Capitolul 3
Condensatoare electrice

3.4. Relațiile lui Maxwell pentru capacități

Se consideră un sistem de n conductoare omogene încărcate cu sarcinile Q_k , $k = 1\ldots n$ plasate într-un mediu izotrop, liniar și neîncărcat electric, infinit extins și fără polarizație permanentă $\left(\overline{D} = \varepsilon \overline{E}\right)$ (Fig. 4.08).

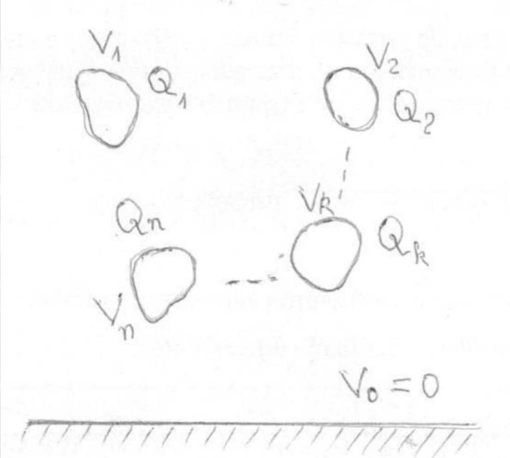


Fig.4.08

Potențialul V_k al oricărui conductor se poate scrie ca sumă a potențialelor sale parțiale $V_{k(j)}$ în câmpurile coulombiene asociate (succesiv și independent) sarcinii electrice care se regăsește pe fiecare conductor al sistemului:

$$V_k = \sum_{j=1}^{n} V_{k(j)}, \quad k = \overline{1,n}$$

sau

$$V_k = \sum_{j=1}^{n} s_{kj}\, Q_k, \quad k = \overline{1,n}$$

relații care constituie *prima formă a ecuațiilor lui Maxwell pentru capacități*.

Mărimile $s_{kj} = s_{jk}$ se numesc *coeficienți de potențial (de elastanță)* și satisfac condiția de reciprocitate. Deoarece întotdeauna $\left(s_{kj}\right)_{k,j=\overline{1,n}} \neq 0$ se poate obține cea de *a doua formă a ecuațiilor lui Maxwell pentru capacități*:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} c_{kj} V_j , \quad k = \overline{1,n} ,$$

în care identificăm mărimile:

- c_{kk} *coeficienți de capacitate* și satisfac condiția $c_{kk} > 0$,
- $c_{kj} = c_{jk}$ *coeficienți de influență electrostatică* care satisfac condiția $c_{kj} = c_{jk} < 0$.

Se demonstrează că satisfac și inegalitatea $\sum_{j=1}^{n} c_{kj} > 0$.

Unitatea de măsură a acestor coeficienți este cea a capacității $< C >_{SI}$ = 1 F (farad).

Coeficienții de potențial, cei de capacitate și cei de influență electrostatică depind de proprietățile dielectrice ale mediului în care se găsesc conductoarele, de geometria acestora și de distanța lor relativă.

Introducând expresia tensiunii electrice între două conductoare

$$-U_{kj} = V_j - V_k ,$$

unde, dacă se consideră conductorul de ordin j ca referință $(V_j = 0)$, se obține:

$$U_{k0} = V_k - 0.$$

Considerăm notația $\sum_{j=1}^{n} c_{kj} = C_{k0} > 0$ astfel încât sarcina electrică a unui conductor se scrie:

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \left(V_j - V_k \right) + V_k \sum_{j=1}^{n} c_{kj} , \quad k = \overline{1,n}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$Q_k = \sum_{j=1}^{n} C_{kj} U_{kj} + C_{k0} U_{ko} , \quad k = \overline{1,n}$$

ceea ce reprezintă cea de *a treia formă a ecuațiilor lui Maxwell pentru capacități*.

Capacitatea C_{k0} este capacitatea parțială a conductorului k față de pământ.

Mărimea $C_{kj} = -c_{kj}$ este capacitatea parțială a conductoarelor j și k

Cazul $n = 3$ este ilustrat în Fig. 4.09.

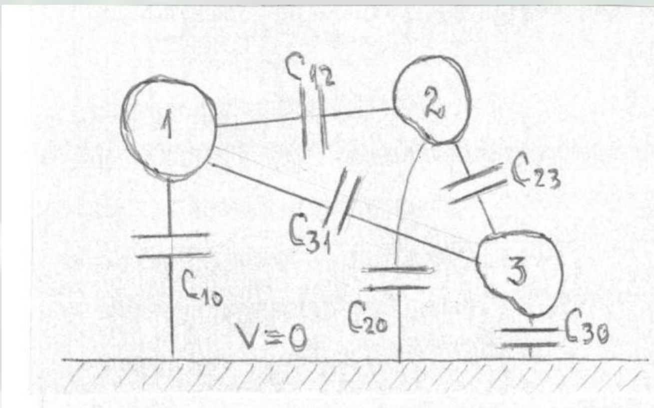


Fig.4.09

3.5. Echivalența circuitelor pasive cu condensatoare. Capacitate echivalentă

Capacitatea echivalentă a unui sistem dipolar inițial neîncărcat, reprezintă capacitatea unui singur condensator, care la o aceeași tensiune, se încarcă din exterior cu aceeași sarcină electrică ca cea a sistemului considerat.

a) Capacitatea echivalentă serie a n condensatoare inițial neîncărcate

În Fig. 4.10 se desenează n condensatoare legate în serie, precum şi condensatorul de capacitate echivalentă $C_{es} = \frac{Q}{U}$

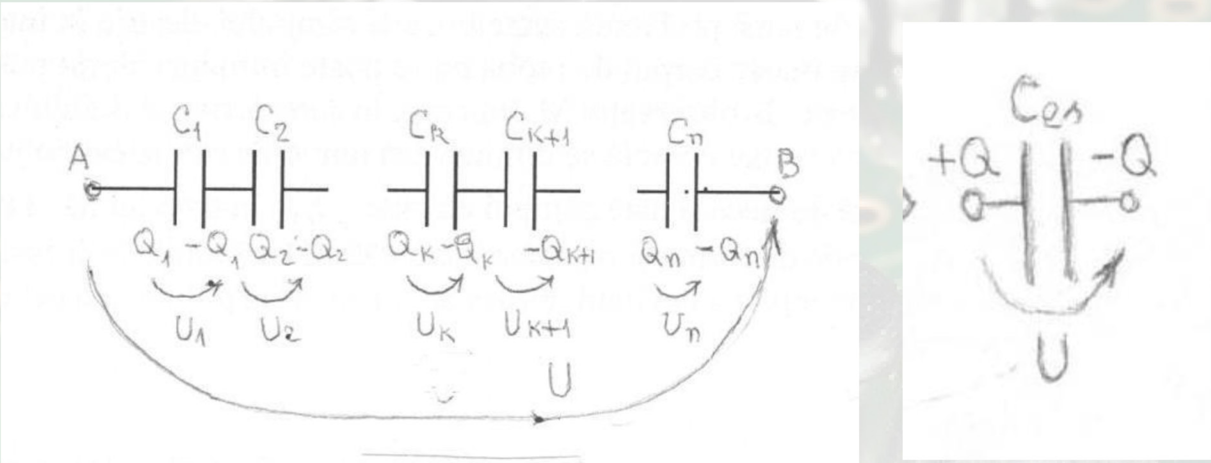


Fig.4.10

Legea de conservare a sarcinii electrice aplicată suprafeței închise care trece printre armăturile condensatoarelor C_k şi C_{k+1} este $-Q_k + Q_{k+1} = 0$ sau, $Q_k = Q_{k+1}$ pentru $k = \overline{1, n-1}$ de unde rezultă că toate condensatoarele se încarcă cu aceeaşi sarcină electrică $Q = Q_k, k = \overline{1, n}$.

Teorema potențialului electrostatic aplicată seriei de condensatoare este

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

sau, folosind elastanţele $\sum_{k=1}^{n} S_k Q = Q \sum_{k=1}^{n} S_k$.

Notând $S_{es} = \sum_{k=1}^{n} S_k$, se obține $QS_{es} = Q \sum_{k=1}^{n} S_k$.

Simplificând cu Q se obține $S_{es} = \sum_{k=1}^{n} S_k$, adică $\frac{1}{C_{es}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$,, de unde se scrie:

$$C_{es} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}}.$$

Pentru $n = 2$ $$C_{es} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

b) Capacitatea echivalentă a n condensatoare legate în paralel

În Fig. 4.11 se desenează n condensatoare legate în paralel precum și condensatorul de capacitate paralel echivalentă $C_{ep} = \dfrac{Q}{U}$.

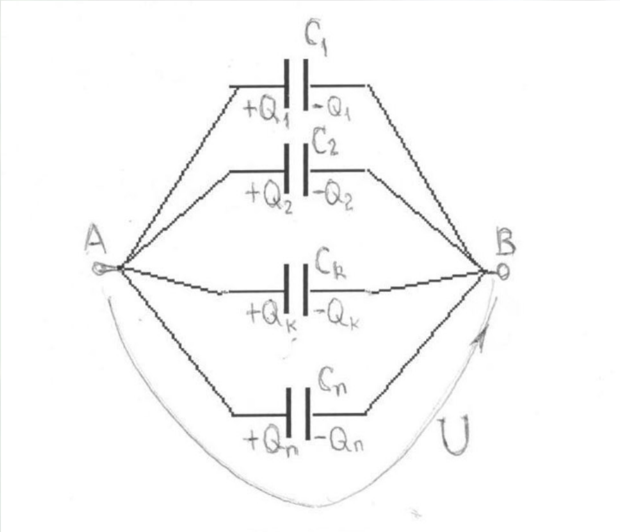
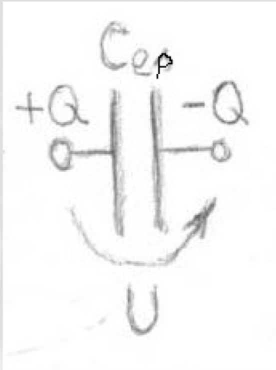


Fig.4.11



Legea de conservare a sarcinii electrice se aplică oricărei suprafețe închise, care trece printre armăturile celor n condensatoare legate în paralel. Cu notațiile din figură sarcina totală de pe armăturile condensatoarelor este:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k = \sum_{k=1}^{n} C_k U = U \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Aceeași sarcină, funcție de capacitatea echivalentă C_{ep} este:

$$Q = C_{ep} U .$$

Egalând cei doi membrii și simplificând cu tensiunea comună U se obține expresia capacității echivalente a condensatoarelor legate în paralel:

$$C_{ep} = \sum_{k=1}^{n} C_k .$$

Pentru cazul a două condensatoare în paralel $n = 2$: $C_{ep} = C_1 + C_2$

c) Teorema divizorului capacitiv de tensiune

Considerăm în Fig. 4.12 două condensatoare în serie, precum și capacitatea lor echivalentă.

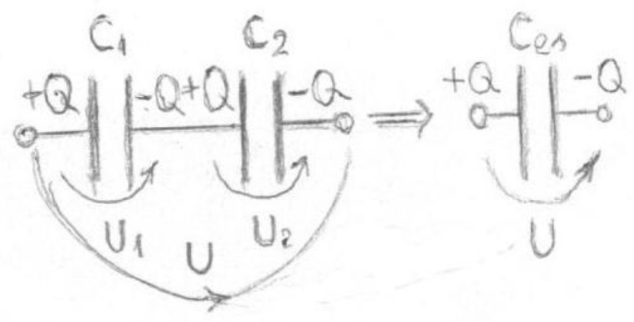


Fig.4.12

Din relațiile cunoscute

$$C_{es} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

respectiv

$$Q = C_{es} U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U$$

rezultă expresiile *divizorului capacitiv de tensiune*:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1}{C_1} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{1}{C_2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

d) Teorema divizorului capacitiv de sarcină electrică

Considerăm în Fig. 4.13 două condensatoare în paralel, precum și capacitatea lor echivalentă.

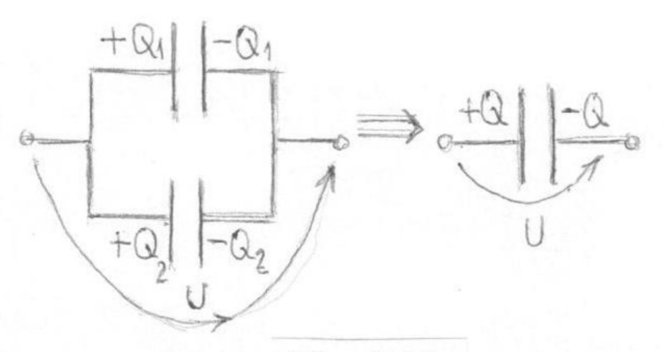


Fig.4.13

Din relațiile

$$C_{ep} = C_1 + C_2 \quad \text{și} \quad U = \frac{Q}{C_1 + C_2}$$

rezultă expresiile *divizorului capacitiv de sarcină electrică*:

$$Q_1 = C_1 U = C_1 . \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q$$

$$Q_2 = C_2 U = C_2 . \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q .$$

e) Transfigurarea stea - triunghi

Într-o rețea de condensatoare în regim electrostatic, se pot înlocui trei condensatoare C_1, C_2, C_3 legate în stea, cu trei condensatoare C_{12}, C_{23}, C_{31} legate în triunghi, (și reciproc) (Fig. 4.14) fără ca în restul rețelei să se producă modificări de natură electrostatică, cu condiția ca între capacitățile acestor condensatoare să existe următoarele relații de transformare:

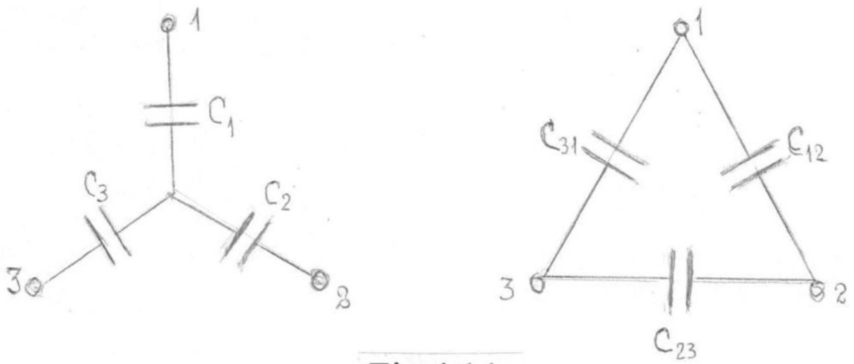


Fig.4.14

stea – triunghi:

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12}\, C_{31}}{C_{23}}; \quad C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23}\, C_{12}}{C_{31}}; \quad C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31}\, C_{23}}{C_{12}}.$$

triunghi – stea:

$$C_{12} = \frac{C_1 . C_2}{C_1 + C_2 + C_3}; \qquad C_{23} = \frac{C_2 . C_3}{C_1 + C_2 + C_3}; \qquad C_{31} = \frac{C_3 . C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

3.6. Circuite (rețele) de condensatoare în regim electrostatic

Aceste circuite au în componență numai condensatoare ideale și surse ideale de tensiune continuă.

a) Teorema Kirchhoff I pentru capacități electrice

În cazul rețelelor de condensatoare, pentru stabilirea teoremei I Kirchhoff se folosește *legea de conservare a sarcinii electrice în regim electrostatic* aplicată unei suprafețe închise Σ care trece numai printre armăturile condensatoarelor (Fig. 4.15).

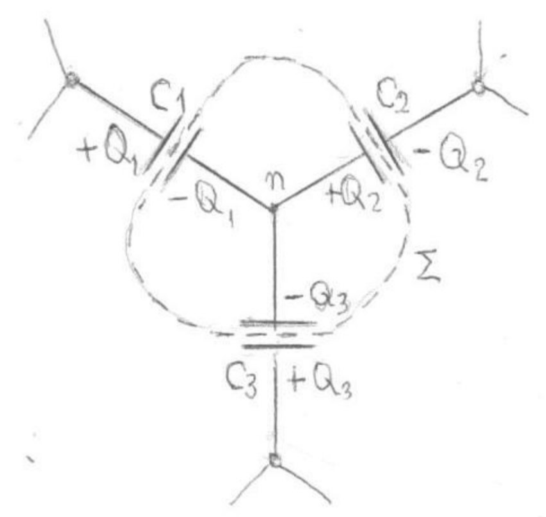


Fig.4.15

Legea se scrie sub forma $i_\Sigma = -\dfrac{\mathrm{d}\,q_{D_\Sigma}}{\mathrm{d}\,t} = 0$, de unde rezultă teorema I Kirchhoff:

$$q_{D_\Sigma} = \sum_{k \in n} Q_k = \text{constant}\,, \tag{1}$$

sau prin aplicarea relației de definiție a capacității electrice:

$$\sum_{k \in n} C_k U_k = ct. \tag{1'}$$

Aplicație

Trei condensatoare independente, încărcate fiecare cu câte o sarcină electrică diferită Q_k (Fig. 4.16.a), se leagă în stea într-un nod n (Fig. 4.16.b).

Sarcinile condensatoarelor se vor modifica, dar conform teoremei (1) suma lor algebrică rămâne constantă $\sum_{k \in n} Q_k = \sum_{k \in n} Q_{k0}$.

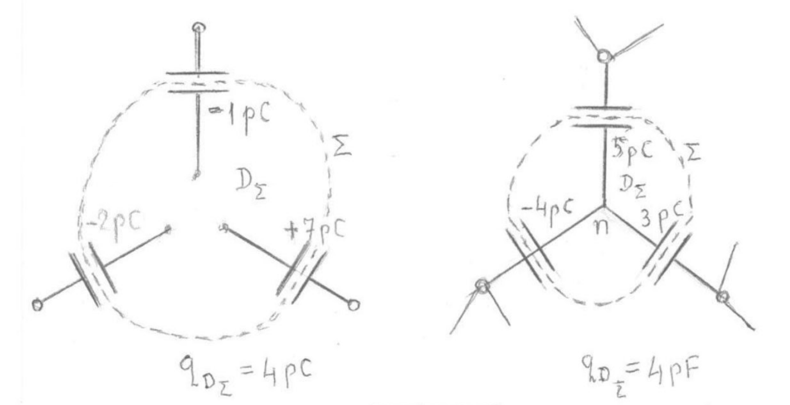


Fig.4.16

În Fig. 4.16.a se prezintă trei condensatoare independente, încărcate cu sarcinile electrice de:

–1pC , –2pC , 7pC (în total, 4pC), care se leagă la un nod n.

Ariile armăturilor legate la nod rămân în continuare izolate, dar sarcinile condensatoarelor se redistribuie, astfel ca suma lor să rămână constant aceeași în conformitate cu teorema I Kirchhoff.

În Fig. 4.16.b, s-au desenat alte sarcini electrice pe armături care însumate, dau tot 4pC.

b) Teorema Kirchhoff II pentru capacități electrice

În cazul rețelelor de condensatoare, pentru stabilirea teoremei II Kirchhoff se folosește teorema potențialului electrostatic aplicată unei bucle închise b (Fig. 4.17).

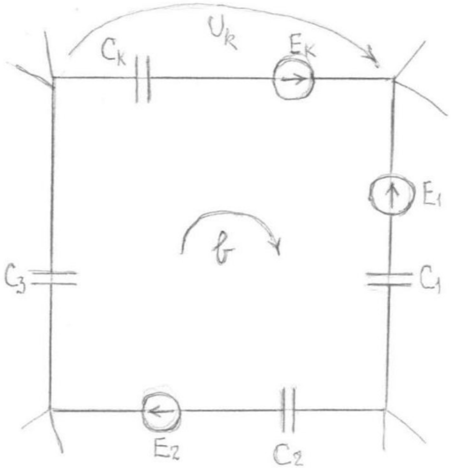


Fig.4.17

$$\sum_{k \in b} U_k = 0 \tag{2}$$

Dacă în latura k din figură sensului t.e.m. a sursei i se asociază după regula de la generatoare tensiunea la borne

$$U_{E_k} = E_k \tag{3}$$

atunci relația (2) se particularizează pentru conturul Γ_k astfel:

$$U_k + U_{E_k} - U_{C_k} = 0$$

sau conform (3),

$$U_k - U_{C_k} + E_k = 0$$

Însumând această relație termen cu termen pentru toate laturile buclei b se obține:

$$\sum_{k \in b} U_k = \sum_{k \in b} U_{C_k} - \sum_{k \in b} E_k$$

sau, cu relația (2),

$$\sum_{k \in b} E_k = \sum_{k \in b} U_{Ck} ,$$

dar $U_{Ck} = \dfrac{Q_k}{C_k}$ și deci se obține:

$$\sum_{k \in b} E_k = \sum_{k \in b} \frac{Q_k}{C_k}$$

care reprezintă teorema a II a Kirchhoff.

Considerând $\dfrac{1}{C_k} = S_k$ teorema se mai poate pune și sub forma

$$\sum_{k \in b} E_k = \sum_{k \in b} S_k \, Q_k \ ,$$

în care S_k este elastanța corespunzătoare condensatorului C_k.

Aplicații

1. Se consideră circuitul din Fig. 4.18 în care sunt date mărimile

$C_1 = 2\,\mu F$, $C_2 = 4\,\mu F$, $C_3 = 2\,\mu F$, $C_4 = 3\,\mu F$, $C_5 = 6\,\mu F$, $E_1 = E_5 = 8$ V.

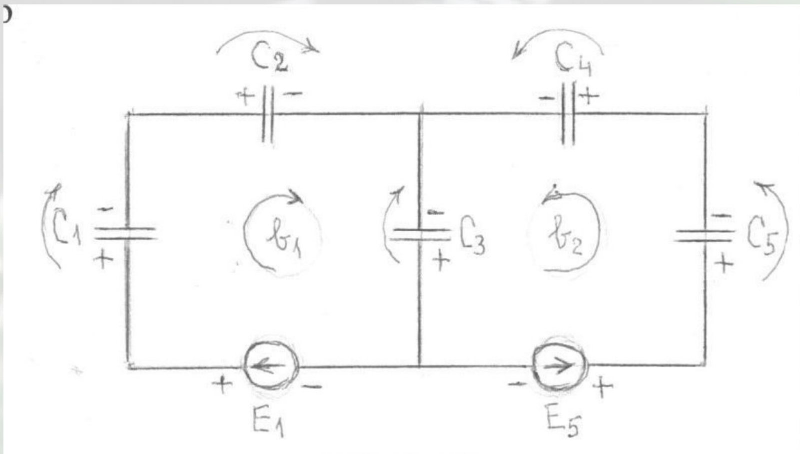


Fig.4.18

Se cere să se determine sarcinile electrice de pe armăturile condensatoarelor și tensiunile la bornele acestora.

Soluție

Rețeaua are $l = 2$ laturi, $n = 1$ nod și $b = l - n + 1 = 2$ bucle (ochiuri) independente. Ca urmare, Kirchhoff I se va aplica de $n = 1$ ori, iar Kirchhoff II se va aplica de $b = 2$ ori:

$$\begin{cases} -Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0 & \text{(T.K. I)} \\ U_{C_1} + U_{C_2} - U_{C_3} = E_1 & \text{(T.K. II)} \\ -U_{C_3} + U_{C_5} + U_{C_4} = E_5 & \text{(T.K. II)} \end{cases}$$

Înlocuind tensiunile cu rapoarte între sarcini și capacități, relațiile de mai sus devin:

$$\begin{cases} Q_3 = -Q_2 - Q_4 \\ \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_2}{C_2} - \dfrac{Q_3}{C_3} = E_1 \\ -\dfrac{Q_3}{C_3} + \dfrac{Q_5}{C_5} + \dfrac{Q_4}{C_4} = E_5 \end{cases}$$

Sistemul de ecuații se reduce dacă se fac înlocuirile: $Q_1 = Q_2, Q_5 = Q_4, Q_3 = -(Q_2 + Q_4)$, obținându-se un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} Q_2\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right)+\dfrac{1}{C_3}(Q_2+Q_4)=E_1 \\ \dfrac{1}{C_3}(Q_2+Q_4)+Q_4\left(\dfrac{1}{C_4}+\dfrac{1}{C_5}\right)=E_5 \end{cases}$$ sau, cu înlocuirile de mai sus $$\begin{cases} \dfrac{5}{4}Q_2+\dfrac{1}{2}Q_4=8 \\ \dfrac{1}{2}Q_2+Q_4=8 \end{cases}$$

se obțin sarcinile electrice: $Q_2 = 4\,\mu F = Q_1$, $Q_4 = 6\,\mu F = Q_5$, $Q_3 = -10\,\mu F$

Tensiunile se calculează din rapoarte de forma $U_k = \dfrac{Q_k}{C_k}$ cu $k = 1,2\ldots,5$

Se obține: $U_{C_1} = 2\text{V}, U_{C_2} = 1\text{V}, U_{C_3} = -5\text{V}, U_{C_4} = 2\text{V}, U_{C_5} = 1\text{V}.$

2. Două condensatoare având dielectric preşpan (carton electrotehnic) de 1 mm grosime având capacitățile C_1 = 1100 pF și C_2 = 400 pF sunt legate în serie şi alimentate sub tensiunea la borne U = 30 kV. Se cunoaşte rigiditatea dielectrică a preşpanului $E_d = 180$ kV/cm. Să se afle care condensator se străpunge. (Fig. 3.22)

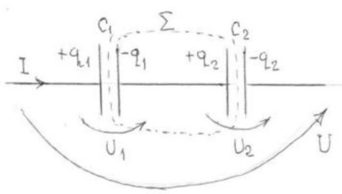


Fig. 3.22

Soluție

Calitatea unui dielectric este apreciată cu ajutorul următorilor parametri:

- E_d [V/m] intensitatea câmpului electric maxim admis, peste care materialul își pierde calitatea de izolator
- ε_r permitivitatea relativă
- tgδ

Cunoscând distanța dintre armăturile condensatoarelor d = 1 mm și E_d = 180 kV/cm (din catalogul fabricantului), se aplică legea fluxului electric $\Psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$:

$$q_{D_\Sigma} = -q_1 + q_2 = 0$$

de unde $q_1 = q_2 = q$

Înlocuind în expresia $U = U_1 + U_2$ tensiunile $U = \dfrac{q}{C_{ech}}$, $U_1 = \dfrac{q}{C_1}$ şi $U_2 = \dfrac{q}{C_2}$ în care C_{ech} este capacitatea echivalentă, rezultă simplificând prin q

$$\frac{1}{C_{ech}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

sau

$$C_{ech} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1100 \cdot 10^{-12} \cdot 400 \cdot 10^{-12}}{1500 \cdot 10^{-12}} = 293 \cdot 10^{-12}\,\text{F} \cong 293\ \text{pF}$$

$$q = C_{ech} U = 293 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^{3} = 293 \cdot 3 \cdot 10^{-8} = 8,79 \cdot 10^{-6} C$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{8,79 \cdot 10^{-6}}{1100 \cdot 10^{-12}} = 7,9 \cdot 10^{3}\ \text{V} \approx 8\ k\text{V};$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{8,73 \cdot 10^{-6}}{400 \cdot 10^{-12}} = 22,1\ k\text{V}$$

Câmpul electric fiind presupus uniform, rezultă, din $U = \int_C \overline{E} \mathrm{d}\overline{l} = Ed$, câmpurile electrice din cele două condensatoare :

$$E_{d1} = \frac{U_1}{d} = \frac{7,9 \cdot 10^{3}}{10^{-1}} = 79\ \text{kV/cm} < 180\ \text{kV/cm}$$

$$E_{d2} = \frac{U_2}{d} = \frac{22,1 \cdot 10^{-3}}{10^{-1}} = 221\ \text{kV/cm} > 180\ \text{kV/cm}$$

primul condensator nu se străpunge, al doilea se străpunge.