

## Capitolul 2

### Legile și principalele teoreme ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

În orice ramură a fizicii între mărimile care descriu starea unui sistem și dinamica sa se stabilește un sistem de relații. Unele relații au un caracter de mare generalitate fiind obținute prin analiza, sistematizarea și extrapolarea unui mare număr de experimente și reprezintă legile acelei ramuri a fizicii. **Legile** au un *caracter axiomatic* (nu se demonstrează prin relații matematice) și au un *caracter necesar*, în sensul că valabilitatea lor poate fi evidențiată oriunde și oricând sunt respectate ipotezele fizice conținute în enunțul lor.

Legile se împart în două tipuri:

1. **Legi de material** care descriind o anumită stare sau proprietate a corpurilor, capătă forme diferite atât în funcție de regimul considerat cât și de anumite proprietăți ale acestora. Aceste legi conțin obligatoriu constante de material. Numărul legilor de material din cadrul teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic este foarte mare, dar ca urmare a importanței lor deosebite se rețin doar trei:

- Legea polarizației temporare
- Legea magnetizației temporare
- Legea conducției electrice (legea Ohm)

2. **Legi de legătură**

- Legea constitutivă (de legătură) a câmpului electric
- Legea constitutivă (de legătură) a câmpului magnetic

3. **Legi generale** a căror valabilitate este confirmată în orice regim de desfășurare în timp a fenomenului. Ele nu conțin mărimi care să se refere la proprietățile specifice ale corpurilor, dar pot conține constante universale. În teoria fenomenologică a electromagnetismului aceste legi sunt în număr de șase:

- Legea fluxului electric (legea Gauss)
- Legea fluxului magnetic
- Legea inducției electromagnetice (legea Faraday)
- Legea circuitului magnetic (legea Ampère – Maxwell)

- Legea conservării sarcinii electrice
- Legea transformărilor energetice în stare electrocinetică (legea Joule)

Se mai poate aminti Legea electrolizei.

Legile pot fi:

- de stare: se referă la starea la un moment dat a sistemului
- dinamice ( de mișcare): descriu evoluția în timp a fenomenelor în care, se evidențiază principiul cauzalității

Teoremele sunt relații care se obțin prin particularizarea legilor electromagnetismului pentru diverse regimuri, situații fizice particulare sau caracteristici specifice unor anumite medii. Există teoreme obținute pe baza mai multor legi care se numesc teoreme generale echivalente cu anumite legi, ca grad de generalitate. Prezintă câteva teoreme mai importante:

- teorema energiei electromagnetice
- teorema localizării forțelor în câmpul electromagnetic
- teorema unicității câmpului
- teorema superpoziției

Niciun fenomen nu poate fi studiat numai pe baza legilor referitoare la el, ci conform principiului cauzalității trebuie cunoscută întotdeauna și starea inițială a sistemului.



## 2.1. Legea polarizației temporare

Această lege nu privește o eventuală componentă permanentă a polarizației electrice; aceasta este o lege de material deoarece polarizația temporară ca descriere locală a stării de polarizare a dielectricilor, este funcție de intensitatea câmpului electric inductor (Fig. 3.01)

**Enunț:** În orice moment de timp și în orice punct din spațiu polarizația temporară este funcție de intensitatea câmpului electric.

$$\bar{P}_t = f(\bar{E})$$

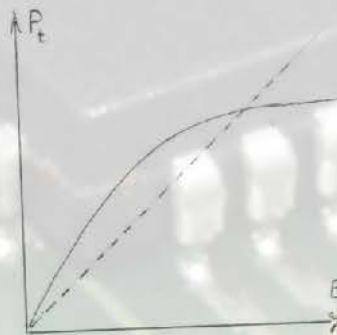


Fig. 3.01

Pentru o clasă largă de dielectrici și în regimuri nu foarte rapid variabile în timp legea polarizației electrice temporare este:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (1)$$

în care  $\chi_e$  este o constantă de material pozitivă și adimensională numită *susceptivitate electrică*. Scrierea acestei relații sub această formă arată că polarizabilitatea materialului este aceeași indiferent de orientarea în spațiu a câmpului electric.

Dacă  $\chi_e$  este constant, dielectricul se numește *liniar* și *izotrop*, iar dacă depinde de orientarea câmpului inductor, dielectricul se numește *anizotrop* și se scrie astfel:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \bar{\chi}_e \bar{E} \quad (2)$$

în care  $\bar{\chi}_e$  este un tensor.

Pe componente, se descompune în felul următor:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} P_{t,x} = \chi_{e,xx} E_x + \chi_{e,xy} E_y + \chi_{e,xz} E_z$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} P_{t,y} = \chi_{e,yx} E_x + \chi_{e,yy} E_y + \chi_{e,yz} E_z$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} P_{t,y} = \chi_{e,zx} E_x + \chi_{e,zy} E_y + \chi_{e,zz} E_z$$

Dacă toate cele 9 componente ale tensorului  $\chi_e$  sunt constante, dielectricul este *liniar* și *izotrop*, iar dacă cel puțin una dintre ele depinde de vreuna din componentele câmpului  $\chi_{e,ij} = \chi_{e,ij}(E)$  cu  $i, j, k = x, y, z$  dielectricul se numește *nelinear* și *anizotrop*.

### Cazul materialelor cu histerezis electric

Dependența polarizației temporare de intensitatea câmpului electric prezentată în Fig. 3.02 se numește **curbă de histerezis**. Abscisele  $\pm E_c$  din figură se numesc câmpuri coercitive, iar ordonatele  $\pm P_{t,r}$  se numesc polarizații remanente.

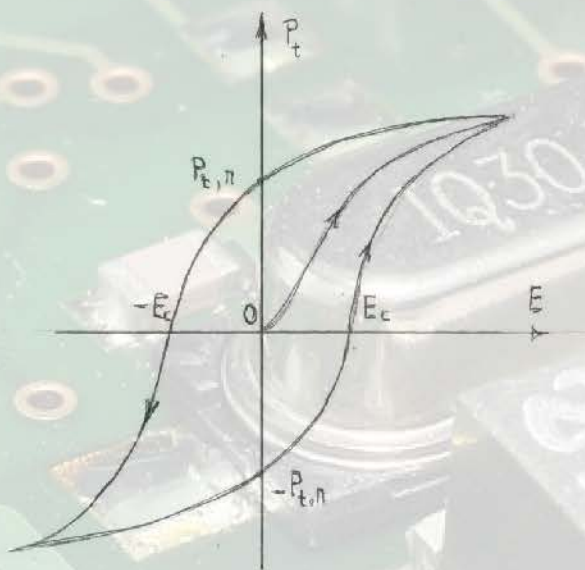


Fig. 3.02

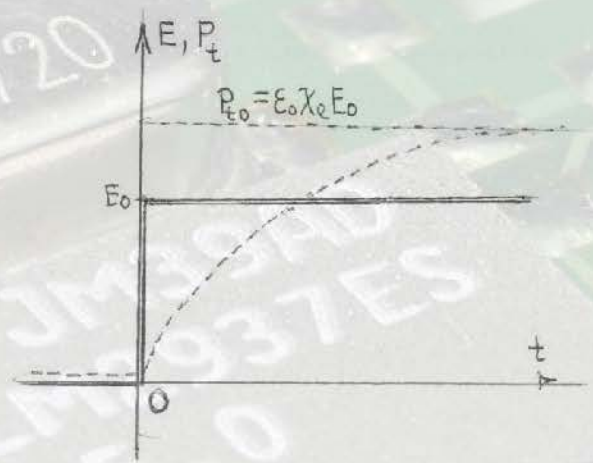


Fig. 3.03

### Cazul materialelor cu vâscozitate electrică

Dacă intensitatea câmpului electric variază suficient de rapid polarizația temporară urmărește cu o anumită întârziere această variație. Fenomenul se numește *postefect electric* sau *vâscozitate electrică* (relație de material, dinamică, de descriere locală) (Fig. 3.03).



## 2.2. Legea magnetizației temporare

Magnetizația temporară este o mărime de descriere locală a stării de magnetizare a corpurilor ce depinde de intensitatea câmpului magnetic în care este plasat corpul. Aceasta este unul din cei doi termeni aditivi ai magnetizației în cazul general când există și magnetizație permanentă:

$$\overline{M} = \overline{M}_t + \overline{M}_p$$

**Enunț:** În orice moment de timp și în orice punct din spațiu magnetizația temporară este funcție de intensitatea câmpului magnetic.

$$\overline{M}_t = f(\overline{H})$$

Pentru o clasă largă de materiale, în speță cele izotrope din punct de vedere magnetic, legea magnetizației temporare (3) este:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H} \quad (3)$$

în care  $\chi_m$  este o constantă de material adimensională, supraunitară, numită susceptivitate magnetică. Dacă  $\chi_m$  este constant, materialele sunt *liniare* și *izotrope*, iar dacă depinde de câmpul magnetic în care au fost introduse, materialele sunt *neliniare* și *izotrope*.

În cazul materialelor anizotrope (de regulă cristaline) legea are forma

$$\overline{M}_t = \overline{\chi}_m \overline{H} \quad (4)$$

în care  $\overline{\chi}_m$  este tensorul susceptivității magnetice. El este constant în cazul materialelor liniare. Când toate componentele tensorului sau cel puțin una depinde de una din componentele câmpului, materialele sunt neliniare.

### Cazul materialelor cu histerezis magnetic

Dependența magnetizației temporare de intensitatea câmpului magnetic se numește histerezis magnetic și este prezentată în Fig. 3.04. Abscisele  $\pm H_c$  din figură se numesc câmpuri coercitive, iar ordonatele  $\pm M_{t,r}$  se numesc magnetizații remanente.

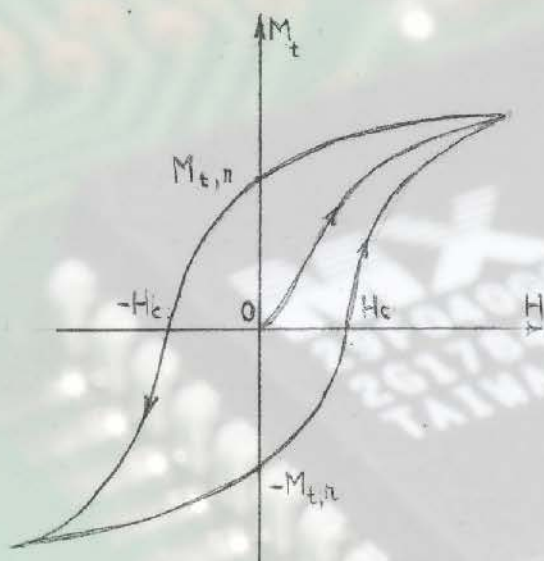


Fig. 3.04

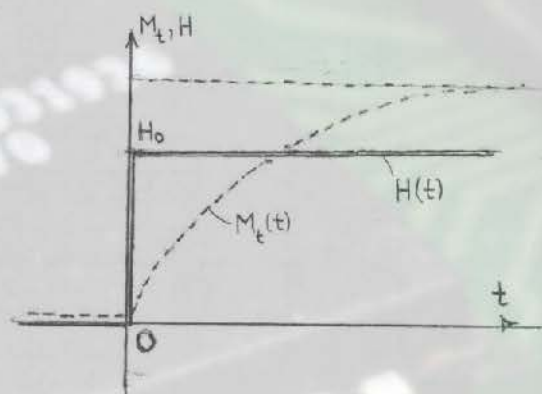


Fig. 3.05

### *Cazul materialelor cu vâscozitate magnetică*

Dacă intensitatea câmpului magnetic are o variație foarte rapidă magnetizația temporară prezintă un postefect magnetic (vâscozitate magnetică) (Fig. 3.05).



### 2.3. Legea conducției electrice (legea Ohm)

Experiența arată că starea electrocinetică a conductoarelor apare ca urmare a existenței unui câmp electric în interiorul lor. Legea conducției este o lege de material, întrucât aceasta va avea forme diferite în funcție de proprietățile specifice fiecărui conductor.

#### a) Forma generală locală a legii

Legea stabilește că *densitatea curentului electric de conducție*  $\vec{J}$  ca mărime de descriere locală a stării electrocinetice a conductorului, depinde de intensitatea câmpului electric interior  $\vec{E}$ :

$$\vec{J} = f(\vec{E})$$

Pentru o clasă largă de conductoare numite *liniare* și *izotrope* dependența are forma:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (5)$$

în care,

- $\vec{E}_i$  este intensitatea câmpului electric imprimat
- $\sigma$  este o constantă de material pozitivă numită *conductivitate electrică*

Relația se mai scrie

$$\vec{E} + \vec{E}_i = \rho \vec{J} \quad (6)$$

cu  $\rho$  este o constantă de material pozitivă numită *rezistivitate electrică*:

$$\langle \rho \rangle_{SI} = 1 \, \Omega \cdot m \quad ; \quad \langle \sigma \rangle_{SI} = \langle \rho^{-1} \rangle_{SI} = 1 \, \frac{S}{m}$$

Rezistivitatea depinde de mai mulți factori ambientali (umiditate, tensiuni interne, câmpuri magnetice, temperatură):

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \alpha_1(\theta - \theta_0) + \alpha_2(\theta - \theta_0)^2 + \dots \right]$$

în care,  $\rho_0$  este rezistivitatea la temperatura de referință

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  sunt coeficienți termici ai rezistivității

Metalele au un coeficient termic  $\alpha_1$  pozitiv, iar unele materiale precum carbonul și constantanul au coeficienți negativi.

**b) Forma integrală a legii conducției electrice pentru conductoare filiforme.**

Se consideră un conductor filiform de secțiune transversală variabilă și o linie mediană  $C$  în interiorul lui (Fig. 3.25).

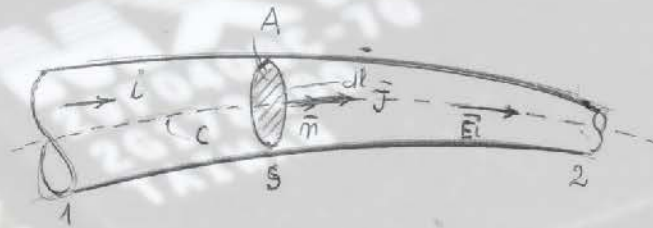


Fig. 3.25

Densiitatea de curent pe această linie  $\vec{J}$  este omoparalelă cu elementul de linie  $d\vec{l}$  și cu normala  $\vec{n}$  la secțiunea transversală  $A$  a conductorului. În aceste condiții, intensitatea curentului de conducție din firul filiform devine:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dA = \int_S J dA \cos 0 = J A$$

Se calculează între două secțiuni ale firului integrând forma locală a legii conducției electrice:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_C \rho \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_C \rho J d\vec{l} = \int_C \rho \frac{i}{A} d\vec{l} = i \int_C \frac{\rho}{A} d\vec{l} = i \frac{\rho}{A} l = i R \quad (7)$$

unde  $R$  este rezistența firului,  $R = \rho \frac{l}{A}$  cu  $\langle R \rangle_S = 1 \Omega$  (Ohm).

Dacă se notează cu  $u_f$  tensiunea în lungul firului și cu  $e_i$  tensiunea electromotoare imprimată, relația (7) ia forma:

$$u_f + e_i = Ri \quad (8)$$

sau,

$$G(u_f + e_i) = i$$

unde  $G = \frac{1}{R}$  este conductanța electrică a conductorului.



Formulele sunt valabile însoțite de o figură (Fig. 3.26) în care se specifică sensurile de integrare, reprezentând *convenția de asociere de la receptoare*.

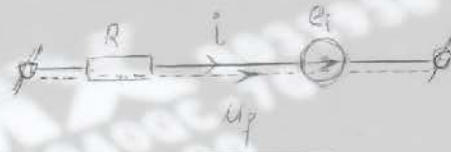


Fig. 3.26

Schimbând sensul de integrare pe curba C de la 2 la 1 pentru calculul  $u_f$ , avem (Fig. 3.27)

$$-u_f + e_i = R i \quad (8')$$

în care s-a aplicat *regula de asociere de la generatoare*.



Fig. 3.27

Pentru un conductor fără câmp electric imprimat ( $\bar{E}_i = 0$  și ca urmare,  $e_i = 0$ ) rezultă *teorema Ohm*:

$$u_f = R i$$

Dacă  $R = 0$  (Fig. 3.28) relația (8) se scrie:

$$u_f = -e_i \quad \text{pentru asocierea de la receptoare și}$$

$$u_f = +e_i \quad \text{pentru asocierea de la generatoare.}$$

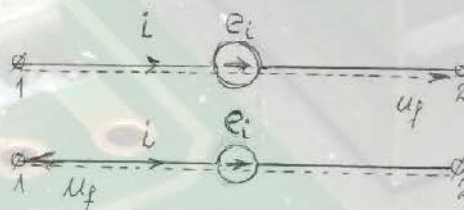


Fig. 3.28

În absența câmpului electric imprimat ( $\overline{E}_i = 0$ ) forma locală a legii Ohm prezintă două cazuri limită:

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \overline{J} \rightarrow 0}} \rho \overline{J} = \overline{E} \neq 0 \quad \text{câmp electric finit - cazul electroizolantului perfect } (\rho \rightarrow \infty)$$

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ \overline{E} \rightarrow 0}} \sigma \overline{E} = \overline{J} \neq 0 \quad \text{densitate de curent finită - cazul conductorului perfect } (\sigma \rightarrow \infty)$$



## 2.4. Legea constitutivă a câmpului electric (legea legăturii în câmp electric)

**Enunț:** În orice punct din spațiu, în orice moment de timp și în orice regim de funcționare între mărimile  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  și  $\vec{P}$  există relația:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9)$$

Această lege reprezintă o lege generală de stare de expresie locală.

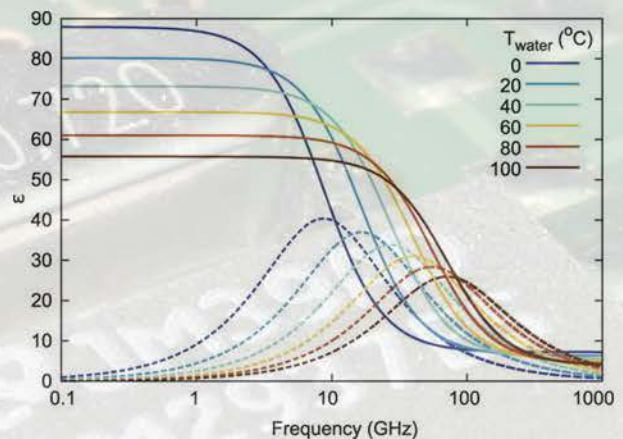
Dacă înlocuim în (9) polarizația  $\vec{P}$  cu suma  $\vec{P} = \vec{P}_t + \vec{P}_p = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} + \vec{P}_p$  și notăm suma  $1 + \chi_e = \epsilon_r$  numită permitivitate electrică relativă a materialului se obține,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}_p \quad (10)$$

Constanta de material  $\epsilon_r$  este adimensională și supraunitară,  $\epsilon_r > 1$ .

**OBS.:** Permitivitatea electrică relativă este influențată de frecvența de variație a mărimilor electrice

Dielectric Material	Relative Permittivity
Dry Air	1.0006
Paper	2.5 to 3.5
PTFE, FEF (Teflon)	2.0
Polypolyene	2.20 to 2.28
Polystyrene	2.4 to 3.2
Bakelite	3.5 to 6.0
Oak Wood	3.3
Maple Wood	4.4
Birch Wood	5.2
Glass	3 to 10
Mica	5 to 7
Glass-Bonded Mica	6.3 to 9.3
Porcelain	6.5
Metal Oxide Powders	6 to 20



<https://www.engineersgarage.com/tutorials/articles-basic-electronics-capacitors-capacitance-multiplate-capacitor-types-properties-of-capacitor/>

<https://www.engineersgarage.com/tutorials/articles-basic-electronics-capacitors-capacitance-multiplate-capacitor-types-properties-of-capacitor/>

Produsul  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  se numește permitivitate electrică absolută a materialului și are dimensiunea identică cu cea a lui  $\epsilon_0$  (farad / metru):

$$\langle \epsilon \rangle_{SI} = \langle \epsilon_0 \rangle_{SI} = 1 \frac{F}{m}$$

Pentru mediile fără polarizație permanentă  $\vec{P}_p = 0$  relația (10) devine:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (11)$$

În acest caz liniile de câmp ale fluxului electric (liniile lui  $\vec{D}$ ) coincid cu liniile de câmp electric (liniile lui  $\vec{E}$ ).

Cele două relații (10) și (11) sunt valabile pentru medii liniare și izotrope.

În vid  $\vec{D}_v = \epsilon_0 \vec{E}_v$ .



## 2.5. Legea constitutivă a câmpului magnetic (legea legăturii în câmp magnetic)

**Enunț:** În orice punct din spațiu, în orice moment de timp și în orice regim de funcționare, între mărimile  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ , și  $\vec{M}$  există legea generală de stare, de expresie locală:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (12)$$

Dacă înlocuim în (12) magnetizația  $\vec{M}$  cu suma  $\vec{M} = \vec{M}_t + \vec{M}_p$  și  $\vec{M}_t$  cu relația  $\vec{M}_t = \chi_m \vec{H}$ , se obține:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_p \quad (13)$$

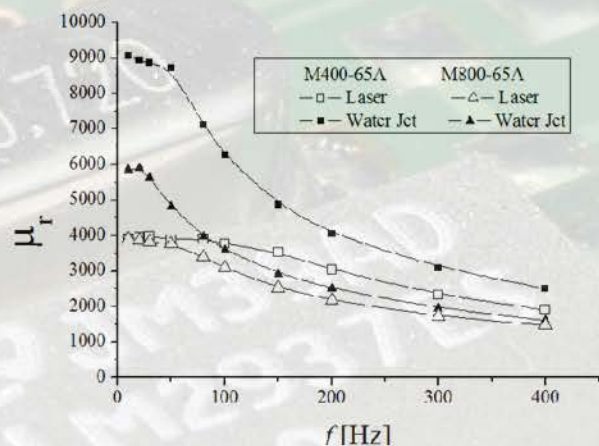
în care s-a notat  $1 + \chi_m = \mu_r$  (permeabilitatea magnetică relativă).

**OBS.:** Permeabilitatea magnetică relativă este influențată de frecvența de variație a mărimilor magnetice

### Magnetic Materials

Material	Relative Permeability $\mu_r$
Vacuum	1
Air	1.0000004
Water	0.9999992
Copper	0.9999994
Aluminum	1.00002
Silver	0.99998
Nickel	600
Iron	5000
Carbon Steel	100
Transformer Steel	2000
Mumetal	50,000
Supermalloy	1,000,000

Note: Values can often vary depending on purity and processing.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Permeability\\_\(electromagnetism\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_(electromagnetism))



Produsul  $\mu = \mu_0 \mu_r$  reprezintă permeabilitatea magnetică absolută a materialului. Aceasta are dimensiunea henry / metru.

$$\langle \mu \rangle_{SI} = \langle \mu_0 \rangle_{SI} = 1 \frac{H}{m}$$

Pentru medii liniare, izotrope, fără magnetizație permanentă ( $\vec{M}_p = 0$ ) relația dintre  $\vec{B}$  și  $\vec{H}$  este:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (14)$$

iar în vid,  $\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H}$ .

- **Materiale magnetice**

- **Liniare:**

- Diamagnetice:  $\mu_r = 0.9 \dots 0.9999$ ;  $\chi_m < 0$ ;  $\chi_m \in (10^{-6} \dots 10^{-4})$ 
      - Carbon pirolitic, grafit, Bi, Ag, Hg, Pb, H<sub>2</sub>O
      - **sunt respinse de câmpurile magnetice**
      - se utilizează pentru levitație magnetică
    - Paramagnetice:  $\mu_r = 1.0009 \dots 1.9999$ ;  $\chi_m > 0$ ;  $\chi_m \in (10^{-6} \dots 10^{-4})$ 
      - Al, Cu, Au, Ti, Li, Mg, O<sub>2</sub>
      - **sunt atrase de câmpurile magnetice intense**

- **neliniare:**

- Feromagnetice:  $\mu_r = 500, \dots, 50000$ 
      - aliaje pe bază de Fe, Ni sau Co
    - Ferimagnetice: ferite (Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) moi și dure
    - Antiferomagnetice: hematite, aliaje Cr, aliaje FeMn, aliaje NiO

**Materiale feromagnetice**

- **Magnetic moi:**

- Valori reduse ale intensității câmpului coercitiv (0.5 A/m ... 150 A/m)
  - Valori mari ale inducției de saturație
  - Oțel electrotehnic (aliaj FeSi), aliaje FeNi, aliaje FeCo

- **Magnetic semi-dure**

- Valori medii ale intensității câmpului coercitiv (200 A/m ... 20000 A/m)
  - Materiale utilizate în înregistrări magnetice (HDD, SSD)

- **Magnetic dure**

- Valori mari ale intensității câmpului coercitiv (50 kA/m ... 500 kA/m)
  - Valori medii ale inducției de saturație
  - Magneți permanenți: NdFeB, SmCo, AlNiCo, Ferite dure

