Capitolul 4
Bobine electrice. Circuite magnetice

4.2. Bobine electrice

c) Teoremele inductivităţilor proprii şi mutuale

Dacă mediul în care se găsesc bobinele este liniar, izotrop şi nemagnetizat permanent, iar conductorul bobinelor se comportă liniar din punct de vedere al conductivității, se definesc următoarele teoreme:

Teorema inductivității proprii

Inductivitatea proprie a unei bobine depinde numai de geometria sa (formă şi dimensiuni) și de proprietățile magnetice de material ale mediului şi este direct proporțională cu pătratul numărului de spire al bobinei.

Teorema inductivității mutuale

Inductivitatea mutuală a unei bobine în raport cu alta depinde numai de geometria celor două bobine, de poziția lor relativă şi de caracteristicile de material ale mediului, fiind direct proporțională cu produsul numărului de spire ale celor două bobine.

d) Ecuațiile lui Maxwell pentru inductivități

Presupunem că *toate* bobinele sunt parcurse simultan de curenți de conducție. Fluxul total al bobinei j este în acest caz:

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{jk} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}\, i_k, \quad j = 1 \div n \quad \text{- prima formă a relațiilor Maxwell} \qquad (11)$$

$$i_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} \Phi_k, \qquad j = 1 \div n \quad \text{- a doua formă a relațiilor Maxwell} \qquad (12)$$

în care λ_{jk} este un *coeficient de permeanță* cu proprietatea $\lambda_{jk} = \lambda_{kj}$. Coeficienții de permeanță au ca dimensiune valoarea reciprocă a reluctanței: $\lambda = \frac{1}{R_m}$.

Teorema Neumann

Se poate demonstra următoarea relație de reciprocitate pentru inductivitățile mutuale:

$$L_{jk} = L_{kj}\,.$$

Cuplajul magnetic al celor două bobine *j* şi *k* este apreciat cu ajutorul coeficientului de cuplaj

$$k_m = \sqrt{\frac{L_{jk} L_{kj}}{L_{jj} L_{kk}}} = \frac{|L_{jk}|}{\sqrt{L_{jj} L_{kk}}} \qquad \text{cu} \qquad k_m \in [0,1].$$

La limită, există bobine necuplate magnetic $L_{jk} = L_{kj} = 0$ (k_m=0) şi bobine perfect cuplate magnetic k_m=1 (Fig. 4.31).

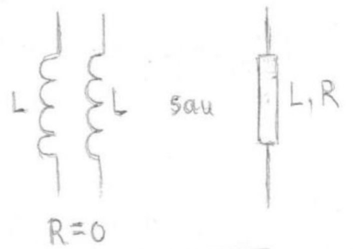


Fig. 4.31

Sensul (*semnul*) *cuplajelor* se pune în evidență cu ajutorul bornelor polarizate (steluțelor). În Fig. 4.32 se prezintă două bobine cuplate magnetic prin inductivitatea *M*, pentru cazul în care cuplajul este pozitiv. Mai jos se prezintă însă patru cazuri diferite de cuplaje: pozitive și negative.

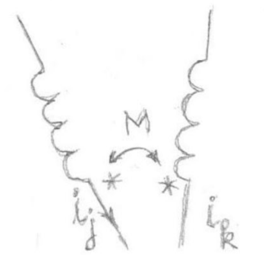


Fig. 4.32

$$\begin{array}{cc} i_j & i_k \\ \downarrow & \downarrow \\ * & * \end{array} \rightarrow +M \qquad \begin{array}{cc} i_j & i_k \\ \downarrow & \\ * & * \\ & \downarrow \end{array} \rightarrow -M$$

$$\begin{array}{cc} * & * \\ \downarrow & \downarrow \\ i_j & i_k \end{array} \rightarrow +M \qquad \begin{array}{cc} & \downarrow \\ * & * \\ \downarrow & \\ i_j & i_k \end{array} \rightarrow -M$$

în care $M = |L_{jk}| = |L_{kj}| > 0$.

e) Calculul inductivității proprii a unui solenoid

Să se determine *inductivitatea proprie* a unui solenoid (bobină cu o geometrie uzual cilindrică) de lungime l, rază $a << l$, cu N spire și miez liniar, de permeabilitate μ (Fig. 4.33).

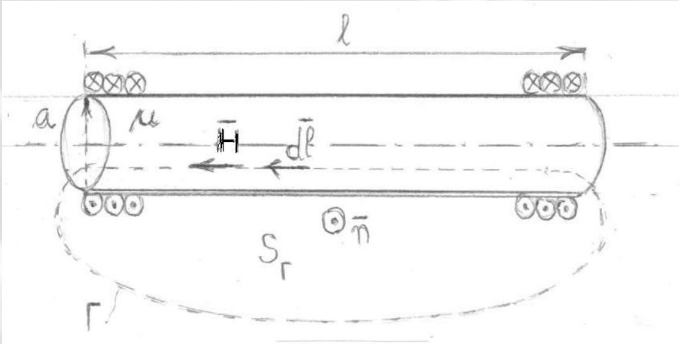
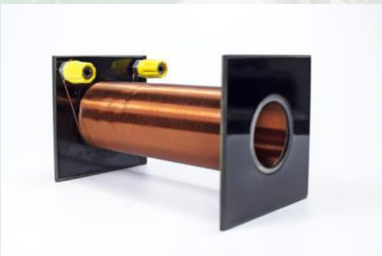


Fig. 4.33



Presupunând un câmp magnetic uniform în interiorul bobinei, respectiv nul în exterior și cu efect de margine neglijabil, tensiunea magnetică de-a lungul unui contur închis Γ format din axul de simetrie al bobinei și o linie exterioară oarecare de închidere a conturului, este:

$$u_{mm_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l} = \int_{miez} \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l} = Hl$$

Solenația prin suprafața deschisă S_Γ care se sprijină pe contur este: $\Theta_{S_\Gamma} = i_{S_\Gamma} = N\,i$.

Folosind teorema lui Ampère $u_{mm_\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma}$ rezultă egalând cei doi termeni: $H\,l = N\,i$, de unde rezultă câmpul magnetic și fluxul magnetic fascicular:

$$H = \frac{N\,i}{l},$$

$$\varphi_f = B\,A = \mu\,H\,A = \mu A \frac{N\,i}{l},$$

în care aria secțiunii transversale a solenoidului, considerat cilindric, este $A = \pi\,a^2$.

Inductivitatea proprie este

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\varphi_f}{i} = \frac{N}{i}\mu A \frac{N\,i}{l} = \frac{\mu A}{l} N^2 = \frac{N^2}{\dfrac{l}{\mu A}}$$

Notăm raportul $\dfrac{l}{\mu A} = R_m$ drept reluctanță (rezistență) magnetică a miezului bobinei și deci inductivitatea bobinei este: $L = \dfrac{N^2}{R_m}$.

f) Calculul inductivității proprii a unui tor

Să se determine *inductivitatea proprie* a unui tor (bobină circulară) având raza interioară R_1 şi raza exterioară R_2, cu N spire distribuite uniform şi miez liniar, de permeabilitate magnetică relativă μ_r (Fig. 4.33a).

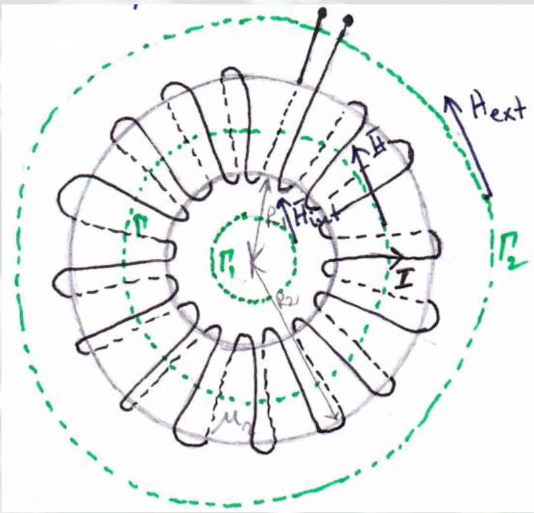
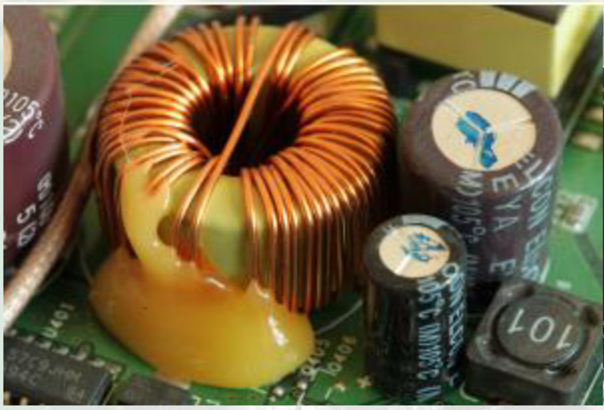


Fig. 4.33a.



Presupunând un câmp magnetic uniform în interiorul bobinei tensiunea magnetică de-a lungul unui contur închis Γ, este:

$$u_{m_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l} = \int_\Gamma H\mathrm{d}l.$$

Conform structurii torului se pot identifica trei curbe închise:

Γ_1 ($r < R_1$),

Γ ($R_1 < r < R_2$),

Γ_2 ($r > R_2$),

unde r este raza fiecărui contur, astfel încât tensiunea magnetică pentru toate cele trei cazuri va fi:

$$u_{m_\Gamma} = \int_\Gamma H \mathrm{d}l = H \cdot 2\pi r.$$

Solenaţia asociată celor trei contururi închise va fi:

$$\Theta_{S_\Gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } S_{\Gamma_1} \ (r < R_1); \\ Ni & \text{pentru } S_\Gamma \ (R_1 < r < R_2); \\ Ni - Ni & \text{pentru } S_{\Gamma_2} \ (r > R_2). \end{cases}$$

Observaţie: $\Theta_{S_{\Gamma_1}} = 0$ deoarece în interiorul torului nu există suportul pentru un curent electric, iar $\Theta_{S_{\Gamma 2}} = Ni - Ni = 0$ deoarece în suprafaţa $S_{\Gamma 2}$ intră, respectiv ies, acelaşi număr de spire care sunt parcurse de acelaşi curent i.

Folosind teorema lui Ampère $u_{m_\Gamma} = \Theta_{S_\Gamma}$ rezultă egalând cei doi termeni: $H \cdot 2\pi r = Ni$, de unde rezultă intensitatea câmpului magnetic prin miezul feromagnetic al torului:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r},$$

şi fluxul magnetic fascicular

$$\varphi_f = BA = \mu_0 \mu_r . HA = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi r} A$$

unde A este aria secţiunii transversale a miezului feromagnetic.

Inductivitatea proprie este:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\varphi_f}{i} = \frac{N}{i} \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi r} A = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{2\pi r} A.$$

Dacă se consideră raza medie a torului $r = \frac{R_1 + R_2}{2}$ atunci inductivitatea proprie este:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{\pi\left(R_1 + R_2\right)} A = \mu \frac{N^2}{\pi\left(R_1 + R_2\right)} A.$$

g) Calculul inductivităţii mutuale a configuraţiilor geometrice realizate din conductoare filiforme (fir şi cadru)

Să se determine *inductivitatea mutuală* dintre un fir rectiliniu infinit lung şi un cadru dreptunghiular cu două laturi paralele cu cadrul. Date: lungimea a, lăţimea b, distanţa dintre fir şi cadru c, i, μ, α (Fig. 4.34, 4.35).

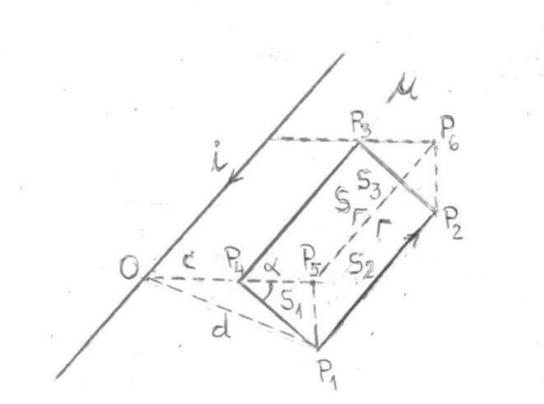


Fig. 4.34

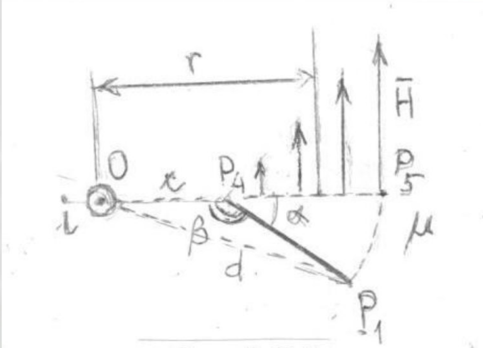


Fig. 4.35

Notând cu r o rază a unei linii circulare de câmp, atunci intensitatea câmpului magnetic determinat de curentul electric i care parcurge firul rectiliniu are valoarea:

$$H = \frac{i}{2\pi r}.$$

Fluxul magnetic prin cadru este $\Phi_{S_\Gamma} = \int\limits_{P_3P_4P_5P_6} \overline{B}\,\overline{n}\,\mathrm{d}A = \int_c^d \frac{\mu i}{2\pi r} a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu i a}{2\pi} \ln r \Big|_c^d = \frac{\mu i a}{2\pi} \ln\frac{d}{c}.$

Dar $d^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\beta = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha) = c^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha$.

Rezultă:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{S_\Gamma}}{i} = \frac{\mu a}{2\pi} \ln\left(\frac{d^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu a}{2\pi} \ln\left(\frac{b^2}{c^2} + 2\frac{b}{c}\cos\alpha + 1\right).$$

Dacă firul şi cadrul sunt în acelaşi plan: $L_{21} = \frac{\mu a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right)$.