# PARTEA VII. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC GENERAL VARIABIL, ÎN MEDII IMOBILE

## 1. ECUATIILE CAMPULUI ELECTROMAGNETIC GENERAL VARIABIL

Fie domeniul $\Omega$ în care dorim să studiem câmpul electromagnetic.
Legea inducţiei electromagnetice, în forma locală este:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.1}$$

Legea circuitului magnetic este:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.2}$$

Legile (1.1) şi (1.2) sunt legi de evoluţie. La acestea se adaugă relaţiile constitutive. Legea legăturii dintre inducţia electrică **D** şi intensitatea câmpului electric **E**, pentru medii liniare, este:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{1.3}$$

Legea legăturii dintre **B** şi **H**:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{1.4}$$

Legea conducţiei:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{1.5}$$

Putem privi ecuaţiile (1.1)÷(1.5) ca un sistem de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute: **B**, **H**, **D**, **E**, **J**.
În plus, câmpul electromagnetic verifică legea fluxului magnetic:

$$div\mathbf{B} = 0 \qquad (1.6)$$

legea fluxului electric:

$$div\mathbf{D} = \rho_v \qquad (1.7)$$

unde $\rho_v$ este densitatea de volum a sarcinii electrice, şi legea transformării puterii din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie:

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \qquad (1.8)$$

Spre deosebire de regimurile cuasistaţionare, ambele derivate în raport cu timpul ($\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ din legea inducţiei electromagnetice şi $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ din legea circuitului magnetic) sunt luate în considerare. Unele rezultate ale analizei regimului variabil pot fi particularizate pentru regimurile cuasistaţionare, facănd $\varepsilon = 0$ sau $\mu = 0$. Este motivul pentru care aceste rezultate vor fi deduse doar în acestă parte.

*Relaxarea densităţii de volum a sarcinii electrice în medii omogene electric*. Fie un mediu în care $\sigma = ct.$ şi $\varepsilon = ct.$ Aplicăm operatorul *div* în relaţia (1.2), si, ţinând cont de faptul că $div(rot\mathrm{H}) = 0$, rezultă:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} div\mathbf{D} + \frac{\partial (div\mathbf{D})}{\partial t} = 0$$

Luând în considerare şi legea fluxului electric (1.7), avem:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este:

$$\rho_v(t) = \rho_v(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_v(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Această relaţie arată că, indiferent de evoluţia mărimilor câmpului electromagnetic, densitatea de volum a densităţii de volum a sarcinii electrice tinde către 0. Constanta de timp a acestei "relaxări" este: $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$. De exemplu, în cazul cuprului,

$\tau \cong 2 \cdot 10^{-19} s$. Deci, densitatea de volum a sarcinii electrice se anulează aproape instantaneu.

## 2. TEOREMA DE UNICITATE

Pentru a dovedi că regimul variabil este bine definit de ecuaţiile (1.1)÷(1.5), este necesar să dovedim că aceste ecuaţii asigură unicitatea soluţiei de câmp.

***Condiţiile iniţiale (CI)***

Deoarece ecuaţiile (1.1)÷(1.2) descriu un proces evolutiv, este necesar să avem informaţii privitoare la momentul începerii acestui proces. Deoarece în ecuaţia (1.1) apare derivata în raport cu timpul a inducţiei magnetice, la $t$=0, trebuie cunoscută valoarea ei: $\mathbf{B}\big|_{t=0} = \mathbf{B}_\mathrm{i}$. Evident, se impune $div\mathbf{B}_\mathrm{i}$ = 0. Aplicând operatorul *div* relaţiei (1.1), rezultă că la orice moment este verificată legea fluxului magnetic. În ecuaţia (1.2) apare derivata în raport cu timpul a inducţiei electrice, deci, la $t$=0, trebuie cunoscută valoarea ei: $\mathbf{D}\big|_{t=0} = \mathbf{D}_\mathrm{i}$.

***Condiţiile de frontieră(CF)***

Interacţiunea dintre câmpul electromagnetic exterior domeniului Ω şi cel interior acestui domeniu este pus în evidenţa de comportarea mărimilor câmpului pe frontiera ∂Ω. Ca şi în cazul regimului cuasistaţionar, se urmăreşte fluxul pe frontieră a expresiei $\oint\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$, care se anulează în cazul câmpului diferenţă. Vom vedea că aceasta expresie corespunde schimbului de putere de natură electromagnetică cu exteriorul, ce se produce pe frontieră. În cazul câmpului diferenţă, acest schimb este nul. Cea mai simplă condiţie de frontieră, pe care o întalnim cel mai frecvent în literatura de specialitate, este (Fig.1.1):

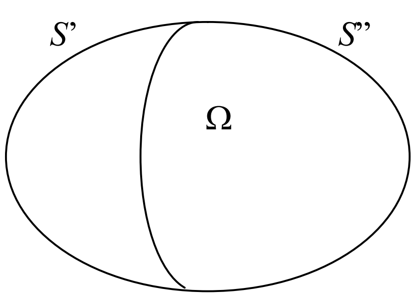

Fig.1.1.Domeniul Ω

(α) Pe o parte *S'* a frontierei, se dă componenta tangenţială a lui **H**;

(β) Pe restul frontierei *S*''=∂Ω-*S*', se dă componenta tangenţială a lui **E**.

O altă condiţie de frontieră, care defineşte elementele de circuit va fi analizată în Par.9. Ea conduce tot la anularea expresiei $\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}dS$.

***Teorema 2.1.*** Ecuaţiile (1.1)÷(1.5), împreună cu condiţiile de frontieră de (CF) şi condiţiile iniţiale (CI), definesc unic valorile (**B**,**H**,**D**,**E**,**J**).

*Demonstraţie.* Presupunem că două câmpuri electromagnetice distincte îndeplinesc condiţiile enunţul teoremei şi fie $(\mathbf{B}_d, \mathbf{H}_d, \mathbf{D}_d, \mathbf{E}_d, \mathbf{J}_d)$ câmpul diferenţă. Acest câmp verifică relaţiile (1.1), (1.2) şi are condiţii de frontieră şi condiţii iniţiale nule. Demonstraţia urmează principiul demonstraţiei teoremei 1.1 din Partea I. În locul integralei intensităţii câmpului electric diferenţă ***E***, se foloseşte chiar $\mathbf{E}_d$. Din condiţia de frontieră (β), rezultă că, pe *S*", $\mathbf{E}_{dt}=0$, iar din condiţia (α), $\mathbf{H}_{dt}=0$ pe *S*'. Atunci:

$$\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}_d\times\mathbf{H}_d)\cdot\mathbf{n}dS=\oint_{S''}\mathbf{E}_d\cdot(\mathbf{H}_d\times\mathbf{n})dS\quad-\oint_{S'}\mathbf{H}_d\cdot(\mathbf{E}_d\times\mathbf{n})dS\ =0 \qquad (2.1)$$

*(Obs*. Intr-un punct cu normala continua **n** de pe o suprafata, este valabila descompunerea unui vecator: $\mathbf{E}=\mathbf{n}E_n+\mathbf{E}_t$, unde $\mathbf{E}_t$ este componenta din planul tangent. Atunci $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t$.)

Mai avem, cf T. Gaus:

$$\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}_d\times\mathbf{H}_d)\cdot\mathbf{n}dS=\int_{\Omega}\mathbf{H}_d\cdot rot\mathbf{E}_d dv-\int_{\Omega}\mathbf{E}_d\cdot rot\mathbf{H}_d dv$$

Conform (1.1), (1.2) rezultă:

$$\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}_d\times\mathbf{H}_d)\cdot\mathbf{n}dS=\int_{\Omega}\mathbf{H}_d\cdot\frac{\partial\mathbf{B}_d}{\partial t}dv+\int_{\Omega}\mathbf{E}_d\cdot\frac{\partial\mathbf{D}_d}{\partial t}dv+\int_{\Omega_c}\mathbf{E}_d\cdot\mathbf{J}_d dv=0 \qquad (2.2)$$

Unde $\Omega_c$ este domeniul ocupat de corpurile conductoare $\int_{\Omega_c}\mathbf{E}_d\cdot\mathbf{J}_d dv=\int_{\Omega_c}\sigma\mathbf{E}_d^2 dv$

Cf (1.3), avem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_d}{\partial t} dv = \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}_d \frac{\partial \mathbf{D}_d}{\partial t} dv = \int_{\Omega} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial (\mathbf{D}_d)^2}{\partial t} dv = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{D}_d)^2}{\varepsilon} dv \qquad (2.3)$$

si, asemănător, $\int_{\Omega} \mathbf{H}_d \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_d}{\partial t} dv = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{B}_d)^2}{\mu} dv$

Deci din(2.1), (2.2) si (2.3),

$$\int_{\Omega_c} \sigma (\mathbf{E}_d)^2 dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{(\mathbf{D}_d(t))^2}{\varepsilon} dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \frac{(\mathbf{B}_d(t))^2}{\mu} dv = 0$$

Integrând în timpşi tinând cont de conditia iniţială, rezulta:

$$\int_0^t \int_{\Omega_c} \sigma (\mathbf{E}_d)^2 dv dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{(\mathbf{D}_d(t))^2}{\varepsilon} - \frac{(\mathbf{D}_d(0))^2}{\varepsilon} \right) dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{(\mathbf{B}_d(t))^2}{\mu} - \frac{(\mathbf{B}_d(0))^2}{\mu} \right] dv = 0$$

$\mathbf{D}_d(0) = 0$, $\mathbf{B}_d(0) = 0$ (din (CI)). Egalitatea de mai sus poate avea loc doar dacă $\mathbf{D}_d(t) = 0$ şi $\mathbf{B}_d(t) = 0$, iar din relatiile (1.3), (1.4), (1.5) rezulta ca şi $\mathbf{E}_d = 0$, $\mathbf{H}_d = 0$, $\mathbf{J}_d = 0$ în întreg domeniul $\Omega$. ■

*Observaţie.* Teorema de unicitate arată că inducţia magnetică **B** şi inducţia electrică **D** sunt mărimi de stare pentru câmpul electromagnetic în regim variabil. Cunoasterea lor la $t$=0, determină unic evoluţia câmpului.

## 3. ENERGIA CAMPULUI ELECTROMAGNETIC

În domeniul $\Omega$, în care avem câmp electromagnetic, energia acestuia (în ipoteza că există) se poate transforma în căldură, în lucru mecanic şi în alte forme de energie, în timp ce o parte din ea poate părăsi domeniul, prin frontiera sa $\partial\Omega$, tot sub forma electromagnetică. Dacă mediile din $\Omega$ sunt imobile, atunci nu apare lucru mecanic. Putem deci admite că avem doar două motive de scădere a energiei câmpului electromagnetic: o parte se transformă în alte forme prin conducţie, iar altă parte părăseşte domeniul prin suprafaţa sa. Ţinând cont de legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$, avem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv dt + dW_{em} + P_{\partial\Omega}\, dt = 0 \tag{3.1}$$

unde $dW_m$ este variaţia energiei câmpului magnetic, iar $P_{\partial\Omega}\, dt$ este energia transferată prin frontiera domeniului. Împărţind prin $dt$, rezultă:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \frac{dW_{em}}{dt} + P_{\partial\Omega} \tag{3.2}$$

Folosind legea circuitului magnetic, rezultă:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot rot\mathbf{H} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv = \frac{dW_{em}}{dt} + P_{\partial\Omega} \tag{3.3}$$

Folosind relaţia lui Gauss, avem:

$$\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dv = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot rot\mathbf{E}\, dv \quad - \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot rot\mathbf{H}\, dv$$

Înlocuind ultimul termen din membrul drept în relaţia (3.3), şi ţinând cont de legea inducţiei electromagnetice, avem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{dt} dv \; + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{dW_{em}}{dt} + P_{\partial\Omega} \tag{3.4}$$

La fel ca in continuarea relaţiei (2.3), avem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{dt} dv \; = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} dv \quad \text{şi} \quad \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} dv$$

si relaţia (3.4) devine:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} dv + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} dv \right) + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{dW_{em}}{dt} + P_{\partial\Omega} \tag{3.5}$$

Privind formele pe care le au cei doi termeni din membrii relaţiei (3.5), intuim egalităţile:

$$\frac{dW_{em}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}dv+\int_{\Omega}\frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon}dv\right) \tag{3.6}$$

$$P_{\partial\Omega}=\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}dS \tag{3.7}$$

Evident, din egalarea unor sume, nu putem egala termenii sumelor. Dar în favoarea relaţiilor de mai sus, putem argumenta:

- Relaţia (3.6) egalează termenii care se referă la domeniul $\Omega$.
- Relaţia (3.7) egalează termenii care se referă la frontiera $\partial\Omega$.
- Energia câmpului electromagnetic trebuie să fie funcţie de stare şi relaţia (3.6) îndeplineste această restricţie.

Admiţând că la câmp electromagnetic nul (B=0, D=0), energia este nulă, din relaţia (3.6) rezultă:

$$W_{em}=\int_{\Omega}\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}dv+\int_{\Omega}\frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon}dv=\int_{\Omega}\frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2}dv+\int_{\Omega}\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}dv=\int_{\Omega}\frac{\mu}{2}\mathbf{H}^2dv+\int_{\Omega}\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2dv \tag{3.8}$$

Putem spune că $W_m=\int_{\Omega}\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}dv$ este componenta magnetică a energiei câmpului electromagnetic, deoarece o găsim şi la regimul staţionar al câmpului magnetic /Partea IV/. De asemenea $W_e=\int_{\Omega}\frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon}dv$ este componenta electrică, pe care o găsim şi în electrostatică /Partea II/.

Puterea de natură electromagnetică, transferată în exterior este dată de relaţia (3.7). Ea reprezintă fluxul pe $\partial\Omega$ a vectorului:

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

cunoscut în literatură sud numele de vectorul lui Poynting.

*Observaţii.* 1. Doar întregul flux al vectorului Poynting pe suprafaţa închisă $\partial\Omega$ reprezinta transferul de putere prin această suprafaţă; nu putem afirma că, local, densitatea de putere ce se transferă prin suprafaţă este $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$.

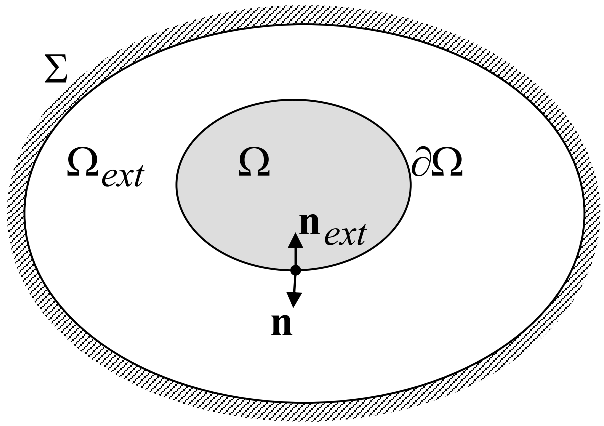

Fig.3.1. Mediu oarecare în Ω

2. Desi relaţia (3.7) a fost demonstrată pentru câmpul electromagnetic în mediile liniare şi imobile, ea este valabilă chiar dacă în Ω avem orice fel de mediu, neliniar, în miscare etc. Într-adevăr, să presupunem că domeniul Ω ar fi înconjurat de un alt domeniu $\Omega_{ext}$ (Fig.3.1) care conţine medii liniare şi imobile şi este mărginit în exterior de un perete perfect conductor ($\mathbf{E}_t = 0$). Puterea de natură electromagnetică care părăseşte domeniul $\Omega_{ext}$ prin frontiera sa este dată de relaţia (3.7):

$$P_{\partial\Omega_{ext}} = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_{ext} dS$$

si o primeste domeniul Ω. Deci puterea electromagnetică care părăseste domeniul Ω este:

$$P_{\partial\Omega} = -\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

adică chiar relaţia (3.7).

Densitatea de volum a energiei câmpului electromagnetic. Admiţând că energia este localizată volumic, cu densitatea $w_{em}$, avem:

$$W_{em} = \int_{\Omega} w_{em} dv \tag{3.9}$$

Comparănd relaţiile (3.9) şi (3.8), rezultă:

$$w_{em} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} + \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} = \frac{\mu}{2}\mathbf{H}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2 \tag{3.10}$$

cu componentele magnetică şi electrică:

$$w_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} = \frac{\mu}{2}\mathbf{H}^2 \quad \text{si} \quad w_e = \frac{\mathbf{D}^2}{2\varepsilon} = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2$$

*Cazul regimurilor cuasistaţionare.* 1. În regimul cuasistaţionar, avem **D**=0 şi $\varepsilon$=0 şi suntem nevoiţi să folosim prima expresie de mai sus. Rezultă că energia câmpului electromagnetic este dată doar de componenta sa magnetică.

2. În regimul cuasistaţionar anamagnetic avem **B**=0 şi $\mu$=0. Folosind ultima expresie de mai sus, rezultă că energia câmpului electromagnetic este dată doar de componenta sa electrică.

# 4. ECUATIILE DE ORDINUL 2

Din sistemul (1.1)÷(1.5) putem obţine, prin substituţie, ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, de ordin superior, dar conţinând o singură necunoscută. Astfel, din relaţiile (1.1) şi (1.4) rezultă:

$$\frac{1}{\mu} rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Aplicând operatorul *rot* în relaţia de mai sus şi ţinând cont de relaţiile (1.2), (1.3) şi 1.5), rezultă:

$$rot\left(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{E}\right) + \sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.1)$$

Calitativ, soluţia ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale (4.1) depinde de parametrii de material $\mu$, $\sigma$, $\varepsilon$. Dacă $\sigma = 0$, adică mediul este izolant, ecuaţia (4.1) devine:

$$rot\left(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{E}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

si soluţia ei corespunde unei unde electromagnetice. Pentru valori suficient de mici ale lui $\sigma$, unda electromagnetică este amortizată. Dacă conductivitatea mediului $\sigma$ este mare, atunci ultimul termen din membrul stang al ecuaţiei (3.22) are o pondere mică şi soluţia ei corespunde difuziei câmpului electromagnetic.

Dacă mediul conductor este omogen $\sigma = ct.$, $\mu = ct.$, $\varepsilon = ct.$, densitatea de volum a sarcinii electrice tinde imediat spre 0. Din legea fluxului electric (3.5), rezultă: $\varepsilon div\mathbf{E} = 0$. Relaţia (4.1) devine:

$$rot(rot\mathbf{E}) + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

si cum $rot(rot\mathbf{E}) = grad(div\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}$, rezultă ecuaţia:

$$-\Delta\mathbf{E} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2}$$

În cazul mediilor izolante, ecuaţia (3.23) devine:

$$-\Delta\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.2'}$$

unde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (este viteza luminii în mediul analizat).

# 5. REGIMUL SINUSOIDAL

În regimul sinusoidal, toate mărimile câmpului electromagnetic sunt funcţii sinusoidale de aceeasi pulsaţie. Ţinând cont de faptul că operatoului de derivare $\frac{\partial}{\partial t}$ are ca imagine în complex înmulţirea cu $j\omega$, ecuaţiile (1.1)÷(1.5) devin :

$$rot\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{B}} \tag{5.1}$$

$$rot\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega\underline{\mathbf{D}} \tag{5.2}$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon\underline{\mathbf{E}} \tag{5.3}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \mu\underline{\mathbf{H}} \tag{5.4}$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma\underline{\mathbf{E}} \tag{5.5}$$

Relaţiile (5.1)÷ (5.5) pot fi privite ca un sistem de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute $\underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{J}}$.

Prin aplicarea operatorului *div* în relaţia (5.1), se obţine imaginea în complex a relaţiei (5.4):

$$div\underline{\mathbf{B}} = 0 \tag{5.6}$$

Legea fluxului electric este:

$$div\underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}_v \tag{5.7}$$

Legea transformării energiei din forma electromagnetică în alte forme, prin conducţie capătă forma propusă în Cap.V4, relaţiile (4.17), (4.18). Densitatea de volum a puterii active este:

$$p_a = \mathrm{Re}(\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^*) \tag{5.8}$$

iar a puterii complexe este:

$$\underline{p}_c = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* \tag{5.9}$$

În cazul unui mediu conductor linar, în care relaţia dintre $\underline{\mathbf{E}}$ şi $\underline{\mathbf{J}}$ este $\underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$, densitatea puterii complexe este egala cu densitatea de putere activa:

$$\underline{p}_c = p_a = \sigma E^2 = \rho J^2 \tag{5.10}$$

***Ecuaţiile de ordinul 2***

Din ecuaţiile (5.1)÷(5.5), se poate obţine, prin substituţie, imaginea în complex a ecuaţiei (4.1):

$$rot\left(\frac{1}{\mu} rot\underline{\mathbf{E}}\right) + j\omega\sigma\underline{\mathbf{E}} - \omega^2\varepsilon\underline{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.11}$$

Pentru medii omogene, rezultă imaginile în complex ale ecuaţiilor (4.2) şi (4.2’):

$$-\Delta\underline{\mathbf{E}} + \underline{\gamma^2 \mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.12}$$

$$-\Delta\underline{\mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.12’}$$

unde notaţia $\underline{\gamma}$ a fost propusă în Cap.I.4 (6.3), (6.4): $\underline{\gamma} = \alpha(1 + j)$ cu $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$

***Teoremă de unicitate pentru regimul sinusoidal***

Pentru a dovedi că regimul sinusoial este bine definit de ecuaţiile (5.1)÷(5.5), este necesar să dovedim că aceste ecuaţii asigură unicitatea soluţiei de câmp. Spre deosebire de ecuaţiile (3.1)÷(3.5) ce descriau evoluţia în timp a câmpului electromagnetic cuasistaţionar, ecuaţiile (5.1)÷(5.5) nu descriu un proces evolutiv şi nu se pune problema definirii unor condiţii iniţiale pentru imaginile în complex ale mărimilor câmpului. În realitate, câmpul electromagnetic (originalul) este variabil în timp, dar dependenţa de timp este sinusoidală. Această condiţie este o restricţie cel puţin la fel de tare ca şi condiţia iniţială.

Condiţiile de frontieră (CF)*: sunt date de imaginile în complex ale condiţiilor de frontieră prezentate la Cap.2.*

***Teorema 5.1.*** Ecuaţiile (5.1)÷(5.5), împreună cu condiţiile de frontieră (CF), definesc unic componentele $\left(\underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{E}}\right)$ în domeniul conductor $\Omega_c$.

*Demonstraţie.* Presupunem că două câmpuri electromagnetice distincte îndeplinesc condiţiile enunţul teoremei şi fie $\left(\underline{\mathbf{B}}_d, \underline{\mathbf{H}}_d, \underline{\mathbf{D}}_d, \underline{\mathbf{E}}_d, \underline{\mathbf{J}}_d\right)$ câmpul diferenţă. Acest câmp verifică relaţiile (5.1), (5.5) şi are condiţii de frontieră nule. Din condiţiile de frontieră rezultă:

$$\oint_{\partial\Omega}\left(\underline{\mathbf{E}}_d \times \underline{\mathbf{H}}_d^*\right)\cdot \mathbf{n}dS = \oint_{\partial\Omega}\left(\underline{\mathbf{E}}_{td} \times \underline{\mathbf{H}}_{td}^*\right)\cdot \mathbf{n}dS = 0 \tag{5.13}$$

Aplicând formula lui Gauss, avem:

$$0 = \oint_{\partial\Omega}\left(\underline{\mathbf{E}}_d \times \underline{\mathbf{H}}_d^*\right)\cdot \mathbf{n}dS = \int_{\Omega}\underline{\mathbf{H}}_d^* \cdot rot\mathbf{E}_d dv - \int_{\Omega}\underline{\mathbf{E}}_d \cdot rot\underline{\mathbf{H}}_d^* dv$$

si ţinând cont de relaţiile (5.1), (5.2), avem:

$$j\omega\int_{\Omega}\underline{\mathbf{H}}_d^* \cdot \underline{\mathbf{B}}_d dv - j\omega\int_{\Omega}\underline{\mathbf{D}}_d^* \cdot \underline{\mathbf{E}}_d dv + \int_{\Omega}\underline{\mathbf{E}}_d \cdot \underline{\mathbf{J}}_d^* dv = 0 \tag{5.14}$$

Din legea conducţiei (5.5) rezultă că $\underline{\mathbf{J}}_d^* = \sigma\underline{\mathbf{E}}_d^*$ în mediile conductoare, $\Omega_c$, şi $\underline{\mathbf{J}}_d^* = 0$ în medii izolante, $\Omega_0$. Folosind şi relaţiile constitutive (5.3), (5.4), relaţia (5.14) devine:

$$j\omega\left(\int_{\Omega}\mu H_d^2 dv - \int_{\Omega}\varepsilon E_d^2 dv\right) + \int_{\Omega_c}\sigma E_d^2 dv = 0 \tag{5.15}$$

Anulând partea reală a relaţiei (5.15) rezultă că $E_d = 0$ în $\Omega_c$. Din relaţiile constitutive (5.5) şi (5.3) rezultă $J_d = 0$ şi $D_d = 0$. Apoi, din relaţiile (5.2) şi (5.4), rezultă $B_d = 0$ şi $H_d = 0$ în $\Omega_c$. ■

*Observaţie.* Teorema de uicitate nu reuseste să afirme unicitatea câmpului electromagnetic în domniile izolante. Dacă întreg domeniul Ω este izolant, atunci rămane doar primul termen din relaţia (5.15). El arată că poate exista câmp electromagnetic sinusoidal, chiar dacă condiţiile de frontieră sunt nule. Este cazul cavităţilor rezonante.

# 6. PIERDERILE SPECIFICE INTR-UN CICLU DE HISTEREZIS (WARBURG)

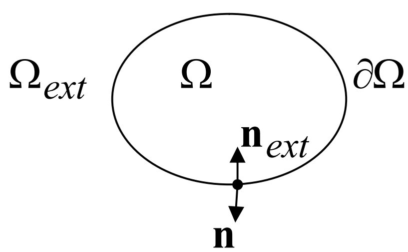


Fig.6.1. Mediu oarecare în Ω

Să presupunem că în domeniul Ω avem un mediu imobil, cu histerezis şi câmpul electromagnetic este periodic în timp. Conform relaţiei (3.18), puterea primită de domeniul Ω din exterior, prin frontiera sa ∂Ω este (Fig.6.1):

$$P_{\partial\Omega} = \oint_{\partial\Omega_{ext}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_{ext} dS = -\oint_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \tag{6.1}$$

Expresia (6.1) este valabilă indiferent de mediul care se află în Ω. Din relaţia lui Gauss rezultă:

$$P_{\partial\Omega} = -\int_{\Omega} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dv = -\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot rot\mathbf{E}\, dv + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot rot\mathbf{H}\, dv$$

Ţinând cont de legea inducţiei electromagnetice, (1.1), şi de legea circuitului magnetic, (1.2), avem:

$$P_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \tag{6.2}$$

Puterea transmisă domeniului Ω de-a lungul unei perioade $T$ este:

$$W = \int_0^T P_{\partial\Omega} dt = \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt dv + \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt dv + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv dt \tag{6.3}$$

Ultimul termen din membrul drept al relaţiei (6.3) reprezintă energia electromagnetică ce se transformă în alte forme, prin conducţie. Primii doi termeni se mai pot scrie:

$$W_H = \int_{\Omega} \left( \oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dv + \int_{\Omega} \left( \oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \right) dv \tag{6.4}$$

Relaţia (6.4) conţine două componente, magnetică şi electrică:

$$W_{H_m} = \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt dv = \int_{\Omega} \left( \oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dv \tag{6.5}$$

$$W_{H_e} = \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt dv = \int_{\Omega} \left( \oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \right) dv \tag{6.6}$$

Integrala $\oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ se face în spaţiul $oB_xB_yB_z$ (Fig.6.2), pe curba ce descrie

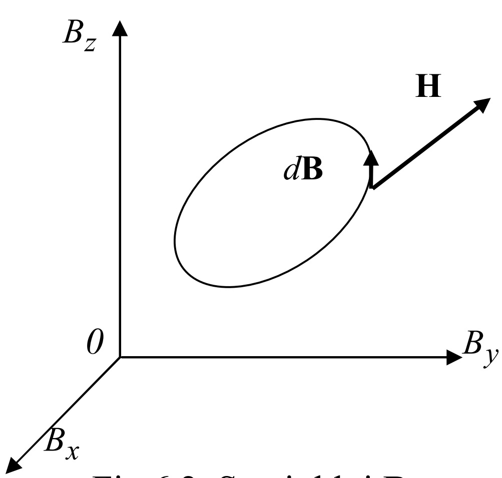


Fig.6.2. Spaţiul lui **B**.

ciclul, în fiecare punct al curbei având o valoare pentru H. Asemănător, integrala $\oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$ se face în spaţiul $oD_x D_y D_z$. Energia dată de relaţia (6.5) nu se transformă în lucru mecanic, deoarece mediile sunt imobile. Admiţând, cu usurinţă, că mediul rămane neschimbat (nu au loc transformări chimice sau atomice) şi ţinând cont că, după o periodă, mărimile câmpului electromagnetic se repetă, rezultă că energia dată de expresia (6.5) se transformă în căldură.

În cazul mediilor liniare, această energie este nulă. Într-adevăr, să luăm, de exemplu, cazul câmpului magnetic. Avem $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$ şi deci $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\right)$.

Rezultă $\int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = \frac{\mathbf{B}^2(T)}{2\mu} - \frac{\mathbf{B}^2(0)}{2\mu}$=0, datorită periodicităţii. Mai mult, chiar şi în cazul mediilor neliniare, în care este relaţia constitutivă H-B are forma algebrică H=*F*(B) şi sunt valabile relaţiile de reciprocitate $\frac{\partial H_x}{\partial B_y} = \frac{\partial H_y}{\partial B_x}$, $\frac{\partial H_y}{\partial B_z} = \frac{\partial H_z}{\partial B_y}$, $\frac{\partial H_z}{\partial B_x} = \frac{\partial H_x}{\partial B_z}$, integrala $\oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ este nulă, sau, altfel spus, integrala $\int_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ nu depinde de drum, $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ fiind diferenţială totală exactă. Este cazul în care se poate defini densitatea de volum a energiei câmpului magnetic, în regimul staţionar /Partea IV/. Integrala din expresia (6.5) poate avea valori nenule în cazul în care nu există relaţia algebrică H-B, adică în cazul mediilor cu histerezis.

Semnificaţia integralei $\oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ se poate obţine usor în cazul în care B şi H sunt paraleli, ciclul de histerezis putând fi desenat în plan (Fig.6.3). Putem scrie:

$$\oint_{ciclu} H \cdot dB = \int_{\alpha\beta} H \cdot dB + \int_{\beta\gamma} H \cdot dB + \int_{\gamma\delta} H \cdot dB + \int_{\delta\alpha} H \cdot dB \qquad (6.7)$$

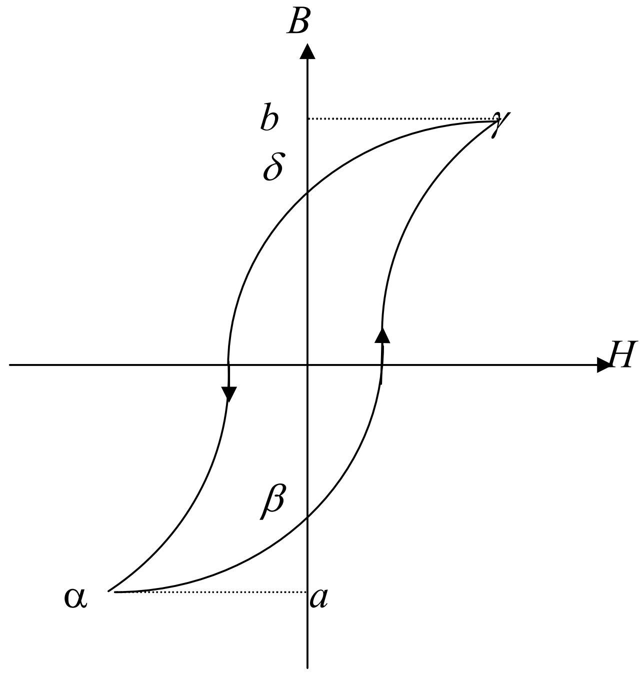


Fig.6.3. Ciclu de histerezis

Avem:

- Pe $\alpha\beta$: $H<0$, $dB>0$ şi rezultă $\int\limits_{\alpha\beta} H\cdot dB = -S_{\alpha a\beta}$;
- Pe $\beta\gamma$: $H>0$, $dB>0$ şi rezultă $\int\limits_{\beta\gamma} H\cdot dB = +S_{\beta\gamma b}$;
- Pe $\gamma\delta$: $H>0$, $dB<0$ şi rezultă $\int\limits_{\gamma\delta} H\cdot dB = -S_{\gamma b\delta}$;
- Pe $\delta\alpha$: $H<0$, $dB<0$ şi rezultă $\int\limits_{\delta\alpha} H\cdot dB = +S_{\delta\alpha a}$

Rezultă că semnificaţia integralei (6.5) este aria ciclului de histerezis. De aici rezultă că orice ciclu de histerezis poate fi parcurs doar în sensul în care aria sa este pozitivă, altminteri mediul s-ar răci, dând energie electromagnetică în exterior şi putem realiza un perpetuum mobile de speţa a doua.

Putem admite că energia transformată în căldură, exprimată de relaţiile (6.4), (6.5), (6.6) este localizată volumic, cu densitătile: $w_H$, $w_{H_m}$, $w_{H_e}$. Atunci, de exemplu:

$$W_{H_m} = \int_{\Omega} w_{H_m} dv$$

şi prin comparare cu (6.5) rezultă:

$$w_{H_m} = \oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{6.8}$$

La fel:

$$w_{H_e} = \oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \tag{6.9}$$

$$w_H = w_{H_m} + w_{H_e} = \oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \tag{6.10}$$

În regimul periodic, ciclul este parcurs de $f$ ori pe secundă, unde $f$ este frecvenţa. Rezultă că pierderile specifice prin histerezis (densitatea de volum a pierderilor) sunt:

$$p_{H_m} = f \oint_{ciclu} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{6.11}$$

$$w_{H_e} = f \oint_{ciclu} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \tag{6.12}$$

Pierderile specifice sunt cu atat mai mici, cu cat aria ciclului de histerezis este mai mică. Această proprietate este urmărită, în cazul câmpului magnetic, la mediile feromagnetice moi, unde dorim să avem pierderi cat mai mici. În alte cazuri, dorim să avem pierderi mari, realizând astfel încălzirea mediului în volumul său. Este cazul dielectricilor, unde mărirea pierderilor se face prin cresterea frecvenţei (cuptoare de microunde, sau încălzire în radiofrecvenţă).

| | |
|---|---|
| Filename: | curs 17-12-05var0 |
| Directory: | D:\Dell\catedra\2023\ETTI23 |
| Template: | C:\Users\hantila\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dot |
| Title: | 3.2.4. Energia ]i concep\ia câmpului magnetic |
| Subject: | |
| Author: | Unknown |
| Keywords: | |
| Comments: | |
| Creation Date: | 22.05.2024 9:01 p.m. |
| Change Number: | 3 |
| Last Saved On: | 22.05.2024 9:02 p.m. |
| Last Saved By: | hantila |
| Total Editing Time: | 7 Minutes |
| Last Printed On: | 22.05.2024 9:02 p.m. |
| As of Last Complete Printing | |
| Number of Pages: | 17 |
| Number of Words: | 3,438 (approx.) |
| Number of Characters: | 19,942 (approx.) |