8. FORTE IN CAMP ELECTROMAGNETIC

8.1. Densitatea de volum a forţelor de natură electromagnetică

Pentru a determina densitatea de voluma forţelor $\mathbf{f}_{em}$ de natură electromagnetică, în interiorul domeniului Ω, lăsăm mediile să se deplaseze în Ω cu un câmp de viteze **v** arbitrar, dar păstrând frontiera ∂Ω imobilă. Densitatea de volum a lucrului mecanic consumat la o mică deplasare $d\mathbf{r}$ este $\mathbf{f}_{em} \cdot d\mathbf{r}$, iar densitatea de voluma puterii mecanice este $p_M = \mathbf{f}_{em} \cdot \mathbf{v}$. Dacă exprimăm lucrul mecanic consumat (sau puterea mecanică) în funcţie de marimi electromagnetice şi viteză, rezultă expresia forţei $\mathbf{f}_{em}$. Vom urmari demonstratia expresia forţei $\mathbf{f}_{em}$, care este prezentata in Anexa B.

$$\mathbf{f}_{em} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}\left(H^2 grad\mu\right) + \frac{1}{2} grad\left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau}\tau\right) + \rho_v \mathbf{E} - \frac{1}{2}\left(E^2 grad\varepsilon\right) + \frac{1}{2} grad\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right) + \frac{\partial(\mathbf{D}\times\mathbf{B})}{\partial t} \qquad (8.1)$$

unde τ este densitatea de masă, iar $\frac{d\mu}{d\tau}$ şi $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ reprezinta dependenţa parametrilor magnetici şi dielectrici în funcţie de densitatea de masă. Dacă această dependenţă este nulă, densitatea de volum a forţelor de natură electromagnetică este:

$$\mathbf{f}_{em} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}\left(H^2 grad\mu\right) + \rho_v \mathbf{E} - \frac{1}{2}\left(E^2 grad\varepsilon\right) + \frac{\partial(\mathbf{D}\times\mathbf{B})}{\partial t} \qquad (8.2)$$

În relaţia (8.2) putem distinge termenii:

$$\mathbf{f}_{m} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2}\left(H^2 grad\mu\right) + \frac{1}{2} grad\left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau}\tau\right) \qquad (8.3)$$

$$\mathbf{f}_{e} = \rho_v \mathbf{E} - \frac{1}{2}\left(E^2 grad\varepsilon\right) + \frac{1}{2} grad\left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau\right) \qquad (8.4)$$

$$\mathbf{f}_{p_{em}} = \frac{\partial(\mathbf{D}\times\mathbf{B})}{\partial t} \qquad (8.5)$$

Componenta dată de relaţia (8.3) reprezintă densitatea de volum a forţei de natură magnetică. Primul termen reprezintă densitatea de volum a forţei Laplace care apare asupra mediilor parcurse de curenţi electrici şi aflate în câmp magnetic. Al doilea termen reprezintă forţa de natură magnetică ce apare în zonele în care se modifică permeabilitatea magnetică. De exemplu, forţa ce se exercită asupra rotorului unei masini electrice nu se localizează pe conductorul parcurs de curent, deoarece crestătura este apropape ecranată magnetic. Ea se localizează la suprafaţa dintelui, unde apare o variaţie mare de permeabilitate magnetică. Al treilea termen din relaţia (8.3) are natura unei forţe piezomagnetice, în forma cea mai simplă.

Componenta dată de relaţia (8.4) reprezintă densitatea de volum a forţei de natură electrică. Primul termen reprezintă densitatea de volum a forţei coulombiene care apare asupra mediilor cu sarcină electrică şi aflate în câmp electric. Al doilea termen reprezintă forţa de natură electrică ce apare în zonele în care se modifică permitivitatea dielectricului. Al treilea termen din relaţia (8.4) are natura unei forţe piezoelectrice, în forma cea mai simplă.

Componenta dată de relaţia (8.5) are natura derivatei unui impuls: $\mathbf{p}_{em} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$, numit impulsul câmpului electromagnetic. Această forţă poate apare asupra unei suprafeţe conductoare introduse în faţa unei unde electromagnetice. Impulsul câmpului electromagnetic are o valoare de c^2 ori mai mică decat vectorul Poynting, unde c este viteza luminii in mediul studiat. În vid, de exemplu, este de cca. 10^{17} ori mai mic. La valorile normale ale intensităţilor câmpului electric şi magnetic şi la toate frecvenţele întalnite în tehnică, forţa datorată impulsului electromagnetic este neglijabilă.

Observaţie. În regimul staţionar al câmpului magnetic şi în regimul cvasistaţionar, avem doar componenta magnetica $\mathbf{f}_m$. În electrostatică şi în regimul cvasistaţionar anamagnetic, avem doar componenta electrica $\mathbf{f}_e$. Componenta datorată impulsului câmpului electromagnetic apare doar în regimul variabil.

8.2. Tensorul tensiunilor lui Maxwell

Forţa globală de natură electromagnetică, ce se exercită asupra domeniului Ω este dată de fluxul tensorului lui Maxwell definit prin relaţia:

$$\overline{\overline{T}} = \left(\mathbf{B};\mathbf{H} - \overline{\overline{1}}\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} \right) + \left(\mathbf{D};\mathbf{E} - \overline{\overline{1}}\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} \right) \tag{8.6}$$

pe frontiera domeniului, $\partial\Omega$:

$$\mathbf{F}_{em} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n}\overline{\overline{T}}\, dS \tag{8.7}$$

În relaţia (8.6), $\overline{\overline{1}}$ este tensorul unitate, iar ";" este produsul diadic, cu proprietatea:

$$\mathbf{n}\,(\mathbf{B};\mathbf{H}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})\mathbf{H}$$

Demonstraţie. (facultative) Sa aratam ca divergenta acestui tensor este chiar forta de natura electromagnetica (8.2).
a) Avem:

$$\mathbf{F}_1 = \oint_{\partial\Omega}\left[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})\mathbf{H} - \mathbf{n}\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2}\right] dS = \int_{\Omega}\mathbf{H}\, div\mathbf{B}\, dv + \int_{\Omega}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\underset{\uparrow}{\mathbf{H}}\, dv - \int_{\Omega}\frac{1}{2}\, grad\mu H^2\, dv \tag{8.8}$$

unde săgeata indică mărimea pe care se aplică operatorul ∇. Menţionăm că la trecerea de la integrala de suprafaţă, la integrala de volum, normala **n** se înlocuieste cu operatorul ∇. Ţinem cont de legea fluxului magnetic $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, de legea circuitului magnetic şi de următoarele relaţii (vezi dublul produs vectorial /1/):

$$\int_{\Omega}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\underset{\uparrow}{\mathbf{H}}\, dv = -\int_{\Omega}\mathbf{B}\times(\nabla\times\underset{\uparrow}{\mathbf{H}})\,\mathrm{dv} + \int_{\Omega}\nabla(\mathbf{B}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{H}})\,\mathrm{dv}$$

$$= -\int_{\Omega}\mathbf{B}\times\mathbf{J}\, dv - \int_{\Omega}\mathbf{B}\times\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}dv + \int_{\Omega}\nabla(\mathbf{B}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{H}})\, dv \tag{8.9}$$

şi:

$$\frac{1}{2}\, grad\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu\, gradH^2 + \frac{1}{2}H^2 grad\mu = grad(\mu\mathbf{H}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2}H^2 grad\mu \tag{8.10}$$

pe care le înlocuim în (8.8) şi obţinem:

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\Omega}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\, dv + \int_{\Omega}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B}dv - \int_{\Omega}\frac{1}{2}H^2 grad\mu\, dv \tag{8.11}$$

b) Asemănător, avem:

$$\mathbf{F}_2 = \oint_{\partial\Omega}\left[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D})\mathbf{E} - \mathbf{n}\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}\right]dS = \int_{\Omega}\mathbf{E}\,div\mathbf{D}\,dv \;+$$

$$+\int_{\Omega}(\mathbf{D}\cdot\nabla)\underset{\uparrow}{\mathbf{E}}\,dv \;-\; \int_{\Omega}\frac{1}{2}grad\varepsilon E^2\,dv \qquad (8.12)$$

Ţinem cont de legea fluxului electric $div\mathbf{D} = \rho_v$, de legea inducţiei electromagnetice şi de următoarele relaţii:

$$\int_{\Omega}(\mathbf{D}\cdot\nabla)\underset{\uparrow}{\mathbf{E}}\,dv = -\int_{\Omega}\mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{E})\,dv + \int_{\Omega}\nabla(\mathbf{D}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{E}})\,dv = \int_{\Omega}\mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}dv + \int_{\Omega}\nabla(\mathbf{D}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{E}})\,dv \qquad (8.13)$$

şi:

$$\int_{\Omega}\frac{1}{2}grad\varepsilon E^2\,dv = \frac{1}{2}\varepsilon\, gradE^2 \;+\; \frac{1}{2}E^2 grad\varepsilon \;=\; grad(\varepsilon\mathbf{E}\cdot\underset{\uparrow}{\mathbf{E}}) \;+\; \frac{1}{2}E^2 grad\varepsilon \qquad (8.14)$$

pe care le înlocuim în (8.12) şi obţinem:

$$\mathbf{F}_2 = \int_{\Omega}\mathbf{E}\,\rho_v\,dv + \int_{\Omega}\mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}dv \;-\; \frac{1}{2}E^2 grad\varepsilon \qquad (8.15)$$

c) Ţinând cont de relaţiile (8.11) şi (8.15), forta globală de natură electromagnetică este:

$$\mathbf{F}_{em} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \int_{\Omega}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\,dv \;-\; \int_{\Omega}\frac{1}{2}H^2 grad\mu\,dv \;+\; \int_{\Omega}\mathbf{E}\,\rho_v\,dv$$

$$-\int_{\Omega}\frac{1}{2}E^2 grad\varepsilon dv \;+\; \int_{\Omega}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B}dv + \int_{\Omega}\mathbf{D}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}dv$$

Aceeasi relaţie se obţine şi prin integrarea densităţii de forţă dată de (8.2), pe domeniul Ω. ■

În relaţia (8.6) putem distinge termenii:

$$\overline{\overline{T_m}} = \left(\mathbf{B};\mathbf{H} - \bar{\bar{1}}\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2}\right) \qquad (8.16)$$

$$\overline{\overline{T_e}} = \left(\mathbf{D};\mathbf{E} - \bar{\bar{1}}\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}\right) \qquad (8.17)$$

Relaţia (8.16) exprimă tensorul tensiunilor magnetice, iar (8.17), pe cel al tensiunilor electrice. Cu excepţia termenilor $\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} dv$ şi $\int_{\Omega} \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv$, care sunt neglijabili, acesti tensori dau chiar forţele de natură magnetică şi electrică ce rezultă din integrarea relaţiilor (8.3), (8.4). În regimul staţionar al câmpului magnetic şi în regimul cvasistaţionar, avem doar componenta magnetica $\overline{\overline{T_m}}$. În electrostatică şi în regimul cvasistaţionar anamagnetic, avem doar componenta electrica $\overline{\overline{T_e}}$.

Cuplul de natură electromagnetica $\mathbf{C}_{em}$ ce se exercită asupra domeniului Ω poate fi calculat cu:

$$\mathbf{C}_{em} = \oint_{\partial D} \mathbf{r} \times \mathbf{n} \overline{\overline{T}}_{\text{em}} dS \tag{8.18}$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului de integrare, în raport cu punctul în care se calculează cuplul. şi în cazul cupîlului putem distinge cele două componente: magnetică şi electrică.

Observaţii. 1. Formulele (8.7) şi (8.18) sunt valabile şi dacă în interiorul domeniului Ω se află un mediu arbitrar (de exemplu, un mediu cu histerezis). Demonstraţia se face în maniera folosită la Obs. privitoare la fluxul vectorului Poynting, de la Par.3. Problema grea este însă calculul câmpului electromagnetic.

2. Dacă dorim să punem în evidenţă şi componentele forţelor de natură piezoelectrică şi piezomagnetică, adăugăm la tensorul lui Maxwell omponenta:

$$\overline{\overline{1}} \frac{1}{2} H^2 \frac{d\mu}{d\tau} \tau + \overline{\overline{1}} \frac{1}{2} E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \tau$$

Filename:	Curs14-31 05 forte
Directory:	D:\d0\catedra\2024 - elth
Template:	C:\Users\hantila\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dot
Title:	C^MPUL ELECTROMAGNETIC CVASISTA|IONAR
Subject:	
Author:	hantila
Keywords:	
Comments:	
Creation Date:	26.05.2024 10:38 a.m.
Change Number:	3
Last Saved On:	26.05.2024 10:41 a.m.
Last Saved By:	hantila
Total Editing Time:	4 Minutes
Last Printed On:	26.05.2024 10:42 a.m.

As of Last Complete Printing

Number of Pages:	5
Number of Words:	1,197 (approx.)
Number of Characters:	6,948 (approx.)