

## Capitolul 2

# Legile și principalele teoreme ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

### 2.9. Legea circuitului magnetic (legea Ampère-Maxwell)

Experiența arată că există câmp magnetic asociat atât corpurilor magnetizate, cât și corpurilor electrizate (încărcate sau polarizate electric) aflate în mișcare și respectiv parcuse de curenți electrici de conducție.

**Enunț:** Tensiunea magnetomotoare în lungul unei curbe închise este egală cu suma dintre intensitatea curentului electric de conducție ce străbate orice suprafață deschisă mărginită de acea curbă și viteza de creștere a fluxului electric prin acea suprafață (lege generală dinamică) (Fig. 3.51).

$$u_{mmf} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt} \quad (1)$$

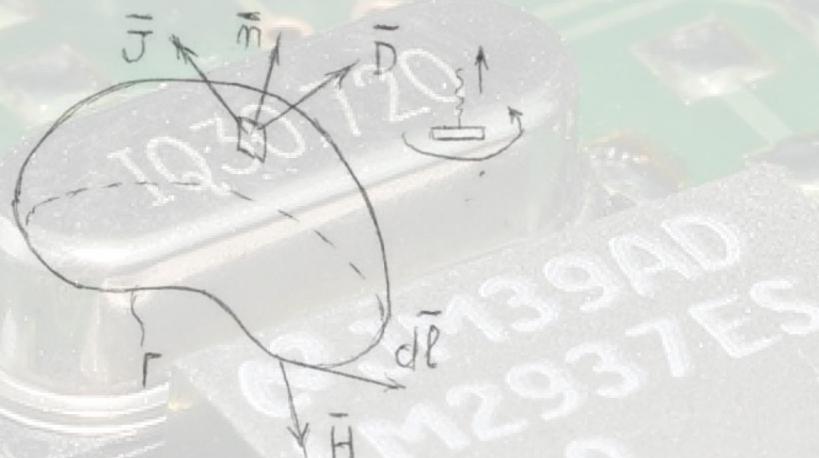


Fig. 3.51

#### a) Forma integrală

Dezvoltând ecuația (1) se identifică forma integrală a legii

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} d\overline{l} = \int_{S_\Gamma} \overline{J} \overline{n} dA + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \overline{D} \overline{n} dA \quad (2)$$

în care primul termen din membrul al doilea este curentul electric de conducție, iar cel de al doilea este curentul electric hertzian.

Dezvoltându-l pe acesta din urmă cu ajutorul derivatei substanțiale de flux, se poate scrie:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} d\overline{l} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} \overline{n} dA + \int_{S_{\Gamma}} \left[ \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{v} \operatorname{div} \overline{D} + \operatorname{rot}(\overline{D} \times \overline{v}) \right] \overline{n} dA = \\ = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} \overline{n} dA + \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \overline{n} dA + \int_{S_{\Gamma}} \overline{v} \operatorname{div} \overline{D} \overline{n} dA + \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot}(\overline{D} \times \overline{v}) \overline{n} dA = \\ = i_{S_{\Gamma}} + i_D + i_{cv} + i_R \quad (3)$$

Fiecare termen al relației (3) identifică următoarele tipuri de curenți:

- curent electric de conducție

$$i_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{J} \overline{n} dA$$

- curent electric de deplasare

$$i_D = \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \overline{n} dA$$

- curent electric de convecție

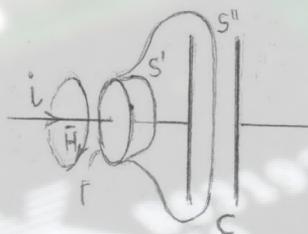
$$i_{cv} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{v} \rho_v \overline{n} dA$$

- curent Röntgen

$$i_R = \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot}(\overline{D} \times \overline{v}) \overline{n} dA$$

S-a demonstrat practic faptul că termenul  $\operatorname{rot}(\overline{D} \times \overline{v})$  nu este verificat de experiență și trebuie înlocuit cu  $\operatorname{rot}(\overline{P} \times \overline{v})$  în care  $\overline{P}$  este polarizația electrică. Această discordanță este o scădere a teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic fără consecințe de ordin practic.

Să arătăm că forma (1) a legii este valabilă pentru orice suprafață  $S_{\Gamma}$  care se sprijină pe un contur închis  $\Gamma$ . În acest scop, considerăm cazul unui condensator alimentat cu un curent  $i$  printr-un fir conductor și două suprafețe deschise  $S'$  și  $S''$  care se sprijină pe conturul  $\Gamma$  (Fig. 3.51').



3.51'

Vom calcula suma  $i_{S_r} + \frac{d\Psi_{S_r}}{dt}$  prin cele două suprafețe:

*Prin  $S'$ :*  $i_{S'} + \frac{d\Psi_{S'}}{dt} \approx i + 0 = i$  deoarece flux electric există practic doar între armături.

*Prin  $S''$ :*  $i_{S''} + \frac{d\Psi_{S''}}{dt} \approx 0 + \frac{dq_\Sigma}{dt} \approx -i_\Sigma = i$  deoarece curentul electric este nul între armături.

Obținând-se același rezultat, se confirmă că legea e valabilă pentru orice suprafață  $S_\Gamma$ . (fluxul electric  $\Psi_{S''}$  existent doar între armăturile condensatorului este practic egal cu fluxul prin suprafața închisă  $\Sigma \cup S' + S''$ , și egal cu sarcina electrică din interior  $q_\Sigma$ , a cărui variație în raport cu timpul este conform legii de conservare  $i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt}$  în care  $i_\Sigma$ iese din suprafața închisă  $\Sigma$  și este în opozitie cu curentul  $i$  care alimentează condensatorul).

Inițial, Ampère a enunțat legea având numai curentul electric de conducție în membrul al doilea:

$$u_{mm_\Gamma} = \begin{cases} 0 & \text{prin } S'' \\ +i & \text{prin } S' \end{cases}$$

Ulterior, Maxwell a introdus curentul hertzian pentru medii imobile, iar Hertz a generalizat expresia pentru medii în mișcare.

În 1876 Rowland probează efecte magnetice asociate sarcinilor electrice ale corpurilor în mișcare devenit curentul de convecție de densitate  $\bar{J}_v = \rho_v \bar{v}$ .

În 1888 Hertz, în urma experimentelor cu eclatorul, probează că un câmp electric variabil în timp produce un câmp magnetic variabil în timp – împreună, unde electromagnetice. Se numește densitate a curentului de deplasare mărimea  $\bar{J}_D = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ .

Roentgen a încercat verificarea experimentală a curentului de densitate  $\bar{J}_R = \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$  dar a constatat că nu sub această expresie nu se confirmă realitatea, ci sub forma curentului de densitate  $\bar{J}_R = \text{rot}(\bar{P} \times \bar{v})$ .

### b) Formele locale

Folosind teorema Stokes pentru transpunerea domeniului de integrare al membrului stâng din relația (3):

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_{S_r} \text{rot} \bar{H} \cdot \bar{n} dA$$

și egalând termenii din integrale din aceeași formulă se obține prima ecuație a lui Maxwell-Hertz pentru medii în mișcare:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + p_v \bar{v} + \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v}).$$

Expresia se reduce pentru medii imobile ( $\bar{v} = 0$ ) la *prima ecuație Maxwell* pentru medii continue

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$$

### c) Cazul suprafețelor de discontinuitate

În medii cu o suprafață de discontinuitate pentru liniile câmpului magnetic, imobile și fără pânză de curent (Fig. 3.52) se conservă componenta tangențială a intensității câmpului magnetic.

$$H_{1t} = H_{2t}$$

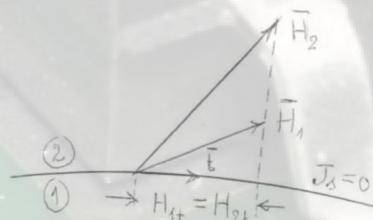


Fig.3.52

**d) Teorema refracției liniilor de câmp magnetic**

Fie două medii liniare și izotrope de permeabilități diferite  $\mu_1$  și  $\mu_2$  de o parte și de alta a unei suprafețe de separație (Fig. 3.53).

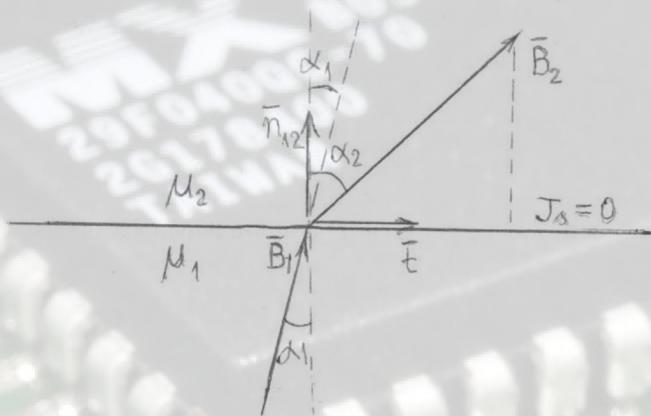


Fig. 3.53

În absența curenților de conducție, tangentele unghiurilor de incidentă  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  față de normalele la suprafață ale celor două inducții  $\bar{B}_1$  și  $\bar{B}_2$  sunt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{B_{1n}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{\mu_2 H_{2t}}{B_{2n}}$$

iar raportul acestor tangente, este egal cu raportul permeabilităților din cele două medii.

Intr-adevăr, ținând seama de egalitatea componentelor tangențiale ale câmpurilor și de egalitatea componentelor normale ale inducțiilor magnetice se obține:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{B_{1n}} \frac{B_{2n}}{\mu_2 H_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Modulele inducției magnetice și a câmpului magnetic sunt:

$$B = \sqrt{B_n^2 + (\mu H_t)^2} \quad H = \sqrt{\left(\frac{B_n}{\mu}\right)^2 + H_t^2}$$

în care s-au notat  $B_n = B_{1n} = B_{2n}$ ,  $H_t = H_{1t} = H_{2t}$

e) **Teorema potențialului magnetostatic**

Se formulează pentru cazul particular al legii circuitului magnetic în regim static  $\left(\frac{d}{dt} = 0\right)$  și în absența conducedorii electrice  $(\bar{J} = 0)$

În acest caz, deoarece  $\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = 0$ , și  $\text{rot } \bar{H} = 0$  se introduce mărimea  $V_m$  denumită *potențial magnetostatic scalar* astfel încât:

$$\bar{H} = -\text{grad } V_m$$

Această relație este utilă în cazul magnetilor permanenți. De asemenea  $H_{1t} = H_{2t}$ .

### f) Teorema Ampère

Este un alt caz particular al legii circuitului magnetic pentru regimul electrocinetic staționar  $\left( \frac{d}{dt} = 0 \right)$ ,  $\overline{J} \neq 0$ .

Se exprimă sub forma integrală

$$u_{mm_r} = \oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot d\overline{l} = i_{S_r}$$

și locală  $\text{rot } \overline{H} = 0$  completată de relația privind conservarea componentelor tangențiale ale câmpului magnetic  $H_{1t} = H_{2t}$  pe suprafețele fără pânze de curent.

Teorema este valabilă și în regim cvasistaționar unde  $\frac{d}{dt} \neq 0$ . În acest caz, pentru con-

ductoare electrice, este posibilă neglijarea efectelor magnetice produse de curentul electric de deplasare în raport cu efectele magnetice determinate de curentul electric de conducție.

### g) Calculul câmpului magnetic generat de conductoare parcuse de curent electric de conducție, care prezintă simetrie perfectă (Metoda Ampere)

Metoda Ampere se aplică structurilor geometrice cu simetrie perfectă. Aceasta presupune existența unui sistem de coordonate ales astfel încât datele problemei variază doar după una din direcțiile sistemului de coordonate. În același timp se cunoaște forma liniilor de câmp magnetic.

Datele problemei:

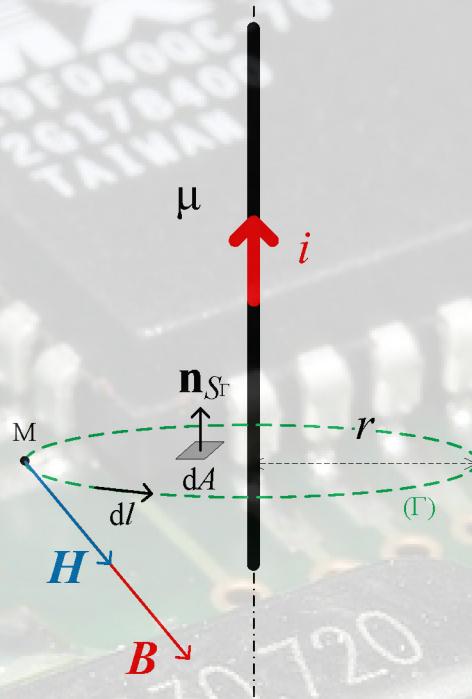
- Configurația geometrică;
- Parametrii de material (permeabilitatea magnetică absolută, permeabilitatea magnetică relativă);
- Sursele de câmp magnetic (densitatea de suprafață/linie a curentului electric de conducție, curentul electric de conducție)

Necunoscutele problemei:

- Expresiile matematice ale intensității câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  și a inducției magnetice  $\mathbf{B}$ .

## Aplicații

1) Un conductor filiform, infinit lung, este parcurs de curentul electric de conducție  $i$  fiind plasat într-un mediu omogen, liniar și izotrop (caracterizat prin  $\mu_r$ ). Să se determine intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  și inducția magnetică  $\mathbf{B}$  într-un punct M aflat la distanța  $r$  de conductor.



Simetrie cilindrică

Conductor filiform, parcurs de curent electric de conducție  $i$

Pentru caracterizare la exterior se alege o curbă închisă  $\Gamma$  de rază  $r$

Liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice de rază  $r$ .

Se identifică expresia tensiunii magnetomotoare asociată liniei de câmp magnetic

$$u_{mm(\Gamma)} = \int_{(\Gamma)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(\Gamma)} H dl = H \int_{(\Gamma)} dl = H \cdot 2\pi r$$

și a curentului electric de conducție care parcurge suprafața delimitată de curba închisă  $\Gamma$

$$i_{(S_\Gamma)} = i.$$

Se aplică teorema Ampere prin egalarea celor două relații. Se obține expresia modului vectorului intensitatea câmp magnetic:

$$u_{mm(\Gamma)} = i_{(S_\Gamma)} \Rightarrow H \cdot 2\pi r = i \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Aplicând legea legăturii în câmp magnetic pentru cazul materialelor liniare, omogene și izotrope se obține expresia modulului vectorului inducție magnetică

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{i}{2\pi r}.$$

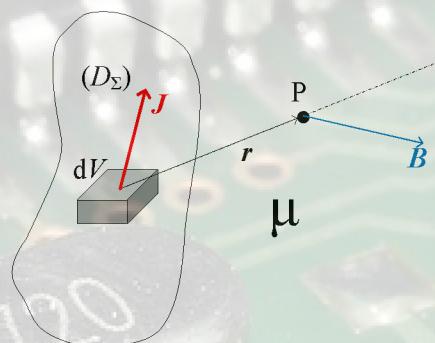
### h) Relația Biot-Savart-Laplace (BSL)

Relația BSL se aplică în cazul corpurilor parcuse de curent electric de conducție pentru care variația sarcinilor electrice prin conductor este constantă în timp și nu se poate acumula sau anula.

Expresia generală a inducției magnetice a câmpului magnetic, generat de densitatea de curent  $\mathbf{J}$  care parcurge un corp masiv, într-un punct P aflat în spațiu și caracterizat prin vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  este:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{(D_\Sigma)} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{(D_\Sigma)} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dV$$

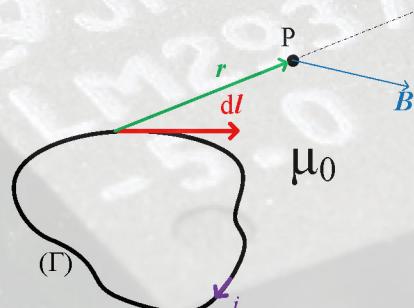


OBS.: Direcția și sensul vectorului  $\mathbf{B}$  este dată de direcția produsului vectorial  $\mathbf{J} \times \mathbf{r}$

Pentru corperi conductoare cu structură filiformă parcuse de curentul electric de conducție  $i$  plasate în vid, relația BSL este:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

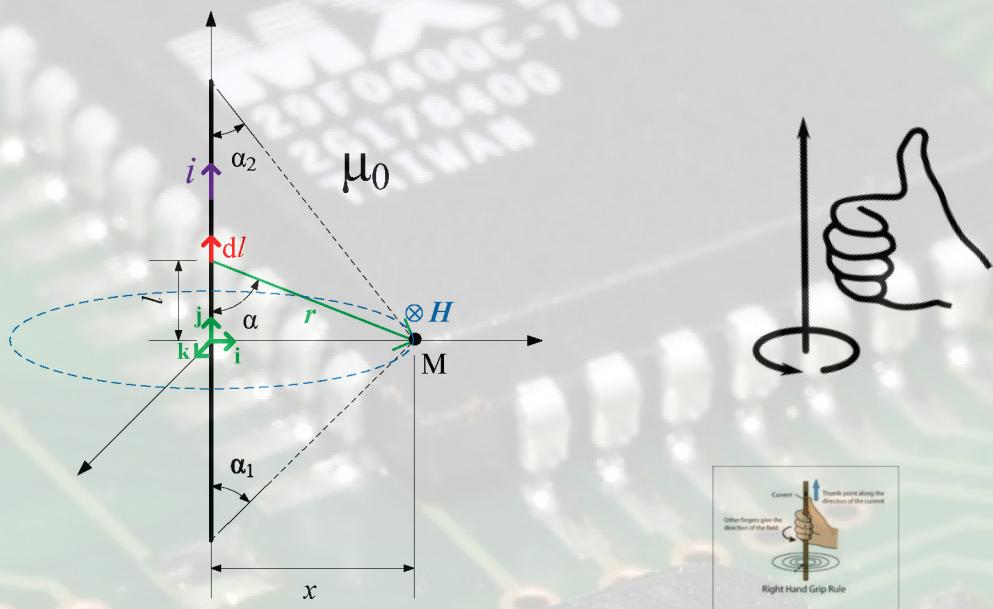
$$\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



OBS.: Direcția și sensul vectorului  $\mathbf{B}$  sau  $\mathbf{H}$  se determină cel mai ușor aplicând regula burghiuilui drept sau regula mâinii drepte

## Aplicații

1) Un conductor filiform, rectiliniu, parcurs de curentul electric de conducție  $i$  se află plasat în vid. Să se determine intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  într-un punct M aflat la distanța  $x$  de conductor. Capetele conductorului formează cu punctul de calcul unghiurile  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$



Formula generală BSL pentru vectorul intensitate câmp magnetic

$$\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi} \int_{(C)} \frac{dl \times r}{r^3}$$

iar pe cele 3 axe expresia acestui vector este  $\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$

Produsul vectorial din integrală se calculează

$$dl \times r = |dl| |r| \sin(\theta) \mathbf{u} = rd\theta \sin(\pi - \alpha) \mathbf{k} = -rd\theta \sin(\alpha) \mathbf{k}$$

astfel încât se observă că vectorul  $\mathbf{H}$  are componentă doar după axa Oz:

$$\mathbf{H} = H \mathbf{k} \Rightarrow \begin{cases} H_x = \mathbf{H} \mathbf{i} = 0 & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0; \mathbf{k} \perp \mathbf{i}) \\ H_y = \mathbf{H} \mathbf{j} = 0 & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0; \mathbf{k} \perp \mathbf{j}) \\ H_z = \mathbf{H} \mathbf{k} \neq 0 & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1) \end{cases}$$

Calculul componentei  $H_z$ :

$$H_z = -\frac{i}{4\pi} \int_{(C)} \frac{r \sin \alpha}{r^3} dl = -\frac{i}{4\pi} \int_{(C)} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl$$

unde utilizăm transformarea elementului de integrare

$$\left. \begin{aligned} l &= x \operatorname{ctg} \alpha \\ r &= \frac{x}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dl = -\frac{x}{(\sin \alpha)^2} d\alpha$$

se obține:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{\left(\frac{x}{\sin \alpha}\right)^2} \frac{x}{(\sin \alpha)^2} d\alpha = \frac{i}{4\pi x} \int_{\alpha_1}^{\pi-\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{i}{4\pi x} [\cos(\pi - \alpha_2) - \cos \alpha_1] = -\frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2] \end{aligned}$$

Expresiile vectoriale sunt:

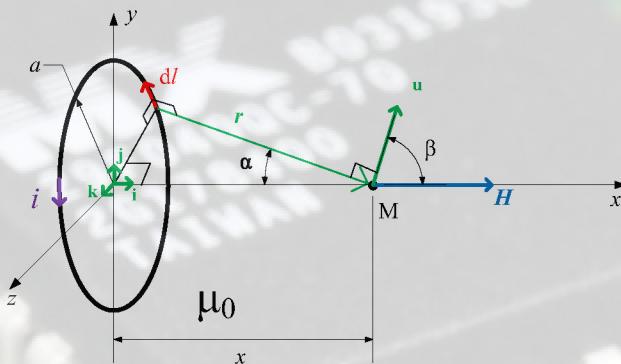
$$\mathbf{H} = H_z \mathbf{k} = -\frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2] \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 H_z \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2] \mathbf{k}$$

OBS: Formula generală pentru conductor filiform rectiliniu  $H = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$  unde se

alege semnul  $\pm$  în funcție de modul de aplicare al regulii mâinii drepte.

2) Un conductor electric filiform, având forma unei spire circulare de rază  $a$ , parcurs de curentul electric de conducție  $i$  se află plasat în vid. Să se determine intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  într-un punct M aflat pe axa perpendiculară ridicată în centrul spirei, la distanța  $x$  de spiră.



OBS.: Se utilizează din geometria 3D teorema celor trei perpendiculare, astfel încât unghiul dintre vectorul  $dl$  și vectorul de poziție  $r$  este de  $90^\circ$

Datorită simetriei componentele pe axa Oy și Oz sunt nule

Expresia generală utilizată:

$$\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{dl \times r}{r^3} \Leftrightarrow \mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$$

Calculul produsului vectorial al integralei

$$dl \times r = |dl| |r| \sin(dl, r) \mathbf{u} = rd l \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u} = rd l \mathbf{u}$$

Pe cele trei axe, conform regulii mâinii drepte, componentele vectorului  $\mathbf{H}$  sunt:

$$H_x = H \mathbf{i}$$

$$H_y = H \mathbf{j} = 0$$

$$H_z = H \mathbf{k} = 0$$

Se va calcula doar componenta după axa Ox:

$$H_x = H \mathbf{i}$$

care prin calcularea produsului scalar se obține:

$$(dl \times r) \mathbf{i} = rd l \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = rd l |\mathbf{u}| |\mathbf{i}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = rd l \cos \beta = rd l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = rd l \sin \alpha$$

Din geometria problemei se identifică următoarele relații:

$$\sin \alpha = \frac{a}{r}$$

$$r^2 = a^2 + x^2$$

care sunt utilizate în calculul componentei  $H_x$ :

$$H_x = \frac{i}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{r \sin \alpha}{r^3} dl = \frac{i}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{ra}{r^3 r} dl = \frac{ia}{4\pi r^3} \int_{(\Gamma)} dl = \frac{ia}{4\pi r^3} 2\pi a = \frac{ia^2}{2r^3} = \frac{ia^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Expresiile vectoriale sunt:

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} = \frac{ia^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 H_x \mathbf{i} = \frac{\mu_0 ia^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

O altă expresie care se poate obține este  $H = \frac{i \sin \alpha}{4\pi \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}} 2\pi a = \frac{i \sin^3 \alpha}{2a}$

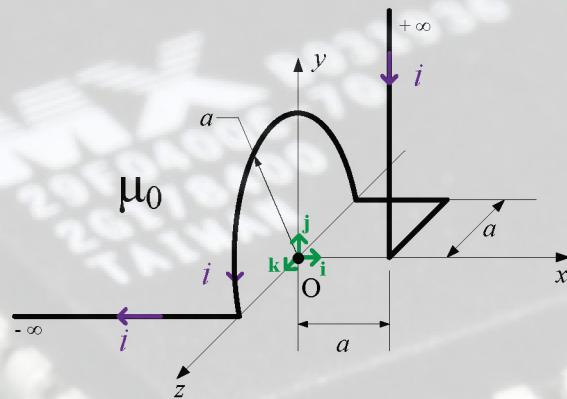
**OBS.: Cazul în care punctul M este în centrul spirei ( $x=0$ )**

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} = \frac{i}{2a} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2a} \mathbf{i}$$

Pentru arce de cerc se înmulțește modulul cu proporția arcului de cerc din spira întreagă (semi-cerc =  $\frac{1}{2}$ )

3) Un conductor electric filiform, având forma din figură, este parcurs de curentul electric de conducție  $i$  fiind plasat în aer. Să se determine intensitatea câmpului magnetic  $\mathbf{H}$  în punctul O, considerând cunoscută dimensiunea  $a$



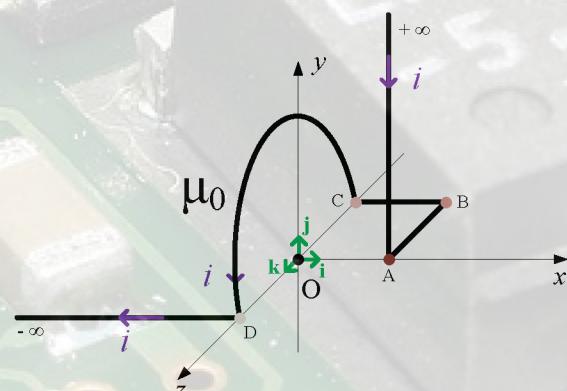
Se rezolvă problema prin segmentarea structurii geometrice pe componente de bază: fir rectiliniu și spiră circulară. Se utilizează formula pentru fir rectiliniu:

$$H = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

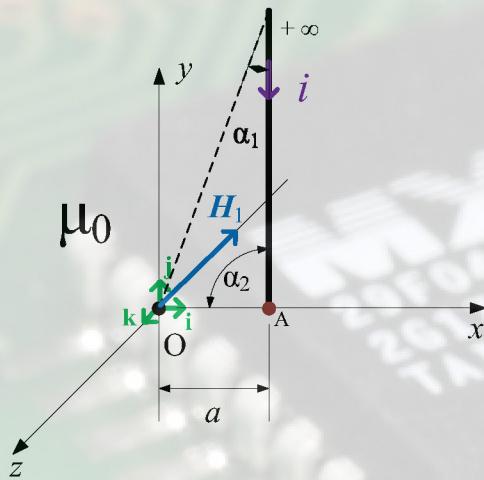
și cea pentru spiră circulară recalculată pentru cazul din problemă semi-cerc și coordonata  $(x=0)$ :

$$H = \frac{1}{2} \frac{i}{2a}$$

Se va utiliza următoarea figură, iar pentru fiecare segment se utilizează regula mâinii drepte, pentru identificarea direcției și sensului vectorului intensității câmpului magnetic generat de fiecare segment:



Pentru segmentul  $(+\infty, A) \Rightarrow H_1$



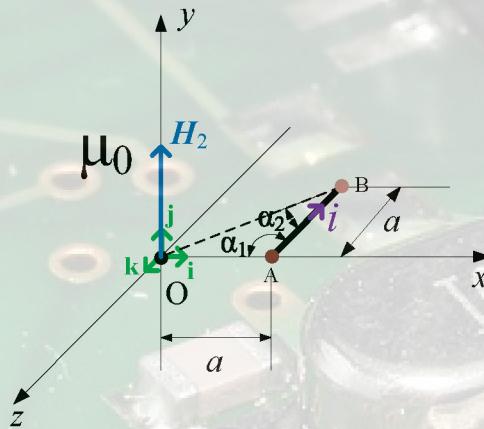
$$H_1 = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

$$x = a; \alpha_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 90^\circ$$

$$H_1 = \frac{i}{4\pi a} [\cos 0^\circ + \cos 90^\circ] = \frac{i}{4\pi a}$$

$$\mathbf{H}_1 = -H_1 \mathbf{k} = -\frac{i}{4\pi a} \mathbf{k}$$

Pentru segmentul  $(A, B) \Rightarrow H_2$



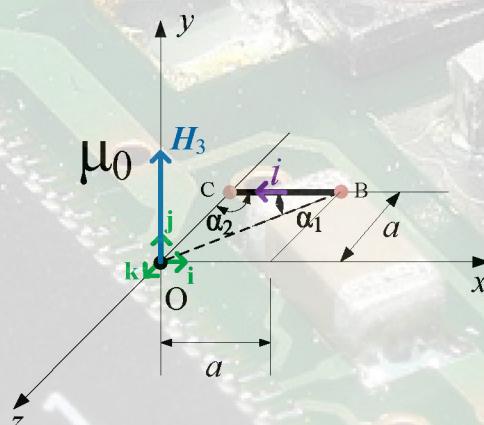
$$H_2 = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

$$x = a; \alpha_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 45^\circ$$

$$H_2 = \frac{i}{4\pi a} [\cos 90^\circ + \cos 45^\circ] = \frac{i}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{H}_2 = H_2 \mathbf{j} = \frac{i\sqrt{2}}{8\pi a} \mathbf{j}$$

Pentru segmentul  $(B, C) \Rightarrow H_3$



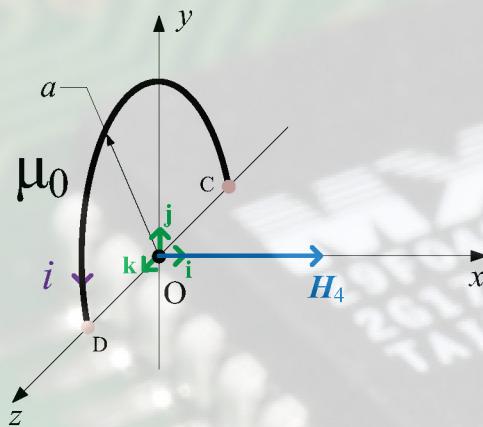
$$H_3 = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

$$x = a; \alpha_1 = 45^\circ; \alpha_2 = 90^\circ$$

$$H_3 = \frac{i}{4\pi a} [\cos 45^\circ + \cos 90^\circ] = \frac{i}{4\pi a} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{H}_3 = H_3 \mathbf{j} = \frac{i\sqrt{2}}{8\pi a} \mathbf{j}$$

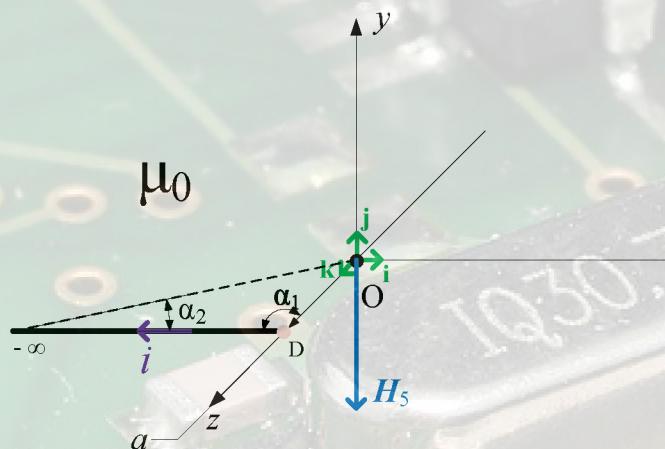
Pentru segmentul  $(C, D) \Rightarrow H_4$



$$H_4 = \frac{1}{2} \frac{i}{2a}$$

$$H_4 = H_4 \mathbf{i} = \frac{i}{4a} \mathbf{i}$$

Pentru segmentul  $(D, -\infty) \Rightarrow H_5$



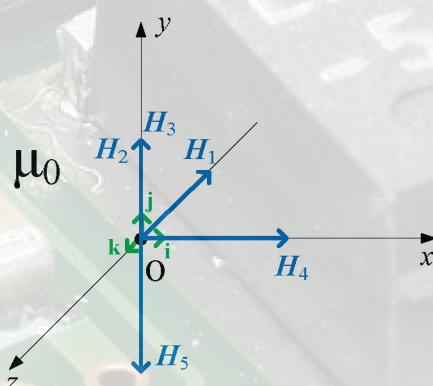
$$H_5 = \frac{i}{4\pi x} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2]$$

$$x = a; \alpha_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 0^\circ$$

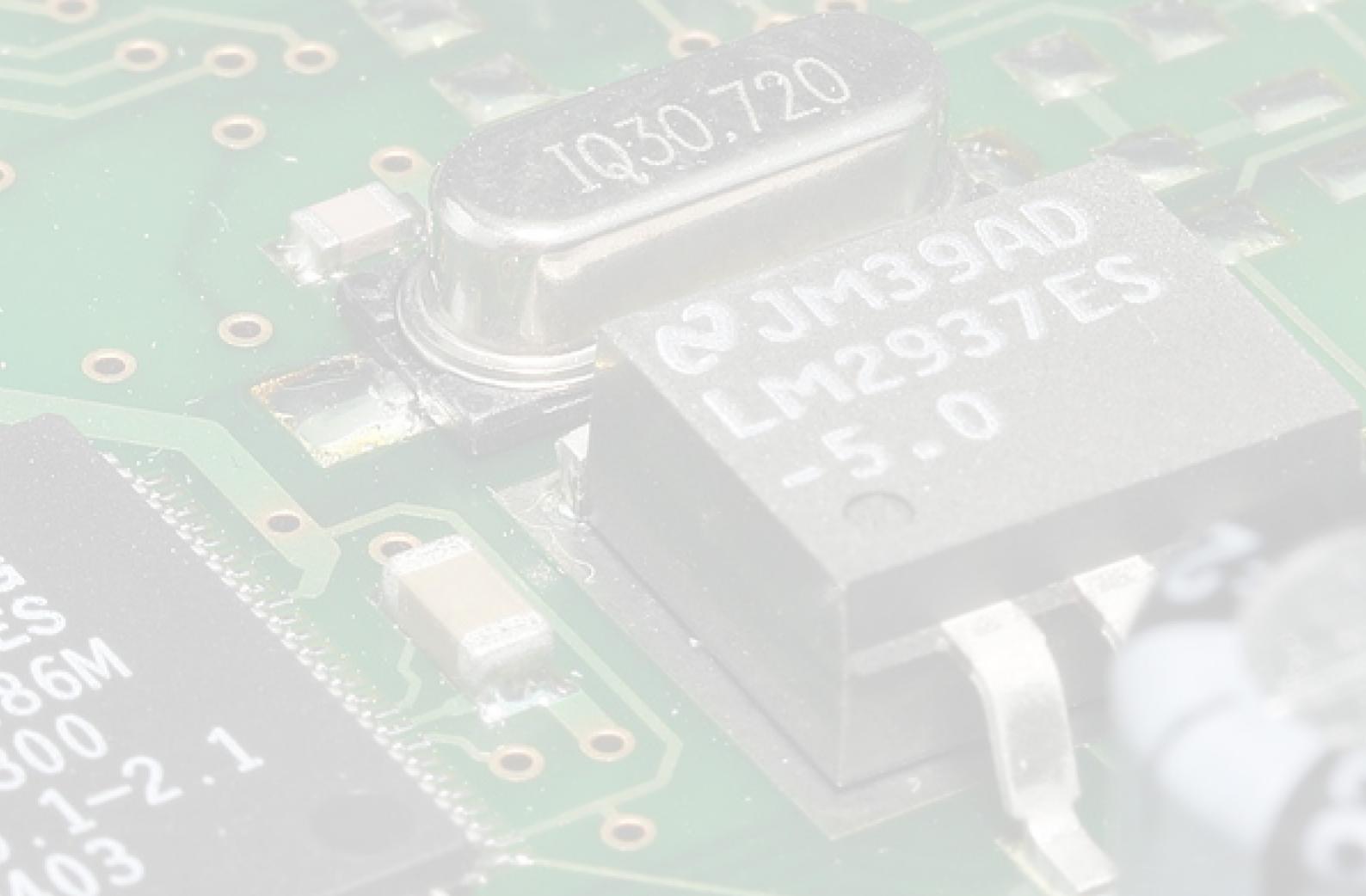
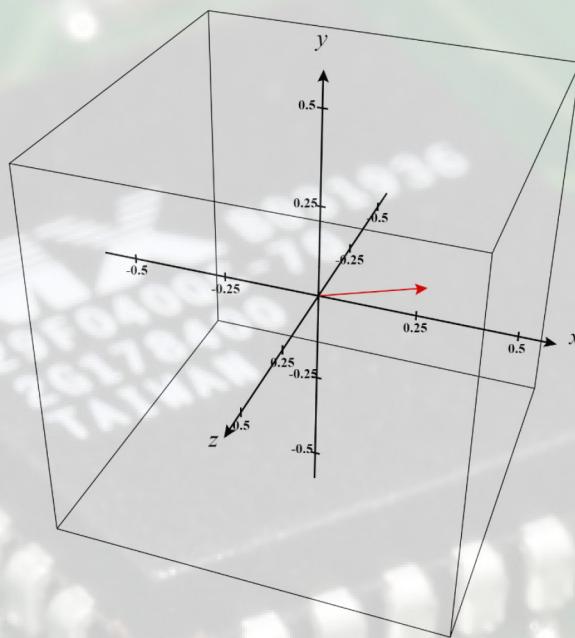
$$H_5 = \frac{i}{4\pi a} [\cos 90^\circ + \cos 0^\circ] = \frac{i}{4\pi a}$$

$$H_5 = -H_5 \mathbf{j} = -\frac{i}{4\pi a} \mathbf{j}$$

Se reprezintă cele cinci vectori în punctul de calcul O și se compun pentru obținerea vectorului rezultant:



$$H_O = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} = \frac{i}{4a} \mathbf{i} + \left( 2 \frac{i\sqrt{2}}{8\pi a} - \frac{i}{4\pi a} \right) \mathbf{j} - \frac{i}{4\pi a} \mathbf{k} = \frac{i}{4a} \mathbf{i} + \frac{i}{4\pi a} (\sqrt{2} - 1) \mathbf{j} - \frac{i}{4\pi a} \mathbf{k}$$



3) Să se determine câmpul în punctele  $O$  și  $O'$  situate în apropierea circuitului din Fig. 3.57.

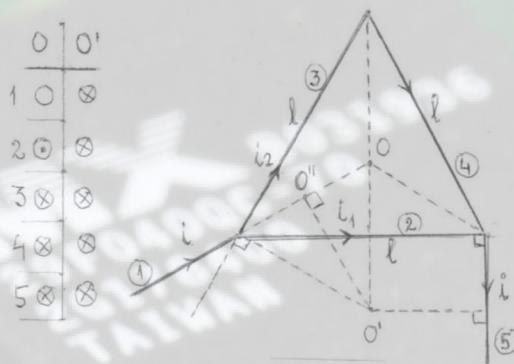


Fig. 3.57

Folosind divizorul de curent avem  $i_2 = i \frac{R}{2R+R} = \frac{i}{3}$  și  $i_1 = i \frac{2R}{2R+R} = \frac{2i}{3}$ ;

$$\overline{H} = \sum_{k=1}^5 \overline{H}_k$$

$$\overline{H}_1 = \frac{i}{4\pi} \int_{C_1} \frac{\overline{dl} \times \overline{r}}{r^3} = 0 \text{ cu } \overline{dl} \uparrow \uparrow \overline{r}$$

$$H_2 = \frac{i_1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l \left( \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{i_1}{4\pi} \frac{\sqrt{3}}{6} l = \frac{i_1}{\pi l}$$

$$H_3 = \frac{i_2}{4\pi} \frac{\sqrt{3}}{6} l = \frac{3}{2\pi l} \frac{i_2}{3} = \frac{i_2}{2\pi l} = H_4$$

$$H_5 = \frac{i}{4\pi} \frac{l}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) + \cos 0 \right] = \frac{i}{2\pi l} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{i}{4\pi l}$$

$$H_O = -H_2 + H_3 + H_4 + H_5 = -\frac{i}{\pi l} + 2 \frac{i}{2\pi l} + \frac{i}{4\pi l} = \frac{i}{4\pi l}$$

$$O'O''' = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{l}{2}$$

$$H_{O'} = \frac{i}{4\pi} \frac{l}{2} \left[ \cos 0 + \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{i}{2\pi l} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{i}{4\pi l}$$

$$H_2' = \frac{i_1}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{6} l} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{i_1}{2\pi \frac{\sqrt{3}}{3} l} \sqrt{3} = \frac{3}{2\pi l} \frac{2i_1}{3} = \frac{i_1}{\pi l}$$

$$H_3' = \frac{i_2}{4\pi \frac{2\sqrt{3}}{3} l} \left( \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{i_2}{\sqrt{3}} \frac{1}{4\pi \frac{1}{\sqrt{3}} l} \left( 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{i_2}{8\pi l} = H_4'$$

$$H_5' = \frac{i}{4\pi \frac{l}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 \right) = \frac{i}{2\pi l} \frac{3}{2} = \frac{3i}{4\pi l}$$

$$H_O' = H_1' + H_2' + H_3' + H_4' + H_5' = \frac{i}{\pi l} \left( \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{9i}{4\pi l} = 9H_O$$

- 4) Câmpul magnetic într-un punct M pe axa de simetrie a unei bobine cilindrice de lungime  $l$  cu  $N$  spire, străbătute de un curent electric de conducție  $i$ .

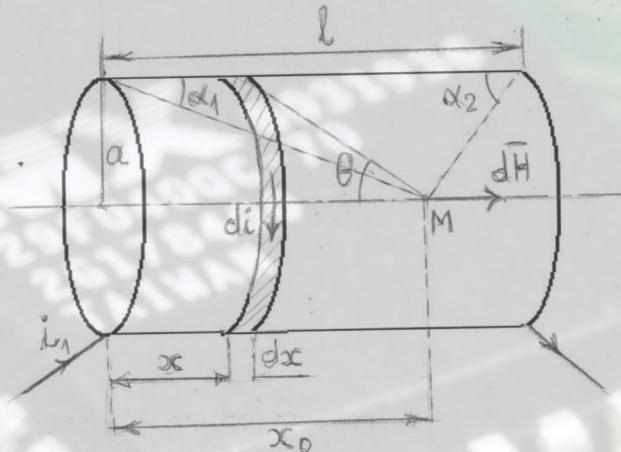


Fig. 3.59

Cu notațiile din Fig. 3.59 câmpul elementar din punctul M este, folosind cel de al doilea rezultat al problemei 2:

$$dH = \frac{di}{2a} \sin^3 \theta.$$

Făcând înlocuirile  $n = \frac{N}{l}$ ,  $di = \frac{Ni}{l} dx = ni dx$ ,  $x = x_0 - a \operatorname{ctg} \theta$ , respectiv

$$dx = -a \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta,$$

câmpul magnetic devine

$$H = \int dH = \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \frac{ni}{2a} \sin^3 \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{ni}{2} \left| -\cos \theta \right|_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} = \frac{ni}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

### i) Bucla de curent

Se numește buclă de curent o mică spiră plană parcursă de curent care delimită o suprafață plană foarte mică (Fig. 3.60) astfel încât,  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} (i \Delta A) = \text{constant}$ .

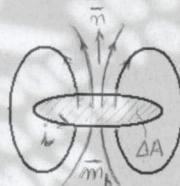


Fig.3.60

Se numește moment al buclei vectorul

$$\bar{m}_b = \bar{n} i \Delta A.$$

Prin analogie cu formula prezentată la paragraful „Dipolul electric” câmpul magnetic al buclei este

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(\bar{m}_b \bar{r}) \bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{m}_b}{r^3} \right]$$

### j) Teorema echivalenței dintre un mic corp magnetizat și o buclă de curent

Un mic corp magnetizat de moment magnetic  $\bar{m}$  și o buclă de curent  $\bar{m}_b$  sunt echivalente atât din punct de vedere al acțiunilor exercitate asupra lor de un câmp magnetic exterior, cât și al câmpului magnetic pe care și le asociază dacă  $\bar{m} = \bar{m}_b$ . Formula de mai sus se poate generaliza prin integrare, pentru un corp masiv magnetizat cu magnetizația  $\bar{M}$  ce ocupă un domeniu  $D$ :

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \int_D \left[ \frac{3(\bar{M} \bar{r}) \bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{M}}{r^3} \right] dV$$

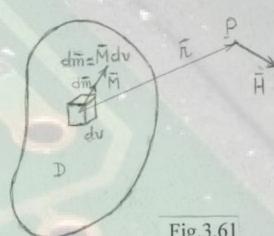


Fig.3.61