

Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Prin conectarea laturilor de circuit magnetic, se formează un circuit magnetic. Acesta conține noduri și bucle cu laturi de circuit magnetic, iar laturile de circuit magnetic pot avea spire, înfășurate pe ele și parcurse de curenți electrici.

Fie nodul din Fig.4.5 și suprafața închisă $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_0$, unde S_k ($k > 0$) este suprafața transversală a laturii k , parcursă de fluxul fascicular φ_k , iar S_0

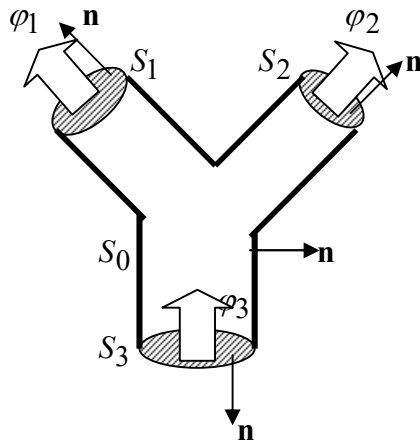


Fig.4.5. Nod de laturi de circuit magnetic

este reuniunea porțiunilor suprafețelor pe care este îndeplinită condiția de frontieră (β) ($B_n = 0$) și mărginită de secțiunile S_k . Aplicând legea fluxului magnetic pe suprafața închisă Σ și ținând cont de condiția (β), rezultă:

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 0$$

Deci, pentru circuitele magnetice, este valabilă teorema I-a a lui Kirchhoff: *Suma fluxurilor fasciculare φ_k ale laturilor de circuit magnetic ale unui nod n_j este nulă:*

$$\sum_{k \in n_j} \varphi_k = 0 \quad (4.4)$$

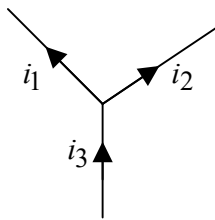


Fig.4.6. Nod similar de circuit electric

Analogia cu prima Teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite electrice este evidentă, așa cum rezultă din

Fig.4.6:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

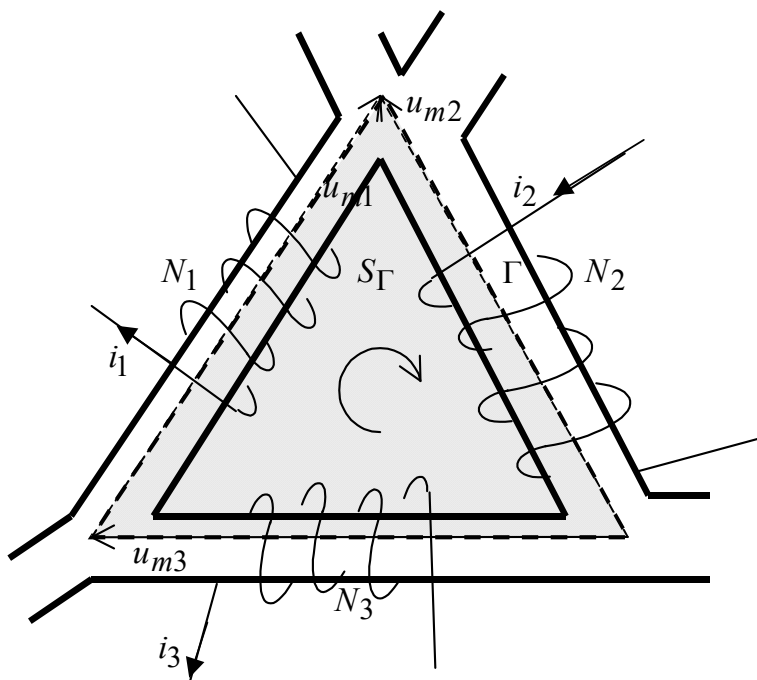


Fig.4.7. Buclă cu laturi de circuit magnetic.

Fie bucla de laturi de circuit magnetic din Fig.4.7. Pe latura k , putem avea o înfășurare formată din N_k spire și parcursă de curentul i_k . Pe curba închisă Γ asociată buclei, aplicăm teorema lui Ampere:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = u_{m1} - u_{m2} + u_{m3} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = -N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 \quad (4.5)$$

Dacă definim mărimea *forță magnetomotoare* prin relația:

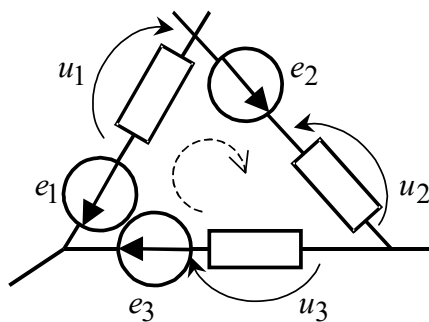


Fig.4.8. Buclă similară de circuit electric.

$$F_m = Ni \quad (4.6)$$

atunci relația (4.5) se mai scrie:

$$u_{m1} - u_{m2} + u_{m3} = -F_{m1} + F_{m2} + F_{m3}$$

Deci, pentru circuitele magnetice este valabilă și teorema a II-a a lui Kirchhoff: *Suma tensiunilor magnetice u_k ale laturilor de circuit magnetic ale unei bucle b_j este egală cu suma forțelor magnetomotoare:*

$$\sum_{k \in b_j} u_{mk} = \sum_{k \in b_j} F_{mk} \quad (4.7)$$

Analogia cu a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuite electrice este evidentă, așa cum rezultă din Fig.4.8.

$$u_1 - u_2 + u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

Rezolvarea problemelor de câmp magnetic cu ajutorul circuitelor magnetice

Sunt parcurse următoarele etape:

- a) Se definește circuitul magnetic care modelează problema de câmp.
- b) Se definește circuitul electric analog, unde se pot pune direct:
 - fluxuri fasciculare în loc de curenți electrici;
 - tensiuni magnetice în loc de tensiuni electrice;
 - valorile reluctanțelor în loc de cele ale rezistențelor;
 - valorile tensiunilor magnetomotoare în loc de cele ale surselor de tensiune; sensurile acestor surse sunt date de regula burgiului drept, rotit de curentul electric ce înconjoară latura de circuit magnetic.
- c) Se rezolvă circuitul electric analog prin oricare din metodele valabile pentru circuite rezistive.

Aplicația 1

Electromagnetul excitat în curent. Fie electromagnetul tip U din Fig.4.9., în care secțiunea transversală are peste tot aria A , iar materialul feromagnetic are permeabilitatea relativă μ_r . Înfășurarea de excitație are N spire și este parcursă de

curentul electric i . Ne propunem să determinăm inducția magnetică din întrefier și forța portantă a electromagnetului. Un model simplu de circuit magnetic ce poate fi

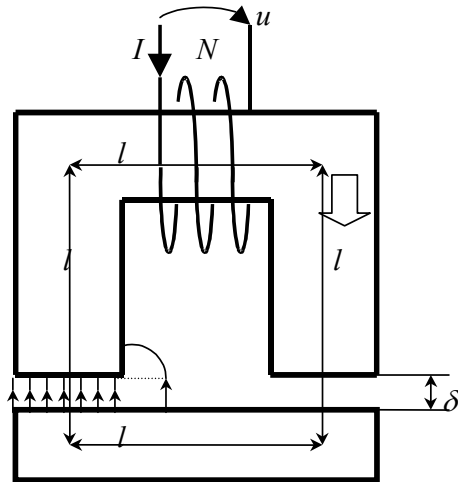


Fig.4.9. Electromagnet tip U.

adoptat este desenat în Fig.4.10. Avem $\delta \ll l$ și atunci valorile reluctanțelor tuturor porțiunilor feromagnetice pot fi considerate egale, având valorile (4.3):

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \mu_0 A}$$

Cele două întrefieruri au reluctanțele:

$$R_{m\delta} = \frac{\delta}{\mu_0 A}$$

Avem:

$$\varphi = \frac{F_m}{4R_m + 2R_{m\delta}} = \frac{\mu_0 ANi}{4\frac{l}{\mu_r} + 2\delta} \quad (4.8)$$

de unde rezultă inducția magnetică în întrefier:

$$B_\delta = \frac{\varphi}{A} = \frac{\mu_0 Ni}{4\frac{l}{\mu_r} + 2\delta} \quad (4.9)$$

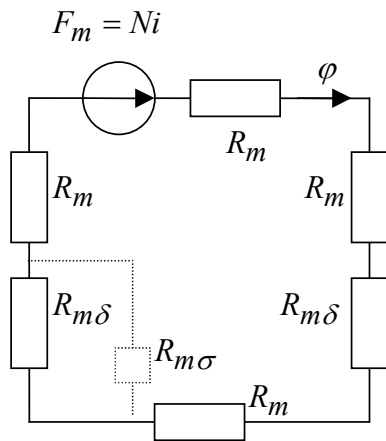


Fig.4.10. Circuitul electric analog.

Mediul feromagnetic fiind considerat liniar, energia și coenergia câmpului magnetic se calculează cu relația (3.4) de la Cap.3:

$$W_m = W_m^* = \frac{1}{2} \Phi i$$

unde fluxul total al înfășurării cu N spire este $\Phi = N\varphi$. Din (4.8), rezultă:

$$W_m = W_m^* = -\frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4\left(2\frac{l}{\mu_r} + \delta\right)} \quad (4.10)$$

Deoarece în expresia (4.10) apare ca mărime de stare curentul electric, folosim a doua formulă de calcul al forțelor generalizate în câmp magnetic (3.27):

$$F_\delta = \left. \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \right|_{i=ct} = -\frac{\mu_0 AN^2 i^2}{4\left(2\frac{l}{\mu_r} + \delta\right)^2} \quad (4.11)$$

Observații: a) Valoarea negativă a forței portante arată că forța care mărește coordonata generalizată δ este negativă, deci avem forța de atracție.

b) Dacă, în problemă, s-ar cere forța de reținere, atunci se face calculul de mai sus pentru $\delta \neq 0$ și apoi se înlocuiește în relația (4.11), $\delta=0$ sau cu valoarea ce rezultă din condițiile tehnologice.

c) Să admitem următoarele valori numerice: $l=5\text{cm}$, $\mu_r=1000$, $\delta=2\text{mm}$, $A=4\text{cm}^2$, $i=2\text{A}$, $N=500$. Cu aproximație, avem: $B_\delta=0,3\text{T}$ și $F_\delta = -30\text{N}$. Forțele sunt mult mai mari decât cele din electrostatică.

d) Uneori, modelul de circuit magnetic poate fi ales mai complex, adăugând, de exemplu, laturi de circuit magnetic asociate tuburilor de flux din imediata vecinătate a întrefierului (Fig.4.9). Calculul reluctanțelor acestor laturi se poate face prin aproximarea liniilor de câmp cu segmente de dreaptă și arce de cerc (v. Cap.4, Par.4.3, de la Partea a II-a).

Aplicația 2

Electromagnetul excitat în tensiune sinusoidală. Fie electromagnetul tip U din Fig.4.9., în care secțiunea transversală are peste tot aria A , iar materialul feromagnetic este neliniar. Înfășurarea de excitație are N spire și este alimentată cu tensiune sinusoidală de valoarea efectivă U și de pulsație ω . Admitem că tot fluxul unei spire trece prin circuitul magnetic. Rezistența înfășurării de excitație este neglijată (spire perfect conductoare).

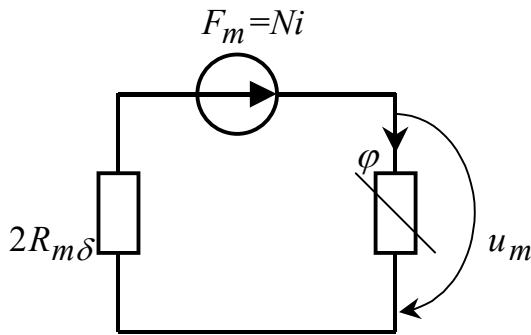


Fig.4.11. Circuit electric analog pentru electromagnetul excitat în tensiune.

Ne propunem să determinăm forța portantă a electromagnetului. Un model simplu de circuit magnetic ce poate fi adoptat este desenat în Fig.4.11. Laturile feromagnetice sunt modelate printr-un rezistor neliniar, la bornele căruia există o relație neliniară $u_m = f(\varphi)$. Avem:

$$F_m = Ni = 2\varphi R_m\delta + f(\varphi)$$

Și, deoarece $\varphi = \frac{\Phi}{N}$, rezultă:

$$i = \frac{2R_m\delta}{N^2} \Phi + \frac{1}{N} f\left(\frac{\Phi}{N}\right)$$

Având curentul electric ca funcție de fluxul magnetic, calculăm energia câmpului magnetic cu relația (3.3):

$$W_m = \int_0^{\Phi} i d\Phi = \frac{R_m\delta}{N^2} \Phi^2 + \frac{1}{N} \int_0^{\Phi} f\left(\frac{\Phi}{N}\right) d\Phi$$

Având energia ca funcție de mărimea de stare Φ , aplicăm prima formulă a forțelor generalizate în câmp magnetic (3.26). Al doilea termen din membrul drept nu depinde de coordonata generalizată δ și atunci rezultă:

$$F_{\delta} = - \frac{\partial W_m}{\partial \delta} \Big|_{\Phi=ct} = - \frac{\Phi^2}{N^2} \frac{\partial R_{m\delta}}{\partial \delta}$$

Ținând cont de expresia reluctanței întrefierului, dată în Aplicația 1, obținem:

$$F_{\delta} = - \frac{\Phi^2}{\mu_0 AN^2}$$

Tensiunea de la bornele înfășurării este $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ și ca urmare:

$$\Phi = \int u dt = - \frac{U\sqrt{2}}{\omega} \cos\omega t$$

Obținem:

$$F_{\delta} = - \frac{2U^2}{\mu_0 AN^2 \omega^2} \cos^2\omega t$$

sau:

$$F_{\delta} = -\tilde{F}_{\delta}(1 + \cos 2\omega t) \quad (4.12)$$

unde \tilde{F}_{δ} este valoarea medie a forței portante:

$$\tilde{F}_{\delta} = \frac{U^2}{\mu_0 AN^2 \omega^2} \quad (4.13)$$

Observații: a) Relația (4.12) arată că forța portantă este o mărime pulsatorie cu pulsația 2ω , deci, dacă frecvența tensiunii de alimentare este de 50Hz, atunci frecvența pulsațiilor este 100Hz. Această frecvență, care intră în domeniul audio, este specifică instalațiilor electrotehnice care lucrează la frecvența de 50Hz.

b) Aparent, relația (4.13) este ciudată, prin faptul că forța portantă nu depinde de întrefierul electromagnetului. Este un prilej de a pune în evidență faptul că modelul de circuit magnetic nu este întotdeauna satisfăcător. Ne putem da seama ușor că, dacă întrefierul crește, atunci câmpul magnetic din întrefier nu mai este uniform, iar fluxul fascicular va trece în mare măsură direct de la un braț al electromagnetului la celălalt braț. Modelul adoptat în Fig.4.11 nu mai este corect și deci nici rezultatul (4.13) nu este corect.