

### 1.3. Câmpul electric în corpuri. Intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$ . Inducția electrică $\mathbf{D}$

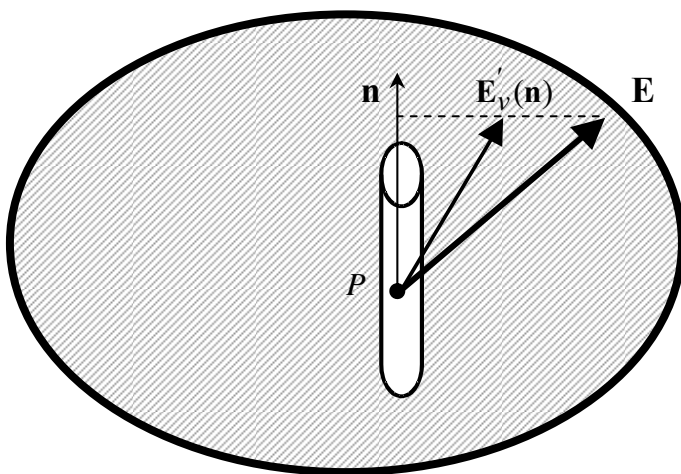


Fig. 1.6. Fantă lungă. Intensitatea câmpului electric.

Pentru a caracteriza câmpul electric în corpuri, trebuie să practicăm o cavitate în jurul punctului pe care-l cercetăm, astfel încât să putem introduce corpul de probă.

Numim fantă lungă o cavitate cilindrică arbitrar de mică cu raza mult mai mică decât lungimea, având orientarea  $\mathbf{n}$  (Fig. 1.6). Fie o

fantă lungă cu centrul în punctul  $P$ , unde dorim să studiem câmpul electric. În punctul  $P$  din centrul fantei, intensitatea câmpului electric în vid este  $\mathbf{E}'_v(\mathbf{n})$ .

Numim intensitate a câmpului electric în punctul  $P$  acel vector  $\mathbf{E}$  a cărui proiecție pe orientarea  $\mathbf{n}$  a fantei este egală cu proiecția vectorului  $\mathbf{E}'_v(\mathbf{n})$  pe orientarea fantei, oricare ar fi această orientare:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}'_v(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (\forall) \mathbf{n} \quad (1.10)$$

*Observații:* a)  $\mathbf{E}'_v(\mathbf{n})$  depinde, în general, de orientarea fantei, dar  $\mathbf{E}$  nu depinde de această orientare (în caz contrar,  $\mathbf{E}$  nu poate fi definit).

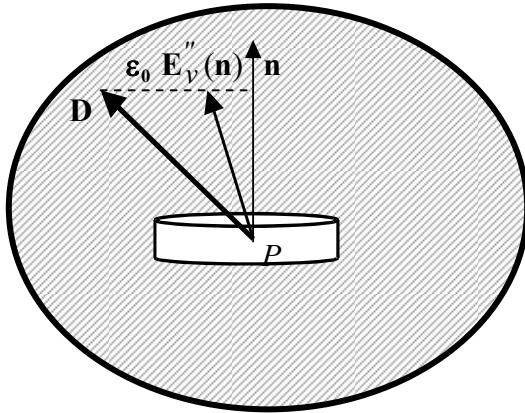
b) Mărimea  $\mathbf{E}$  este o mărime derivată, definită cu ajutorul mărimii primitive intensitatea câmpului electric în vid  $\mathbf{E}_v$ . Se măsoară tot în V/m.

c) Alegerea cavității de forma fantei lungi permite măsurarea, în principiu, a unor mărimi derivate din intensitatea câmpului electric (tensiunea electrică).

d) Practicarea unei fante în vid nu modifică cu nimic lucrurile. Ca urmare, în vid,  $\mathbf{E}'_v(\mathbf{n})$  nu depinde de  $\mathbf{n}$  și avem:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_v(\mathbf{n}) \quad (1.11)$$

Numim fantă plată o cavitate cilindrică arbitrar de mică cu lungimea mult mai mică decât raza, având orientarea  $\mathbf{n}$  (Fig. 1.7). Fie o fantă plată cu centrul în punctul  $P$ , unde dorim să studiem câmpul electric. În punctul  $P$  din centrul fantei, intensitatea câmpului electric în vid este  $\mathbf{E}''_v(\mathbf{n})$ . La aceeași orientare, intensitatea câmpului electric din vidul fantei plate poate să difere de cea din vidul fantei lungi. Numim inducție electrică în punctul  $P$  acel vector  $\mathbf{D}$  a cărui proiecție pe orientarea  $\mathbf{n}$  a fantei este proporțională cu proiecția vectorului  $\mathbf{E}''_v(\mathbf{n})$  pe orientarea fantei, oricare ar fi această orientare:



$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 \mathbf{E}''_v(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (\forall) \mathbf{n} \quad (1.12)$$

Constanta  $\epsilon_0$ , numită permitivitatea vidului, are o valoare care depinde de sistemul de unități utilizat. În sistemul internațional

Fig. 1.7. Fantă plată. Inducția electrică.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ farad/metru (F/m)}.$$

Unitatea de măsură pentru  $\mathbf{D}$  este Coulomb/metru pătrat ( $\text{C/m}^2$ ).

*Observații:* a)  $\mathbf{E}_v''(\mathbf{n})$  depinde, în general, de orientarea fantei, dar  $\mathbf{D}$  nu depinde de această orientare.

b) Mărimea  $\mathbf{D}$  este o mărime derivată, definită cu ajutorul mărimii primitive intensitatea câmpului electric în vid  $\mathbf{E}_v$ . Se măsoară tot în V/m.

c) Alegerea cavității de forma fantei plate permite măsurarea, în principiu, a unor mărimi derivate din inducția electrică (fluxul electric).

d) Practicarea unei fante în vid nu modifică cu nimic lucrurile. Ca urmare, în vid  $\mathbf{E}_v''(\mathbf{n})$  nu depinde de  $\mathbf{n}$  și avem:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_v''(\mathbf{n}) \quad (1.13)$$

e) Din relațiile (1.11) și (1.13), rezultă că în vid:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.14)$$

## 1.4. Polarizația electrică

Numim polarizație electrică mărimea vectorială definită prin relația:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.15)$$

Din relația (1.14), rezultă că polarizația este nulă în vid.

*Observație.* Unele lucrări definesc polarizația electrică ca o densitate de volum a unei mărimi numite moment electric, obținută printr-o procedură de măsurare, ca mărime primitivă. Atunci relația (1.15) devine lege (legea legăturii dintre inducția electrică, intensitatea câmpului electric și polarizația electrică). Am preferat definirea polarizației electrice cu relația (1.15), deoarece procedura de

măsurare a momentului electric nu este riguroasă, iar definirea densității de volum are aceleași neajunsuri ca și definirea densităților de volum ale sarcinilor electrice.

## 1.5. Legea legăturii dintre inducția electrică $\mathbf{D}$ și intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$

Pentru majoritatea mediilor, se poate stabili o legătură algebrică între  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$ . În funcție de această legătură, avem:

### a) medii liniare

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad (1.16a)$$

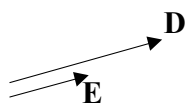


Fig. 1.8a.  
Medii liniare.

unde constanta  $\varepsilon$  se numește permitivitate și întotdeauna  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  (Fig.1.8a). Pentru o

comparare mai ușoară a permitivității  $\varepsilon$  cu permitivitatea vidului  $\varepsilon_0$ , se definește mărimea adimensională, numită permitivitate relativă cu relația  $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ . Întotdeauna  $\varepsilon_r \geq 1$ . În particular, pentru vid, aer, gaze, majoritatea metalelor,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

### b) medii liniare cu polarizație electrică permanentă

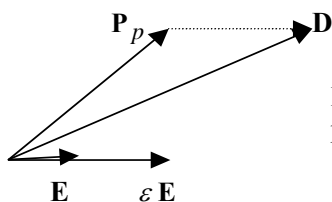


Fig.1.8b. Medii liniare cu polarizație permanentă.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p \quad (1.16b)$$

unde polarizația electrică permanentă  $\mathbf{P}_p$  este valoarea

inducției electrice când intensitatea câmpului electric este nulă (Fig. 1.8b).

### c) medii liniare anizotrope

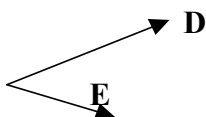


Fig. 1.8c. Medii liniare anizotrope.

$$\mathbf{D} = \overset{=}{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (1.16c)$$

La aceste medii, vectorii  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$  nu sunt, în general, paraleli (Fig.1.8c), dar legătura dintre  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$  este liniară,  $\overline{\varepsilon}$  fiind un tensor numit tensorul permitivității. Relația (1.16c) se mai poate scrie în sistemul cartezian astfel:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.16c')$$

*Observație.* Matricea permitivității este simetrică și pozitiv definită. Există deci trei direcții ortogonale, numite direcții principale de electrizare, în care legătura dintre  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$  se scrie:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (1.16c'')$$

Se poate arăta că  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ .

***d) medii liniare, anizotrope, cu polarizație electrică permanentă***

$$\mathbf{D} = \overline{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p \quad (1.16d)$$

***e) medii neliniare***

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{E}) \text{ unde } \mathbf{f} : R^3 \rightarrow R^3$$

***f) medii în care legătura dintre  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$  nu poate fi exprimată algebric***

Spunem că un mediu este omogen electric dacă, în toate punctele sale, are aceeași legătură între  $\mathbf{D}$  și  $\mathbf{E}$ . În caz contrar, se numește neomogen.

## 1.6. Tensiunea electrică $u$

Fie o curbă orientată  $C$  (Fig.1.9) și un câmp electric cu intensitatea  $\mathbf{E}$ . Numim tensiune electrică de-a lungul curbei  $C$  mărimea:

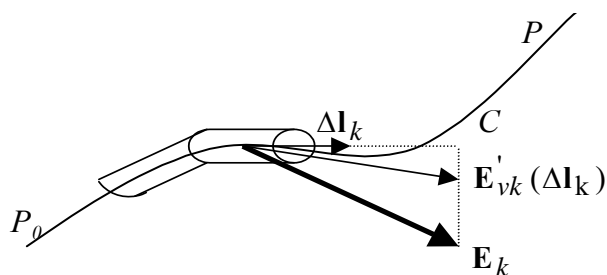
$$u_c = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.17)$$

Tensiunea electrică  $u_c$  este o integrală curbilinie de speța a 2-a, asemănătoare cu lucrul mecanic. Ea depinde atât de câmpul vectorial  $\mathbf{E}$ , cât și de curba  $C$ . Tensiunea electrică se măsoară în volți (V).

*Observații:* a) În principiu, tensiunea electrică poate fi măsurată, dacă ținem cont de felul în care a fost definită intensitatea câmpului electric, cu ajutorul fantelor lungi. Intr-adevăr, dacă plasăm curba  $C$  într-un șirag de fante lungi (Fig.1.9), atunci, în vidul fiecărei fante  $k$ , putem măsura  $\mathbf{E}'_{vk}$  care, pe orientarea  $\Delta\mathbf{l}_k$  a fantei, are aceeași componentă ca și  $\mathbf{E}_k$ :

$$\mathbf{E}_k \cdot \Delta\mathbf{l}_k = \mathbf{E}'_{vk}(\Delta\mathbf{l}_k) \cdot \Delta\mathbf{l}_k$$

Însumând în raport cu indicele  $k$  și făcând lungimile  $\Delta\mathbf{l}_k$  arbitrar de mici, avem:



$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E}'_v \cdot d\mathbf{l}$$

b) Lucrul mecanic pe care-l face un mic corp de sarcina

Fig. 1.9. Tensiunea electrică.

electrică  $q$ , care se deplasează prin șiragul de fante, sub acțiunea forțelor electrice, este:

$$L_C = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_C q\mathbf{E}_v' \cdot d\mathbf{l} = qu_C$$

## 1.7. Potențialul electric $V$ . Teorema potențialului electric scalar

Există, uneori, domenii  $\Omega$  în care tensiunea electrică pe orice curbă închisă din domeniu este nulă (v. legea inducției electromagnetice, Cap.2, par.2.9):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (\forall) \Gamma \subset \Omega \quad (1.18)$$

**Teorema potențialului electric scalar.** Dacă în domeniul  $\Omega$  este îndeplinită condiția (1.18), atunci se poate defini un potențial electric scalar prin relația:

$$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.19)$$

unde integrala se face pe orice drum de la  $P_0$  la  $P$ , iar  $P_0$  este un punct cu potențial de referință fixat arbitrar.

*Demonstrație.* Trebuie să arătăm că  $V$  este bine definit de relația (1.19), adică integrala din membrul drept al relației nu depinde de drum. Fie  $C, C'$  două

curbe de la  $P_0$  la  $P$  și fie  $C_-$  curba care are aceeași poziție în spațiu ca și  $C$ , dar este

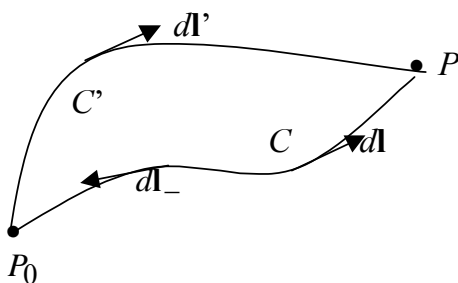


Fig. 1.10. Potențialul scalar.

orientată invers (Fig.1.10). Pe curba închisă  $\Gamma = C' \cup C_-$  este valabilă relația (1.18):

$$\int_{C_-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_- + \int_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' = 0$$

sau:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}' \quad \blacksquare$$

**Consecințe:** i) În condițiile relației (1.18), tensiunea electrică pe o curbă  $C$  este egală cu diferența potențialelor electrice scalare din punctele  $P_0$  și  $P$  ce mărginesc curba (Fig. 1.10):

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(P_0) - V(P) \quad (1.20)$$

ii) Dacă relația (1.18) este valabilă, atunci este valabilă forma locală a teoremei potențialului electric scalar: *există  $V$  astfel încât:*

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad (1.21)$$

*Demonstrație.* Fie un mic segment  $P_0P$  de lungime  $\Delta x$ , paralel cu axa  $ox$ , într-un sistem de axe carteziene. Relația (1.20) scrisă pentru acest segment este:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C E_x dx = V(P_0) - V(P) = V(x, y, z) - V(x + \Delta x, y, z) \quad (1.22)$$



Din teorema de medie avem  $\int_C E_x dx = \int_x^{x+\Delta x} E_x(x, y, z) dx = E_x(\xi, y, z) \Delta x$ , unde  $\xi$  este

cuprins între  $x$  și  $x+\Delta x$ . Înlocuim în relația (1.22), împărțim cu  $\Delta x$  și facem  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Obținem  $-\frac{\partial V}{\partial x} = E_x$ . Procedând asemănător cu segmentele orientate în direcțiile

axelor  $oy$  și  $oz$ , obținem:  $-\frac{\partial V}{\partial y} = E_y$ ,  $-\frac{\partial V}{\partial z} = E_z$ . Înmulțind aceste ultime trei

relații cu versorii axelor de coordonate, respectiv  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , și, adunând, rezultă (1.21).

■

c) Potențialul electric poate fi definit cu aproximația unei constante. Constanta poate fi fixată prin fixarea potențialului  $V(P_0)$  în punctul  $P_0$ .

## 1.8. Fluxul electric

Fie  $S$  o suprafață orientată. Numim flux electric mărimea definită prin:

$$\Psi_S = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.23)$$

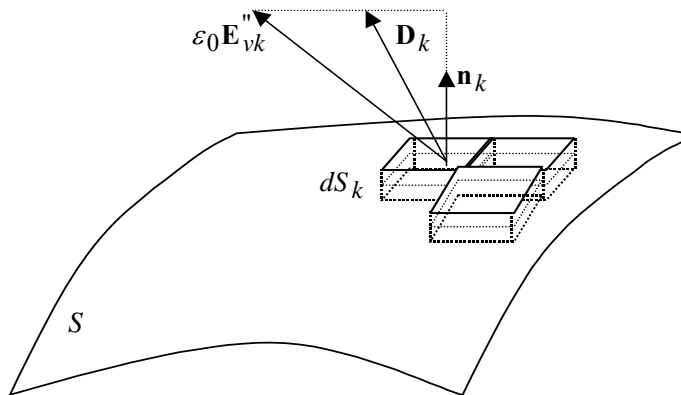


Fig. 1.11. Fluxul electric.

*Observație.* În principiu, fluxul electric poate fi măsurat, dacă ținem cont de felul în care a fost definită inducția electrică, cu ajutorul fantelor plate. Într-adevăr, dacă “placăm” suprafața  $S$  cu fante plate (Fig.1.11), atunci, în vidul fiecărei fante  $k$ , putem măsura  $\varepsilon_0 \mathbf{E}_{vk}''$  care, pe orientarea  $\mathbf{n}_k$  a fantei, are aceeași componentă ca și  $\mathbf{D}_k$ :

$$\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{vk}'' \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k$$

Însumând în raport cu indicele  $k$  și făcând ariile  $\Delta S_k$  arbitrar de mici, avem:

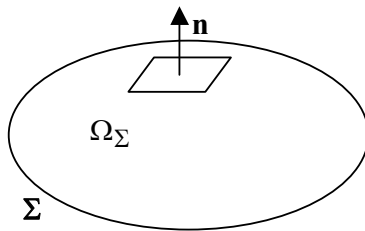
$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \varepsilon_0 \mathbf{E}_v'' \cdot \mathbf{n} dS$$

## 1.9. Legea fluxului electric

În urma experimentelor, se constată următoarea proprietate:

*Fluxul electric pe o suprafață închisă  $\Sigma$  este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeței* (Fig. 1.12):

$$\Psi_\Sigma = \oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_\Sigma \quad (1.24)$$



**Consecință.** Forma locală a legii fluxului electric:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \quad (1.25)$$

Fig. 1.12. Legea fluxului electric.

*Demonstrație.* Se presupune că sarcina electrică este distribuită volumic cu densitatea de volum  $\rho_v$ . Aplicăm relația lui Gauss (/1/ Anexa A) în membrul stâng al relației (1.24) și ținem cont de relația (1.5). Rezultă:

$$\int_{\Omega_{\Sigma}} \text{div} \mathbf{D} dv = \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho_v dv$$

Deoarece suportul de integrare  $\Omega_{\Sigma}$  este arbitrar, rezultă relația (1.25). ■

*Observație.* Din punctul de vedere al organizării teoriei Maxwell-Hertz, relația (1.23) poate fi considerată formula de definire a sarcinii electrice  $q_{\Sigma}$  din interiorul suprafeței închise  $\Sigma$ . În acest mod, nu mai apar probleme la definirea sarcinii electrice pentru domenii interioare ale unor corpuri și densitatea de volum a sarcinii electrice poate fi definită corect.

#### ***Argumentare pentru legea fluxului electric***

Fiind o lege, nu poate fi demonstrată ci doar intuită. Se prezintă o argumentare a acestei legi. Experimental se constată că între 2 sarcini punctuale  $q$  și  $q'$ , situate în întregul spațiu vid, apare o forță (Coulomb):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.26)$$

(va fi demonstrată mai târziu). Conform relației (1.2), intensitatea câmpului electric produsă de sarcina  $q$  în punctual în care se află sarcina  $q'$  este

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.27)$$

Fluxul lui  $\mathbf{E}$  pe o mică suprafață  $\Delta S$  de orientare  $\mathbf{n}$  este

$$\Delta \psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \Delta S \quad (1.28)$$

Dacă  $\Delta S''$  este proiecția lui  $\Delta S$  pe planul orthogonal pe  $\mathbf{r}$ , în vârful vectorului  $\mathbf{r}$ , (Fig.1.13), atunci

$$\Delta S'' = \Delta S \cos\left(\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{n}\right) \quad (1.29)$$

Suprafata  $\Delta S'$ , care este proiectia conica, cu centrul in  $q$ , a lui  $\Delta S''$ , pe planul orthogonal pe  $\mathbf{r}$ , aflat la in varful vectorului  $\mathbf{r}_0$  este

$$\Delta S' = \Delta S'' \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad (1.30)$$

iar in cazul in care  $r_0 = 1$ , folosind (1.29) avem

$$\Delta S' = \Delta S'' \frac{1}{r^2} = \Delta S \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} \right). \quad (1.31)$$

Inlocuind in (1.28), rezulta

$$\Delta \psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \Delta S' \quad (1.32)$$

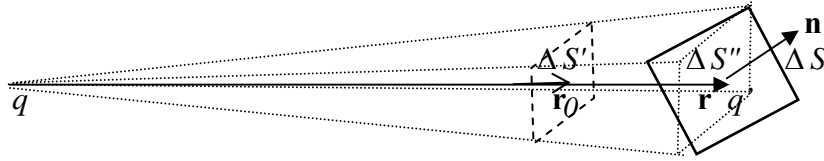


Fig.1.13 Explicativa pentru unghiul solid

Daca dorim sa calculam fluxul lui  $\mathbf{E}$  pe o suprafata oarecare  $S$ , aproximam  $S$  cu o suprafata poliedrala cu mici fete  $\Delta S_k$  pe care avem

$$\Delta \psi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \Delta S'_k \quad (1.33)$$

si insumand, avem

$$\psi_S = \sum_k \Delta \psi_k = \sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \Delta S'_k \quad (1.34)$$

Pentru o divizare arbitrar de fina a suprafatei  $S'$  in fete mici, avem

$$\psi_S = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} S' \quad (1.25)$$

$S'$  este aria proiectiei conice a suprafetei  $S$  pe sfera de raza unitate, cu centrul in  $q$ .  $S'$  este definitia unghiului solid sub care se vede suprafata  $S$  din punctul in care se afla  $q$ . De exemplu, fotbalistul din Fig.1.14. poate spune ca vede poarta echipei adverse “sub un unghi bun”. Pentru o suprafata inchisa  $\Sigma$ , in care se afla ooriginea (unde este plasata sarcina  $q$ ), unghiul solid este suprafata sferei de raza 1:  $S'=4\pi$ . Daca originea este in afara suprafetei inchise, unghiul solid este 0. Fluxul intensitatii campului electric pe suprafata  $\Sigma$  ce inconjoara sarcina electrica  $q$  este deci

$$\psi_{\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.26)$$

Deoarece, in vid  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , fluxul electric, (al inductiei electrice) este:

$$\Psi_{\Sigma} = \epsilon_0 \psi_{\Sigma} = q \quad (1.27)$$

Pentru mai multe sarcini electrice, fluxurile se aduna si rezulta legea fluxului electric (in vid):

$\Psi_{\Sigma} = q_{\Sigma}$ . Ramane sa extindem valabilitatea acestei legi si in cazul inductiei electrice din corpuri si in cazul in care nu avem vid.

Fig. 1.14. Unghiul solid sub care vede poarta un fotbalist

