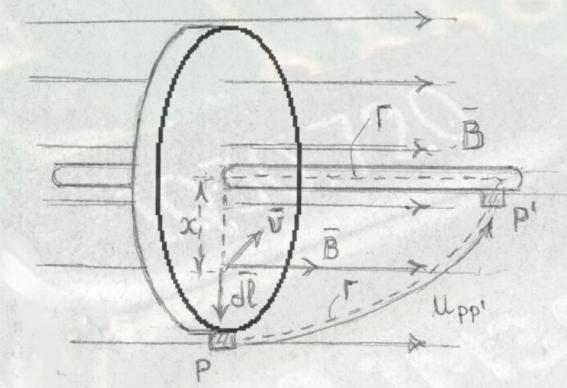


Fig. 3.35

Soluție. Tensiunea electromotoare indușă de-a lungul conturului Γ este:

$$e_r = \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \int_0^P (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} = \int_0^a \omega x B dx = \frac{\omega B a^2}{2}$$

Dar

$$e_r = \oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{l} = \int_0^P + \int_P^{P'} + \int_{P'}^0 = \frac{\omega B a^2}{2}$$

deoarece singura integrală nenulă din cele trei de mai sus este cea de a doua. Rezultă:

$$e_r = u_{pp'} = \frac{\omega B a^2}{2}$$

b) Forme locale ale legii

Din forma integrală a legii pentru domeniile de continuitate și folosind teorema lui Stokes

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot} \bar{E} \cdot \bar{n} dA = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot \bar{n} dA + \int_{S_{\Gamma}} \text{rot} (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{n} dA$$

rezultă pentru orice formă a curbei închise Γ , forma locală a legii

$$\text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot} (\bar{v} \times \bar{B}) \quad (2)$$

sau, pentru medii imobile ($\bar{v} = 0$), rezultă cea de a doua ecuație Maxwell

$$\text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (3)$$

c) Cazul suprafețelor de discontinuitate

Pentru suprafețele de discontinuitate dintre două medii, care sunt plasate în câmpuri magnetice constante sau nule ($\bar{B} = 0, \bar{B} = ct.$), se consideră un contur Γ foarte strâns în jurul acestor suprafețe.

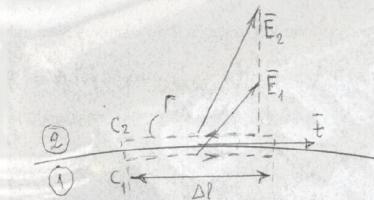


Fig. 3.36

Cu notările din Fig. 3.36 și notând cu C_1 și C_2 laturile de lungime elementară Δl , din forma integrală a legii, rezultă că t.e.m. de-a lungul conturului este practic nulă

$$e_{\Gamma} = - \frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \approx 0$$

deoarece suprafața S_{Γ} este neglijabilă sau, dezvoltând această relație, se obține:

$$e_{\Gamma} = \int_{C_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{l} + \int_{C_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{l} = \int_{C_1} \bar{E}_1 \cdot \bar{t} d\bar{l} + \int_{C_2} \bar{E}_2 \cdot (-\bar{t}) d\bar{l} = \bar{E}_1 \bar{t} \Delta l - \bar{E}_2 \bar{t} \Delta l = 0$$

Adică

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Rezultă că traversarea unei suprafețe de discontinuitate de către liniile de câmp electric se face întotdeauna cu conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului electric \bar{E} .

c) Teorema refracției liniilor de câmp electric

Se consideră două medii liniare și izotrope de permisivitate ϵ_1 și ϵ_2 separate de o suprafață neîncărcată electric $\rho_s = 0$ (Fig. 3.37) astfel încât

$$\bar{D}_1 = \epsilon_1 \bar{E}_1 \text{ și } \bar{D}_2 = \epsilon_2 \bar{E}_2$$

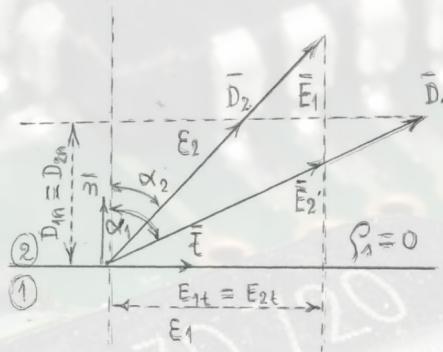


Fig. 3.37

Avem

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}} = \frac{\epsilon_1 E_{1t}}{D_{1n}} \text{ și } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}} = \frac{\epsilon_2 E_{2t}}{D_{2n}}$$

Se împart cele două tangente

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1 E_{1t}}{D_{1n}} \frac{D_{2n}}{\epsilon_2 E_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

și se obține raportul tangentelor unghiurilor de incidentă ale liniilor de câmp (de flux) electric la traversarea unei suprafețe de discontinuitate. Se pot introduce următoarele module de inducție și câmp electrice:

$$D = \sqrt{D_n^2 + D_t^2} = \sqrt{D_n^2 + (\epsilon E_t)^2} \quad \text{și} \quad E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} = \sqrt{\left(\frac{D_n}{\epsilon}\right)^2 + E_t^2}$$

în funcție de componentecele normale și tangențiale ale câmpului și inducției electrice.

d) Teorema potențialului electrostatic

Deoarece în regim electrostatic mărimile sunt statice ($\bar{J} = 0$) și invariabile în timp ($\frac{d}{dt} = 0$)

legea inducției electromagnetice de reduce la expresia $e_r = 0$, adică la următoarele forme integrale și locale pentru domenii de continuitate:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad \text{și} \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0$$

respectiv pentru trecerea câmpului electric la o suprafață de discontinuitate:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Teorema potențialului electrostatic se enunță astfel: *Tensiunea electromotoare în lungul unei curbe închise este nulă*. În regim electrostatic nu există fenomene de inducție electromagnetică.

Consecințe

În regim electrostatic circulația tensiunii electrice în lungul unei curbe închise este nulă

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \sum_{C_k \subset \Gamma} \int_{C_k} \bar{E} \cdot d\bar{l}_k = 0$$

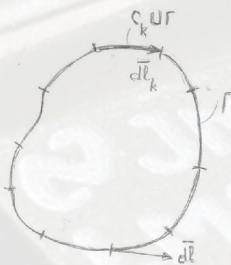


Fig. 3.38

Pentru fiecare curbă C_k din Fig. 3.38 se definește tensiunea electrică

$$\int_{C_k} \bar{E} \cdot d\bar{l}_k = U_{C_k}$$

în care, elementele de linie $d\bar{l}$ și $d\bar{l}_k$ sunt fie omo-paralele, fie antiparalele.

Relația de mai sus devine

$$\sum_{C_k \subset \Gamma} U_{C_k} = 0 \tag{4}$$

care reprezintă teorema Kirchhoff II.

Tensiunea electrică în lungul oricărei curbe deschise trasată între două puncte este invariabilă (tensiunea electrică nu depinde de parcursul de integrare ci numai de extremitățile acestuia).

APLICĂM TEOREMA KIRCHHOFF II (4) CONȚURULUI Γ DIN FIG. 3.39

$$U_{C_1} - U_{C_2} = 0$$

rezultă

$$U_{C_1} = U_{C_2}$$



Fig. 3.39

Se poate defini o funcție scalară de punct, numită potențial electrostatic

Câmpul electrostatic este irațional, sau potențial $\text{rot } \bar{E} = 0$. Câmpul electrostatic derivă din gradientul cu semn schimbat al unei mărimi scalare V

$$\bar{E} = -\nabla V = -\text{grad } V$$

în care V este un câmp de scalari, iar simbolul ∇ are forma în coordonate tri-rectangulare:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Anularea rotorului câmpului electrostatic rezultă și matematic:

$$\text{rot } \bar{E} = \nabla \times \bar{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0 \quad \text{sau} \quad \nabla \times (\nabla V) = 0$$

Expresia $\bar{E} = -\text{grad } V$ nu definește complet potențialul electrostatic, deoarece pentru $V' = V + \text{const.}$ aplicând gradientul, rezultă $\text{grad } V' = \text{grad } V$. Pentru determinarea univocă a potențialului trebuie precizată referința potențialului (condiția de etalonare a câmpului electric).

Pentru două puncte foarte apropiate (Fig. 3.40) avem:

$$dV = -\bar{E} dr$$

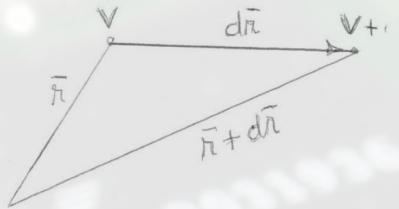


Fig.3.40

Astfel, integrând între punctele M și M_0 cu $\overline{dr} \equiv \overline{dl}$ avem:

$$\int_{M_0}^M dV = \int_M^{M_0} \overline{E} \overline{dl} \quad \text{sau,} \quad V(M) - V(M_0) \equiv \int_M^{M_0} \overline{E} \overline{dl}$$

adică

$$V(M) = V(M_0) + \int_M^{M_0} \overline{E} \overline{dl} \quad (5)$$

Egalitatea (5) de mai sus este relația generală de definire a potențialului electrostatic. Este necesară o dublă convenție pentru alegerea punctului M_0 și a potențialului acestuia. De obicei, dacă nu există distribuție de sarcini și polarizație până la infinit cu $V(M_\infty) = 0$ rezultă

$$V(M) = \int_M^{M_\infty} \overline{E} \overline{dl} \quad (6)$$

Aplicații

1) Potențialul electric al unui corp punctual încărcat cu sarcina electrică Q plasat într-un mediu liniar, omogen și izotrop de permisivitate ϵ (Fig. 3.41).



Fig. 3.41

$$V(M) = \int_M^{M_\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \overline{r} \overline{dl} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

2) Calculul potențialului electric în cazul corpurilor încărcate cu sarcini electrice distribuite

Dacă sarcina electrică Q este distribuită uniform pe o suprafață deschisă S cu densitatea de suprafață ρ_s (Fig. 3.42)

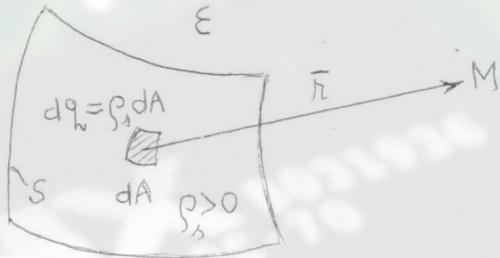


Fig. 3.42

Potențialul electric în punctul M se calculează astfel

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho_s dA}{r}$$

sau, integrând

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_s}{r} dA$$

Dacă sarcina electrică Q este distribuită uniform cu densitatea de sarcină ρ_v în interiorul domeniului D mărginit de suprafața închisă Σ (Fig. 3.43)

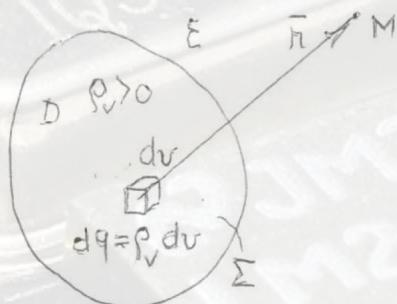


Fig. 3.43

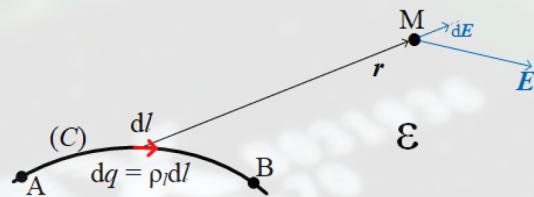
Potențialul electric în punctul M este:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho_v dv}{r}$$

sau, integrând

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_D \frac{\rho_v}{r} dv$$

Dacă sarcina electrică Q este distribuită uniform cu densitatea de linie ρ_l pe o curbă deschisă C



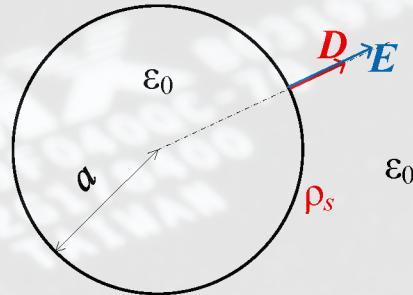
Potențialul electric în punctul M este:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho_l dl}{r}$$

sau, integrând

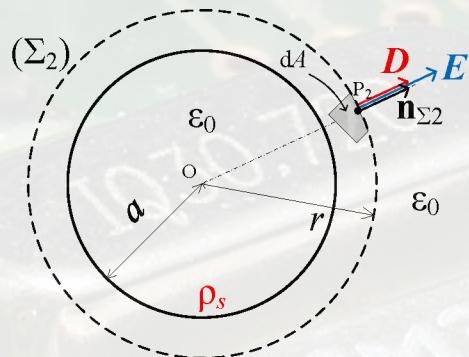
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_C \frac{\rho_l}{r} dl$$

3) O sferă de rază a încărcată cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasată în vid. Să se determine expresia potențialului electrostatic V în interiorul și exteriorul sferei (continuare problema 1 – Curs 4).



Pentru calculul potențialului electrostatic, deoarece corpul de probă (sferă de rază a) are o geometrie finită, se poate considera că potențialul electrostatic de referință, notat P_0 , se poate păsa la infinit, iar $V(P_0)$ se alege de valoare nulă.

Se va analiza cazul $r > a$



Expresia modului intensității câmpului electric, calculată pentru acest caz, este:

$$E = \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

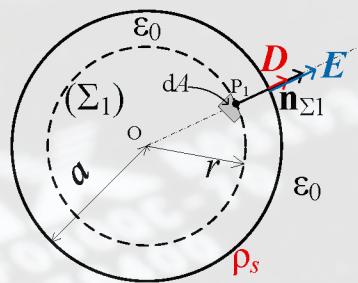
Potențialul electrostatic se va calcula, considerând linia suport a câmpului electric (curba deschisă), din punctul de calcul P_2 către punctul de referință P_0 .

$$V_2(P_2) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} .$$

Astfel se obține:

$$V_2(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -\frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 r}$$

Se va analiza cazul $r < a$



Expresia modului intensității câmpului electric, calculată pentru acest caz, este:

$$E = 0.$$

Chiar dacă valoarea modulului intensității câmpului electric în domeniul din interiorul corpului de probă este nulă, calculul potențialului electrostatic implică, în acest caz, o curbă de calcul care pornește din punctul P_1 către punctul P_0 situat la infinit. Această linie de câmp electric intersectează sfera de rază a (suportul sarcinilor electrice) astfel încât domeniul de aplicare al integralei de linie pentru calculul potențialului electrostatic va avea două componente.

Expresia potențialului electrostatic pentru cazul $r < a$ este:

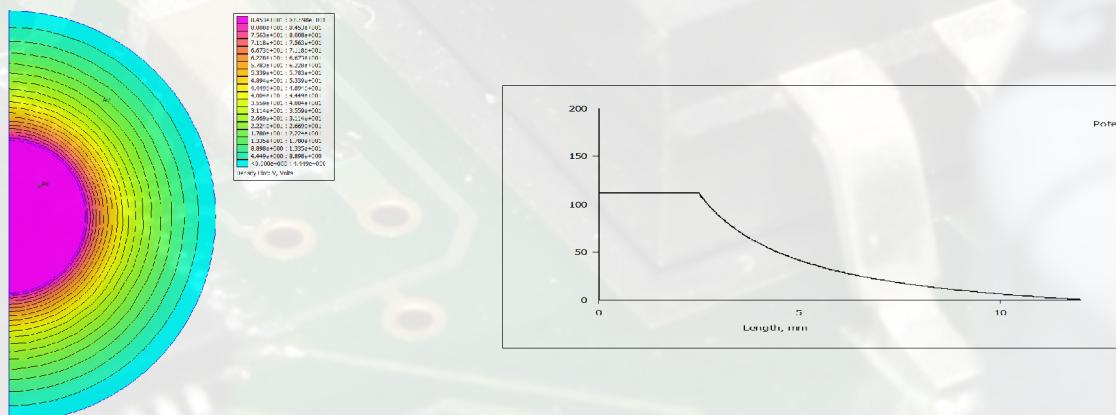
$$V_1(P_1) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Considerând domeniul de integrare se obține:

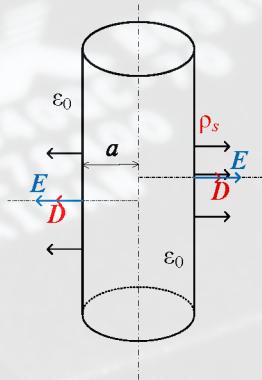
$$V_1(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^a E dr - \int_a^r E dr = - \int_{\infty}^a \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr - \int_a^r \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0}$$

unde pentru calculul integralei de la limita de rază a către infinit s-a utilizat expresia modulului intensității câmpului electric pentru cazul la exterior, identificată anterior.

Simularea numerică prezintă următoarele rezultate:

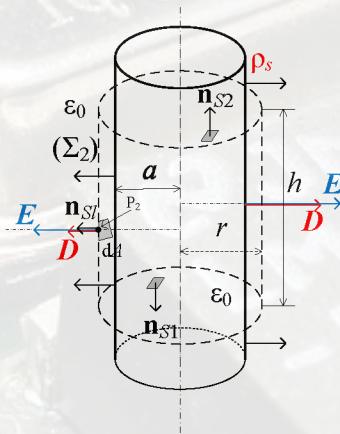


- 4) Un cilindru infinit lung de rază a încărcat cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasat în vid. Să se determine expresia potențialului electrostatic V în interiorul și exteriorul cilindrului (continuare problema 2 – Curs 4).



Pentru calculul potențialului electric, deoarece structura este infinită, nu mai este posibilă alegerea punctului de referință P_0 la infinit ($V(\infty) \neq 0$). Astfel se va considera că P_0 se găsește la o distanță r_0 foarte departe de sursa de câmp electric, iar valoarea potențialului în P_0 este $V(r_0)$

Se va analiza cazul $r > a$



Expresia modului intensității câmpului electric, calculată pentru acest caz, este:

$$E = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 r}$$

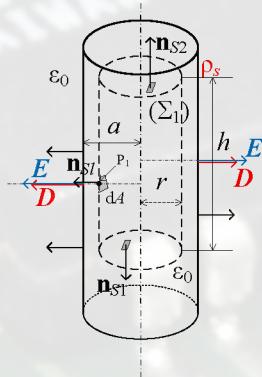
Pentru calculul potențialului electrostatic expresia generală este:

$$V_2(P_2) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

care se dezvoltă pentru geometria problemei sub forma:

$$\begin{aligned} V_2(r) &= V(r_0) - \int_{r_0}^r \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 r} dr = V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \\ &= V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} (\ln r - \ln r_0) = V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \end{aligned}$$

Se va analiza cazul $r < a$



Expresia modului intensității câmpului electric, calculată pentru acest caz, este:

$$E = 0.$$

În mod similar cu problema anterioară, domeniul integralei de linie pentru calculul potențialului electrostatic din punctul P_1 către punctul de referință P_0 intersectează limita de rază a . Astfel se obține:

$$V_1(P_1) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

expresie, care prin identificarea celor două domenii de integrare, devine:

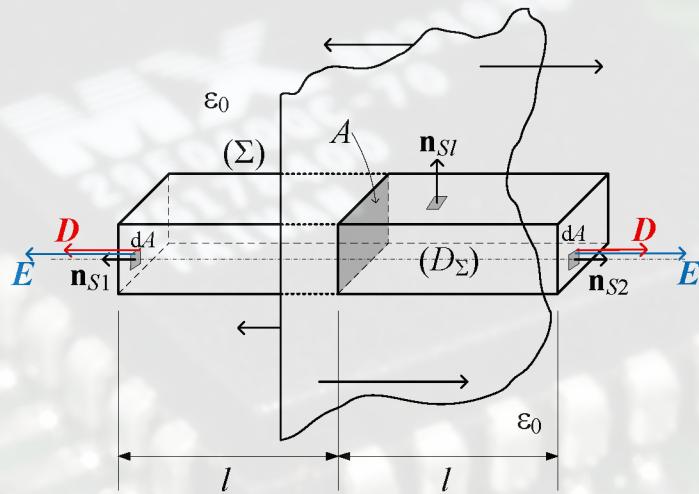
$$V_1(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^a E dr - \int_a^r E dr$$

Termenul identificat pentru domeniul de integrare de la raza r către raza a este nul, iar pentru termenul de la raza a către raza r_0 a punctului de referință P_0 , se utilizează expresia modului intensității câmpului electric obținută pentru cazul $r > a$. Prin calcule succesive se obține:

$$V_1(r) = V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \int_{r_0}^a \frac{1}{r} dr = V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} (\ln a - \ln r_0) = V(r_0) - \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \ln \frac{a}{r_0}.$$

Pentru simplificare se poate alege $V(r_0) = 0$ pentru ambele cazuri.

- 5) Un plan infinit lung, încărcat cu o densitate de sarcină electrică pozitivă $\rho_s > 0$ se află plasat în vid. Să se determine expresia potențialului electrostatic V generat de plan (continuare problema 4 – Curs 4).



Problema prezintă o geometrie extinsă la infinit astfel încât se va considera că punctul de referință P_0 se găsește la o distanță x_0 foarte departe de sursa de câmp electric, iar valoarea potențialului în P_0 este $V(x_0)$

Expresia modului intensității câmpului electric, calculată pentru acest caz, este:

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

Pentru calculul potențialului electrostatic în punctul P expresia este:

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^P E dl = V(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} dx = V(x_0) - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_{x_0}^x dx = V(x_0) - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (x - x_0)$$

Pentru simplificare se poate alege $x_0 = 0$ și $V(x_0) = 0$.

- 6) Suprafața echipotențială este locul geometric al punctelor caracterizate printr-o valoare constantă a potențialului $V = \text{const.}$ (Fig. 3.45).

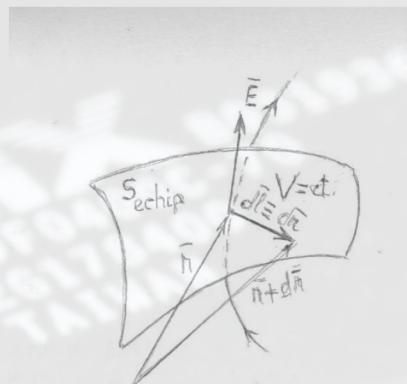


Fig. 3.45

În acest caz, variația potențialului pe suprafață este nul :

$$dV = -\overline{E} \cdot \overline{dI} = 0$$

de unde rezultă că intensitatea câmpului electric este normală la elementul de linie \overline{dI} :

$$\overline{E} \perp \overline{dI}$$

Elementul de linie fiind tangent (inclus) la suprafața echipotențială rezultă că intensitatea câmpului electric este normală la această suprafață:

$$\overline{E} \perp S_{\text{echipot}}$$

În orice punct unde există câmp electric, linia de câmp este perpendiculară pe suprafața echipotențială ce trece prin acel punct.

7) Corpurile masive conductoare sunt echipotențiale, iar liniile de câmp electric sunt ortogonale pe suprafața conductorului (Fig. 3.46).

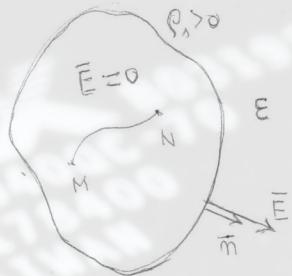


Fig. 3.46

Tensiunea electrică dintre două puncte M și N situate pe suprafața unui corp conductor masiv este

$$V(M) - V(N) = \int_M^N \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

ceea ce implică faptul că potențialele din cele două puncte sunt egale $V(M) = V(N)$;

De asemenea se observă absența componenței tangențiale a câmpului electric la suprafața conductorului, ceea ce confirmă ipoteza inițială (liniile de câmp electric sunt normale la această suprafață):

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad ; \quad \overline{E} = \frac{\rho_s \overline{n}}{\epsilon}$$

unde \overline{n} este vesorul normalei la suprafață, iar ϵ este permitivitatea electrică a mediului din jurul conductorului.

e) Teorema potențialului electrocinetic staționar

Această teoremă este un caz particular al legii inducției electromagnetice în regim electrocinetic staționar ($\frac{d}{dt} = 0$, $\overline{J} \neq 0$).

Teorema potențialului electrocinetic păstrează aceeași enunț ca în regim electrostatic.

Toate consecințele rămân valabile mai puțin cele referitoare la *conductoarele masive*, unde *câmpul electric în conductor nu este nul și nu este perpendicular pe suprafața conductoarelor*.

Tensiunea electromotoare pe un contur închis Γ este nulă:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0.$$

f) Curenții turbionari (Foucault)

Se numesc *curenți turbionari* curenții induși de câmpurile magnetice variabile în timp în conductoarele masive. Câmpul magnetic pătrunde în conductor, iar curenții turbionari atenueaază frontul undei (Fig. 3.47)

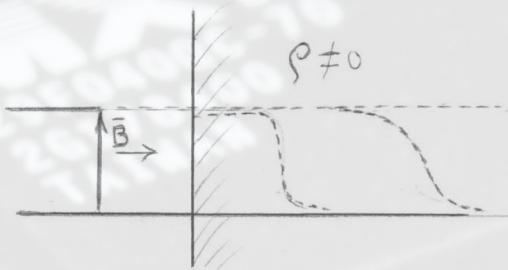


Fig. 3.47

Pentru o variație sinusoidală a câmpului magnetic $B(t) = B_m \sin \omega t$ valoarea maximă a densității curentului indus, are o descreștere exponențială (Fig. 3.48) în care $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$ este *adâncimea de pătrundere a curentului în conductor*. În conductor, densitatea de curent este dependentă atât de spațiu cât și de timp:

$$J(x, t) = J_m(x) \sin [\omega t + \phi(x)].$$

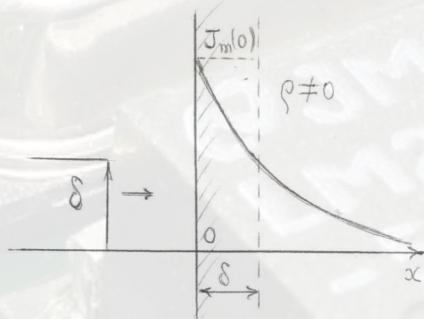


Fig. 3.48

În general, curenții turbionari sunt nedoriți în tehnică pentru că produc pierderi ireversibile prin efect electrocaloric. Densitatea de volum a acestor pierderi este:

$$p_{ec} = \rho J^2$$

Există însă aplicații care utilizează curenții turbionari, cum ar fi călirea sau topirea unor piese metalice. În acest caz, adâncimea de pătrundere δ este distanța de la suprafața conducerii

torului pe lungimea căruia curenții turbionari induși ar trebui uniform repartizați pentru a produce aceleași efecte electrocalorice ca în cazul repartiției lor reale (Fig. 3.49).

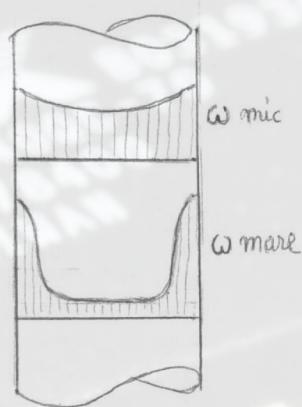


Fig. 3.49

Aplicații

1) Pierderile de putere prin curenți turbionari în tola magnetică (tablă silicioasă din care sunt fabricate miezurile magnetice ale mașinilor electrice) (Fig. 3.50)

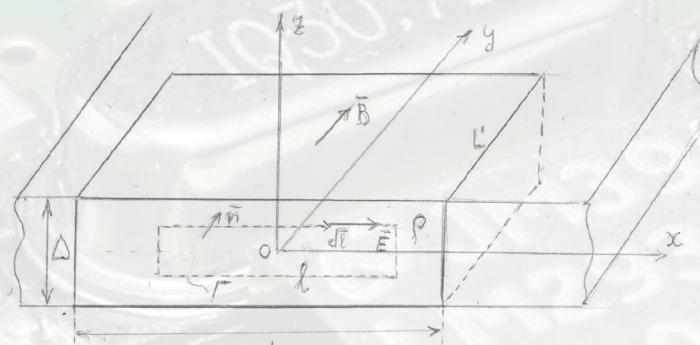


Fig. 3.50

Inducția magnetică din tolă este sinusoidală $B = B_m \sin \omega t$, iar câmpul electric în materialul de rezistivitate ρ este omoparalel cu densitatea de curent indus: $\bar{E} = \rho \bar{J}$.

Tensiunea electromotoare în lungul conturului închis Γ este:

$$e_r = -\frac{d\Phi_{S_r}}{dt}$$

în care,

$$e_r = \oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 2l E(x, i)$$

$$\Phi_{S_r} = \int_{S_r} \overline{Bn} \, dA = 2Iz B(t).$$

Înlocuind relațiile în mod corespunzător, obținem:

$$2IE(z,t) = 2Iz \omega B_m \cos \omega t$$

de unde rezultă densitatea curentului induș

$$J = J(z,t) = -\frac{1}{\rho} \omega B_m z \cos \omega t$$

Densitatea puterii calorice este:

$$p_{ec}(z,t) = \rho J^2 = \frac{1}{\rho} \omega^2 B_m^2 z^2 \cos^2 \omega t$$

sau, considerând relația trigonometrică $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$

$$p(z) = \langle p_{ec}(z,t) \rangle_T = \frac{1}{2\rho} \omega^2 B_m^2 z^2$$

Puterea pierdută în tolă se obține prin integrare:

$$\begin{aligned} P &= \int_{D_{tolă}} p(z) dv = \int_{-A/2}^{A/2} p(z) LL' dz = \frac{1}{2\rho} \omega^2 LL' \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} z^2 dz = \frac{1}{2\rho} \omega^2 B_m^2 LL' \left. \frac{z^3}{3} \right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\rho} \omega^2 B_m^2 LL' \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{1}{2\rho} \omega^2 B_m^2 LL' \frac{1}{3} \left(\frac{2\Delta^3}{8} \right) = \frac{1}{24\rho} \omega^2 B_m^2 \Delta^3 LL' \end{aligned}$$

Pierderile specifice sunt:

$$p_p = \frac{P}{LL' \Delta} = \frac{1}{24\rho} \omega^2 B_m^2 \Delta^2 = \frac{1}{24} \frac{1}{\rho} 4\pi^2 f^2 B_m^2 \Delta^2 = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\rho} f^2 B_m^2 \Delta^2.$$