

4. COMPORTAREA MĂRIMILOR DE CÂMP ÎN VECINĂTATEA SUPRAFEȚELOR

Așa cum am văzut în paragrafele precedente, pentru descrierea proprietăților câmpului electromagnetic sunt folosiți operatori diferențiali (derivate, *div*, *rot*, *grad*) care presupun continuitatea mărimilor câmpului, precum și a derivatelor parțiale până la un anumit ordin. Din păcate, proprietățile de material ale corpurilor nu sunt continue în domeniul în care studiem câmpul electromagnetic. De exemplu, un corp feromagnetic conductor, care se află în aer, introduce discontinuități la suprafața sa pentru permeabilitatea magnetică (de la μ_0 la μ_{fier}) și pentru conductivitate (de la 0 la σ). Date fiind relațiile constitutive $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ și $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$, este evident că măcar două din cele patru câmpuri de vectori au discontinuitate la suprafața corpului feromagnetic conductor. Este deosebit de important să determinăm comportările mărimilor ce descriu câmpul electromagnetic în vecinătatea suprafețelor ce separă diferite medii. Cunoașterea acestor comportări permite, de asemenea, formularea corectă a condițiilor de frontieră pentru câmpul electromagnetic din domeniul studiat.

Corpuri perfect conductoare

Pentru început, vom analiza mărimile câmpului electromagnetic în corpurile perfect conductoare. Aceste corpuri, care și există în realitate (supraconductivitatea), sunt însă de cele mai multe ori modele pentru corpuri a căror conductivitate este mult mai mare decât conductivitatea vecinilor. Vom arăta în continuare că:

Toate mărimile câmpului electromagnetic sunt nule în interiorul unui corp perfect conductor: $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{B}=0$, $\mathbf{D}=0$, $\mathbf{H}=0$, $\mathbf{J}=0$, $\rho_v = 0$.

Într-adevăr, deoarece în corpul perfect conductor rezistivitatea ρ este nulă, avem $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J} = 0$.

Din legea inducției electromagnetice, scrisă în sistemul de coordonate al corpului (2.23), rezultă că $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \mathbf{E} = 0$, deci $\mathbf{B} = \text{ct.}$ Dacă admitem că, în momentul apariției corpului perfect conductor, inducția magnetică din interiorul său era nulă, atunci la orice timp ea va fi nulă. Este drept că această “mică” presupunere privind valoarea inițială a inducției magnetice ar trebui adăugată la sistemul legilor electromagnetismului. Alte teorii (electrodinamica cuantică) oferă explicații privind valoarea nulă a inducției magnetice în corpurile supraconductoare, explicații pe care, din păcate, teoria Maxwell-Hertz nu le poate da. Se poate arăta însă că, dacă considerăm $\mathbf{B} = \text{ct.}$, obținem aproape aceleași rezultate ca și în cazul în care $\mathbf{B} = 0$, diferențele fiind fără semnificație. Pentru simplitate, vom considera însă în continuare $\mathbf{B} = 0$.

Din legea legăturii dintre \mathbf{B} și \mathbf{H} , rezultă $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = 0$.

Din legea legăturii dintre \mathbf{D} și \mathbf{E} , rezultă $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = 0$.

Din forma locală a legii fluxului electric, rezultă (1.25) $\rho_v = \text{div} \mathbf{D} = 0$.

Sarcina electrică se distribuie la suprafața corpului perfect conductor cu densitate de suprafață ρ_S .

Din forma locală a legii circuitului magnetic, scrisă în sistemul de referință al corpului perfect conductor (3.11), rezultă $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$. Curentul electric se distribuie doar la suprafața corpului perfect conductor, sub forma pânzei de curent, cu densitatea de suprafață \mathbf{J}_S .

4.1. Comportarea inducției magnetice \mathbf{B} în vecinătatea suprafețelor

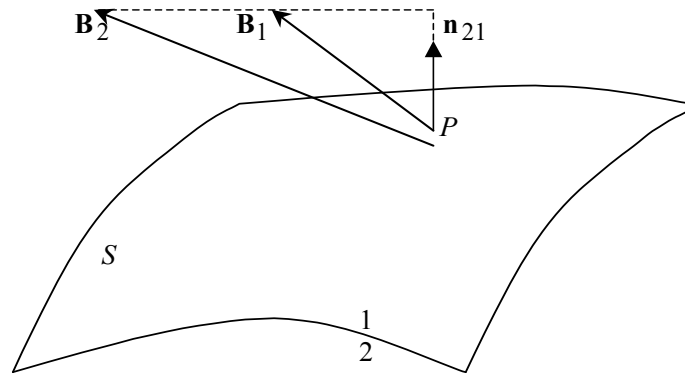


Fig. 4.1. Inducția magnetică pe cele două fețe ale unei suprafețe S .

În vecinătatea suprafețelor, componenta normală a inducției magnetice se conservă (Fig. 4.1):

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (4.1)$$

sau:

$$\text{div}_S \mathbf{B} = 0 \quad (4.1')$$

unde se folosește notația:

$$\text{div}_S \mathbf{B} = \mathbf{n}_{21} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \quad (4.2)$$

Este util de comparat relația (4.1') cu forma locală a legii fluxului magnetic (2.15): $\text{div} \mathbf{B} = 0$.

Demonstrație. Fie o suprafață închisă Σ , de forma unui cilindru foarte mic, cu înălțimea mult mai mică decât raza și cu centrul în punctul P de pe suprafața S . Cele două baze ale cilindrului sunt S_1 și S_2 , iar suprafața laterală este S_L . Scriind legea fluxului magnetic pe suprafața închisă Σ , obținem:

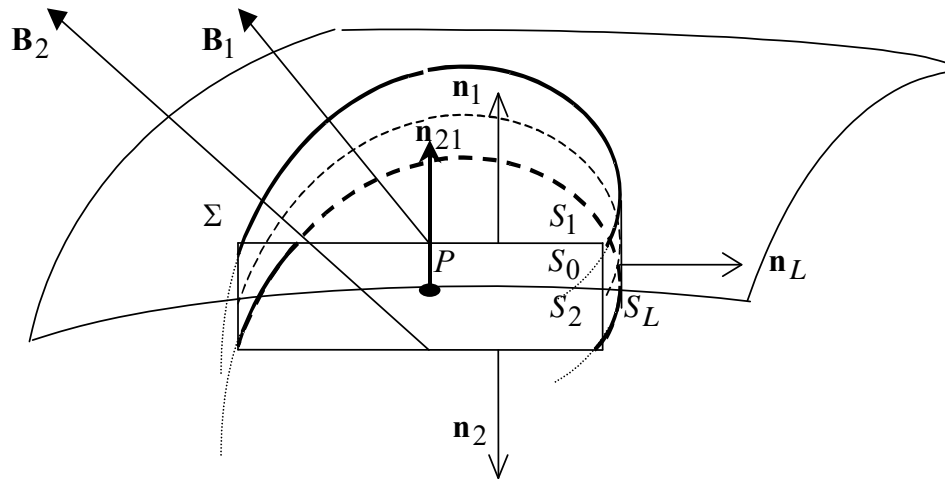


Fig. 4.2. Comportarea inducției magnetice în vecinătatea suprafețelor.

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{S_L} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_L dS = 0 \quad (4.3)$$

Deoarece înălțimea cilindrului este foarte mică, ultima integrală din membrul stâng al relației (4.3) poate fi neglijată. Avem $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_{21} = B_{n1}$ și $\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = -\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{21} = -B_{n2}$. Dacă admitem că, în vecinătatea suprafeței, componentele normale ale inducției sunt continue, atunci relația (4.3) devine $B_{n1}A - B_{n2}A = 0$, unde A este aria suprafețelor bazelor. ■

Consecință. Componenta normală a inducției magnetice este nulă în vecinătatea suprafețelor ce mărginesc corpurile perfect conductoare. Liniile de camp ale inducției magnetice \mathbf{B} ocolesc corpurile perfect conductoare.(Fig.4.3).

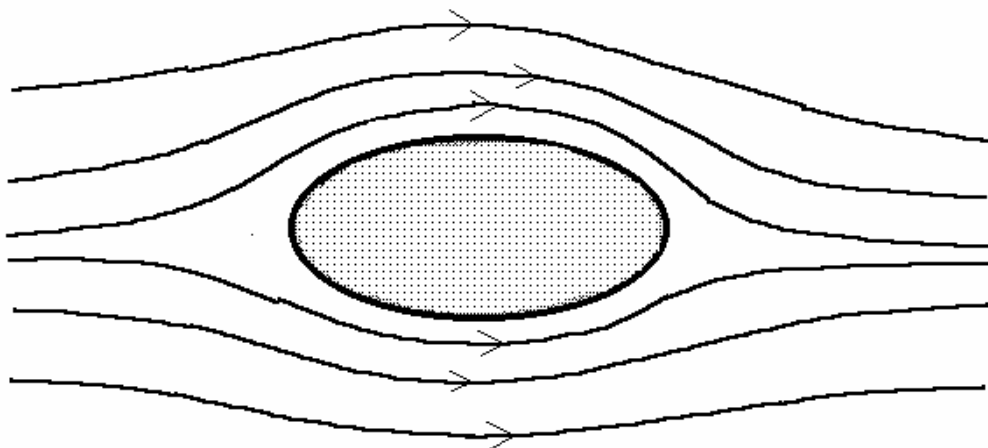


Fig. 4.3 Linii de câmp ale inducției magnetice în vecinătatea unui corp perfect conductor

4.2. Comportarea inducției electrice \mathbf{D} în vecinătatea suprafețelor

Saltul componentei normale a inducției electrice în vecinătatea suprafețelor este egal cu densitatea de suprafață a sarcinii electrice:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \quad (4.4)$$

sau

$$\text{div}_S \mathbf{D} = \rho_S \quad (4.4')$$

Este util de comparat relația (4.4') cu forma locală a legii fluxului electric (1.25): $\text{div} \mathbf{D} = \rho_V$.

Demonstrație. Demonstrația urmează aceeași cale ca la paragraful precedent. Pe suprafață închisă Σ (Fig. 4.2), se scrie legea fluxului electric:

$$\int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{S_L} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_L dS = \int_{S_0} \rho_S dS \quad (4.5)$$

unde S_0 este porțiunea din suprafața S decupată de suprafața cilindrică Σ și presupusă încărcată cu densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_S . Neglijând integrala de pe suprafața laterală și admițând continuitatea componentei normale a inducției electrice, precum și a densității de suprafață a sarcinii electrice, relația (4.5) devine $D_{n1}A - D_{n2}A = \rho_S A$. ■

Consecință. În vecinătatea corpurilor perfect conductoare, componenta normală a inducției electrice este egală cu densitatea de suprafață a sarcinii electrice: $D_n = \rho_S$. Afirmația rezultă din relația (4.4) și faptul că, în interiorul corpurilor perfect conductoare, $D=0$

4.3. Comportarea densității \mathbf{J} în vecinătatea suprafețelor

Saltul componentei normale a densității de volum a curentului electric, în vecinătatea suprafețelor ce separă medii care deplasează cu aceeași viteză, este egal cu viteza de scădere a densității de suprafață a sarcinii electrice:

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (4.5)$$

sau:

$$\text{div}_S \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} \quad (4.5')$$

Este util de comparat relația (4.5') cu forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice pentru medii imobile (3.19): $\text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$.

Demonstrație. Vom urma aceeași cale ca la paragraful precedent. Pe suprafață închisă Σ (Fig. 4.2), se scrie teorema conservării sarcinii electrice (în sistemul de referință ce se deplasează o dată cu punctul P):

$$\int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{S_L} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_L dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_0} \rho_S dS \quad (4.6)$$

unde S_0 este presupusă încărcată cu densitatea de suprafață a sarcinii electrice ρ_S , variabilă în timp. Neglijând integrala de pe suprafața laterală și admitând continuitatea componentei normale a inducției electrice, precum și a derivatei în timp a densității de suprafață a sarcinii electrice, relația (4.6) devine

$$J_{n1}A - J_{n2}A = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} A. \quad \blacksquare$$

Consecință. În vecinătatea corpurilor perfect izolante, componenta normală a densității de volum a curentului electric este egală cu viteza de scădere a densității de suprafață a sarcinii electrice: $J_n = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}$. Afirmația rezultă

imediat din relația (4.5) și din faptul că, în mediile perfect izolante, $\mathbf{J}=0$. Dacă densitatea de sarcină nu variază în timp, atunci componenta normală a densității de volum a curentului electric este nulă.

Observație. Dacă mediile separate de suprafața S se află în mișcare, atunci se poate arăta că:

$$J_{n1} - J_{n2} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} - (v_{n1}\rho_{v1} - v_{n2}\rho_{v2}) \quad (4.8)$$

sau

$$\text{div}_S \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t} - \text{div}_S(\mathbf{v}\rho_v) \quad (4.8')$$

Este util de comparat relația (4.8') cu forma locală a Teoremei conservării sarcinii electrice pentru medii în mișcare (3.20): $\text{div} \mathbf{J} = -\left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}\rho_v)\right)$.

Pentru ca ultimul termen din membrul drept al relației (4.8') să poată fi nenul, trebuie să admitem că substanța (care, în teoria Maxwell-Hertz, este purtătoare de sarcină electrică) este comprimabilă pe suprafața S . De exemplu, un fascicul de electroni ce bombardează suprafața S dacă nu-l asimilăm cu un curent electric.

4.4. Comportarea intensității câmpului electric în vecinătatea suprafețelor

În vecinătatea suprafețelor ce separă medii care deplasează cu aceeași viteză, componenta tangențială a intensității câmpului electric se conservă:

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2} \quad (4.9)$$

unde \mathbf{E}_{t_1} și \mathbf{E}_{t_2} sunt proiecțiile pe planul tangent τ , din punctul P , ale valorilor de pe cele două fețe ale lui \mathbf{E} (Fig. 4.4). Sau:

$$\text{rot}_S \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.9')$$

unde se folosește notația

$$\text{rot}_S \mathbf{E} = \mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)$$

Este util de comparat relația (4.9') cu forma locală a legii inducției electromagnetice pentru medii imobile (2.23): $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

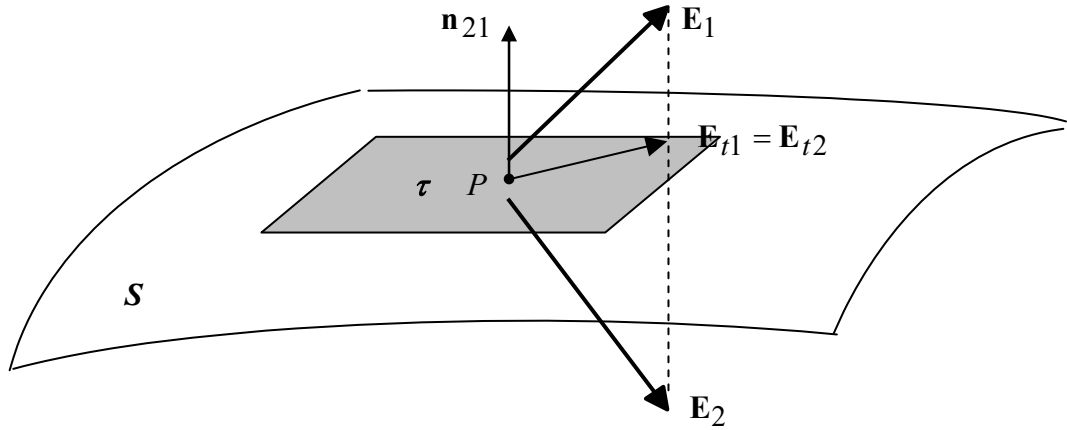


Fig. 4.4. Conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului electric în vecinătatea suprafețelor.

Demonstrație. Fie $\Gamma' = ABCDA$ o curbă dreptunghiulară foarte mică, cu înălțimea mult mai mică decât lățimea, cu centrul în punctul P și orientată pe direcția versorului \mathbf{t}' din planul tangent τ (AB paralel cu \mathbf{t}' și cu aceeași orientare) (Fig.4.5). Aplicăm legea inducției electromagnetice pe curba Γ' :

$$\int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_{S_{\Gamma}} \quad (4.10)$$

Integralele pe porțiunile BC și DA sunt neglijate, deoarece $|BC| \ll |AB|$. Pe porțiunea AB avem:

$$\int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} E'_{t1} dl = E'_{t1} |AB| \quad (4.11)$$

unde E'_{t1} este proiecția lui \mathbf{E}_1 pe direcția \mathbf{t}' . Pe porțiunea CD , avem:

$$\int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{CD} E'_{t2} dl = -E'_{t2} |CD| \quad (4.12)$$

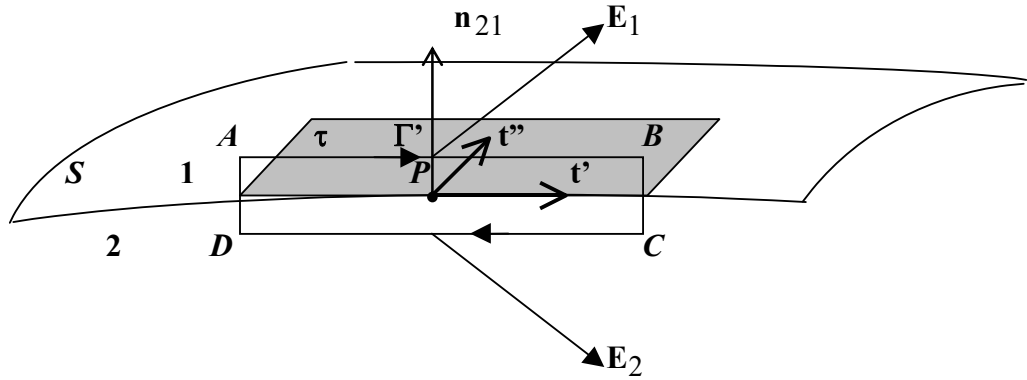


Fig. 4.5. Curbă dreptunghiulară Γ în jurul punctului P , orientată pe direcția \mathbf{t}' .

Am admis continuitatea componentelor tangențiale ale lui \mathbf{E} în vecinătatea suprafeței S . Deoarece înălțimea dreptunghiului este foarte mică în raport cu baza și deoarece mediile separate de suprafața S se deplasează cu aceeași viteză, deci sunt fixe în raport cu sistemul de coordonate local din punctul P , avem:

$$\left| \frac{d}{dt} \Phi_{S_\Gamma} \right| = \left| \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \right| \leq M |AB| |BC| \quad (4.13)$$

unde M este un majorant pe S_Γ pentru $\left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right|$. Din (4.10), (4.11), (4.12) și

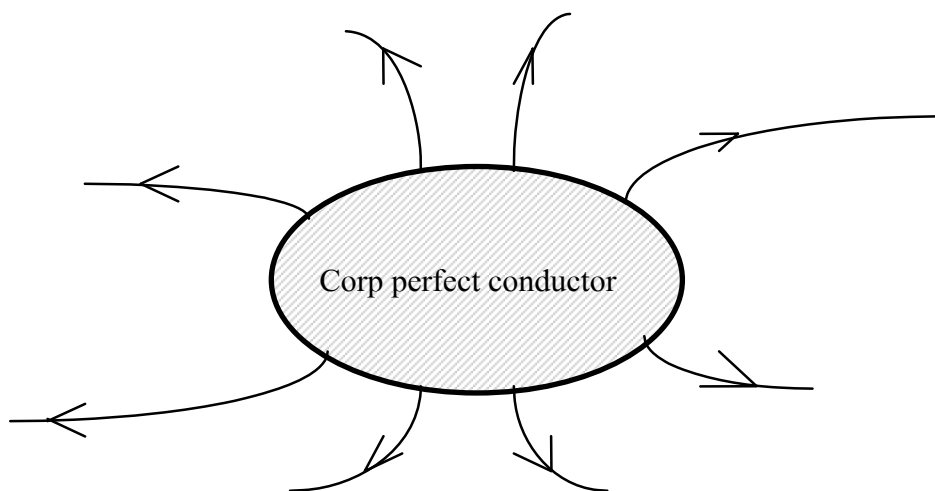


Fig.4.6. Liniile de câmp ale lui \mathbf{E} în vecinătatea unui corp perfect conductor.

(4.13), rezultă:

$$E'_{t1} - E'_{t2} = M|BC| \cong 0 \quad (4.14)$$

deoarece $|BC| \ll |AB|$. Procedând asemănător pentru o direcție t'' necoliniară cu t' obținem

$$E''_{t1} - E''_{t2} = M|BC| \cong 0 \quad (4.15)$$

Din relațiile (4.14) și (4.15), rezultă (4.9).

Consecință. Componenta tangențială a intensității câmpului electric este nulă în vecinătatea corpurilor perfect conductoare. Afirmația rezultă imediat din relația (4.9) și din faptul că, în interiorul corpurilor perfect conductoare, $E=0$. Liniile de câmp ale lui E sunt ortogonale pe suprafețele corpurilor perfect conductoare (Fig. 4.6).

Observație. Dacă mediile separate de suprafața S se află în mișcare, atunci se poate arăta, în maniera Exemplului ii) de la par.2.9, că:

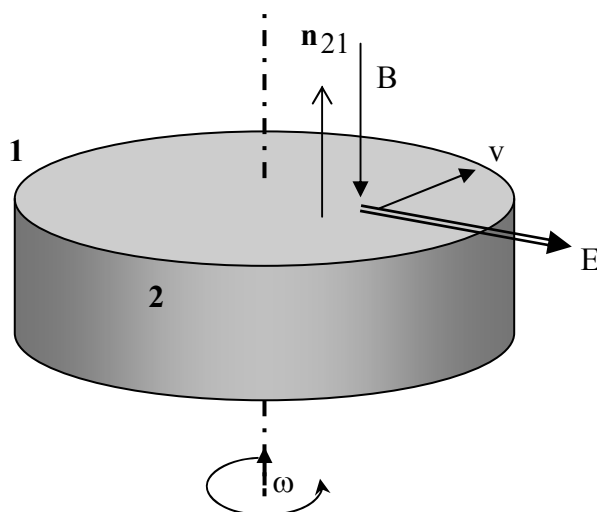


Fig. 4.7. Disc conductor rotindu-se în câmp uniform.

$$\text{rot}_S \mathbf{E} = -\text{rot}_S (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (4.16)$$

Este util de comparat relația (4.16) cu forma locală a legii inducției electromagnetice pentru medii în mișcare (2.27'):

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \right)$$

Exemplu. Într-un câmp magnetic uniform de inducție magnetică B , se rotește cu viteza unghiulară ω un disc conductor, axa de rotație fiind paralelă cu inducția magnetică (Fig.4.7). Ne propunem să determinăm componenta tangențială a lui E la suprafața discului. Răspunsul oferit de teoria

Maxwell-Hertz este dat de relația (4.16). Dacă mediul discului este conductor, atunci, în interiorul discului, $E = \rho J = 0$. Asociind indicele 2 pentru disc și indicele 1 pentru aer, avem:

$$\mathbf{n}_{21} \times \mathbf{E}_{t1} = -\mathbf{n}_{21} \times (0 - \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$$

și, cum $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ se află în planul tangent, rezultă că:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} = \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 + (\omega B)\mathbf{R}$$

4.5. Comportarea intensității câmpului magnetic în vecinătatea suprafețelor

În vecinătatea suprafețelor fără pânză de curent, ce separă medii care deplasează cu aceeași viteză, componenta tangențială a intensității câmpului magnetic se conservă:

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \quad (4.17)$$

sau:

$$\text{rot}_s \mathbf{H} = 0 \quad (4.17')$$

Demonstrație. Se face la fel ca la paragraful anterior, folosind însă legea circuitului magnetic pe conturul Γ' .

Consecință. În vecinătatea corpurilor perfect conductoare magnetice ($\mu \gg \mu_{\text{ext}}$), componenta tangențială a intensității câmpului magnetic este nulă. Afirmatia rezultă imediat din relația (4.17) și din faptul că, în mediul perfect conductor magnetic, $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = 0$. Liniile de câmp ale intensității

câmpului magnetic sunt ortogonale pe suprafața corpului perfect conductor magnetic. De multe ori, corpurile feromagnetice pot fi considerate perfect conductoare magnetice.

Observații: a) Dacă suprafața are pânză de curent, atunci saltul componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic verifică relația:

$$\mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2}) = \mathbf{J}_S \quad (4.18)$$

sau:

$$\text{rot}_S \mathbf{H} = \mathbf{J}_S \quad (4.18')$$

Este util de comparat relația (4.17') cu forma locală a teoremei lui Ampere (3.17): $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

b) Dacă suprafața S separă medii cu viteze diferite, atunci saltul componentei tangențiale a intensității câmpului magnetic verifică teoretic relația:

$$\text{rot}_S \mathbf{H} = \mathbf{J}_S + \text{rot}_S (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (4.19)$$

și, experimental, relația:

$$\text{rot}_S \mathbf{H} = \mathbf{J}_S + \text{rot}_S (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) \quad (4.20)$$

Este util de comparat relația (4.17') cu forma locală a legii circuitului magnetic (3.15').