

Rezistorul multipolar

În domeniul conductor Ω , câmpul electrocinetic (\mathbf{J}, \mathbf{E}) verifică următoarele condiții de frontieră:

(α) pe suprafața S' , formată din $n+1$ suprafețe disjuncte (borne) S_k , componenta tangențială a intensității câmpului electric \mathbf{E} este nulă;

(β) pe suprafața $S_0 = \partial\Omega - S'$, componenta normală a densității de curent \mathbf{J} este nulă.

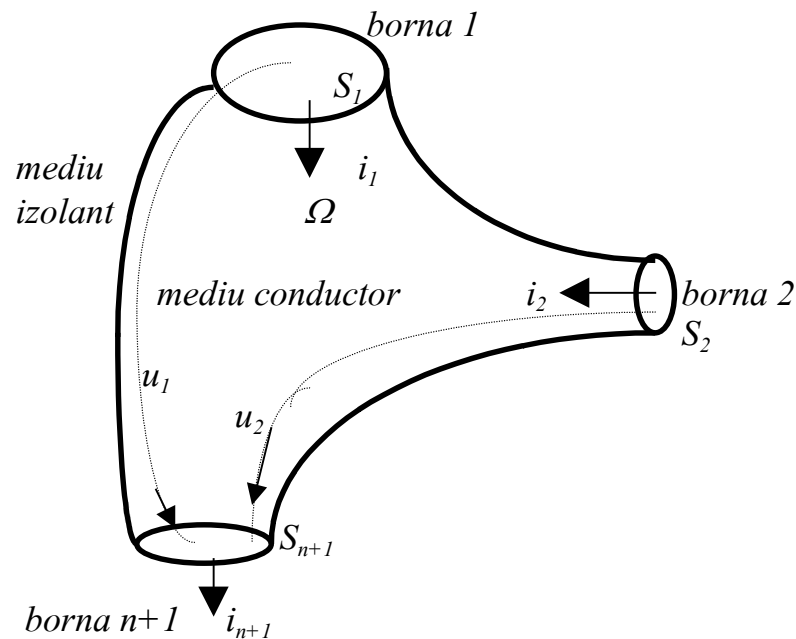


Fig2.4. Rezistor multipolar.

Domeniul conductor Ω cu condițiile de frontieră (α), (β) se numește **rezistor multipolar**. Rezistorul definit la începutul capitolului este un rezistor dipolar. Evident, observațiile a), b), c), d) făcute la începutul paragrafului rămân valabile. În cazul rezistorului multipolar, observația e) apare în forma teoremei a 1-a a lui Kirchhoff:

$$i_{n+1} = \sum_{k=1}^n i_k \quad (2.10)$$

Într-adevăr, prin aplicarea teoremei conservării sarcinii electrice pe frontiera $\partial\Omega$ a rezistorului și ținând cont de condiția de frontieră (β), rezultă:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} J_n dS + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 - \sum_{k=1}^{n+1} i_k = -\frac{dq}{dt} = 0$$

Puterea absorbită de rezistorul multipolar

Puterea absorbită de un rezistor multipolar este:

$$P = \sum_{k=1}^n u_k i_k \quad (2.11)$$

unde i_k este curentul electric al bornei k , iar u_k este tensiunea dintre borna k și borna $n+1$. Într-adevăr, în electrocinetică, întreaga energie electromagnetică primită prin suprafața $\partial\Omega$ a domeniului Ω se transformă în alte forme de energie prin conducție:

$$P = \int_{\Omega} p dv = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int_{\Omega} -\text{grad} V \cdot \mathbf{J} dv = - \oint_{\partial\Omega} V \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Omega} V \text{div} \mathbf{J} dv \quad (2.12)$$

Cum $\text{div} \mathbf{J} = 0$, al doilea termen din membrul drept este nul. Pe frontiera $\partial\Omega$, avem $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ pe S_0 și $V = \text{ct} = V_k$ pe S_k , $k=1,2,\dots,n+1$. Rezultă:

$$P = \sum_{k=1}^{n+1} V_k \int_{S_k} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^{n+1} V_k i_k = \sum_{k=1}^n V_k i_k + V_{n+1} i_{n+1} \quad (2.13)$$

Ținând cont de prima teoremă a lui Kirchhoff (2.10), rezultă:

$$P = \sum_{k=1}^n V_k i_k - V_{n+1} \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n (V_k - V_{n+1}) i_k = \sum_{k=1}^n u_k i_k$$

În Partea VI se arată că relația (2.11) este valabilă pentru orice element de circuit.

Relațiile u-i la bornele rezistorului multipolar

Conform Teoremei de unicitate a câmpurilor staționare (/1/ Anexa B), dacă se dau fluxurile lui \mathbf{J} prin n suprafețe S_k , adică se dau curenții electrici i_k prin n borne, atunci câmpul electrocinetic (\mathbf{J}, \mathbf{E}) este unic determinat și deci tensiunile celor n borne față de borna $n+1$ sunt unic determinate. Este deci bine definită funcția:

$$i \rightarrow u = f(i)$$

sau:

$$u_k = f_k(i_1, i_2, \dots, i_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Pentru medii liniare, relația (2.14) devine:

$$u_k = \sum_{j=1}^n R_{kj} i_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

unde coeficienții R_{kj} se numesc rezistențele de transfer. Semnificația fizică a rezistențelor de transfer rezultă din relația (2.15), atribuind valori particulare curenților bornelor. De exemplu, dacă $i_k=0$, pentru $k>1$ și $i_1 \neq 0$, atunci rezistența R_{11} este numeric egală cu tensiunea electrică între borna 1 și borna $n+1$, pentru curentul electric $i_1=1$ sau:

$$R_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{i_k=0, k>1}$$

Rezistența R_{21} este numeric egală cu tensiunea electrică între borna 2 și borna $n+1$ pentru curentul electric $i_1=1$ sau:

$$R_{21} = \frac{u_2}{i_1} \Big|_{i_k=0, k>1}.$$

Matricea rezistențelor de transfer este simetrică:

$$R_{kj} = R_{jk} \quad (2.16)$$

Într-adevăr, să presupunem că prin borna 1 trece curentul electric i_1' , celelalte borne fiind lăsate în gol ($i_k'=0$, pentru $k>1$). În acest caz, câmpul electrocinetic este $(\mathbf{E}', \mathbf{J}')$ și tensiunile la borne (față de borna $n+1$) sunt u_k' . Dacă prin borna 2 trece curentul electric i_2'' , celelalte borne fiind în gol, câmpul electrocinetic este $(\mathbf{E}'', \mathbf{J}'')$, iar tensiunile la borne sunt u_k'' . Asemănător cu relațiile (2.12) și (2.13), avem:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{J}' \cdot \mathbf{J}'' dv = \int_{\Omega} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J}'' dv = \int_{\Omega} - \text{grad} V' \cdot \mathbf{J}'' dv = - \oint_{\partial\Omega} V' \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{k=1}^n u_k' i_k'' \quad (2.17)$$

Ținând cont de relațiile (2.15), scrise pentru valorile particulare ale curenților electrici, din relația (2.17) rezultă:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{J}' \cdot \mathbf{J}'' dv = u_2' i_2'' = R_{21} i_1' i_2'' \quad (2.18)$$

Schimbând în relația (2.17) indicii ' și '', avem:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{J}'' \cdot \mathbf{J}' dv = \sum_{k=1}^n u_k'' i_k' = u_1'' i_1' = R_{12} i_2'' i_1' \quad (2.19)$$

Din relațiile (2.18) și (2.19), rezultă:

$$R_{21} i_1' i_2'' = R_{12} i_2'' i_1'$$

și, de aici, relația (2.16).

Matricea rezistențelor de transfer este pozitiv definită. Într-adevăr, făcând în relația (2.17) $\mathbf{J}' = \mathbf{J}'' = \mathbf{J}$, și presupunând că matricea curenților electrici (i) este nenulă, rezultă

$$0 < \int_{\Omega} \rho J^2 dv = \sum_{k=1}^n u_k i_k = \left(\sum_{j=1}^n R_{kj} i_j \right) i_k = (i)^T (R) (i)$$

Dacă se dau tensiunile celor n borne față de borna $n+1$, atunci câmpul electrocinetic (\mathbf{J}, \mathbf{E}) este unic determinat și deci curenții celor n borne sunt unic determinați. Este deci bine definită funcția:

$$u \rightarrow i = g(u)$$

sau

$$i_j = g_j(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

Pentru medii liniare relația (2.2) devine:

$$i_k = \sum_{j=1}^n G_{kj} u_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.21)$$

unde G_{kj} sunt conductanțele de transfer. Avem $g = f^{-1}$ și $(G) = (R)^{-1}$. Matricea conductivităților de transfer este și ea simetrică și pozitiv definită.

PARTEA a IV-a. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR

1. ECUAȚIILE CÂMPULUI MAGNETIC STAȚIONAR

În regimul staționar, legea circuitului magnetic capătă forma teoremei lui Ampere:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1)$$

cu forma locală :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.1')$$

Legea fluxului magnetic este:

$$\Phi_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.2)$$

cu forma locală:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.2')$$

O relație între \mathbf{B} și \mathbf{H} este oferită de legea legăturii între inducția magnetică și intensitatea câmpului magnetic. Pentru medii liniare, de exemplu, avem:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{sau} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (1.3)$$

Dacă la ecuațiile (1.1), (1.2), (1.3) adăugăm și condiții de frontieră corect formulate, atunci câmpul magnetic (\mathbf{B}, \mathbf{H}) este unic determinat (v./1/ Anexa B). Deci, putem studia componenta magnetică (\mathbf{B}, \mathbf{H}) a câmpului electromagnetic, independent de componenta electrică (\mathbf{D}, \mathbf{E}).

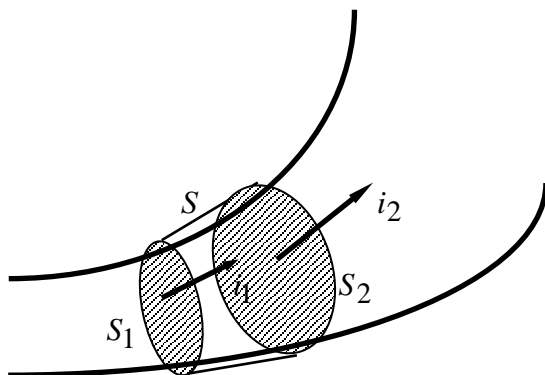


Fig.1.1. Porțiune de spirală perfect conductoare.

Spira perfect conductoare

Fie un conductor perfect, în jurul căreia mediul este perfect izolant (Fig.1.1).

Curentul conductorului.

Pentru a arăta că această mărime este bine definită, alegem o suprafață închisă $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S$

(Fig.1.1), unde S_1 și S_2 sunt suprafețe transversale prin spirală, iar S este suprafața laterală ce leagă bordurile lui S_1 și S_2 , aparținând suprafeței ce mărginește spira conductoare. Din teorema conservării sarcinii electrice, pentru regimul staționar, rezultă:

$$0 = \oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -i_1 + i_2.$$

Deci, $i_1 = i_2 = i$.

Fluxul magnetic al spirei. Numim spira perfect conductoare un conductor perfect care se închide la capete (Fig.1.2). Fluxul magnetic al spirei este bine definit prin fluxul magnetic pe orice suprafață cu bordura pe suprafața spirei. Într-adevăr, pentru a arăta că fluxul spirei nu depinde de suprafața care are bordura pe suprafața spirei, alegem o suprafață închisă $\Sigma = S' \cup S'' \cup S$, unde S' și S'' sunt suprafețe având bordurile pe suprafața ce mărginește spira, iar S este porțiunea din suprafața spirei, mărginită de bordurile $\partial S'$ și $\partial S''$ (Fig.1.2). Din legea fluxului magnetic, aplicată suprafeței închise Σ , rezultă:

$$0 = \oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S''} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\varphi' + \varphi''$$

Deci:

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi$$

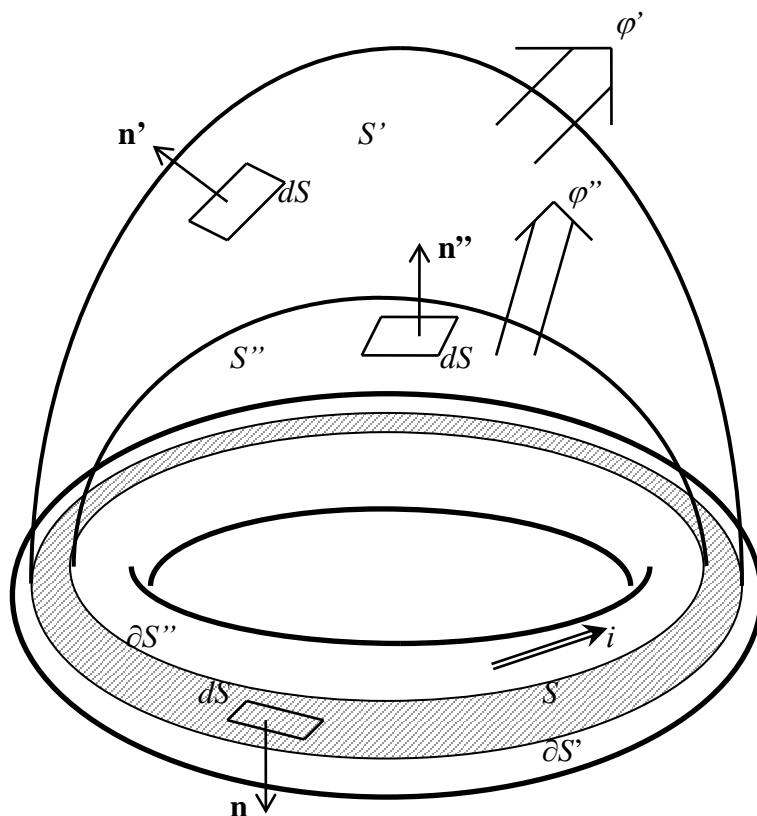


Fig.1.2. Spiră perfect conductoare.

Asociem sensurile fluxurilor și curenților spirelor prin regula burghiului drept.

Teoremă de unicitate

În /1/ Anexa B, este formulată și demonstrată o teoremă generală pentru câmpurile staționare. Vom prezenta în continuare o consecință a acestei teoreme, utilă pentru problemele de câmp magnetic ce vor urma.

Fie o incintă cu peretele perfect conductor (Fig.1.3). Peretele poate fi și suprafața de la infinit. În interiorul incintei, avem n spire perfect conductoare (pentru simplitate, vom lua $n=3$). În mediul perfect izolant din jurul conductoarelor,

este cunoscută legătura dintre \mathbf{B} și \mathbf{H} . Câmpul magnetic (\mathbf{B}, \mathbf{H}) (descriș de ecuațiile (1.1'), (1.2'), (1.3)) este unic determinat dacă se dau:

a) Fluxurile magnetice ale spirelor $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

sau:

b) Curenții spirelor i_1, i_2, i_3 .

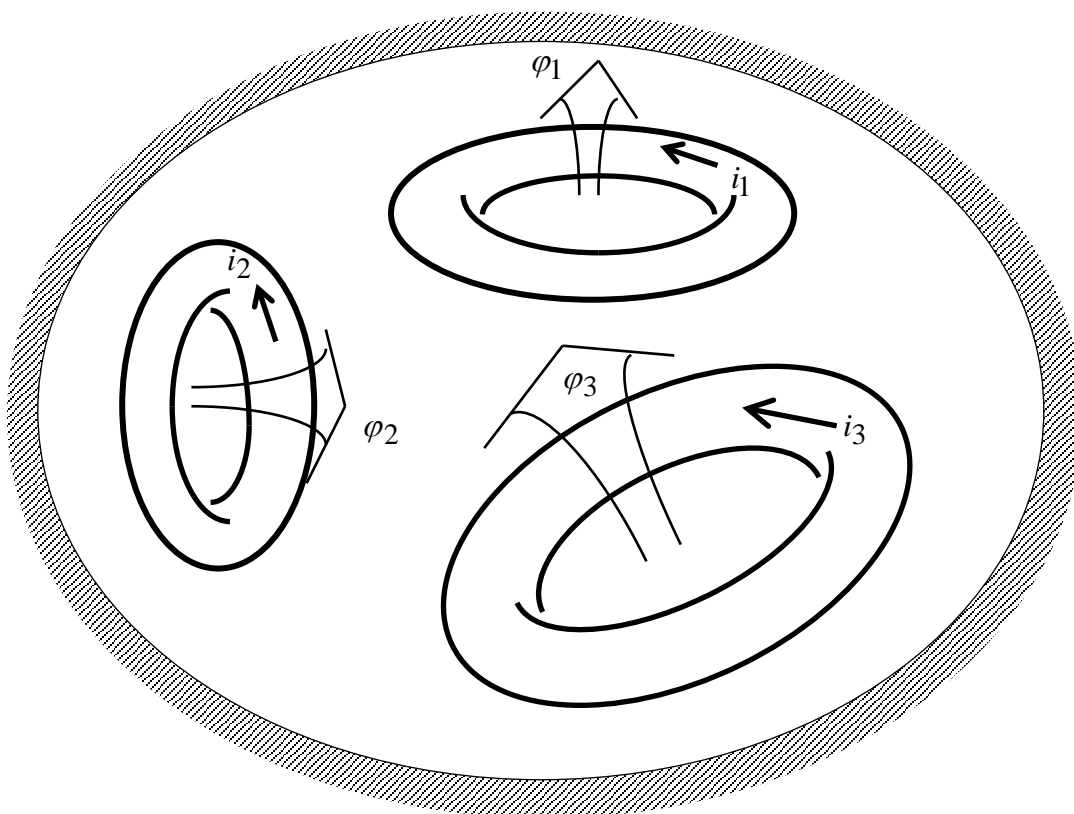


Fig.1.3. Spire într-o incintă cu pereți perfect conductori.

Observație. Teorema de unicitate este valabilă și dacă mediul din incintă este neliniar, dar cu caracteristică $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$ disipativă. În această categorie, intră toate tipurile de medii, cu excepția celor cu histerezis.

Teorema de superpoziție

Presupunem că mediul din incintă este liniar (1.3).

Curenților electrici (i_1', i_2', i_3') le corespunde unic câmpul magnetic $(\mathbf{B}', \mathbf{H}')$, iar curenților electrici (i_1'', i_2'', i_3'') le corespunde unic câmpul magnetic $(\mathbf{B}'', \mathbf{H}'')$. Atunci, curenților electrici $(i_1, i_2, i_3) = \alpha' (i_1', i_2', i_3') + \alpha'' (i_1'', i_2'', i_3'')$ le corespunde câmpul magnetic $(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \alpha' (\mathbf{B}', \mathbf{H}') + \alpha'' (\mathbf{B}'', \mathbf{H}'')$.

Teorema de superpoziție rezultă imediat din liniaritatea ecuațiilor (1.1'), (1.2'), (1.3) și din teorema de unicitate.

2. RELAȚIILE DINTRE FLUXURILE ȘI CURENȚII SPIRELOR PERFECT CONDUCTOARE (MAXWELL)

Fie un sistem de spire perfect conductoare aflate într-o incintă cu perețele perfect conductor (Fig. 1.3). Să presupunem că se dau curenții spirelor i_k . Atunci, conform teoremei de unicitate, câmpul magnetic (\mathbf{B}, \mathbf{H}) din Ω este unic determinat și deci sunt unic determinate fluxurile φ_k pe suprafețele σ_k . Este deci bine definită funcția:

$$i \rightarrow \varphi = f(i)$$

sau:

$$\varphi_k = f_k(i_1, i_2, \dots, i_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Pentru medii liniare, relația (2.1) devine:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

unde coeficienții L_{jj} se numesc inductivități proprii, iar L_{kj} , cu $j \neq k$, inductivități mutuale sau de cuplaj. Relațiile (2.2) sunt cunoscute prin denumirea de “Relațiile lui Maxwell pentru inductivități”. Semnificațiile fizice ale acestor coeficienți rezultă din relațiile (2.2). De exemplu, dacă $i_k=0$, pentru $k>1$, și $i_1 \neq 0$, atunci inductivitatea proprie L_{11} este numeric egală cu fluxul magnetic al spirei 1 pentru curentul $i_1=1$ sau:

$$L_{11} = \frac{\varphi_1}{i_1} \bigg|_{i_k=0, k>1}. \quad (2.3)$$

Inductivitatea mutuală L_{21} este numeric egală cu fluxul magnetic al spirei 2 pentru curentul $i_1=1$ sau:

$$L_{21} = \frac{\varphi_2}{i_1} \bigg|_{i_k=0, k>1}. \quad (2.4)$$

Matriceal, relațiile (2.2) se mai pot scrie:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \quad (2.2')$$

Admitem în continuare că sensurile fluxurilor magnetice și ale curenților spirelor verifică regula burghiului drept. Se poate arăta (v. Cap.3) că matricea inductivităților (L) este simetrică $L_{ij}=L_{ji}$ și pozitiv definită: $(i)^T (L)(i) > 0$, oricare ar fi matricea $(i) \neq (0)$. De aici rezultă că inductivitățile proprii sunt întotdeauna pozitive. Într-adevăr, făcând, de exemplu $(i_1, i_2, i_3) = (1, 0, 0)$, din proprietatea de pozitiv definire rezultă $L_{11} > 0$.

În cazul unei singure spire, avem:

$$\varphi = Li \quad (2.2'')$$

Factorul de cuplaj

Fie două spire cu inductivitățile L_{11} , L_{22} și $L_{12}=L_{21}$. Factorul de cuplaj al celor două spire este:

$$\lambda = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \quad (2.5)$$

Factorul de cuplaj este subunitar $\lambda < 1$. Într-adevăr, din proprietățile de pozitiv definire și simetrie rezultă:

$$L_{11}i_1^2 + L_{22}i_2^2 + 2L_{12}i_1i_2 > 0$$

unde cel puțin unul dintre curenți este nenul. Fie $i_2 \neq 0$. Împărțim relația de mai sus prin $i_2^2 > 0$ și notăm $x = \frac{i_1}{i_2}$. Rezultă:

$$L_{11}x^2 + 2L_{12}x + L_{22} > 0, \forall x \in R$$

Atunci, discriminantul acestei funcții de gradul 2 este strict negativ:

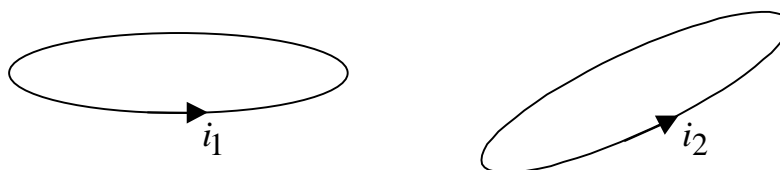
$$\Delta' = L_{12}^2 - L_{11}L_{22} < 0$$

Împărțind relația de mai sus prin $L_{11}L_{22} > 0$, rezultă $\lambda < 1$. Pentru cazul ideal, în care factorul de cuplaj ar avea valoarea 1, spunem că avem transformator ideal.

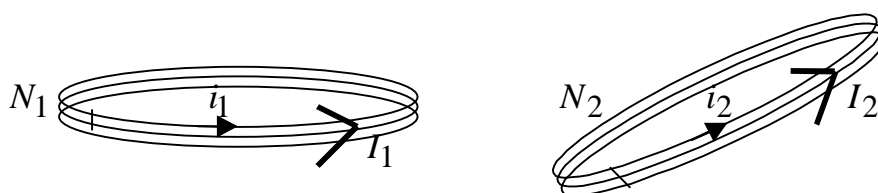
Inductivitățile fasciculelor de spire

Fie spirele 1 și 2 de grosimi mult mai mici decât lungimile lor și cu inductivitățile l_{11} , l_{22} și $l_{12}=l_{21}$ (Fig.2.1a). Să presupunem acum că aceleași poziții în spațiu sunt ocupate de două fascicule cu N_1 și respectiv N_2 spire, având inductivitățile L_{11} , L_{22} și $L_{12}=L_{21}$ (Fig.2.1b). Ne propunem să determinăm relațiile dintre inductivitățile l_{kj} și L_{kj} . Conform relațiilor (2.3) și (2.4), în cazul a două spire cuplate (Fig.2.1a), avem:

$$l_{11} = \left. \frac{\varphi_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad \text{și} \quad l_{21} = \left. \frac{\varphi_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad (2.6)$$



a) două spire cuplate magnetic



b) două fascicule de spire cuplate magnetic

Fig. 2.1. Fascicule de spire.

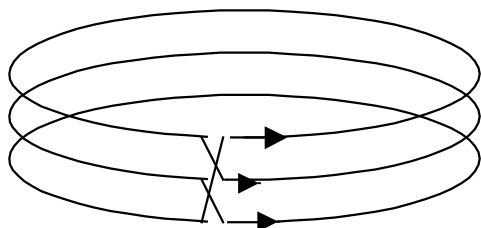


Fig.2.2. Fasciculul de spire.

Câmpul magnetic produs de fasciculul de N_1 spire, parcurs de curentul i_1 , este același cu câmpul magnetic produs de o singură spiră parcursă de curentul

$I_1 = N_1 i_1$. Atunci, conform relațiilor (2.6), fluxurile magnetice printr-o singură spirală din fasciculele 1 și 2 sunt:

$$\varphi_1 = l_{11} I_1 = l_{11} N_1 i_1 \quad \text{și} \quad \varphi_2 = l_{21} I_1 = l_{21} N_1 i_1 \quad (2.7)$$

Un fascicul de spire este tot o spirală, dar care are o structură complexă, ce rezultă din înserierea unor spire identice, ce ocupă aproape aceeași poziție în spațiu (Fig.2.2). Deseori se mai folosește termenul de “bobină cu N spire”. Cum primul fascicol este format din N_1 spire, fluxul magnetic prin întreaga suprafață a fasciculului este:

$$\Phi_1 = N_1 \varphi_1 = N_1^2 l_{11} i_1 \quad (2.8)$$

La fel, al doilea fascicul este format din N_2 spire și atunci fluxul magnetic este:

$$\Phi_2 = N_2 \varphi_2 = N_2 N_1 l_{21} i_1 \quad (2.9)$$

Conform relațiilor (2.3) și (2.4), rezultă:

$$L_{11} = \left. \frac{\Phi_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = N_1^2 l_{11} \quad (2.10)$$

și:

$$L_{21} = \left. \frac{\Phi_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = N_2 N_1 l_{21} \quad (2.11)$$

Asemănător:

$$L_{22} = N_2^2 l_{22} \quad (2.12)$$

Relațiile de mai sus sunt valabile și dacă avem mai multe fascicule de spire cuplate. Factorul de cuplaj pentru 2 fascicule de spire nu depinde de numărul de spire. Într-adevăr, conform relațiilor (2.5), (2.10), (2.11) și (2.12) avem

$$\lambda = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} = \frac{|N_1 N_2 l_{12}|}{\sqrt{N_1^2 l_{11} N_2^2 l_{22}}} = \frac{|l_{12}|}{\sqrt{l_{11}l_{22}}}$$

Tensiunea electrică de la bornele unei spire perfect conductoare

Fie un conductor perfect cu două borne, ca în Fig.2.3, care poate fi asociat unei spire închise, astfel încât se poate defini fluxul magnetic al spirei φ (v. partea din dreapta liniuței verticale ab , în Fig.2.3). Fluxul magnetic al părții din stânga liniuței ab , în Fig.2.3, este neglijabil. Din punct de vedere tehnic, legăturile la borne sunt foarte strânse, nefăcând loc altor fluxuri. Bornele sunt suprafețe cu condiția $E_t = 0$. Atunci, în zona bornelor, poate fi definit potențialul electric, bornele sunt echipotențiale și este bine definită tensiunea la borne (v. Cap.2, de la Partea a III-a). Trebuie să menționăm faptul că, Partea a VI-a, va fi definit elementul de circuit inductiv și va fi stabilită relația $u-i$ la bornele sale.

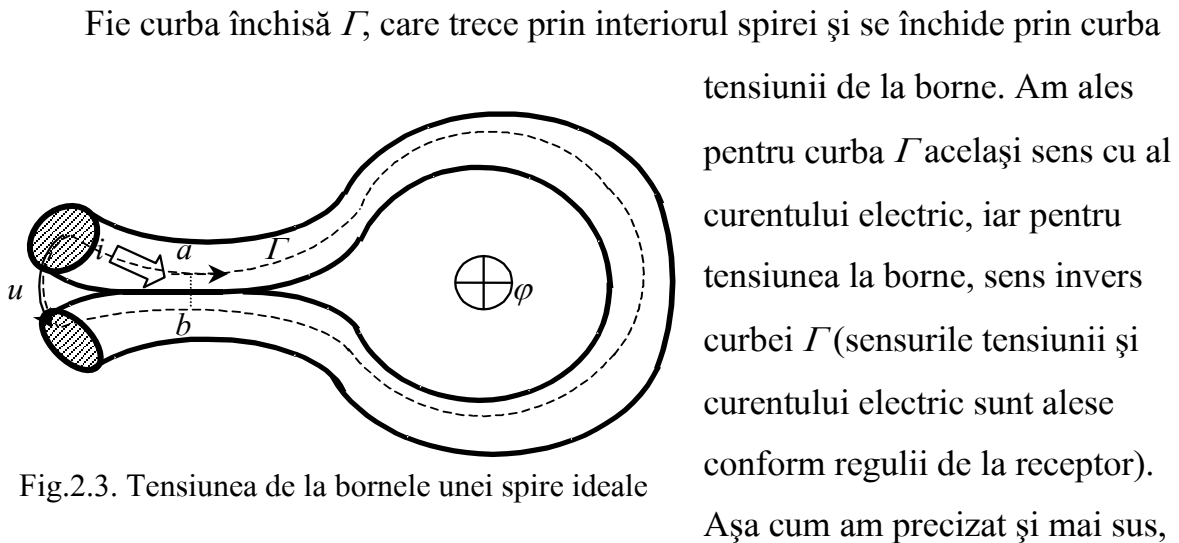


Fig.2.3. Tensiunea de la bornele unei spire ideale

sensurile fluxului magnetic și al curentului spirei respectă regula burghiului drept. Aplicăm legea inducției electromagnetice pe curba Γ și, deoarece în mediul perfect conductor din interiorul spirei $\mathbf{E}=0$, rezultă:

$$-\frac{d\varphi}{dt} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{spira}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{borne}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -u$$

Deci:

$$u = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.13)$$

Dacă mediul este liniar și inductivitatea proprie a spirei L nu depinde de timp, atunci, conform relației (2.2”), avem:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2.14)$$

Dacă sunt mai multe spire cuplate, atunci, conform relațiilor (2.2), avem

$$u_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} \quad (2.15)$$