Capitolul 4
Bobine electrice. Circuite magnetice

4.4. Energia câmpului magnetic al unui sistem de conductoare filiforme închise, parcurse de curenţi de conducţie

Se consideră un sistem de n conductoare filiforme, în circuite închise, parcurse de câte un curent electric de conducţie i_k, $k = 1 \div n$ plasate într-un mediu magnetic liniar D_∞, izotrop, infinit extins şi neparcurs de curenţi de conducţie (Fig. 5.08). În aceste condiţii se poate considera: $\overline{J} = 0$, $\overline{B} = \mu\overline{H}$.

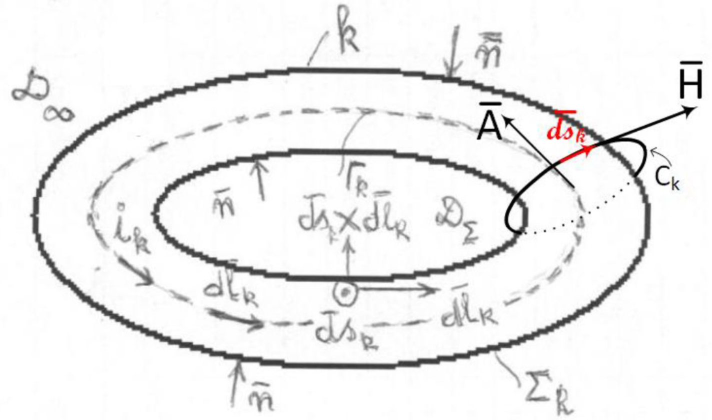

Fig. 5.08

Densitatea energiei magnetice este (expresia analitică se va demonstra în capitolul 5 al cursului, în cadrul analizei Teoremei energiei electromagnetice (*Teorema Poynting*)):

$$w_m = \frac{1}{2}\,\overline{H}\,\overline{B}. \qquad (1)$$

Similar cazului analizei câmpului electric, unde s-a introdus pe lângă vectorul intensitate câmp electric $\overline{E}$, pentru studiul fenomenelor electrice, mărimea scalară potenţial electric V, definit prin relaţia $\overline{E} = -\operatorname{grad} V$ şi în cazul analizei fenomenelor în câmp magnetic, pe lângă inducţia magnetică $\overline{B}$, se introduce mărimea vectorială *potenţial magnetic vector* $\overline{A}$, definit de relaţia $\overline{B} = \operatorname{rot}\overline{A}$.

Densitatea de volum din relaţia (1) devine:

$$w_m = \frac{1}{2}\,\overline{H}\,\operatorname{rot}\overline{A}.$$

Considerând identitatea algebrică $\mathrm{div}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)=\overline{H}\,\mathrm{rot}\overline{A}-\overline{A}\,\mathrm{rot}\overline{H}$ se elimină $\overline{H}\,\mathrm{rot}\overline{A}$ din relația de mai sus, astfel încât se obține

$$w_m = \frac{1}{2}\left[\mathrm{div}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)+\overline{A}\;\mathrm{rot}\overline{H}\right],$$

în care $\mathrm{rot}\,\overline{H}=\overline{J}=0.$

Densitatea de volum a energiei magnetice devine,

$$w_m=\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right).$$

Energia magnetică din întregul domeniu D_∞ se determină prin integrare, domeniul de integrare având ca limită Σ pe lângă suprafața Σ_∞ și alte suprafețe limită Σ_k ($k = 1 \div n$).

$$W_m=\frac{1}{2}\oint_{D_\infty}\mathrm{div}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)\mathrm{d}v \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)\overline{n}\,\mathrm{d}A \;+\; \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\infty}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)\overline{n}\;\mathrm{d}A\,.$$

Dar, conform Fig. 5.8, elementul de arie orientat, care se asociază suprafeței mărginite de curba închisă C_k ce definește linia de câmp magnetic, are expresia $\overline{n}\;\mathrm{d}A=-\,\overline{\mathrm{d}s_k}\times\overline{\mathrm{d}l_k}\,.$

Expresia energiei magnetice W_m devine:

$$W_m=-\,\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}\left(\overline{A}\times\overline{H}\right)\left(\overline{\mathrm{d}s_k}\times\overline{\mathrm{d}l_k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}\left(\overline{H}\times\overline{A}\right)\left(\overline{\mathrm{d}s_k}\times\overline{\mathrm{d}l_k}\right).$$

Conform relației algebrice $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)=\left(\overline{a}\overline{c}\right)\left(\overline{b}\overline{d}\right)-\left(\overline{a}\overline{d}\right)\left(\overline{b}\overline{c}\right)$, se obține următoarea expresie a energiei magnetice:

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\oint_{\Gamma_k}\overline{H}\overline{\mathrm{d}s_k}\oint_{C_k}\overline{A}\overline{\mathrm{d}l_k}\;-\;\oint_{C_k}\overline{H}\overline{\mathrm{d}l_k}\oint_{\Gamma_k}\overline{A}\overline{\mathrm{d}s}\right],$$

în care

$$\oint_{\Gamma_k}\overline{H}\overline{\mathrm{d}s_k}\;=i_k,$$

$$\oint_{C_k}\overline{A}\overline{\mathrm{d}l_k}\;=\Phi_k,$$

$$\oint_{C_k}\overline{H}\overline{\mathrm{d}l_k}\;=0\;\left(\overline{H}\perp\overline{\mathrm{d}l_k}\right).$$

Cu aceste notații, energia magnetică are expresia:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \ \Phi_k . \qquad (2)$$

Aceasta mai poate fi exprimată fie numai funcție de curenți și inductivități L_{jk}, fie numai funcție de fluxuri magnetice și coeficienți de permeanță λ_{jk} :

$$W_m\left(x_1, x_2 ... x_p \ ; i_1, i_2, ..., i_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_j i_k$$

$$W_m\left(x_1, x_2 ... x_p \ ; \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}\, \Phi_j \Phi_k .$$

în care x_p sunt coordonatele generalizate corespunzătoare celor p grade de libertate ale sistemului de n conductoare.

Cazuri particulare

a. Pentru cazul unei singure bobine ($n = 1$):

$$W_m = \frac{1}{2}\Phi\, i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L};$$

b. Pentru cazul a două bobine ($n = 2$):

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} i_i i_2 + \frac{1}{2} L_{21} i_2 i_1 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

sau deoarece $L_{12} = L_{21}$:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_i i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 .$$

Obs.: Termenii care sunt asociați cu inductivitățile de cuplaj se consideră cu ”*semn*” conform asocierii dintre bornele polarizate și sensul curentului electric de conducție în cazul bobinelor cuplate magnetic.

4.5. Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Pentru determinarea energiei şi a forței din câmpul magnetic considerăm un sistem de n bobine cuplate magnetic alimentate cu curenți de conducție i_k ($k = 1 \div n$) (Fig. 5.19).

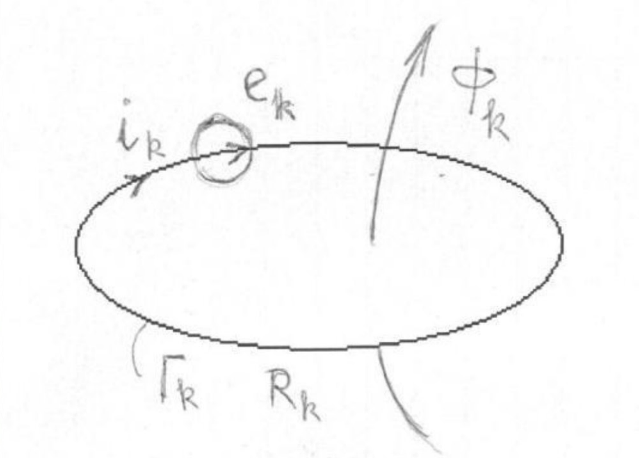

Fig. 5.19

Puterea absorbită de sistem este: $P_m = \sum_{k=1}^{n} u_k i_k$.

Înmulțind cu dt, notând $u_k \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Phi_k$ şi $P_m \,\mathrm{d}t = \mathrm{d}W_m$, se poate scrie expresia energiei elementare a sistemului sub forma:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k .$$

Poziția relativă a fiecărei bobine din sistem este descrisă printr-un număr de p coordonate generalizate ce pot fi modificate prin intermediul unor forțe generalizate, notate X_s ($s = 1 \div p$) care efectuează lucru mecanic asupra sistemului de bobine. Astfel, în expresia de mai sus, apare încă un termen, cel asociat lucrului mecanic efectuat de aceste forțe:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k \;=\; \mathrm{d}W_m + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s$$

sau

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \,\mathrm{d}\Phi_k \;\; - \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s . \qquad (1)$$

a) Calculul forțelor la flux magnetic constant

Pentru acest caz se consideră energia magnetică descrisă în funcție de coordonate generalizate ale sistemului și de fluxurile magnetic ale bobinelor, sub forma:

$$W_m = W_m\left(x_1, x_2, ..., x_p, ;\ \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\right).$$

Se exprima diferențiala acesteia în funcție de aceste variabile:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial W_m}{\partial x_s} \mathrm{d}\, x_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_m}{\partial \Phi_k} \mathrm{d}\,\Phi_k \qquad (2)$$

Deoarece fluxurile sunt constante $\mathrm{d}\,\Phi_k = 0$.

Identificând în aceste condiții relațiile (1) și (2), se obține *prima teoremă a forțelor generalizate în câmp magnetic*:

$$X_s = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_s}\right)_{\Phi=\mathrm{ct.}}.$$

b) Calculul forțelor la curent electric constant

Se exprimă energia magnetică în funcție de coordonate și curenții bobinelor:

$$W_m = W_m\left(x_1, x_2, ..., x_p, ;\ i_1, i_2, ..., i_n\right).$$

Din diferențiala

$$\mathrm{d}\left(\Phi_k i_k\right) = i_k \mathrm{d}\Phi_k + \Phi_k \mathrm{d}i_k,$$

înlocuind termenul $i_k \mathrm{d}\Phi_k$ în ecuația (1) rezultă:

$$\mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{d}\left(\Phi_k\, i_k\right) - \Phi_k\, \mathrm{d}i_k\right] - \sum_{s=1}^{p} X_s\, \mathrm{d}x_s$$

sau

$$d\left[\sum_{k=1}^{n} \Phi_k i_k - W_m\right] = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \mathrm{d}i_k + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s. \qquad (3)$$

Mărimea $W_m^* = \sum_{k-1}^{n} \Phi_k i_k - W_m$ se numește *coenergie magnetică.*

Înlocuind expresia acesteia în (3) se obține coenergia magnetică elementară:

$$\mathrm{d}W_m^* = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \mathrm{d}i_k + \sum_{s=1}^{p} X_s \mathrm{d}x_s, \tag{4}$$

care se exprimă în funcție de variabilele x_s și i_k:

$$dW_m^* = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial W_m^*}{\partial x_s} \mathrm{d}x_s + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_m^*}{\partial i_k} \mathrm{d}i_k. \tag{5}$$

Deoarece curenții sunt constanți $\mathrm{d}i_k = 0$.

Identificând în aceste condiții relațiile (4) și (5) se obține *a doua teoremă a forțelor generalizate în câmp magnetic*:

$$X_s = \left(\frac{\partial W_m^*}{\partial x_s} \right)_{i=\text{ct.}}. \tag{6}$$

Aplicații

1) Forța de interacțiune dintre un fir conductor, rectiliniu, infinit de lung și un cadru conductor dreptunghiular, coplanar cu firul, conductoarele fiind străbătute de curenții de conducție i_1 și i_2 (Fig. 5.20).

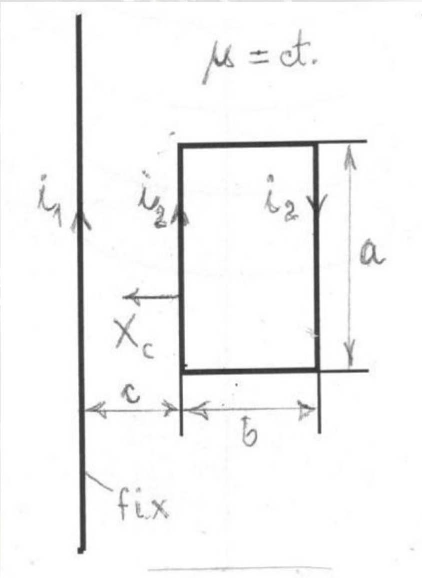

Fig.5.20

Soluție

S-a demonstrat la paragraful 4.2.g. că inductivitățile mutuale satisfac relația:

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu A}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{c} \right).$$

Energia magnetică din câmpul magnetic al sistemului este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11}\, i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}\, i_2^2 + L_{12}\, i_1\, i_2\,,$$

în care, primii doi termeni sunt constanți.

Forța care acționează asupra cadrului este:

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial c}\right)_{i=\text{ct.}} = \frac{\partial L_{12}}{\partial c} i_1\, i_2 = \frac{\mu\, a}{2\pi} i_1\, i_2 \frac{c}{b+c} \frac{c-b-c}{c^2} = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{a b}{c\left(b+c\right)} i_1\, i_2 .$$

Forța acționează în sensul micșorării coordonatei generalizate c.

2) Cuplul de interacțiune dintre un solenoid de lungime l și o bobină plată (Fig. 5.21) ambele parcurse de curenți de conducție.

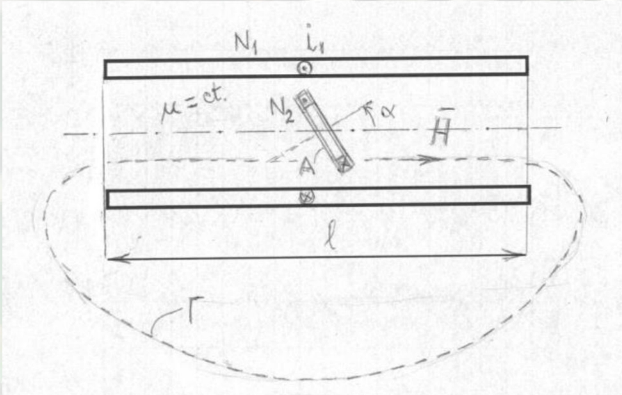

Fig.5.21

Soluție.

Se aplică teorema Ampere $\oint_\Gamma \overline{H}\, \mathrm{d}\overline{l} = \Theta_{S_\Gamma}$ și se obține:

$$H\ l = N_1 i_1 \Rightarrow H = \frac{N_1 i_1}{l}.$$

Pe baza legii legăturii în câmp magnetic se obține:

$$B = \frac{\mu N_1 i_1}{l}.$$

Considerând aria bobinei plate A, se exprimă fluxul magnetic fascicular de cuplaj sub forma:

$$\Phi_{f21} = AB\cos\alpha,$$

iar inductivitatea mutuală:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{f21}}{i_1} = \frac{N_2 AB \cos\alpha}{i_1} = \frac{\mu N_1 N_2 A \cos\alpha}{l}.$$

Dar $\dfrac{\mu N_1 N_2 A}{l} = L_{21\max}$, astfel încât:

$$L_{21} = L_{21\max} \cos\alpha.$$

Energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{21} i_2 i_1,$$

relație în care primii doi termeni sunt constanți.

Cuplul care acționează asupra bobinei mobile este:

$$C = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right)_{i=\text{ct.}} = i_1 i_2 \frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha} = -L_{21\max} i_1 i_2 \sin\alpha < 0 \text{ sau } > 0,$$

în condiția $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, unde s-a avut în vedere că α este cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, astfel încât $\sin\alpha > 0$.

3) Forța portantă a unui electromagnet cu N spire parcurse de un curent de conducție de intensitate i, asupra unei bare feromagnetice. Electromagnetul are o lungime l și are un întrefier de grosime δ (Fig. 5.22).

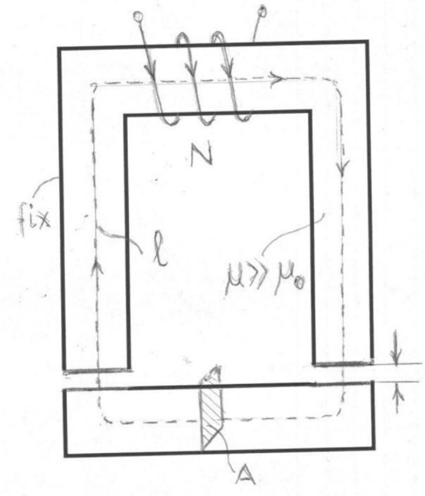

Fig.5.22

Soluție.

Reluctanța circuitului magnetic este:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} + \frac{2\delta}{\mu_0 A} \approx \frac{2\delta}{\mu_0 A}$$

deoarece, dacă se consideră $\mu >> \mu_0$, atunci $\frac{l}{\mu A} << \frac{2\delta}{\mu_0 A}$.

Inductivitatea bobinei are expresia: δ

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{\mu_0 A N^2}{2\delta},$$

iar energia magnetică se scrie:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4\delta}.$$

Cu a doua teoremă a forțelor generalizate, (i = ct.) se obține forța de atracție a armăturii mobile

$$F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right)_{i=\text{ct.}} = \frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4}\left(-\frac{1}{\delta^2}\right) = -\frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4\,\delta^2}.$$

Cu prima teoremă a forțelor generalizate ($\Phi = \text{ct.}$) se utilizează expresia energiei magnetice definită prin fluxul magnetic:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}.$$

Forța generalizată este, la flux constant,

$$F = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right)_{\Phi=\text{ct.}} = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L^2}\frac{\partial L}{\partial \delta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \delta},$$

în care $\dfrac{\partial L}{\partial \delta} = -\dfrac{\mu_0 A N^2}{2\delta^2}$.

Înlocuind corespunzător, rezultă expresia forței exercitate de electromagnet:

$$F = -\frac{\mu_0 N^2 i^2 A}{4\delta^2}$$

identică cu cea obținută pentru cazul i constant.