P A R T E A a II-a. ELECTROSTATICA

1. ECUAŢIILE ELECTROSTATICII

Regimul static este acel regim în care mărimile câmpului electromagnetic nu variază în timp ($\frac{d}{dt}=0$) şi nu au loc transformări de energie din forma electromagnetică în alte forme. În aceste condiţii, legea inducţiei electromagnetice (v. (2.17’) de la Partea I) conduce la:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \tag{1.1}$$

cu forma locală (v. (2.23) de la Partea I):

$$rot\mathbf{E}=0 \tag{1.1'}$$

Legea fluxului electric este (v. (1.24) de la Partea I):

$$\Psi_{\Sigma}=\oint_{\Sigma} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS=q_{\Sigma} \tag{1.2}$$

cu forma locală (v. (1.25) de la Partea I):

$$div\mathbf{D}=\rho_V \tag{1.2'}$$

O relaţie între **D** şi **E** este oferită de legea legăturii între inducţia electrică şi intensitatea câmpului electric. Pentru medii liniare, de exemplu, avem (v. (1.16a) de la Partea I):

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E} \tag{1.3}$$

Privim relaţiile (1.1'), (1.2'), (1.3) ca un sistem de ecuaţii care are ca necunoscută câmpul electric (**D**,**E**). Din punct de vedere matematic, dacă, la aceste ecuaţii, adăugăm şi condiţii de frontieră corect formulate, atunci câmpul electric (**D**,**E**) este unic determinat (v. Anexa B). Deci, putem studia componenta electrică (**D**,**E**) a câmpului electromagnetic, independent de componenta magnetică (**B**,**H**) . Partea din electromagnetism care se ocupa de acest studiu se numeşte **Electrostatică**.

Potenţialul electric

În condiţiile relaţiei (1.1), este valabilă teorema potenţialului electric (v. par.1.7 de la Partea I): există potenţialul electric *V* definit prin relaţia:

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.4}$$

unde integrala se face pe orice drum de la P_0 la *P*, iar P_0 este un punct cu potenţial de referinţă fixat arbitrar. În forma locală, relaţia (1.4) se scrie:

$$\mathbf{E} = -grad V = -\nabla V \tag{1.4'}$$

Înlocuind (1.4') în (1.3) şi apoi în (1.2'), rezultă

$$-div \varepsilon grad V = \nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho_V \tag{1.5}$$

Corpuri conductoare fără câmp electric imprimat

Deoarece, în electrostatică, nu au loc transformări de energie, din legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme şi din legea conducţiei rezultă (v. relaţiile (3.26) şI (3.24) de la Partea I): $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma E^2$=0. Deci, în corpurile conductoare, **E**=0. Din (1.3), rezultă că şi **D**=0, iar din (1.2) rezultă că $\rho_V = 0$. Sarcina electrică se distribuie doar la suprafaţa corpurilor conductoare, cu densitatea de suprafaţa ρ_S. În vecinătatea corpului conductor, componenta normală a inducţiei electrice verifică relaţia (v. si par.4, Partea I):

$$Dn = \rho_S \tag{1.6}$$

iar componenta tangenţială a intensităţii campului electric este nulă:

$$\mathbf{E}_t = 0 \tag{1.7}$$

Corpurile conductoare sunt echipotenţiale. Într-adevăr, deoarece **E**=0, oricare ar fi un drum din interiorul corpului conductor ce leagă punctele P_0 şi P, din relaţia (1.4) rezultă că $V(P) = V(P_0)$.

Teoremă de unicitate

În Anexa B, este formulată şi demonstrată o teoremă generală pentru câmpurile staţionare. Vom prezenta în continuare o consecinţă a acestei teoreme, utilă pentru problemele de electrostatică ce vor urma.

Fie o incintă cu peretele conductor (Fig.1.1). Peretele poate fi şi suprafaţa de la infinit. Deoarece peretele este conductor, el este echipotenţial şi vom lua pe el potenţialul de referinţă nul (uneori, se mai spune că peretele este “masa”). În interiorul incintei, avem n corpuri conductoare (pentru simplitate, vom lua n=3), care şi ele sunt echipotenţiale. În mediul din jurul conductoarelor, sunt cunoscute legătura dintre **D** şi **E**, precum şi densitatea de volum a sarcinii electrice ρ_V. Pentru simplitate o considerăm liniară legătura dintre **D** şi **E** (1.3).

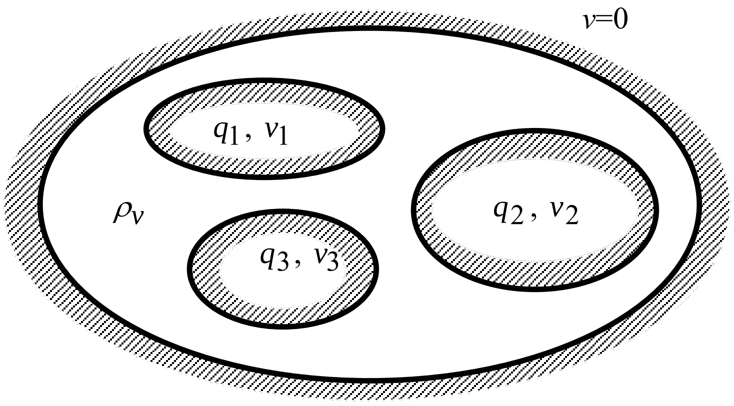

Fig.1.1. Conductoare într-o incintă.

Teorema de unicitate. *Câmpul electric* (**D**,**E**) (*descris de ecuaţiile* (1.1’), (1.2’), (1.3)) *este unic determinat dacă se dau*:

a) *sarcinile electrice ale corpurilor conductoare* q_1, q_2, q_3;

sau:

b) *potenţialele electrice ale corpurilor conductoare* v_1, v_2, v_3.

Observaţie. Teorema de unicitate este valabilă şi dacă mediul din incintă este neliniar, dar cu caracteristică **D**=*f*(**E**) disipativă: $\left(f(\mathbf{E}') - f(\mathbf{E}'')\right), \left(\mathbf{E}' - \mathbf{E}''\right) > 0$, oricare ar fi **E**’≠**E**”. În această categorie, intră toate tipurile de medii, cu exceptia celor cu histerezis.

Teorema de superpoziţie. Presupunem că mediul din incintă este liniar (1.3).

Sarcinilor electrice $(\rho_V', q_1', q_2', q_3')$ *le corespunde unic câmpul electric* (**D**’,**E**’), *iar sarcinilor electrice* $(\rho_V'', q_1'', q_2'', q_3'')$ *le corespunde câmpul electric*

(**D**”,**E**”). *Atunci, sarcinilor* (ρ_v, q_1, q_2, q_3)=α’$(\rho_v', q_1', q_2', q_3')$+α”$(\rho_v'', q_1'', q_2'', q_3'')$ *le corespunde câmpul electric* (**D**,**E**)=α’(**D**’,**E**’)+α”(**D**”,**E**”).

Teorema de superpoziţie rezultă imediat din liniaritatea ecuaţiilor (1.1’), (1.2’), (1.3) şi din teorema de unicitate. Într-adevăr, privind, de exemplu, ecuaţia (1.2’), avem $div\mathbf{D} = div(\alpha'\mathbf{D}' + \alpha''\mathbf{D}'') = \alpha' div\mathbf{D}' + \alpha'' div\mathbf{D}'' = \alpha'\rho_v' + \alpha''\rho_v'' = \rho_v$. Câmpul electric din enunţul teoremei verifică ecuaţiile (1.1’), (1.2’), (1.3) şi este unic.

2. RELAŢIILE DINTRE SARCINILE SI POTENŢIALELE UNUI SISTEM DE CONDUCTOARE (MAXWELL). CONDENSATOARE

Fie o incintă cu peretele conductor în care avem *n* corpuri conductoare (pentru simplitate, vom lua *n*=3). Mediul din jurul conductoarelor este liniar (1.3), iar densitatea de volum a sarcinii electrice este nulă ρ_v=0. Dacă se dau sarcinile electrice ale conductoarelor, atunci rezultă unic câmpul electric (**D**,**E**) şi, ca urmare, potenţialele (v_1, v_2, v_3). Valorilor (q_1, q_2, q_3)=(1,0,0) ale sarcinilor electrice, le corespund potenţialele ale căror valori numerice le notăm cu (p_{11}, p_{21}, p_{31}); pentru valorile (q_1, q_2, q_3)=(0,1,0), notăm valorile potenţialelor cu (p_{12}, p_{22}, p_{32}); iar pentru (q_1, q_2, q_3)=(0,0,1), avem valorile (p_{13}, p_{23}, p_{33}). Atunci, din teorema superpoziţiei (par.2.1), rezultă că pentru sarcinile electrice:

$$(q_1, q_2, q_3)=(Q_1, Q_2, Q_3)=Q_1(1,0,0)+ Q_2(0,1,0)+ Q_3(0,0,1)$$

avem potenţialele:

$$(V_1, V_2, V_3) = Q_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}) + Q_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}) + Q_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})$$

sau:

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + p_{13} Q_3 \\ V_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + p_{23} Q_3 \\ V_3 &= p_{31} Q_1 + p_{32} Q_2 + p_{33} Q_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Relaţiile (2.1) constituie prima formă a relaţiilor dintre sarcinile şi potenţialele unui sistem de conductoare. Matriceal, relaţiile (2.1) se scriu:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \tag{2.1'}$$

Coeficienţii p_{ij} se numesc coeficienţi de potenţial. Se poate arăta (v. cap.3) că matricea coeficienţilor de potenţial (p) este simetrică $p_{ij} = p_{ji}$ şi pozitiv definită: $(Q)^T (p)(Q) > 0$, oricare ar fi matricea $(Q) \neq (0)$. Atunci, ea este inversabilă şi avem:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \lambda_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

sau:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \gamma_{11} V_1 + \gamma_{12} V_2 + \gamma_{13} V_3 \\ Q_2 &= \gamma_{21} V_1 + \gamma_{22} V_2 + \gamma_{23} V_3 \\ Q_3 &= \gamma_{31} V_1 + \gamma_{32} V_2 + \gamma_{33} V_3 \end{aligned} \tag{2.2'}$$

Relaţiile (2.2') constituie a doua formă a relaţiilor dintre sarcinile şi potenţialele unui sistem de conductoare. Coeficienţii γ_{ij} se numesc coeficienţi de influenţă. Matricea coeficienţilor de influenţă este, de asemenea, simetrică şi pozitiv definită. Semnificaţia lor se obţine dând valori particulare potenţialelor în relaţiile (2.2). De exemplu (Fig.2.1), pentru potenţialele (1,0,0), valorile numerice ale sarcinilor electrice sunt $(\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31})$. Potenţialul electric pozitiv de pe primul conductor face ca sarcina electrică adunată pe acest conductor să fie pozitivă. În schimb, pe conductoarele vecine, legate la masă, este atrasă sarcina electrică negativă, cea pozitivă fiind respinsă şi poate părăsi conductoarele, intrând în masă. Cu cât

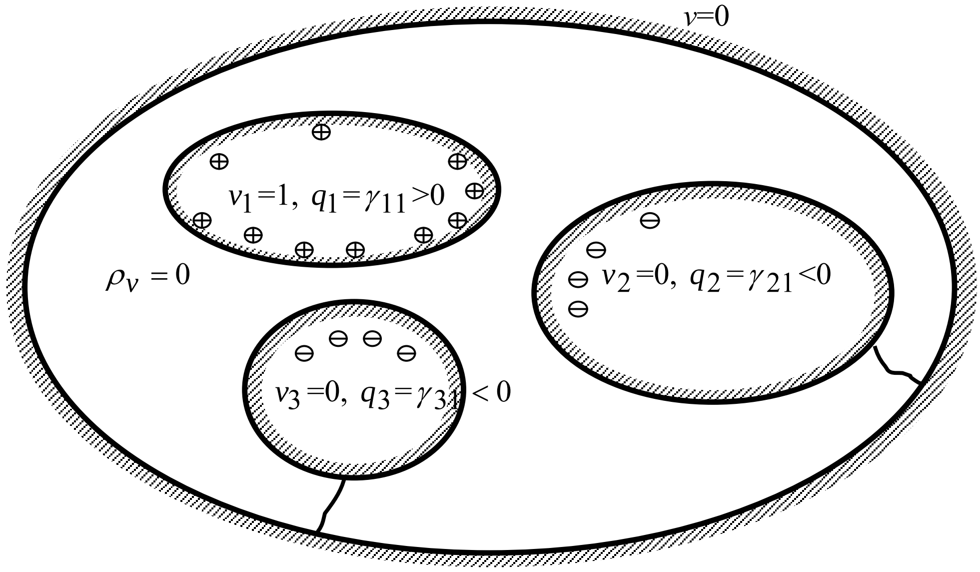

Fig.2.1. Coeficienţi de influenţă.

distanţele dintre conductoare sunt mai mici, cu atât atracţia dintre sarcinile electrice de semne contrarii este mai mare şi, ca urmare, se adună mai multă sarcină negativă, prin influenţă. Conductoarele 2 şi 3 au sarcina electrică negativă.

În prima din relaţiile (2.2) facem următorul artificiu:

$$Q_1=(\gamma_{11}+\gamma_{12}+\gamma_{13})V_1-\gamma_{12}(V_1-V_2)-\gamma_{13}(V_1-V_3)$$

Făcând notaţiile:

$$C_{10}=\gamma_{11}+\gamma_{12}+\gamma_{13},\ C_{12}=-\gamma_{12}>0,\ C_{13}=-\gamma_{13},\ u_{12}=V_1-V_2,\ u_{13}=V_1-V_3,$$

obţinem relaţia:

$$Q_1=C_{10}V_1+C_{12}u_{12}+C_{13}u_{13}$$

Procedând asemănător cu toate relaţiile din (2.2) obţinem a treia formă a relaţiilor dintre potenţialele şi sarcinile electrice ale unui sistem de conductoare:

$$\begin{aligned} Q_1&=C_{10}V_1+C_{12}u_{12}+C_{13}u_{13}\\ Q_2&=C_{21}u_{21}+C_{20}V_2+C_{23}u_{23}\\ Q_3&=C_{31}u_{31}+C_{32}u_{32}+C_{30}V_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

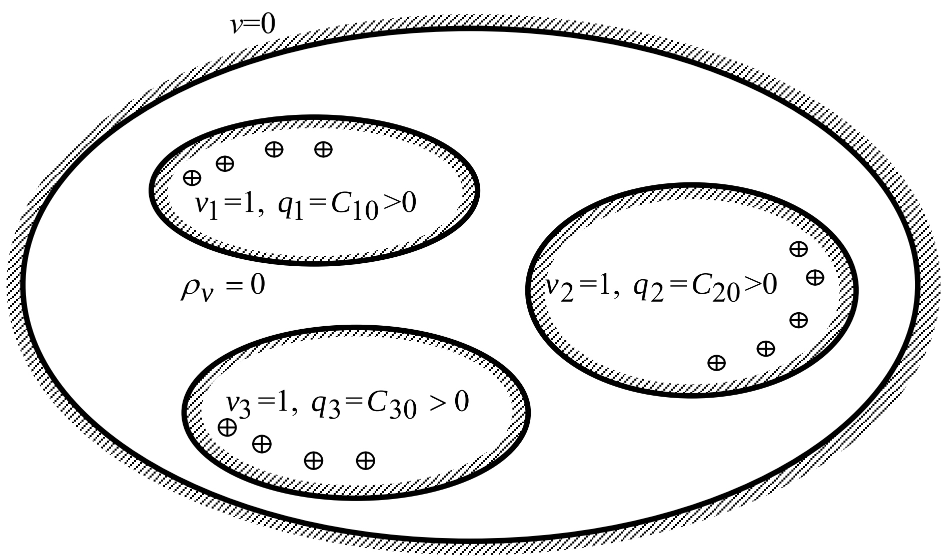

Fig.2.2. Capacităţi parţiale C_{i0}.

Sunt valabile relaţiile $C_{ij}=C_{ji}$ şi $u_{ij}=-u_{ji}$. Coeficienţii C_{ij} se numesc capacităţi parţiale. Semnificaţia lor fizică se obţine dând valori particulare potenţialelor corpurilor. Dacă toate corpurile au aceleaşi potenţiale (Fig.2.2), atunci (Q_1, Q_2, Q_3)=(C_{10}, C_{20}, C_{30}). Pe toate corpurile, se adună sarcină electrică de acelaşi semn. Din cauză că aceste sarcini electrice se resping, la potenţialul de 1V, sarcina electrică adunată este foarte mică. Dacă potenţialele corpurilor sunt (0,-1,0), atunci sarcinile electrice sunt $(C_{12}, -(C_{21}+C_{20}+C_{23}), C_{32})$ (Fig.2.3). În acest caz, sarcinile electrice adunate pe corpurile conductoare sunt mult mai mari decât atunci când toate au acelaşi potenţial, mai ales dacă corpurile sunt apropiate. Sunt sarcini de semne contrarii, care se atrag pe corpurile conductoare.

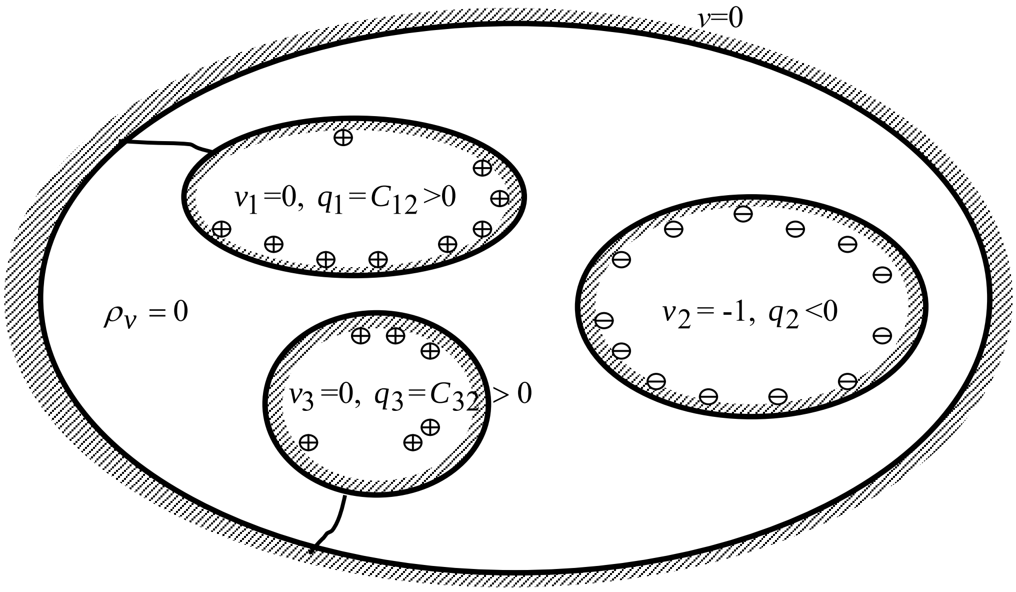

Fig.2.3. Capacităţi parţiale C_{ij}.

Condensatorul

Fie două conductoare foarte apropiate în comparaţie cu distanţa până la peretele incintei, care poate să fie chiar suprafaţa de la infinit. A treia formă a relaţiilor între sarcinile şi potenţialele celor corpuri este (2.3):

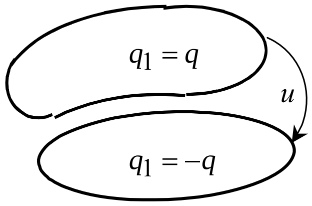

Fig. 2.4. Condensatorul.

$$Q_1 = C_{10}V_1 + C_{12}u_{12}$$

$$Q_2 = C_{21}u_{21} + C_{20}V_2$$

Deoarece corpurile conductoare sunt foarte apropiate, capacitățile proprii C_{10}, C_{20} sunt mult mai mici decât capacitatea de cuplaj C_{21} şi pot fi neglijate în relaţiile de mai sus şi, pentru că $C_{12}=C_{21}=C$ şi $u_{12}= -u_{21}= u$, rezultă $Q_1= -Q_2= Q$. În locul relaţiilor de mai sus, avem:

$$Q = Cu \tag{2.4}$$

Numim condensator un sistem format din două corpuri conductoare (numite armături) care au proprietatea că sarcinile lor electrice sunt egale în modul şi de semne contrarii. Constanta C din relaţia (2.4) se numeşte capacitatea condensatorului. Unitatea de măsură a capacităţii este Faradul (F), care, din păcate, din punct de vedere tehnic, este uriaşe. Din acest motiv, se folosesc deseori submultiplii:

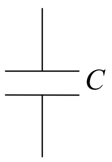

Fig.2.5. Simbolul condensatorului.

mili............10^{-3}

micro..........10^{-6}

nano...........10^{-9}

pico............10^{-12}

Simbolul condensatorului este cel din Fig. 2.5.

Capacitatea condensatorului plan. Fie un condensator (Fig. 2.6), ale cărui armături sunt plane egale, paralele, de arie A. Distanţa dintre armături este d, iar mediul izolant dintre armături are permitivitatea ε. Pe cele două armături, avem sarcinile electrice Q şi $-Q$. Câmpul dintre armături poate fi considerat omogen. Densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice la suprafaţa armăturii cu sarcină Q este (1.6):

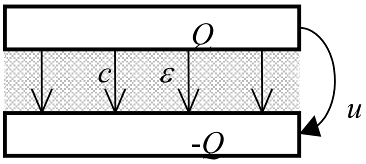

Fig.2.6. Condensator plan.

$$\rho_S = D = ct = \frac{Q}{A} \tag{2.5}$$

Pentru calculul tensiunii electrice între cele două armături, alegem ca drum de integrare, chiar o linie de câmp c între armături:

$$u = \int_c \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_c E dl = Ed = \frac{D}{\varepsilon} d = \frac{Qd}{\varepsilon A} \tag{2.6}$$

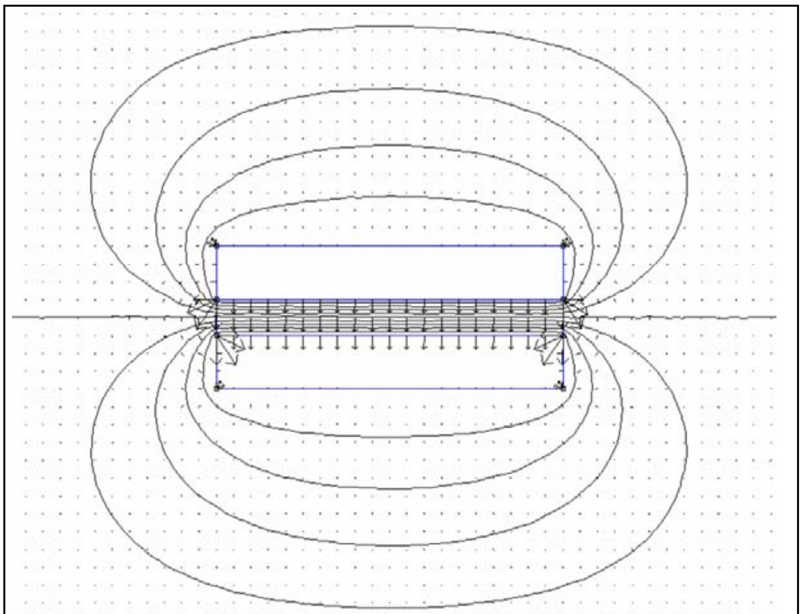

Fig.2.6.a. Linii echipotentiale in condensatotuil plan si vectori ai intensitatii campului electric

De unde:

$$C = \frac{Q}{u} = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{2.7}$$

Capacitatea lineică a cablului coaxial. Cablul coaxial este format dintr-un fir metalic de rază a şi o cămaşă metalică de rază b, între care se află un dielectric de permitivitate ε (Fig.2.6). Pe unitatea de lungime, se adună sarcina electrică Q_l. Fie suprafaţa închisă Σ de formă cilindrică, coaxială cu cablul, cu înălţimea de 1m şi cu raza R. Bazele cilindrului sunt S_1 şi S_2, iar suprafaţa laterală este S_l. Aplicăm legea fluxului electric pe suprafaţa Σ (v. par.1.9 de la Partea I):

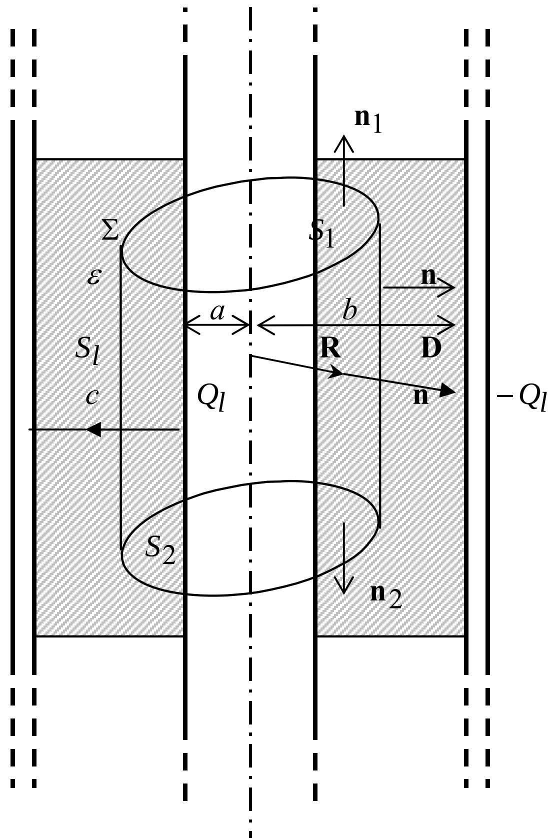

Fig. 2.6. Cablul coaxial.

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{S_1} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}_1 dS +$$

$$\int_{S_l} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = Q_l \qquad (2.8)$$

Din motive de simetrie, putem admite că inducţia electrică are doar componentă radială, constantă pe suprafaţa laterală S_l. Atunci, relaţia (2.8) devine:

$$\int_{S_l} DdS = D\int_{S_l} dS = 2\pi RD = Q_l \qquad (2.9)$$

de unde $D = \dfrac{Q_l}{2\pi R}$ şi:

$$E = \frac{Q_l}{2\pi\varepsilon R} \qquad (2.10)$$

Pentru calculul tensiunii electrice între cele două armături, alegem, ca drum de integrare, chiar o linie de câmp c între armături:

$$u = \int_c \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_c Edl = \int_a^b \frac{Q_l}{2\pi\varepsilon R}dR = \frac{Q_l}{2\pi\varepsilon} ln\frac{b}{a}$$

De unde:

$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon}{ln\dfrac{b}{a}} \qquad (2.11)$$

Relaţia u-i la bornele unui condensator. Presupunem că sarcina electrică se acumulează pe armăturile condensatorului prin alimentarea acestora cu curenţi (Fig.2.7). Aplicând teorema conservării sarcinii electrice pe suprafaţa închisă Σ_1 ce înconjoară prima armătură, trecând prin mediul izolant dintre armături (v. Partea I), rezultă $i_1 = \frac{dQ}{dt}$. Procedând asemănător pentru suprafaţa Σ_2 rezultă $i_2 = \frac{dQ}{dt}$. De unde $i_1 = i_2 = i$ şi:

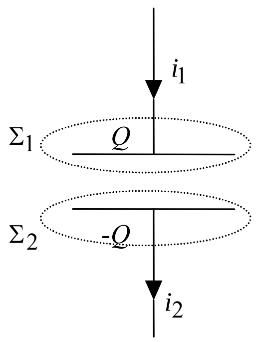

Fig. 2.7 Curentul condensatorului

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{2.12}$$

În cazul condensatorului liniar, unde este valabilă relaţia (2.4), pentru cazul în care capacitatea nu variază în timp, avem:

$$i = C\frac{du}{dt} \tag{2.13}$$

Dacă luăm în considerare sistemul de corpuri conductoare din interiorul incintei şi presupunem ca sarcnile lor electrice cresc prin alimentarea cu curenţii electrici i_k, atunci, prin aplicarea teoremei consevării sarcinii electrice pe suprafaţa primului corp, de exemplu, rezultă, la fel ca mai sus:

$$i_1 = \frac{dQ_1}{dt}$$

Utilizând relaţiile (2.2) sau (2.3), obţinem:

$$i_1 = \gamma_{11}\frac{dV_1}{dt} + \gamma_{12}\frac{dV_2}{dt} + \gamma_{13}\frac{dV_3}{dt}$$

şi, respectiv

$$i_1 = C_{10}\frac{dV_1}{dt} + C_{12}\frac{du_{12}}{dt} + C_{13}\frac{du_{13}}{dt}$$