Capitolul 2
Legile și principalele teoreme ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic

2.10. Legea conservării sarcinii electrice

Experiența arată că atunci când sarcina electrică ce există într-un domeniu spațial variază, suprafața închisă ce delimitează domeniul, este străbătută de un curent electric de conducție.

Enunţ: Intensitatea curentului electric de conducție care traversează o suprafață închisă, este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice conținute în domeniul mărginit de acea suprafață (lege dinamică)

$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}q_{D_\Sigma}}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

a) Forma integrală

Pentru un domeniu spațial D_Σ forma dezvoltată a legii este:

$$\oint_\Sigma \overline{J}\,\overline{n}\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_\Sigma}\rho_v \mathrm{d}v = -\int_{D_\Sigma}\left[\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_v \overline{v})\right]\mathrm{d}v = -\int_{D_\Sigma}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\mathrm{d}v - \oint_\Sigma \rho_v \overline{v}\;\overline{n}\;\mathrm{d}A$$

Regrupând termenii se obține:

$$\oint_\Sigma \left(\overline{J} + \rho_v \overline{v}\right)\overline{n}\;\mathrm{d}A = -\int_{D_\Sigma}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\mathrm{d}v \qquad (2)$$

în care suma $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho_v \overline{v})$ este o derivată substanțială, iar $\rho_v \overline{v} = \overline{J}_v$ este densitatea curentului electric de convecție. Curentul electric de convecție corespunde *deplasării* în raport cu un sistem de referință a *sarcinilor electrice* atașate corpurilor.

b) Formele locale

Folosind teorema Gauss-Ostrogradski relația (2) este rescrisă sub forma:

$$\oint_\Sigma \mathrm{div}\left(\overline{J} + \rho_v \overline{v}\right)\mathrm{d}v = -\int_{D_\Sigma}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\mathrm{d}v$$

care permite scrierea formei locale pentru medii în mișcare

$$\mathrm{div}\left(\overline{\mathrm{J}} + \rho_v \overline{v}\right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \qquad (3)$$

valabilă pentru orice suprafață închisă Σ.

Pentru $\overline{v} = 0$ rezultă:

$$\operatorname{div} \overline{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{3'}$$

c) Cazul suprafețelor de discontinuitate

Pentru domenii care conțin și o suprafață de discontinuitate forma locală a legii este:

$$\operatorname{divs} \overline{J} = \overline{n}_{12}\left(\overline{J}_2 - \overline{J}_1\right) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{4}$$

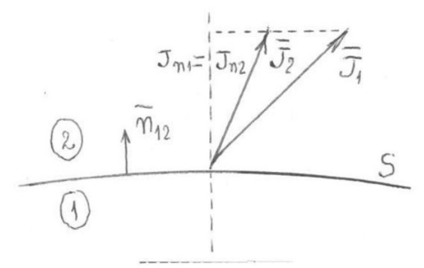

Fig. 3.19

Traversarea în regim variabil a liniilor de curent printr-o suprafață de discontinuitate, se face cu un salt al componentelor normale ale densităților de curent la suprafață, egal cu viteza de scădere a densității de suprafață a sarcinii electrice

d) Teorema continuității liniilor de curent

Din relația (4), conform Fig. 3.19, rezultă că în *regim electrocinetic staționar* ($\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$) la suprafața de discontinuitate dintre două medii diferite, se conservă componenta normală a densității de curent.

De altă parte, din relația (1) cu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \equiv 0$ rezultă:

$$i_\Sigma = \oint_\Sigma \overline{J}\, \overline{n}\, \mathrm{d}A = 0 \tag{5}$$

cu formele locale:

$\operatorname{div} \overline{J} = 0$ (medii continue)

$\operatorname{divs} \overline{J} = 0$ sau $\overline{n}_{12} \left(\overline{J}_2 - \overline{J}_1\right) = 0$ (medii discontinue)

Aplicație

Se consideră un nod al unui circuit electric (Fig. 3.20) în care conductoarele traversează suprafața închisă Σ prin secțiunile S_k de pe suprafață. Dacă notăm cu S porțiunea netraversată, se poate scrie:

$$i_\Sigma = \oint_\Sigma \overline{J}\,\overline{n}\,\mathrm{d}A = \sum_{k\in n_a}\int_{S_k}\overline{J}\,\overline{n}\,\mathrm{d}A + \int_S \overline{J}\,\overline{n}\,\mathrm{d}A \qquad (6)$$

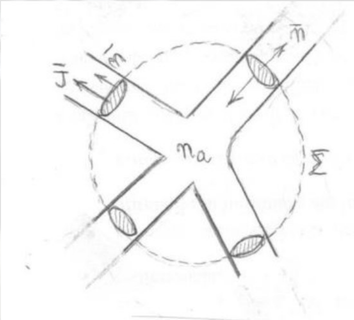

Fig.3.20

Deoarece cum s-a arătat mai sus densitatea de curent prin suprafața S este nulă, ultima integrală din suma de mai sus este nulă. Notând

$$\int_{S_k}\overline{J}\,\overline{n}\,\mathrm{d}A = i_k$$

rezultă din (5) și (6) relația:

$$\sum_{k\in n_a} i_k = 0 \qquad (7)$$

cunoscută drept teorema Kirchhoff I.

În cele ce urmează se va demonstra că, în conductoare, liniile de curent sunt *tangente la suprafața laterală* a acestora, iar intensitatea curentului electric în lungul lor se conservă.

În Fig. 3.21 se reprezintă o porțiune de conductor mărginită de o suprafață închisă Σ care intersectează conductorul prin suprafețele S_1 și S_2.

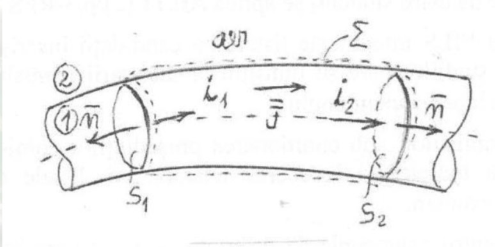

Fig. 3.21

Se aplică suprafeței închise Σ teorema Kirchhoff I considerând că pe suprafața laterală componentele normale ale densități de curent sunt nule

$$J_{n1} = J_{n2} = 0$$

Rezultă,

$$\oint_{\Sigma} \overline{J}\ \overline{n}\, \mathrm{d}A = -\int_{S_1} \overline{J}\,\overline{n}\, dA + \int_{S_2} \overline{J}\,\overline{n}\, dA = -i_1 + i_2 = 0 \Leftrightarrow i_1 = i_2 = i$$

Observație. În regim static deoarece $\overline{J} = 0$ și $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} = 0$ legea conservării sarcinii electrice își pierde valabilitatea.

2.11. Legea transformărilor energetice în conductoarele aflate în stare electrocinetică (legea Joule)

Este o lege generală, de expresie locală, care sintetizează observațiile experimentale potrivit cărora:

- orice conductor parcurs de curent electric de conducție *degajă căldură*
- dacă în plus conductorul este sediul unui câmp electric imprimat, între sursele acestui câmp și curentul electric de conducție are loc un *schimb energetic reversibil*

Densitatea de volum a puterii în jurul unui punct M este:

$$p = \lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ M}} \frac{\Delta P}{\Delta v} = \frac{\delta P}{\delta v} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}$$

Puterea corespunzătoare unui domeniu spațial D se obține prin integrare:

$$P_D = \int_D p \mathrm{d}v$$

Enunț: Densitatea de volum a puterii pe care câmpul electromagnetic o cedează unui conductor aflat în stare electrocinetică, este egală cu produsul scalar dintre intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric de conducție stabilit în conductor.

$$p_J = \overline{E}\,\overline{J}$$

În regim electrostatic $J = 0$ nu există transmisie de putere între conductor și câmpul electromagnetic.

Înlocuind în relația de mai sus câmpul electric cu $\overline{E} = \rho\overline{J} - \overline{E}_i$ se obține:

$$p_J = \rho J^2 - \overline{E}_i \overline{J}$$

în care

- $p_R = \rho J^2 > 0$ este densitatea de volum a puterii transmise de câmpul electromagnetic conductorului și transformată ireversibil în căldură
- $p_g = \overline{E}_i \overline{J} \gtrless 0$ este densitatea de volum a puterii schimbate reversibil de câmpul electromagnetic cu sursa câmpului electric imprimat.

Pentru densitatea de volum p_g se identifică următoarele cazuri:

- dacă unghiul dintre $(\overline{E}_i, \overline{J}) < \dfrac{\pi}{2}$ atunci $p_g > 0$ şi puterea este transmisă de câmpul electric imprimat către câmpul electromagnetic
- dacă unghiul dintre $(\overline{E}_i,\ \overline{J}) > \dfrac{\pi}{2}$ atunci $p_g < 0$ şi puterea este transmisă de câmpul electromagnetic către sursa de câmp electric imprimat

a) Forma integrală pentru conductoare filiforme

Puterea primită de conductor în domeniul spaţial D de la câmpul electromagnetic este:

$$P_J = \int_D \overline{E}\,\overline{J}\,\mathrm{d}v = \int_{1,C}^{2} \overline{E}\,\overline{J}\ \mathrm{A}\ \mathrm{d}l = \int_{1C}^{2} \overline{E}\,\overline{J}\ \mathrm{A}\left(\overline{n}\ \overline{\mathrm{dl}}\right) = \int_{1C}^{2}\left(\overline{E}\ \overline{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{A}\left(\overline{J}\ \overline{\mathrm{d}l}\right)$$

Dacă se consideră $\mathrm{A}\left(\overline{J}\ \overline{\mathrm{d}l}\right) = AJ = i,$ ceea ce reprezintă curentul electric de conducţie care parcurge conductorul, se exprimă puterea primită sub forma:

$$P_J = i\int_{1C}^{2} \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}l} = u_f\ i$$

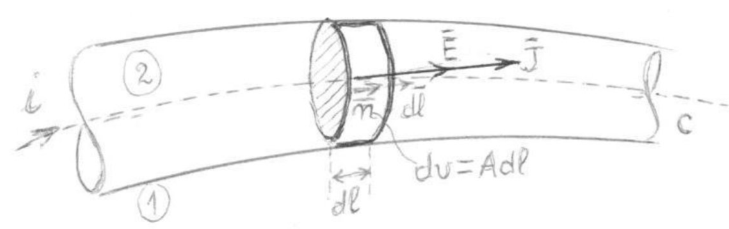

Fig. 3.29

De aici rezultă:

- *convenţia de la receptoare* când sensurile fizice (reale) coincid cu sensurile de referinţă ($u_f > 0$ şi $i > 0$) rezultă $P_J = u_f\ i > 0$, astfel încât puterea este primită de conductor de la câmpul electromagnetic
- *convenţia de la generatoare* când curentul are un sens opus, $P_J = -u_f\ i < 0$, astfel încât puterea este cedată de conductor câmpului electromagnetic.

Din forma integrală a legii conducției electrice rezultă că eliminând pe u_f între relațiile $u_f + e_i = R\,i$ și $P_J = u_f\,i$ rezultă:

$$P_J = Ri^2 - e_i\,i$$

în care,

- $P_R = R\,i^2 > 0$ este puterea transmisă de câmp conductorului și transformată ireversibil în căldură
- $P_g = e_i\,i \gtrless 0$ este puterea schimbată reversibil de câmpul electromagnetic cu sursa de câmp electric imprimat

În regim electrocinetic staționar, adică în curent continuu, tensiunea în lungul firului se notează $u_f \equiv U$ și se numește tensiune la borne, iar puterea transmisă de câmpul electromagnetic conductorului este puterea primită pe la borne $P_J = P_b$

Se disting următoarele posibilități:

Convenția de la receptoare

Cu notațiile convenite avem:

$$P_b = UI > 0$$

Înmulțim relația $U = R\,I - E$ cu intensitatea I a curentului. Dacă E și I au același sens (Fig. 3.30)

$$U\,I = RI^2 + E\,I > 0$$

Rezultă

$$P_b + P_g = P_R$$

în care s-a renunțat la indicele “i” pentru a nu se confunda t.e.m. imprimată cu câmpul electric imprimat.

Dacă E și I sunt în opoziție (Fig. 3.31)

$$U\,I = RI^2 + E\,I > 0$$

Rezultă

$$P_b = P_R + P_g$$

Convenția de la generatoare

$P_b = -\,U\,I < 0$ și $U = E - R\,I$ (Fig. 3.32)

Înmulțim cu $-I$

$-U\,I = -E\,I + R\,I^2$

rezultă

$P_g = |P_b| + P_R$

Când e_i și i au același sens prin latură atunci $P_g > 0$

e_i și i nu au același sens prin latură atunci $P_g < 0$

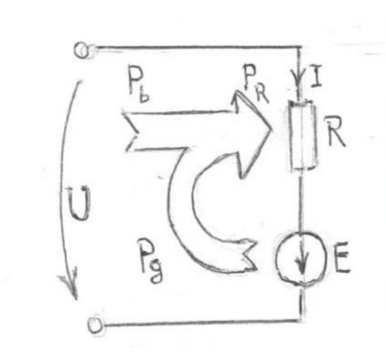

Fig. 3.30

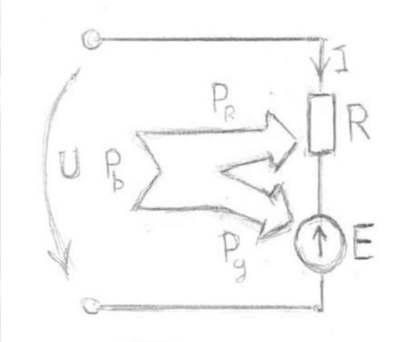

Fig. 3.31

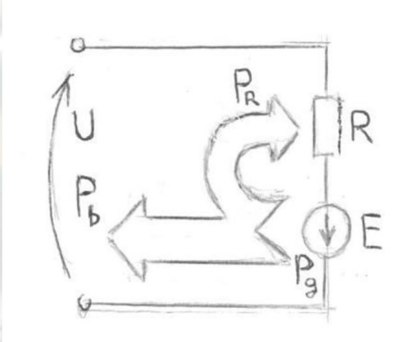

Fig. 3.32