

## 5. FORMULE BIOT-SAVART-LAPLACE

### i) Cazul $R^3$

Revenim la ecuațiile câmpului magnetic în regimul staționar (Cap.1):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.3)$$

Din relația (5.2), rezultă că putem scrie (v. și Partea I, Cap.2):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (5.4)$$

unde  $\mathbf{A}$  este potențialul magnetic vector. Înlocuind (5.4) în (5.3) și apoi în (5.1), rezultă ecuația diferențială cu derivate parțiale a potențialului vector  $\mathbf{A}$ , care înlocuiește sistemul (5.1), (5.2), (5.3):

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (5.5)$$

În cazul mediului omogen ( $\mu = \text{ct}$ ), relația (5.5) devine:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}) = \mathbf{J}$$

Impunem acum potențialului vector condiția de etalonare:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.6)$$

și, notând  $\nabla \cdot \nabla = \Delta$  (Laplacian), rezultă ecuația:

$$-\Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (5.7)$$

care, scrisă pe componente, într-un sistem de coordonate carteziene, conduce la ecuațiile

$$-\Delta A_x = \mu J_x, \quad -\Delta A_y = \mu J_y, \quad -\Delta A_z = \mu J_z \quad (5.8)$$

La Partea a II-a, Cap.4, par.4.1, “Formule Coulombiene”, a fost făcută observația că ecuația:

$$-\varepsilon \Delta V = \rho_v$$

are soluția dată de relația coulombiană:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_v}{r} dv$$

în cazul unui mediu omogen și nemărginit. La fel, ecuațiile (5.8) vor avea soluțiile:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{J_x}{r} dv, \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{J_y}{r} dv, \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{J_z}{r} dv \quad (5.9)$$

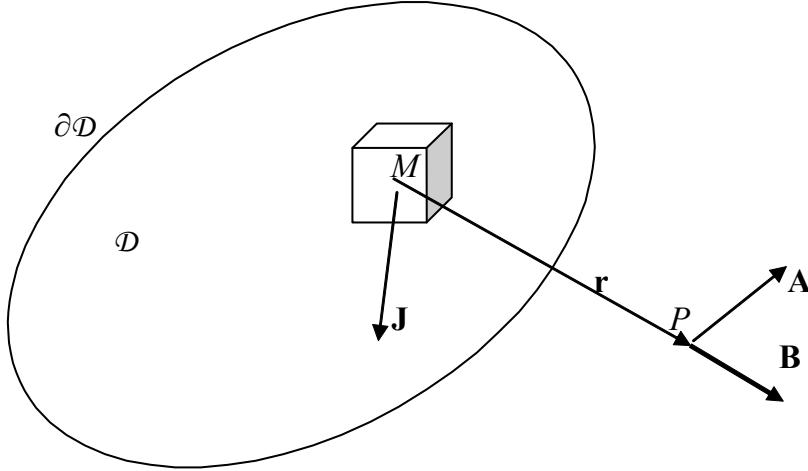


Fig.5.1. Câmpul magnetic creat de o distribuție volumică de densitate de curent.

pentru mediile omogene și nemărginite. Înmulțind cele trei relații cu versorii constanți **i**, **j**, **k** ai axelor de coordonate, pe care putem să-i introducem sub semnul de integrare, rezultă prin însumare (Fig.5.1):

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} dv_M \quad (5.10)$$

Potențialul vector dat de relația (5.10) este soluție a ecuației diferențiale (5.7). Pentru a fi soluție a ecuației (5.5), trebuie să dovedim că expresia (5.5) verifică condiția de etalonare (5.6). Deoarece derivatele în relația (5.10) se fac în raport cu coordonatele punctului  $P$ , operatorul  $\nabla$  poate intra sub semnul de integrare, integrarea făcându-se în raport cu coordonatele punctului  $M$ . Rezultă:

$$\nabla_P \cdot \mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \nabla_P \cdot \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} dv_M \quad (5.11)$$

Avem:

$$\nabla_P \cdot \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} = \mathbf{J} \cdot \nabla_P \frac{1}{r(P,M)} = -\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.12)$$

Mai avem:

$$\nabla_M \cdot \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} = \frac{1}{r(P,M)} \nabla_M \cdot \mathbf{J}(M) + \mathbf{J} \cdot \nabla_M \frac{1}{r(P,M)} \quad (5.13)$$

iar din relația (5.1) rezultă că  $\text{div} \mathbf{J} = \text{div} \text{rot} \mathbf{H} = 0$  și atunci relația (5.13) devine:

$$\nabla_M \cdot \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} = -\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r^3} = \mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.14)$$

unde  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ . Rezultă că relația (5.11) se mai scrie:

$$\nabla_P \cdot \mathbf{A}(P) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \nabla_M \cdot \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} dv_M = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{J}}{r} dS$$

Dar componenta normală a densității de curent este nulă pe frontiera  $\partial \mathcal{D}$  a domeniului  $\mathcal{D}$  (v. Partea I, Cap.4, par.4.3) și, ca urmare, condiția de etalonare (5.6) este îndeplinită.

Inducția magnetică rezultă din relația (5.4):

$$\mathbf{B} = \nabla_P \times \mathbf{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \nabla_P \times \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} dv_M \quad (5.15)$$

Avem:

$$\nabla_P \times \frac{\mathbf{J}(M)}{r(P,M)} = -\mathbf{J} \times \nabla_P \frac{1}{r(P,M)} = \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

și (5.4) devine:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (5.16)$$

Relațiile (5.10) și (5.16) sunt *formulele Biot-Savart-Laplace*.

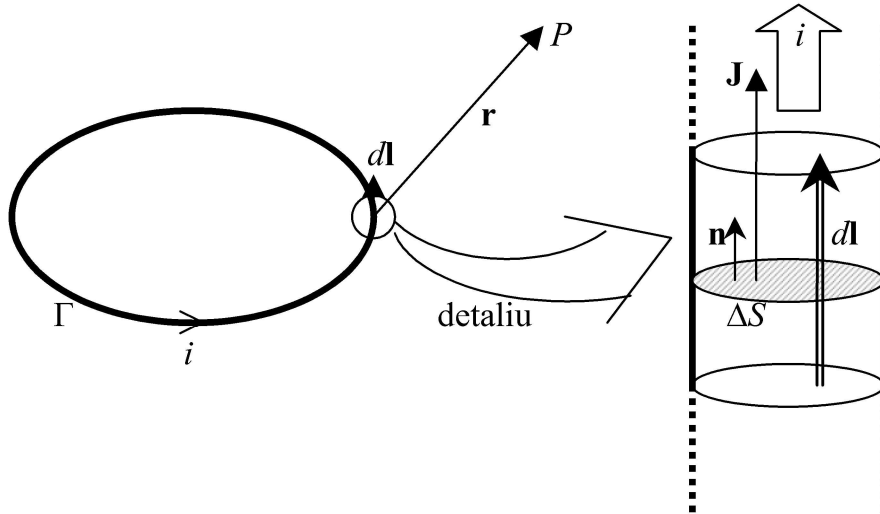


Fig.5.2. Conductor filiform.

#### *Cazul conductoarelor filiforme*

În cazul conductoarelor filiforme, domeniul  $\mathcal{D}$  are forma specială din Fig. 5.2, în care dimensiunile secțiunii transversale sunt mult mai mici decât a treia dimensiune, care descrie curba închisă  $\Gamma$ . În plus, densitatea de volum a curentului este orientată de-a lungul curbei  $\Gamma$ . Privind o porțiune mult mărită din conductor (Fig.5.2), apreciem că, local, vectorii  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{J}$  și  $d\mathbf{l}$  au aceeași orientare. Atunci, putem scrie:

$$dv = \Delta S dl \quad \text{și} \quad \mathbf{J} dv = J \Delta S d\mathbf{l} = i d\mathbf{l}$$

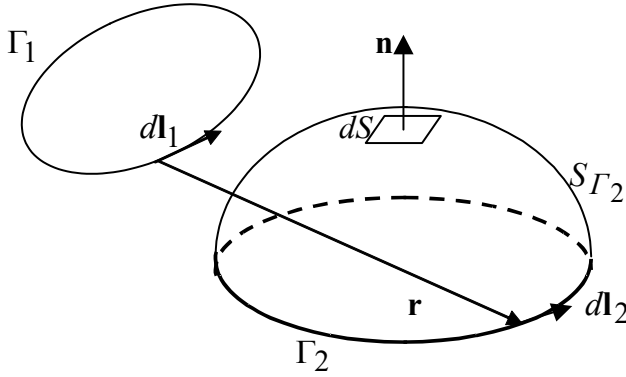
și relațiile (5.10) și (5.16) devin:

$$\mathbf{A} = \frac{i\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{i\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (5.18)$$

*Aplicație:* Formula lui Neumann pentru calculul inductivității de cuplaj între

două spire filiforme ce descriu curbele  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  și sunt situate într-un mediu omogen și nemărginit. Inductivitatea de cuplaj este (Cap.2):



$$L_{21} = \frac{\varphi_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \quad (5.19)$$

Fig. 5.3. Două spire filiforme, cuplate magnetic.

unde  $\varphi_2$  este fluxul magnetic al unei suprafețe  $S_{\Gamma_2}$  de bordură  $\Gamma_2$  (Fig.5.3).

Ținând cont de relația (5.4) și utilizând formula lui Stokes, avem:

$$\varphi_2 = \int_{S_{\Gamma_2}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{\Gamma_2}} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (5.20)$$

Potențialul vector  $\mathbf{A}$  este produs de curentul  $i_1$  care parcurge prima spiră (5.17):

$$\mathbf{A} = \frac{i_1 \mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \quad (5.21)$$

Înlocuind (5.21) în (5.20) și apoi în (5.19), rezultă

$$L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \quad (5.22)$$

Relația (5.22) este *formula lui Neumann*.

### ***ii)(Facultativ) Cazul $R^2$***

Fie un fir rectiliniu infinit de lung, parcurs de curentul electric  $i$  și aflat într-un mediu omogen și mărginit. Problema are simetrie cilindrică și, datorită faptului că firul este infinit de lung, mărimile nu depind de coordonatele  $z$  și  $\theta$ . Aplicăm teorema lui Ampere (1.1) pe curba  $\Gamma_1$  de formă circulară cu centrul pe fir, de rază  $R$  și de lungime  $l_{\Gamma_1}$ :

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma_1} H_{\theta} dl = H_{\theta} \oint_{\Gamma_1} dl = H_{\theta} l_{\Gamma_1} = H_{\theta} 2\pi R = i$$

de unde rezultă:

$$H_{\theta} = \frac{i}{2\pi R} \quad (5.23)$$

Aplicăm teorema lui Ampere pe curba  $\Gamma_2 = ABCDA$  de formă dreptunghiulară, cu laturile  $BC$  și  $DA$  paralele cu firul și ținem cont de faptul că  $\mathbf{H}$  nu depinde de coordonatele  $z$  și  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} H_R dl + \int_{BC} H_z(B) dl - \int_{CD} H_R dl - \int_{DA} H_z(D) dl \\ &= H_z(B) \int_{BC} dl - H_z(D) \int_{DA} dl = H_z(B)|BC| - H_z(D)|DA| = 0 \end{aligned}$$

de unde rezultă  $H_z(B) = H_z(D)$ . Deci, componenta lui  $\mathbf{H}$  pe direcția  $z$  este constantă. Impunând  $\mathbf{H} \rightarrow 0$  pentru  $R \rightarrow \infty$ , rezultă că  $H_z = 0$ . Aplicăm legea fluxului magnetic pe suprafața închisă  $\Sigma$  de formă cilindrică, cu axa pe fir, de înălțime  $h$ , cu bazele  $S_1, S_2$  și suprafața laterală  $S_l$ :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

deci:

$$\int_{S_1} B_z dS - \int_{S_2} B_z dS + \int_{S_l} B_R dS = B_R 2\pi R h = 0$$

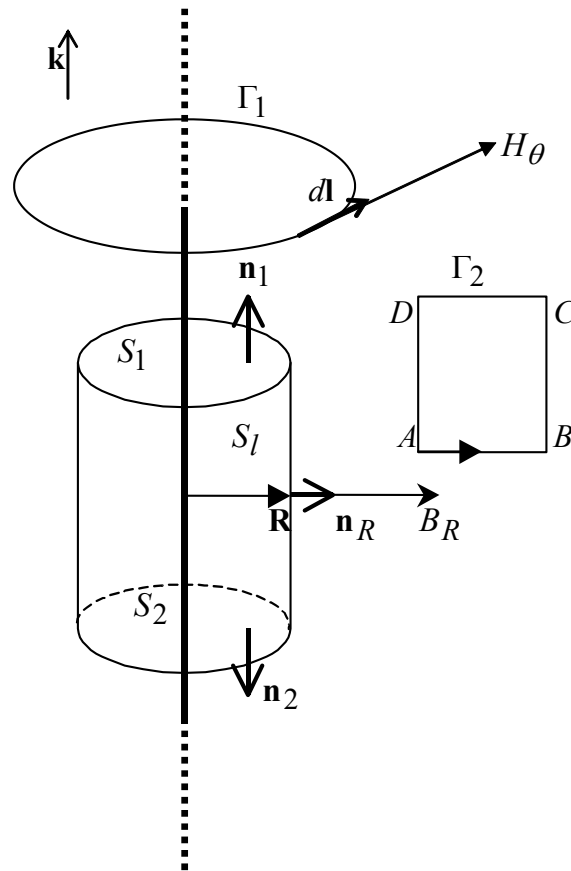


Fig.5.4. Câmpul magnetic produs de un fir rectiliniu parcurs de curentul electric  $i$ .

de unde:

$$B_R = 0$$



De aici rezultă:

$$B = \mu H_{\theta} = \frac{\mu i}{2\pi R} \quad (5.24)$$

și:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i \mathbf{k} \times \mathbf{R}}{2\pi R^2} \quad (5.25)$$

Admitem că potențialul vector  $\mathbf{A}$  depinde doar de coordonata  $R$  și este orientat pe direcția axei  $oz$ :  $A = \mathbf{k}A(x,y)$ . Atunci, avem:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{k} \times \nabla A = -\mathbf{k} \times A' \frac{\mathbf{R}}{R}$$

Comparând cu relația (4.38), rezultă:

$$A' = -\frac{\mu i}{2\pi R}$$

și, admițând că la  $R_0$  avem  $A=0$ , rezultă:

$$A = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{R_0}{R}$$

Dacă  $R_0=1\text{m}$ , avem:

$$A = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{1}{R} \quad (5.26)$$

Remarcăm că structura analizată mai sus are configurație plan-paralelă (v. Partea a II-a, Cap.4, par.4.1). Dacă curentul electric este distribuit într-un

domeniu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , cu densitatea de volum a curentului electric orientată pe direcția axei  $oz$ , atunci, folosind rezultatele (5.25) și (5.26), obținem:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} J \frac{\mathbf{R}}{R^2} dS \quad (5.27)$$

și:

$$A = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} J \ln \frac{1}{R} dS \quad (5.28)$$

Relațiile (5.27) și (5.28) sunt formulele *formulele Biot-Savart-Laplace* pentru structuri plan-paralele.

## 6. STRUCTURI CU MAGNEȚI PERMANENȚI

### 6.1. Energia câmpului magnetic creat de magneții permanenți

Fie un domeniul  $\Omega$ , cu peretele  $\partial\Omega$  perfect conductor. Peretele poate fi și la

infini. În interiorul domeniului, o regiune  $\Omega_m$  este ocupată de un material magnetic dur (magnet permanent). În restul domeniului  $\Omega_0 = \Omega - \Omega_m$ , mediul este liniar. Pentru a pune mai ușor în evidență proprietățile câmpului magnetic creat de magnetul permanent, considerăm că în  $\Omega$  nu avem curent

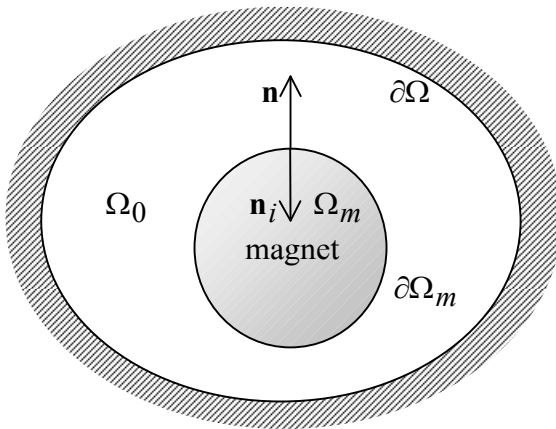


Fig.6.1. Domeniu cu magnet permanent.

electric ( $\mathbf{J}=0$ ).

Energia câmpului magnetic din domeniul  $\Omega_0$ , exterior magnetului permanent este (Cap.4.3):

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (6.1)$$

Deoarece  $\mathbf{J} = 0$ , avem  $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$  pentru orice curbă închisă  $\Gamma$  din  $\Omega$ . Rezultă că este valabilă teorema potențialului magnetic scalar și putem scrie:

$$\mathbf{H} = -\text{grad}V_m \quad (6.2)$$

Înlocuind (6.2) în (6.1) și folosind formula lui Gauss, avem:

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \text{grad}V_m dv = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} V_m dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} V_m \text{div}\mathbf{B} dv \quad (6.3)$$

Datorită legii fluxului magnetic ( $\text{div}\mathbf{B} = 0$ ), ultimul termen din membrul drept este nul. Bordura  $\partial\Omega_0$  a domeniului  $\Omega_0$  este  $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \partial\Omega_{mi}$ , unde  $\partial\Omega_{mi}$  este bordura domeniului  $\Omega_m$ , cu magnet, orientată spre interiorul lui  $\Omega_m$ . Ținând cont că pe perețele perfect conductor avem  $B_n = 0$ , relația (6.3) devine:

$$W_m = -\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} V_m dS - \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega_{mi}} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{B} V_m dS = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} V_m dS \quad (6.4)$$

unde  $\partial\Omega_m$  este bordura domeniului  $\Omega_m$  orientată spre exteriorul lui  $\Omega_m$ .

Folosind din nou formula lui Gauss, rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \mathbf{B} \cdot \text{grad} V_m dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} V_m \text{div} \mathbf{B} dv \quad (6.5)$$

și ținând cont de relația (6.2) și de legea fluxului magnetic, obținem energia câmpului magnetic produs de magnetul permanent în exteriorul lui, exprimată în funcție de mărimile câmpului magnetic din magnet:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{H}) dv \quad (6.6)$$

Pentru a comenta relația (6.6), să presupunem că, în fiecare punct al magnetului, relația  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  poate fi descompusă pe direcția de magnetizare, unde componentele  $B_m$  și  $H_m$  urmează curba de histerezis (Fig.6.2), și în planul ortogonal acestei direcții, unde componentele  $\mathbf{B}_t$  și  $\mathbf{H}_t$  au o relație liniară:  $\mathbf{B}_t = \mu_t \mathbf{H}_t$ . Atunci, relația (6.6) se mai poate scrie:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} B_m \cdot (-H_m) dv - \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \mu_t H_t^2 dv$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_m} B_m \cdot (-H_m) dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \mu_t H_t^2 dv + W_m \quad (6.7)$$

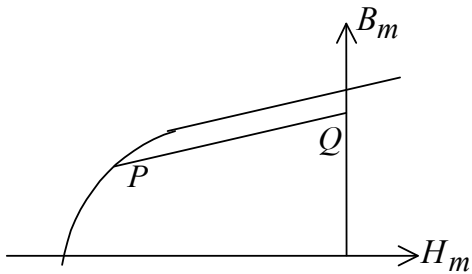


Fig.5.2. Caracteristică de demagnetizare a magnetului

Din relația (6.7), rezultă că magnetul poate crea câmp magnetic în exteriorul său doar dacă o parte din el are componentele  $B_m$  și  $H_m$  ale câmpului magnetic în cadranele 2 sau 4 ale ciclului de histerezis, unde

produsul  $B_m \cdot (-H_m)$  este pozitiv. Energia câmpului magnetic din domeniul  $\Omega_0$  este cu atât mai mare, cu cât produsul  $B_m \cdot (-H_m)$  este mai mare, în toate punctele magnetului și cu cât componenta  $H_t$ , din planul ortogonal direcției de magnetizare, este mai mică. La o calitate dată a magnetului, aceste condiții depind de modul în care este proiectată instalația cu magneți permanenți. Realizarea unor magneți cu produs  $B_m \cdot (-H_m)$  cât mai mare este meritul firmelor producătoare de magneți. Aceste firme atribuie valorii maxime a produsului  $B_m \cdot (-H_m)$ , de pe curba de histerezis limită (v. Partea I, Cap.2, par.2.4), denumirea de “energie maximă a magnetului”. Evident, semnificația acestui produs nu poate fi energia câmpului magnetic în magnet, unde, din cauza faptului că magnetul este un mediu cu histerezis, nu poate fi definită energia câmpului magnetic.

## **6.2. (Facultativ) Calculul câmpului magnetic creat de magneții permanenți**

### **i) Circuite magnetice cu magneți permanenți**

De cele mai multe ori, magneții permanenți pot fi luați în considerare în modelul de circuit magnetic adoptat pentru calculul câmpului magnetic. Este necesar ca fluxul fascicular să parcurgă magnetul pe direcția principală de magnetizare. Magnetul este modelat printr-o latură de circuit magnetic, neliniară și activă, a cărei caracteristică  $\varphi - u_m$  se obține din caracteristica  $B_m - H_m$ , modificând scalele conform relațiilor  $\varphi = S_m B_m$  și  $u_m = l_m H_m$ .

### **ii) Sarcini magnetice fictive**

Presupunem că relația  $B_m - H_m$  de pe direcția de magnetizare este liniară:

$$B_m = \mu_m H_m + B_r \quad (6.8)$$

Această ipoteză este susținută de faptul că, dacă punctul de funcționare al magnetului coboară sub cotul din cadranul 2, atunci, la creșterea inducției magnetice, relația  $B_m - H_m$  nu mai urmărește vechea curbă, ci o dreaptă aflată sub vechea curbă ( $PQ$ , în Fig.6.2). Apoi, atâta timp cât valoarea lui  $B_m$  nu scade sub valoarea din punctul  $P$ , caracteristica  $B_m - H_m$  rămâne pe dreapta  $PQ$ . În tehnică, se aduce intenționat punctul de funcționare al magnetului ( $B_m$ ) la valoarea cea mai mică, pentru ca apoi să fie bine definită caracteristica  $B_m - H_m$  pe care o are magnetul (se numește “stabilizarea magnetului”).

Ținând cont de (6.8), magnetul permanent apare ca un mediu liniar, anizotrop, cu polarizație magnetică permanentă (v. Partea I, Cap.2):

$$\mathbf{B} = \overline{\mu} \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (6.9)$$

unde tensorul permeabilității magnetice are componentele  $\mu_m$ , pe direcția de magnetizare, și  $\mu_t$  în planul ortogonal acestei direcții, iar  $\mathbf{B}_r = \mathbf{u}_m B_r$ ,  $\mathbf{u}_m$  fiind versorul direcției de magnetizare. Presupunem că, în domeniul studiat  $\Omega$ , avem  $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$  pentru orice curbă închisă  $\Gamma$  și atunci este valabilă relația (6.2).

Înlocuim această relație în (6.9) și apoi aplicăm operatorul  $div$  și, ținând cont de legea fluxului magnetic, obținem:

$$0 = -div \overline{\mu} grad V_m + div \mathbf{B}_r \quad (6.10)$$

Numim sacină magnetică fictivă mărimea:

$$\rho_m = -div \mathbf{B}_r \quad (6.11)$$

și relația (6.10) se scrie:

$$-\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} V_m = \rho_m \quad (6.12)$$

Ecuția (6.12) este aceeași cu ecuația potențialului folosită în electrostatică (ecuația (1.5) de la Partea a II-a, Cap.1). Putem folosi metodele de determinare a câmpului electric din electrostatică. De exemplu, dacă  $\mu_m = \mu_t = \mu_0$ , proprietate valabilă pentru magneți din ferite sau din pământuri rare și, dacă domeniul de calcul este nemărginit și are peste tot permeabilitatea magnetică  $\mu_0$ , atunci putem folosi formulele coulombiene (Partea a II-a, Cap.4, par.4.1)

$$V_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_m}{r} dv \quad (6.13)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_m \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (6.14)$$

unde  $\mathcal{D}$  este domeniul ocupat de magnet. De cele mai multe ori, admitem că magneții sunt magnetizați uniform și, ca urmare,  $\mathbf{B}_r = c\mathbf{t}$  în interiorul magnetului. Atunci, în relația (6.11), apare divergența superficială (vezi Partea I, Cap.4, par.4.1):

$$\rho_{mS} = -\operatorname{div}_S \mathbf{B}_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r \quad (6.15)$$

unde  $\mathbf{n}$  este normala la frontiera  $\partial\mathcal{D}$  a domeniului  $\mathcal{D}$ . În locul integralei (6.14), avem:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r) \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (6.16)$$

### iii) Curenți amperieni

Din legea fluxului magnetic, rezultă că putem scrie  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$  pe care-l înlocuim în relația (6.9), înmulțim apoi cu  $\overset{=-1}{\mu}$  și aplicăm operatorul  $\text{rot}$ . Rezultă:

$$\text{rot} \overset{=-1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \text{rot} \overset{=-1}{\mu} \mathbf{B}_r \quad (6.17)$$

Numim densitatea de volum a curenților amperieni mărimea:

$$\mathbf{J}_m = \text{rot} \overset{=-1}{\mu} \mathbf{B}_r \quad (6.18)$$

și relația (6.17) se scrie:

$$\text{rot} \overset{=-1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_m \quad (6.19)$$

Ecuția (6.19) este aceeași cu ecuația potențialului magnetic vector folosită la rezolvarea problemelor de câmp magnetic staționar (4.18). Putem folosi metodele de determinare a câmpului magnetic (Cap.4). De exemplu, dacă  $\mu_m = \mu_t = \mu_0$  și dacă domeniul de calcul este nemărginit și are peste tot permeabilitatea magnetică  $\mu_0$ , atunci putem folosi formulele Biot-Savart-Laplace (par.4.2)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\mathbf{J}_m \times \mathbf{r}}{r^3} dv \quad (6.20)$$

Dacă admitem că magneții sunt magnetizați uniform, atunci, în relația (6.11), apare rotorul superficial (vezi Partea I, Cap.4, par.4.4):

$$\mathbf{J}_{mS} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}_S \mathbf{B}_r = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r \quad (6.21)$$



În locul integralei (6.14), avem:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_r) \times \mathbf{r}}{r^3} dS \quad (6.22)$$

# PARTEA V-a. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR

## 1. ECUAȚIILE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC CVASISTAȚIONAR

Fie un domeniu  $\Omega$  în care dorim să studiem câmpul electromagnetic.

Legea inducției electromagnetice, în forma locală este:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

Regimul cvasistaționar rezultă prin neglijarea curentului herzian în legea circuitului magnetic, care capătă astfel forma Teoremei lui Ampère. Forma ei locală este:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.2)$$

Această aproximare privind legea circuitului magnetic este pe deplin justificată pentru analiza câmpului electromagnetic în medii conductoare. Într-adevăr, forma completă a legii circuitului magnetic este  $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ . Să presupunem acum că, într-un punct oarecare din domeniul conductor, inducția electrică  $\mathbf{D}$  este orientată pe o direcție  $\mathbf{u}$  și este funcție sinusoidală de timp:  $\mathbf{D} = \mathbf{u}D_{\max}\sin(\omega t)$ . Atunci avem:

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{u}D_{\max}\omega\cos(\omega t)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{u} D_{\max} \sin(\omega t)$$

unde  $\sigma$  este conductivitatea mediului conductor. Raportând valorile maxime ale celor doi termeni din membrul drept al legii circuitului magnetic, avem:

$$\lambda = \frac{\left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{\max}}{J_{\max}} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} = 2\pi f \varepsilon \rho$$

unde  $f$  este frecvența, iar  $\rho$  este rezistivitatea. În cazul cuprului, de exemplu, valoarea acestui raport este  $\lambda = 10^{-18} f$ . Este evident faptul că termenul  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  trebuie neglijat. Pentru mediile conductoare, ponderea acestui termen devine importantă dacă rezistivitatea este foarte mare și frecvența câmpului electromagnetic este foarte ridicată. Un exemplu poate fi pătrunderea câmpului electromagnetic în corpul omenesc, în procedurile de investigare bazate pe rezonanță magnetică nucleară.

Termenul  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  poate fi neglijat și în regiunile cu aer ale domeniului  $\Omega$ , dacă frecvența este suficient de mică (viteza de variație în timp a câmpului electromagnetic este suficient de mică). Într-adevăr, să presupunem că intensitatea câmpului electric este limitată superior la valoarea 10MV/m. Atunci, pentru densități de curent uzuale, de cca.  $10^6 \text{ A/m}^2$ , rezultă  $\lambda = 10^{-9} f$ . Vom vedea (Cap.5) că adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic în corpurile conductoare este cu atât mai mică cu cât frecvența este mai mare. De exemplu, în cazul cuprului, pentru  $f > 1 \text{ MHz}$  adâncimea de pătrundere este sub 0,1mm. În acest caz, suprafața corpului conductor poate fi privită ca o frontieră cu condiții de frontieră speciale, privind câmpul electromagnetic din regiunile cu aer. Analiza câmpului electromagnetic se face altfel decât în modelul cvasistationar (unde

electromagnetice în regiunile cu aer și frontiere cu pierderi la suprafața corpurilor conductoare). Deci, în ipoteza că admitem utilitatea analizei câmpului electromagnetic în volumul corpurilor conductoare, frecvența este, în general, sub valoarea de 1MHz și în acest caz  $\lambda < 10^{-3}$ . Putem neglija astfel termenul  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  și în regiunile cu aer.

La ecuațiile (1.1) și (1.2) se adaugă și relațiile constitutive privind componentele câmpului electromagnetic ( $\mathbf{E}, \mathbf{J}$ ) și ( $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ ).

Legea conducției:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_0 \quad (1.3)$$

În mediile conductoare,  $\sigma > 0$  și  $\mathbf{J}_0 = 0$ , iar în mediile izolante  $\sigma = 0$ . Domeniile (bobinele) cu densitate de curent impusă  $\mathbf{J}_0$  fac parte din mediile izolante.

Pentru simplitate, considerăm că relația  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  este:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.4)$$

În /2/, /3/, /4/ sunt luate în considerare și alte relații  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  ce descriu mediile neliniare sau magnetii permanenți. Relațiile (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) pot fi privite ca un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$ . Vom vedea (Cap.2) că, în condiții de frontieră corect formulate, sistemul acestor ecuații asigură unicitatea celor 4 necunoscute.

În plus, câmpul electromagnetic verifică legea fluxului magnetic:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.5)$$

și legea transformării puterii din forma electromagnetică în alte forme, prin conducție:

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (1.6)$$

*Observații.* 1) Relația (1.2) rezultă prin neglijarea densității curentului de deplasare  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  în legea circuitului magnetic. Este echivalent cu a considera că  $\mathbf{D}$  este constant în timp. Cum  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  și  $\mathbf{E}$  este variabil în timp, rezultă că  $\epsilon = 0$ . Deci  $\mathbf{D} = 0$ . Din legea fluxului electric, rezultă că sarcina electrică este nulă.

2) Ținând cont de observația anterioară și de teorema conservării sarcinii electrice, rezultă că, în vecinătatea suprafețelor, componenta normală a densității de curent se conservă. În particular, în vecinătatea corpurilor izolante, componenta normală a densității de curent este nulă.