Reţele de condensatoare

Reţelele de condensatoare sunt circuite electrice formate doar din condensatoare şi surse de tensiune. Din punctul de vedere al teoriei circuitelor electrice, reţelele de condensatoare au elemente în exces: există bucle formate numai din condensatoare şi surse de tensiune. Deci, sunt modele de circuite care pentru care existenţa soluţiei (*u,i*) nu este asigurată în domeniul funcţiilor. Vom vedea totuşi că se poate determina o soluţie (*u,Q*) în regimul static.

Teorema a 2-a a lui Kirchhoff pentru reţele de condensatoare. Teorema a 2-a a lui Kirchhoff pentru circuite electrice este valabilă şi pentru reţelele de condensatoare: suma tensiunilor laturilor unei bucle este nulă:

$$\sum_{k \in bucla} u_k = 0 \qquad (2.14)$$

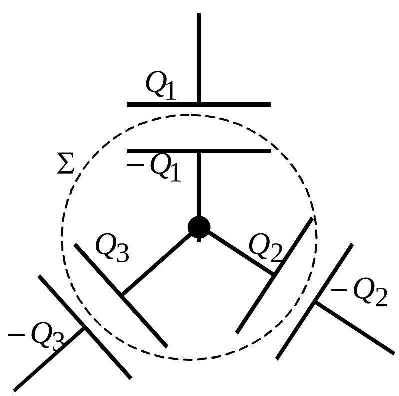

Fig.2.8 Nod de condensatoare

Teorema a 1-a a lui Kirchhoff pentru reţele de condensatoare. Fie un nod (secţiune) de condensatoare şi fie suprafaţa închisă Σ ce trece prin mediul izolant dintre armăturile condensatoarelor (Fig.2.8). Aplicăm teorema conservării sarcinii electrice pe suprafaţa Σ:

$$i_\Sigma = -\frac{d}{dt} q_\Sigma$$

Deoarece Σ trece doar prin medii izolante, $i_\Sigma = 0$, iar $q_\Sigma = -Q_1 + Q_2 + Q_3$. Rezultă:

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = constant \qquad (2.15)$$

Valoarea constantei din membrul drept al relaţiei (1.15) se obţine din evoluţia reţelei de condensatoare.

Rezolvarea reţelelor de condensatoare se face adăugând la relaţiile lui Kirchhoff (2.14) şi (2.15) valorile tensiunilor de la bornele surselor de tensiune şi relaţiile dintre tensiunile şi sarcinile condensatoarelor (2.4). Pot fi folosite procedurile de soluţionare a circuitelor rezistive.

Exemplu. Condensatorul de capacitate C_1 este încărcat cu sarcina electrică Q_0, iar condensatorul C_2 este descărcat, comutatorul *k* fiind deschis. La timpul *t*=0, se închide comutatorul, punând în paralel cele două condensatoare. Să se determine sarcinile şi tensiunile condensatoarelor la *t*>0.

Din a 2-a teoremă a lui Kirchhoff, rezultă:

$$u_1 = u_2 = u \tag{2.16}$$

iar din teorema a 1-a rezultă:

$$Q_1 + Q_2 = ct = Q_0 \tag{2.17}$$

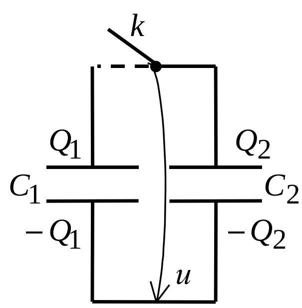

Fig. 2.9. Reţea de condensatoare.

La închiderea comutatorului *k*, sarcina electrică Q_0 adunată iniţial doar pe armătura condensatorului C_1 se redistribuie pe armăturile ambelor condensatoare. Folosind relaţia (2.4), din (2.17) şi (2.16), rezultă:

$$u = \frac{Q_0}{C_1 + C_2}$$

apoi:

$$Q_1 = \frac{C_1 Q_0}{C_1 + C_2} \qquad Q_2 = \frac{C_2 Q_0}{C_1 + C_2}$$

Observaţie. Vom vedea la par.3 că energia câmpului electric al unui condensator verifică relaţia $W_e = \frac{Q^2}{2C}$. În cazul exemplului de mai sus, unde pentru simplitate vom lua $C_1 = C_2 = C$, apare următoarea anomalie energetică: înainte de închiderea comutatorului *k*, energia câmpului electric era $W_{e_0} = \frac{Q_0^2}{2C}$, iar după închidere devine $W_e = \frac{Q_1^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{2C} = 2\frac{(Q_0 / 2)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C}$. O parte din energie a dispărut. Este o consecinţă a faptului că circuitul are elemente în exces. Teorema a 2-a a lui Kirchhoff nu este verificată de valorile iniţiale ale tensiunilor de la bornele condensatoarelor; ca urmare, nici teorema lui Tellegen (conservarea puterilor) nu este verificată, ea fiind o consecinţă a teoremelor lui Kirchhoff. O interpretare fizică poate fi găsită în faptul că, la închiderea comutatorului, în circuit apare un impuls de curent, rezistenţa circuitului fiind nulă. Dar produsul dintre patratul impulsului şi rezistenţa circuitului este o nedeterminare de forma $0 \cdot \infty$, care poate fi nenulă. Dacă am înseria cu cele două condensatoare un rezistor de rezistenţă *R*, atunci am obţine un model corect de circuit, fără elemente în exces. Prin rezolvarea circuitului, se obţin curentul din rezistor (care, de data aceasta, este funcţie), puterea disipată în rezistor şi energia transformată în căldură în intervalul $(0,\infty)$. Se obţine o valoare care nu depinde de valoarea rezistenţei rezistorului şi este egală chiar cu energia dispărută: $\frac{Q_0^2}{4C}$.

Observaţie. A 3-a formă a relaţiilor dintre sarcinile şi potenţialele unui sistem de conductoare ne sugerează adoptarea schemei din Fig.2.10

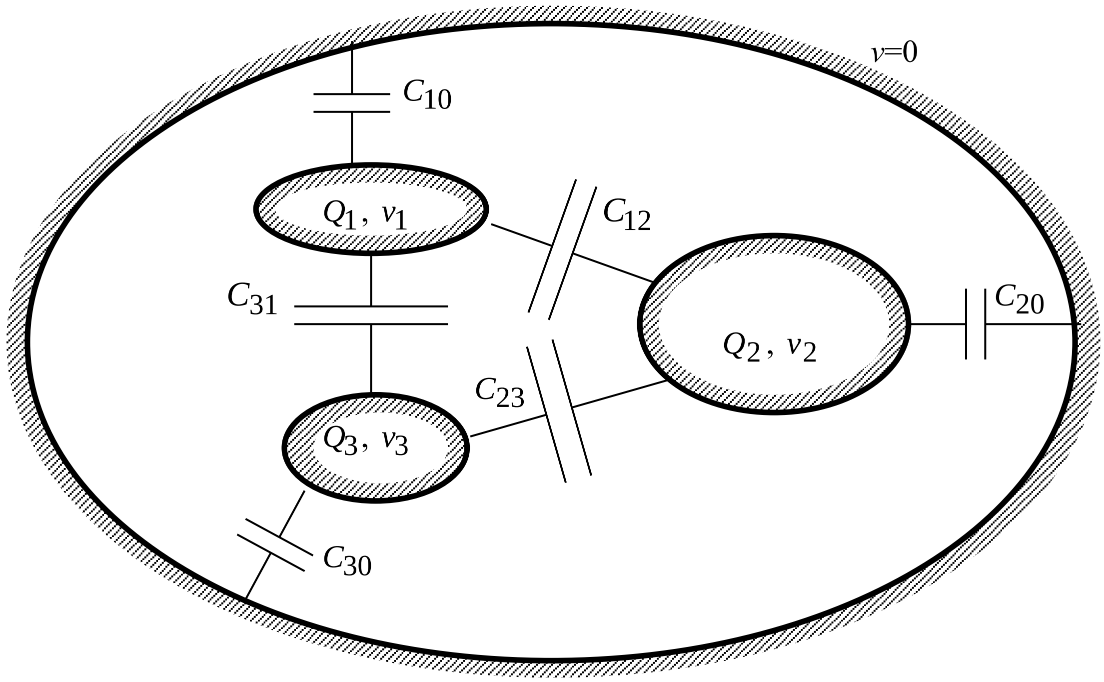

Fig.2.10. Capacitaţile parţiale pentru conductoarele dintr-o incintă.

Conectarea condensatoarelor în paralel. Fie n condensatoare conectate ca în Fig.2.11. Se obţine tot un condensator a cărui capacitate echivalentă este:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n \tag{2.18}$$

Într-adevăr, dacă aplicăm la bornele ansamblului tensiunea u, atunci armăturile fiecărui condensator k se încarcă cu sarcinile electrice $Q_k, -Q_k$. Armăturile noului ansamblu sunt formate prin conexiunile armăturilor încărcate cu Q_k şi $-Q_k$, deci au sarcini egale în modul şi de semne contrarii, îndeplinind condiţiile armăturilor unui condensator:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = uC_1 + uC_2 + \dots + uC_n = u(C_1 + C_2 + \dots + C_n)$$

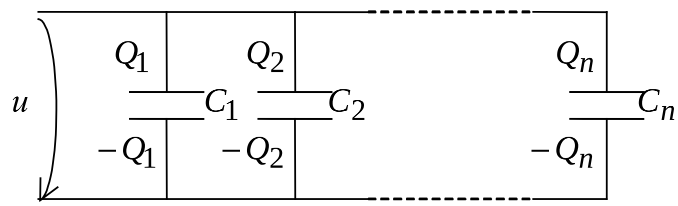

Fig. 2.11. Conectarea condensatoarelor în paralel.

De unde:

$$C_e = \frac{Q}{u} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Observaţii: a) Capacitatea echivalentă este mai mare decât oricare din capacităţile ce formează ansamblul.

b) Dacă sunt conectate în paralel condensatoare de capacităţi egale C, atunci capacitatea echivalentă este $C_e = nC$.

Conectarea condensatoarelor în serie. Fie n condensatoare descărcate, conectate ca în Fig.2.12. Se obţine tot un condensator a cărui capacitate echivalentă C_e verifică relaţia:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \tag{2.19}$$

Într-adevăr, având în vedere că iniţial condensatoarele au fost descărcate, din

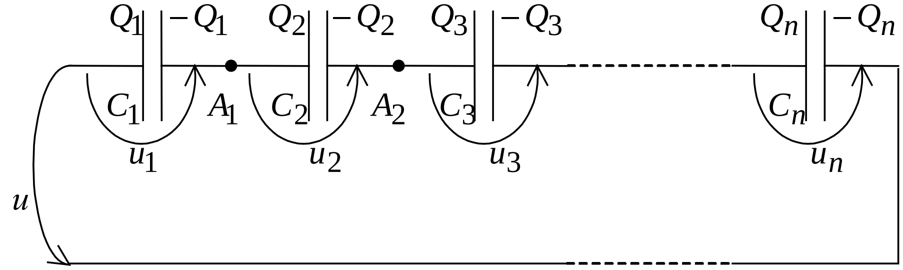

Fig. 2.12. Conectarea condensatoarelor în serie.

teorema a 1-a a lui Kirchhoff scrisă pentru nodurile $A_1, A_2, \ldots$ avem, la aplicarea tensiunii u la bornele ansamblului:

$$-Q_1 + Q_2 = 0\,,\ -Q_2 + Q_3 = 0\,,\ \ldots$$

de unde rezultă că armăturile fiecărui condensator se încarcă cu sarcinile Q şi $-Q$. Armăturile noului ansamblu sunt prima armătură a primului condensator şi a doua armătură a ultimului condensator, care au sarcini egale în modul şi de semne contrarii (Q şi $-Q$), îndeplinind condiţiile armăturilor unui condensator. Dacă tensiunea la bornele fiecărui condensator k este u_k, atunci, din a 2-a teoremă a lui Kirchhoff rezultă:

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)$$

de unde:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{u}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Obsevaţii: a) Capacitatea echivalentă este mai mică decât oricare din capacităţile ce formează ansamblul.

b) Dacă sunt conectate în paralel condensatoare de capacităţi egale C, atunci capacitatea echivalentă este $C_e = \dfrac{C}{n}$.

3. ENERGII SI FORTE IN CAMP ELECTRIC

3.1 Energia campului electric

Fie o incintă cu peretele conductor (Fig.3.1). În interiorul incintei, avem n corpuri conductoare (pentru simplitate, vom lua n=3), încărcate cu sarcinile electrice q_1, q_2, q_3 şi care au potenţialele electrice v_1, v_2, v_3. În interiorul incintei, avem câmp electric a cărui energie ne propunem să o determinăm. În acest scop, trebuie să imaginăm o procedură prin care să dăm energie sistemului format din câmpul electric şi corpurile din incintă. O soluţie ar fi să luăm mici sarcini electrice dq_k de pe peretele incintei şi să le depunem pe corpurile *k*. În acest fel, vor creşte sarcinile electrice q_k şi potenţialele electrice v_k ale corpurilor. Asupra micilor sarcini electrice dq_k se exercită forţele de natură electrică:

$$d\mathbf{F}_{e_k} = dq_k \mathbf{E} \tag{3.1}$$

Deci, forţa pe care trebuie să o aplicăm asupra micii sarcini electrice pentru a o deplasa este:

$$d\mathbf{F}_k = -d\mathbf{F}_{e_k} \tag{3.2}$$

iar lucrul mecanic pe care-l efectuăm transportând mica sarcină dq_k pe curba c_k

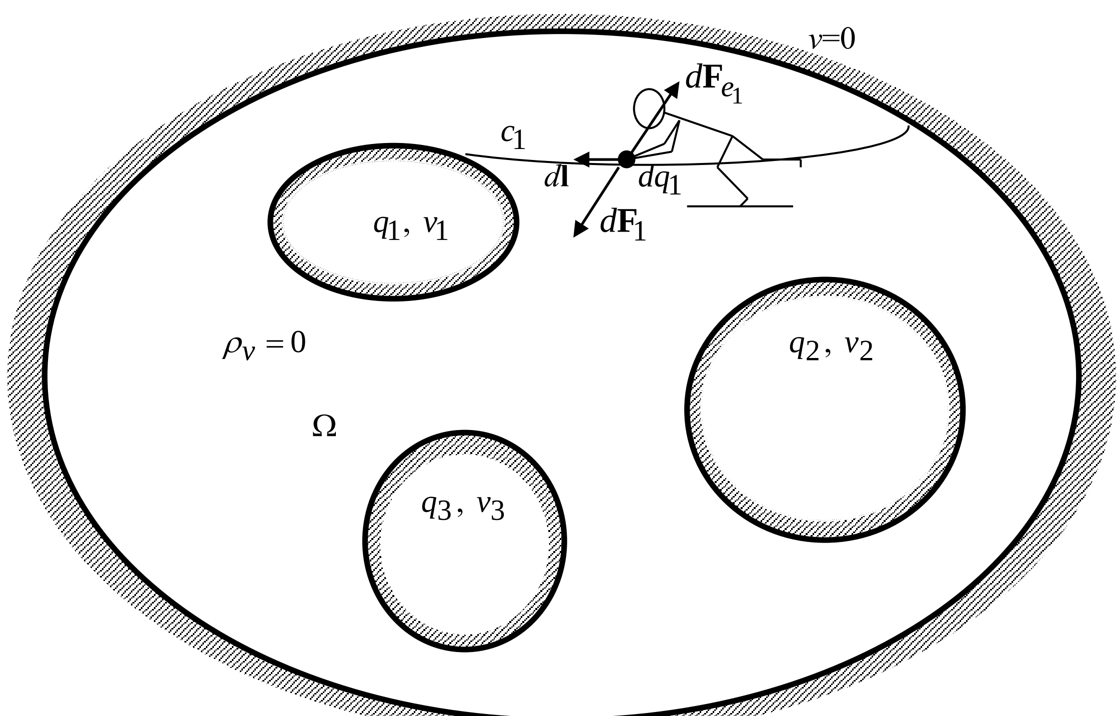

Fig.3.1 Transportul sarcinilor pe corpurile conductoare

cu începutul pe peretele incintei şi cu sfârşitul pe corpul *k* este:

$$\delta L_k = \int_{c_k} d\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{l} = -dq_k \int_{c_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = v_k dq_k \tag{3.3}$$

Însumând toate lucrurile mecanice efectuate pentru depunerea de mici sarcini electrice pe toate corpurile conductoare din incintă, obţinem energia dată din exterior sistemului format din câmp electric şi corpuri:

$$dW = \sum_k v_k dq_k \tag{3.4}$$

Această energie se consumă pentru creşterea energiei câmpului electric dW_e, pentru acoperirea unor lucruri mecanice pe care le-ar efectua corpuri din incintă prin deplasarea lor sub acţiunea forţelor de natură electrică dL, pentru creşterea energiei calorice din incintă dW_{cal} etc. Neglijăm creşterea energiei calorice şi considerăm că nu apar alte modificări energetice, în afară de cea a câmpului electric dW_e şi a consumului de lucru mecanic dL:

$$dW = dW_e + dL \tag{3.5}$$

Observaţii: a) Procedura expusă mai sus poate fi aplicată chiar dacă în incintă se află substanţă. Eliminăm, în acest caz, substanţa din imediata vecinătate a curbelor c_k şi transportăm sarcinile dq_k prin vidul acestor tubuleţe (v. par.1.6 din Partea I)

b) O altă procedură de a da energie sistemului din incintă, format din câmp electric şi corpuri, ar putea fi injectarea sarcinii electrice dq_k în fiecare corp conductor *k*, conectându-l la perete prin intermediul unei surse de curent. Puterea debitată de sursă este $p_k = v_k i_k$, unde $i_k = \dfrac{dq_k}{dt}$ (v. teorema conservării sarcinii electrice din par.3.3, Partea I, sau relaţia (2.12)). Atunci, energia primită de sistem din partea sursei de curent este $dW_k = p_k dt = v_k \dfrac{dq_k}{dt} dt = v_k dq_k$. Menţionăm că formula puterii debitate de sursa de curent se deduce cu ajutorul fluxului vectorului Poynting, care se obţine fără a fi nevoie de concluziile acestui paragraf.

Pentru a determina energia câmpului electric, ţinem imobile corpurile din incintă şi astfel dL=0. Din relaţiile (3.5) şi (3.4), rezultă:

$$dW_e = \sum_k v_k dq_k \tag{3.6}$$

Conform teoremei de unicitate (par.2.1), sarcinile electrice ale conductoarelor definesc unic câmpul electric, deci ele sunt variabile de stare pentru câmpul electric. Potenţialele electrice v_k sunt funcţii de sarcinile electrice q_k (de exemplu, relaţiile (2.1) pentru medii liniare).

Pentru a determina energia câmpului electric într-o anumită stare $T(Q_1, Q_2, Q_3)$, se integrează relaţia (3.6) între starea de energie nulă (originea) şi punctul T, pe orice curbă din spaţiul stărilor (Fig.3.2):

$$W_e(T) = \int_0^T \sum_k v_k dq_k \tag{3.7}$$

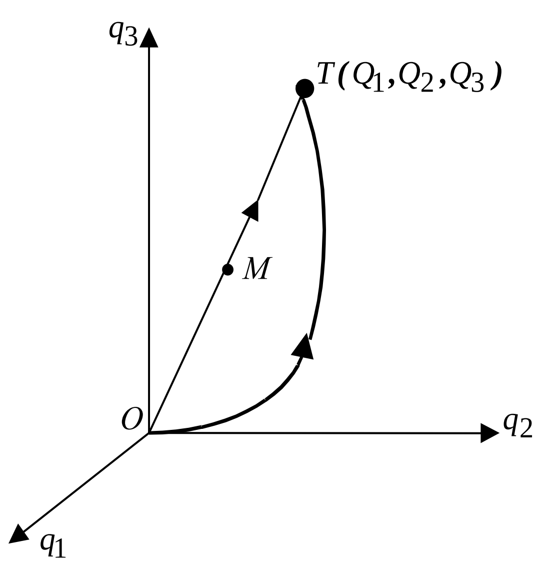

Fig. 3.2. Spaţiul stărilor q_1, q_2, q_3.

Rezultatul integralei (3.7) nu depinde de drum. În cazul mediilor liniare, cel mai comod drum de integrare este segmentul OT, unde un punct oarecare M are coordonatele (q_1, q_2, q_3)= λ(Q_1, Q_2, Q_3), cu $\lambda \in [0,1]$. Dacă, în punctul T, avem potenţialele

(V_1, V_2, V_3), atunci, în punctul *M*, avem $(v_1, v_2, v_3) = \lambda(V_1, V_2, V_3)$. Rezultă $v_k = \lambda V_k$, $dq_k = Q_k d\lambda$ şi integrala (3.7) devine:

$$W_e(T) = \int_0^1 \sum_k \lambda V_k Q_k d\lambda = \sum_k V_k Q_k \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Deci:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_k V_k Q_k \tag{3.8}$$

Observaţii: a) Deoarece rezultatul integralei (3.7) nu depinde de drum, în relaţia (3.6) avem o diferenţială totală exactă. Este deci valabilă relaţia:

$$v_k = \frac{\partial W_e}{\partial q_k} \tag{3.9}$$

Prima formă a relaţiilor între sarcinile electrice şi potenţialele electrice ale unui sistem de corpuri conductoare este de forma (2.1):

$$v_1 = p_{11} q_1 + p_{12} q_2 + \dots$$

$$v_2 = p_{21} q_1 + p_{22} q_2 + \dots$$

de unde:

$$p_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \qquad\qquad p_{21} = \frac{\partial v_2}{\partial q_1}$$

şi, ţinând cont de (3.9):

$$p_{12} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial W_e}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 W_e}{\partial q_2 \partial q_1} \qquad\qquad p_{21} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial W_e}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial^2 W_e}{\partial q_1 \partial q_2}$$

de unde $p_{12} = p_{21}$. Deci, matricea coeficienţii de potenţial este simetrică.

b) O relaţie asemănătoare cu (3.8) se obţine şi atunci când în incintă se află sarcină electrică distribuită cu densitatea de volum ρ_v. Împărţim domeniul dintre corpurile conductoare în mici subdomenii de volume $\Delta\Omega_j$ cu sarcina electrică $\Delta q_j = \rho_j \Delta\Omega_j$ şi potenţial v_j. Putem admite că micile subdomenii sunt corpuri conductoare. Atunci, conform relaţiei (3.8), avem:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_k V_k Q_k + \frac{1}{2}\sum_j v_j \rho_j \Delta\Omega_j$$

Cand împărţirea în subdomenii este arbitrar de fină, relaţia de mai sus tinde către:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_k V_k Q_k + \frac{1}{2}\int_\Omega v \rho_v d\Omega \tag{3.10}$$

3.2. Coenergia câmpului electric

Variaţia de coenergie a câmpului electric este definită de:

$$dW_e^* = d\left(\sum_k v_k q_k\right) - dW_e \tag{3.11}$$

Făcând diferenţiala sumei de produse şi, ţinând cont de relaţia (3.6), rezultă:

$$dW_e^* = \sum_k q_k dv_k + \sum_k v_k dq_k - \sum_k v_k dq_k$$

$$dW_e^* = \sum_k q_k dv_k \tag{3.12}$$

Conform teoremei de unicitate (par.2.1), potenţialele electrice ale conductoarelor definesc unic câmpul electric, deci şi potenţialele pot fi variabile de stare pentru câmpul electric. Sarcinile electrice q_k sunt funcţii de potenţialele electrice v_k (de exemplu, relaţiile (2.2) pentru medii liniare).Pentru a determina coenergia câmpului electric într-o anumită stare $T(V_1, V_2, V_3)$, se integrează (3.12) între starea de coenergie nulă şi punctul T, pe orice curbă din spaţiul stărilor (v_1, v_2, v_3):

$$W_e^* = \int_o^T \sum_k q_k dv_k \tag{3.13}$$

Rezultatul integralei (3.13) nu depinde de drum. În cazul mediilor liniare, cel mai comod drum de integrare este segmentul *OT*, unde un punct oarecare *M* are coordonatele $(v_1, v_2, v_3) = \lambda(V_1, V_2, V_3)$, cu $\lambda \in [0,1]$. Dacă, în punctul *T*, avem sarcinile electrice (Q_1, Q_2, Q_3), atunci, în punctul *M*, avem $(q_1, q_2, q_3) = \lambda(Q_1, Q_2, Q_3)$. Rezultă $q_k = \lambda Q_k$, $dv_k = V_k d\lambda$ şi integrala (3.13) devine:

$$W_e^*(T) = \int_0^1 \sum_k \lambda V_k Q_k d\lambda = \sum_k V_k Q_k \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Deci:

$$W_e^* = \frac{1}{2} \sum_k V_k Q_k \tag{3.14}$$

Se observă că, în cazul mediilor liniare, energia este egală cu coenergia.

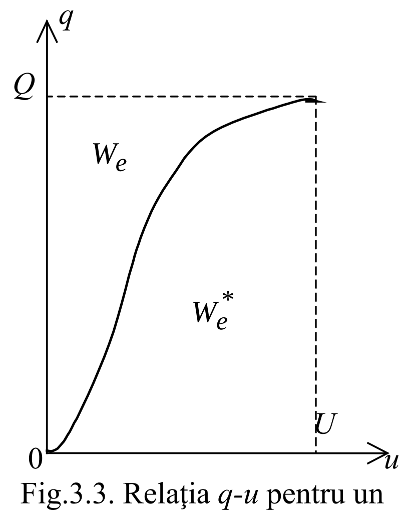

Fig.3.3. Relaţia *q*-*u* pentru un condensator neliniar.

Exemplu.

Energia şi coenergia câmpului electric al unui condensator. Să presupunem că relaţia dintre sarcina electrică şi tensiunea electrică a unui condensator este neliniară (Fig.3.3). Energia câmpului electric pentru sarcina *Q* a condensatorului este:

$$W_e = \int_{o}^{T(Q_1,Q_2)} (v_1 dq_1 + v_2 dq_2) = \int_{0}^{Q} (v_1 dq - v_2 dq) = \int_{0}^{Q} (v_1 - v_2) dq = \int_{0}^{Q} u dq$$

unde am ţinut cont că sarcinile electrice ale armăturilor verifică relaţia $q_1 = -q_2 = q$. Valoarea energiei este dată de aria suprafeţei cuprinsă între grafic şi axa oq. Coenergia câmpului electric pentru tensiunea electrică U a condensatorului este:

$$W_e^* = \int_{o}^{T(V_1,V_2)} (q_1 dv_1 + q_2 dv_2) = \int_{o}^{T(V_1,V_2)} (q dv_1 - q dv_2) = \int_{o}^{T(V_1,V_2)} q d(v_1 - v_2) = \int_{0}^{U} q du$$

Valoarea coenergiei este dată de aria suprafeţei cuprinse între grafic şi aza *ou*.

In cazul mediului liniar, avem:

$$W_e = W_e^* = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2) = \frac{1}{2}(Q V_1 - Q V_2) = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2)$$

Deci:

$$W_e = W_e^* = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{3.16}$$

3.3. Densitatea de volum a energiei şi coenergiei

Se poate arata /1/ că variaţia densităţii de volum a energiei câmpului electric este:

$$\delta w_e = \mathbf{E} \delta \mathbf{D}$$

Atunci, densitatea de volum a energiei câmpului electric, este:

$$w_e = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}\delta\mathbf{D} \tag{3.17}$$

In relatia (3.17) este o integrala curbilinie de a 2-a speta, asemnatoare cu cea care defineste lucrul mechanic sau tensiunea electrica. Spatiul pe care se face integrala are coordonatele D_x, D_y, D_z. (Vom reveni in Partea a VI-a.) Asemănător, pentru densitatea de volum a coenergiei câmpului electric, se obţine:

$$w_e^* = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}\delta\mathbf{E} \tag{3.18}$$

Aici avem spatial de coordinate E_x, E_y, E_z. În cazul în care mediul este liniar, integralele (3.17) si (3.18) conuc la:

$$w_e = w_e^* = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} \tag{3.19}$$

3.4. Forţe generalizate în câmp electric

Din relaţiile (3.5) şi (3.6), rezultă:

$$\sum_k v_k dq_k = dW_e + dL \tag{3.20}$$

Pentru a determina forţa în direcţia *x*, lăsăm corpul să se deplaseze o mică distanţă *dx* în această direcţie (Fig.3.4). Se va consuma un lucru mecanic:

$$dL = F_x dx \tag{3.21}$$

Înlocuind în (3.20), avem:

$$\sum_k v_k dq_k = dW_e + F_x dx \tag{3.22}$$

Dacă deplasarea corpului se face cu restricţia ca sarcinile corpurilor să fie constante, atunci $dq_k = 0$ şi membrul stâng al relaţiei (3.22) se anulează. Rezultă:

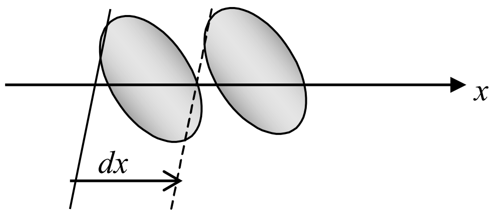

Fig. 3.4. Mică deplasare pe direcţia *x*.

$$F_x = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_{q_k = ct., k=1,2,...} \qquad (3.23)$$

Observaţii: a) În relaţia (3.23) F_x şi *dx* pot fi orice cuplu de mărimi al căror produs este lucru mecanic. De exemplu: forţă inerţială – deplasare, cuplu – unghi, presiune – volum etc. Din acest motiv, F_x se numeşte forţă generalizată, iar *dx*, coordonată generalizată. Relaţia (3.23) este prima formulă de calcul al forţelor generalizate în câmp electric.

b) Energia câmpului electric W_e apare în relaţia (3.23) ca funcţie de mărimile de stare q_k, precum şi ca funcţie de coordonata generalizată *x*.

Înlocuim în relaţia (3.22) energia cu coenergia, folosind definiţia coenergiei (3.11), şi rezultă:

$$\sum_k v_k dq_k = d\left(\sum_k v_k q_k\right) - dW_e^* + F_x dx$$

Dezvoltând diferenţiala sumei de produse, după simplificări, obţinem:

$$0 = \sum_k q_k dv_k - dW_e^* + F_x dx$$

Dacă deplasarea corpului se face cu restricţia ca potenţialele corpurilor să fie constante, atunci $dv_k = 0$ şi primul termen din membrul drept al relaţiei (3.22) se anulează. Rezultă:

$$F_x = \left.\frac{\partial W_e^*}{\partial x}\right|_{v_k = ct., k=1,2,...} \qquad (3.24)$$

Observaţii: a) Relaţia (3.24) este a doua formulă de calcul al forţelor generalizate în câmp electric. Aceeaşi forţă poate fi calculată atât cu relaţia (3.23), cât şi cu relaţia (3.24).

b) Coenergia câmpului electric W_e^* apare în relaţia (3.24) ca funcţie de mărimile de stare v_k, precum şi ca funcţie de coordonata generalizată *x*.