4. FORMULE COULOMBIENE

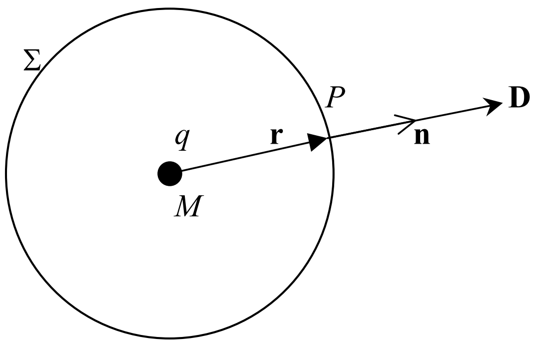

Fig.4.1. Câmpul electric produs de o sarcină electrică punctuală.

i) Cazul R³

Fie o sarcină electrică punctuală q, situată într-un mediu omogen nemărginit, de permitivitate ε. Aplicăm legea fluxului electric pe o suprafaţă sferică Σ cu centrul în punctul M, în care se află sarcina electrică (Fig.4.1):

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q$$

Din motive de simetrie sferică, **D** are doar componentă radială pe Σ şi aceasta este constantă pe Σ. Atunci, din relaţia de mai sus, rezultă:

$$q = \oint_{\Sigma} D dS = D \oint_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 D$$

de unde:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

şi:

$$\mathbf{D} = D \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

apoi:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3} \tag{4.1}$$

Deoarece **E** este funcţie doar de **r**, putem admite că şi *V* este funcţie de *r*. Ca urmare, (v. Anexa A):

$$\mathbf{E} = -gradV(r) = -\frac{\mathbf{r}}{r}V'(r)$$

Ţinând cont de relaţia (4.1), avem:

$$V' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

de unde:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + C$$

Impunând valoarea nulă pentru potenţialul de la infinit ($r \to \infty \Rightarrow V = 0$), rezultă:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{4.2}$$

Folosind acest rezultat, putem calcula **E**, *V* produse într-un mediu omogen nemărginit, de o distribuţie volumică de sarcină electrică ρ_v (Fig.4.2). Împărţim domeniul $\mathcal{D}$, în care avem sarcină electrică, în mici subdomenii de volume Δv_k, în care sarcina electrică este $\Delta q_k = \rho_{v_k} \Delta v_k$, unde ρ_{v_k} este densitatea de sarcină electrică într-un punct M_k din interiorul subdomeniului *k*. Intensitatea câmpului electric $\Delta \mathbf{E}_k$, produsă de mica sarcină electrică Δq_k în punctul *P* descris de vectorul de poziţie $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{M_k}$ faţă de punctul M_k, este dată de relaţia (4.1):

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{k}} = \frac{\rho_{v_k}\Delta v_k \mathbf{r}_k}{4\pi\varepsilon r_k^3}$$

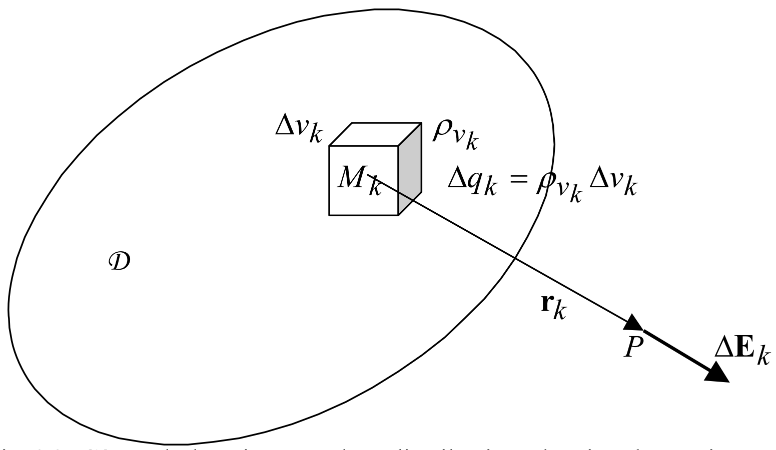

Fig.4.2. Câmpul electric creat de o distribuţie volumică de sarcină electrică.

Însumând contribuţiile tuturor subdomeniilor din $\mathcal{D}$, rezultă:

$$\mathbf{E} = \sum_k \Delta\mathbf{E}_{\mathrm{k}} = \sum_k \frac{\rho_{v_k}\Delta v_k \mathbf{r}_k}{4\pi\varepsilon r_k^3}$$

Limita expresiei de mai sus, pentru o divizare arbitrar de fină este:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_v \mathbf{r}}{r^3} dv \qquad (4.3)$$

La fel:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_v}{r} dv \qquad (4.4)$$

Observaţie. Ecuaţia potenţialului în mediul omogen (unde ε=ct) este dată de relaţia (1.5):

$$-div\varepsilon gradV = -\varepsilon div(gradV) = -\varepsilon\Delta V = \rho_v$$

deci:

$$-\Delta V = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{4.5}$$

Soluţia ecuaţiei (4.5) este dată de relaţia (4.4).

Într-o manieră asemănătoare, se pot stabili intensitatea câmpului electric şi potenţialul create de o sarcină electrică distribuită pe suprafaţa *S* cu densitatea de suprafaţă ρ_S:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\rho_S \mathbf{r}}{r^3} dS \tag{4.6}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\rho_S}{r} dS \tag{4.7}$$

Dacă sarcina electrică este distribuită cu densitatea ρ_l pe curba *C*, atunci:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_C \frac{\rho_l \mathbf{r}}{r^3} dl \tag{4.8}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_C \frac{\rho_l}{r} dl \tag{4.9}$$

Observaţii: a) Integralele (4.3), (4.4) şi (4.7) sunt absolut convergente chiar dacă punctul *P* se află în domeniul de integrare. In calculul numeric al acestor integrale, se divizeaza varietatea in elemente f mici, se calculeaza sumele Riemann in care nu se aduga elementul ce contine punctul *P* .

b) Integralele (4.3), (4.6) şi (4.8) sunt integrale vectoriale care se fac pe componente (se proiecteaza integralele pe axele ox, oy, oz.

ii) Cazul R^2

Fie un fir rectiliniu infinit de lung, uniform încărcat cu sarcina electrică cu densitatea lineică ρ_l şi aflat într-un mediu omogen şi mărginit. Problema are simetrie cilindrică şi, datorită faptului că firul este infinit de lung, mărimile nu depind de coordonatele z şi θ. Aplicăm legea inducţiei electromagnetice pe curba Γ_1 de formă circulară cu centrul pe fir, de lungime l_{Γ_1} :

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma_1} E_\theta dl = E_\theta \oint_{\Gamma_1} dl = E_\theta l_{\Gamma_1} = 0$$

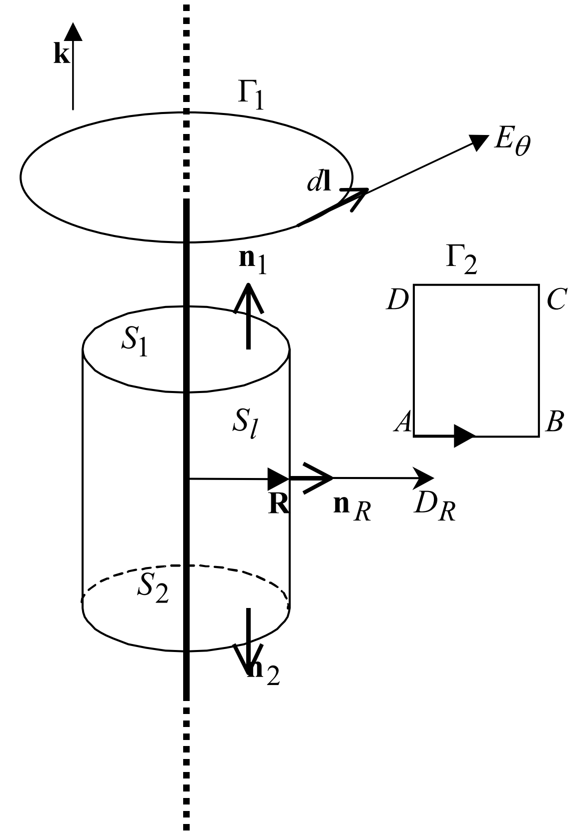

Fig.4.3. Câmpul electric produs de un fir rectiliniu încărcat uniform cu sarcină electrică.

şi rezultă că **E** şi **D** nu au componente pe coordonata $\theta\,(E_\theta = 0\,, D_\theta = 0)$. Aplicăm legea inducţiei electromagnetice pe curba $\Gamma_2 = ABCDA$ de formă dreptunghiulară, cu laturile BC şi DA paralele cu firul şi ţinem cont de faptul că **E** nu depinde de coordonatele z şi θ:

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} E_R dl + \int_{BC} E_z(B) dl - \int_{CD} E_R dl - \int_{DA} E_z(D) dl$$

$$= E_z(B) \int_{BC} dl - E_z(D) \int_{DA} dl = E_z(B)|BC| - E_z(D)|DA| = 0$$

de unde rezultă $E_z(B) = E_z(D)$. Deci, componenta lui **E** pe direcţia z este constantă. Impunând **E**→0 pentru **R**→0, rezultă că $E_z = 0$. Aplicăm legea fluxului electric pe suprafaţa închisă Σ de formă cilindrică, cu axa pe fir, de înălţime h, cu bazele S_1, S_2 şi suprafaţa laterală S_l :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_{\Sigma}$$

deci:

$$\int_{S_1} D_z dS - \int_{S_2} D_z \, dS + \int_{S_l} D_R dS = D_R \, 2\pi R h = \rho_l \, h$$

de unde:

$$D = D_R = \frac{\rho_l}{2\pi R}$$

şi:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_l \mathbf{R}}{2\pi\varepsilon R^2} \tag{4.10}$$

Apoi, admiţând că potenţialul V depinde doar de coordonata R, avem:

$$-\,gradV = -\frac{\mathbf{R}}{R} V' = \mathbf{E}$$

şi, admiţând că la R_0 avem V=0, rezultă:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} ln \frac{R_0}{R}$$

Dacă R_0=1m, avem:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} ln \frac{1}{R} \tag{4.11}$$

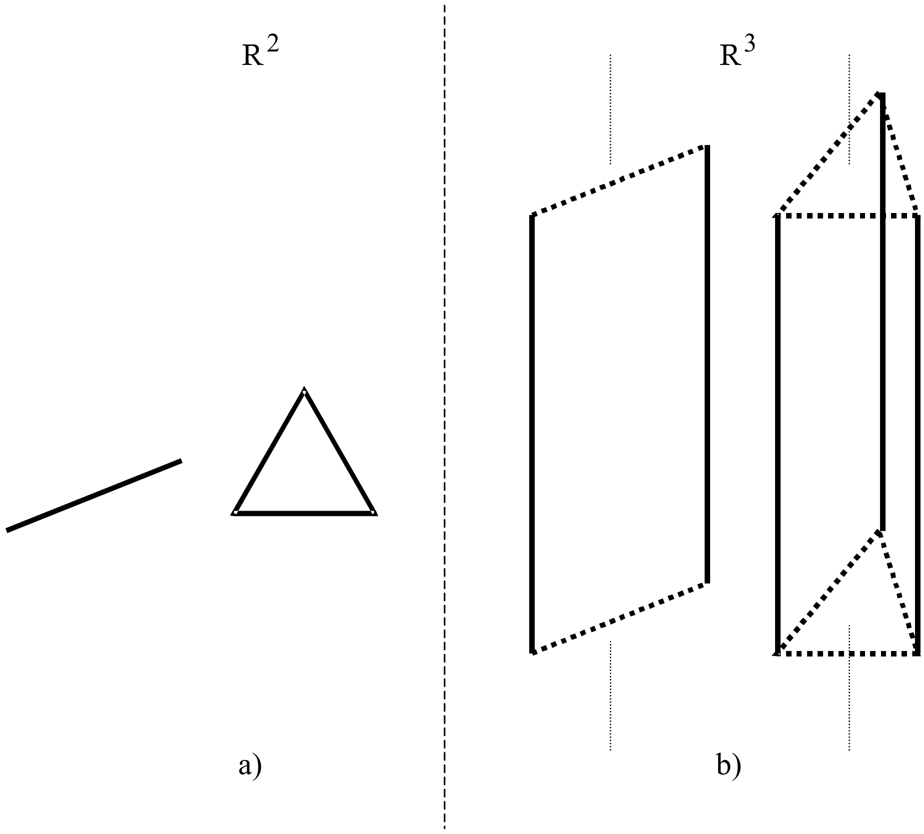

Fig.4.4. Structuri plan-paralele.

Remarcăm că structura analizată mai sus este independentă de coordonata *z*. In general, spunem că o structură de corpuri are configuraţie plan-paralelă dacă există o direcţie privilegiată, astfel încât pentru orice secţiune perpendiculară pe această direcţie avem aceeaşi geometrie a corpului şi aceleaşi proprietăţi electrice (sarcini şi caracteristici constitutive). De exemplu, structura R^3 din Fig.4.3 are configuraţia plan-paralelă, o secţiune cu un plan perpendicular pe axă fiind descrisă de un punct. Invers, dacă secţiunea dintr-un plan perpendicular pe axă arată ca în Fig.4.4.a), atunci în R^3 structura este dată în Fig.4.4.b). Deci, un fir încărcat cu sarcina electrică distribuită uniform, cu densitatea lineică ρ_l, corespunde în R^2 unei sarcini electrice "punctuale" ρ_l sau, pe unitatea de lungime, $q = \rho_l \cdot 1$. La fel, pentru curbe din R^2 avem densitatea "lineică" ρ_S [C/m²] iar pentru domenii (suprafeţe) din R^2 avem densitatea de "suprafaţă" ρ_V [C/m³].

Putem spune deci că intensitatea câmpului electric şi potenţialul create de o sarcină "punctuală" în R^2 sunt date de formulele (4.10) şi (4.11).

Dacă sarcina electrică este distribuită într-un domeniu $\mathcal{D} \subset R^2$ cu densitatea de "suprafaţă" ρ_V, atunci:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_V \mathbf{R}}{R^2} dS \tag{4.12}$$

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{D}} \rho_V \ln\frac{1}{R} dS \tag{4.13}$$

Ambele integrale sunt absolut convergente.

Dacă sarcina electrică este distribuită pe curba C din R^2 cu densitatea "lineică" ρ_S, atunci:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C} \frac{\rho_S \mathbf{R}}{R^2} dl \tag{4.14}$$

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C} \rho_S \ln\frac{1}{R} dl \tag{4.15}$$

Integrala (4.12) este absolut convergentă.

P A R T E A a III-a. ELECTROCINETICA

1. ECUATIILE ELECTROCINETICII

Regimul staţionar este acel regim în care mărimile câmpului electromagnetic nu variază în timp ($\frac{d}{dt}=0$), dar pot avea loc transformări de energie din forma electromagnetică în alte forme. În aceste condiţii, legea inducţiei electromagnetice (v. (2.17') de la Partea I) conduce la:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{1.1}$$

cu forma locală (v. (2.17') de la Partea I):

$$rot\mathbf{E} = 0 \tag{1.1'}$$

Din teorema consrvării sarcinii electrice (vezi (3.18') de la Partea I), rezultă:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \tag{1.2}$$

cu forma locală (v. (3.19) de la Partea I):

$$div\mathbf{J} = 0 \tag{1.2'}$$

O relaţie între **J** şi **E** este oferită de legea conducţiei. Pentru medii liniare, de exemplu, avem (v. (3.24), (3.24') de la Partea I):

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{1.3}$$

sau

$$\mathbf{E}=\rho\mathbf{J} \tag{1.3'}$$

Din punct de vedere matematic, dacă adăugăm şi condiţii de frontieră corect formulate (vezi Anexa B), atunci câmpul electrocinetic (**J**,**E**) care verifică ecuaţiile (1.1), (1.2), (1.3) este unic determinat. Deci, putem studia componenta electrocinetică (**J**,**E**) a câmpului electromagnetic, independent de alte componente ale câmpului electromagnetic. Partea din electromagnetism care se ocupă de acest studiu se numeste **Electrocinetică**.

Potenţialul electric

În condiţiile relaţiei (1.1), este valabilă teorema potenţialului electric (v. par.1.7 de la Partea I): există potenţialul electric V definit prin relaţia:

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.4}$$

unde integrala se face pe orice drum de la P_0 la P, iar P_0 este un punct cu potenţial de referinţă fixat arbitrar. În forma locală, relaţia (1.4) se scrie:

$$\mathbf{E} = -grad V \tag{1.4'}$$

Înlocuind (1.4') în (1.3) şi apoi în (1.2'), rezultă

$$-div \sigma grad V = 0 \tag{1.5}$$

Analogia cu electrostatica

Comparând ecuaţiile (1.1)…(1.5) de la acest paragraf cu relaţiile (1.1)…(1.5) de la par.2.1, Partea a II-a, se văd imediat corespondenţele:

Electrostatică	Electrocinetică
E	**E**
D	**J**
ε	σ
u	u
Ψ	i

2. REZISTORUL

Fie un domeniu conductor Ω, cu frontiera ∂Ω (Fig.2.1), unde câmpul electrocinetic (**J**,**E**) verifică următoarele condiţii de frontieră:

(α) pe suprafeţele disjuncte $S_1, S_2 \subset \partial\Omega$ componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric **E** este nulă;

(β) pe restul frontierei S_0 componenta normală a densităţii de curent **J** este nulă.

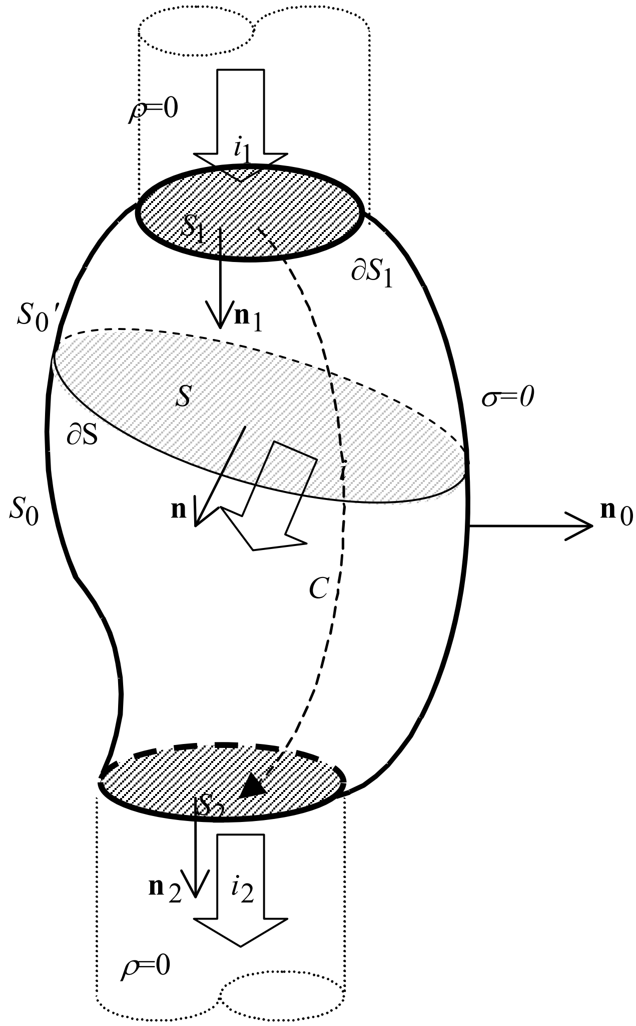

Fig. 2.1. Rezistorul

Domeniul conductor Ω cu condiţiile de frontieră (α), (β) se numeşte **rezistor**.

Observaţii: a) Din punct de vedere tehnic, condiţia de frontieră (α) poate fi realizată atunci când suprafeţele S_1, S_2 învecinează domeniul Ω cu un mediu perfect conductor (ρ=0). Firele de legătură la rezistor pot fi considerate ca fiind un astfel de mediu.

b) Din punct de vedere tehnic, condiţia de frontieră (β) poate fi realizată atunci când suprafaţa S_0 învecinează domeniul Ω cu un mediu perfect izolant (σ=0). Aerul din jurul rezistorului poate fi un astfel de mediu.

c) Din condiţia de frontieră (α), rezultă că suprafeţele S_1, S_2 sunt echipotenţiale. Ele se numesc borne. Notăm cu V_1 şi V_2 potenţialele bornelor.

d) Este bine definită tensiunea rezistorului *u* ca fiind tensiunea pe orice curbă *C* care leagă cele două borne. Avem:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_1 - V_2$$

e) Este bine definit curentul electric al rezistorului ca fiind curentul electric prin orice secţiune transversală S a rezistorului. Într-adevăr, fie suprafaţa închisă $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_0'$, unde S_0' este porţiunea din suprafaţa S_0 mărginită de bordurile ∂S_1 şi ∂S ale suprafeţelor S_1 şi, respectiv, S. Din teorema conservării sarcinii electrice, aplicată acestei suprafeţe, rezultă:

$$-\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_0 dS = 0$$

Ținând cont de condiţia de frontieră (β), rezultă:

$$\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

sau:

$$i_1 = i$$

În particular, dacă $S = S_2$, atunci:

$$i_1 = i_2 = i$$

Puterea absorbită de un rezistor

Din Legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie, rezultă, aplicând formula lui Gauss:

$$P = \int_\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int_\Omega -gradV \cdot \mathbf{J} dv = -\oint_{\partial\Omega} V\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_\Omega V div\mathbf{J} dv \qquad (2.1)$$

Ţinând cont de relaţia (1.2'), de condiţiile de frontieră şi de observaţiile d) şi e), avem:

$$P=-\oint_{\partial\Omega} V\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS=\int_{S_1} V\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_1 dS-\int_{S_0} V\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_0 dS-\int_{S_2} V\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_2 dS$$

$$=V_1\int_{S_1}\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_1 dS-V_2\int_{S_2}\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}_2 dS=V_1 i_1-V_2 i_2=(V_1-V_2)i$$

deci:

$$P=ui \tag{2.2}$$

Rezistenţa unui rezistor

Conform teoremei de unicitate a câmpurilor staţionare (Anexa B), dacă se dă fluxul lui **J** prin una dintre suprafeţele S_1 sau S_2, adică dacă se dă curentul electric i al rezistorului, atunci câmpul electrocinetic (**J**,**E**) este unic determinat şi deci tensiunea u este unic determinată. Este deci bine definită funcţia:

$$i\to u=f(i) \tag{2.3}$$

Pentru medii liniare, funcţia f este liniară şi relaţia (2.3) devine:

$$u=Ri \tag{2.4}$$

unde R se numeşte rezistenţa rezistorului. Tot din teorema de unicitate, rezultă că, dacă se dă tensiunea u a rezistorului, atunci câmpul electrocinetic (**J**,**E**) este unic determinat şi deci curentul electric al rezistorului este unic determinat. Este, aşadar, bine definită funcţia:

$$u\to i=g(u) \tag{2.5}$$

Pentru medii liniare, relaţia (2.5) devine:

$$i = Gu \tag{2.6}$$

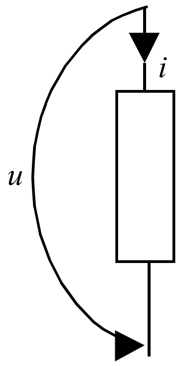

Fig.2.2. Simbolul rezistorului.

unde G se numeşte conductanţa rezistorului. Avem:

$$R = \frac{1}{G}$$

şi, în ipoteza că g este inversabilă, avem:

$$f = g^{-1}$$

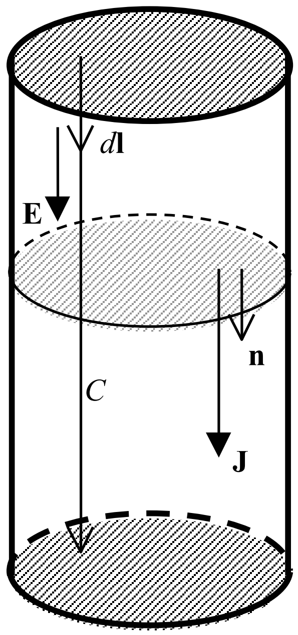

Fig.2.3. Rezistorul cilindric

Rezistenţa rezistorului este pozitivă. Într-adevăr, din relaţiile (2.2), (2.1) şi (2.4), rezultă:

$$P = ui = Ri^2 = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int_{\Omega} \rho J^2 dv \geq 0,$$

egalitatea având loc doar dacă J=0 şi deci i=0. De unde, rezultă R>0. La fel, G>0.

Simbolul rezistorului este cel din Fig.2.2.

Aplicaţie. Rezistenţa unui rezistor de formă cilindrică (Fig.2.3), de lungime l, cu aria secţiunii transversale A, format dintr-un mediu conductor omogen, de rezistivitate ρ este:

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{2.7}$$

Într-adevăr, câmpul electrocinetic în cazul acestui rezistor este uniform. Atunci, alegând curba C chiar linia de câmp, tensiunea rezistorului este

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C E dl = E \int_C dl = El = \rho Jl \qquad (2.8)$$

Alegând secţiunea S perpendiculară pe generatoarele cilindrului, curentul electric al rezistorului este:

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S J dS = J \int_S dS = JA \qquad (2.9)$$

Raportând relaţiile (2.8) şi (2.9), rezultă (2.7).