3. ENERGII ŞI FORŢE ÎN CÂMP MAGNETIC

3.1. Energia câmpului magnetic

Fie un sistem de *n* spire perfect conductoare parcurse de curenţii i_k şi având fluxurile φ_k (Fig.3.1). Mediul din jurul spirelor este perfect izolant. Peretele incintei este perfect conductor.

Pentru a creşte curenţii spirelor şi energia din incintă, introducem în fiecare spiră o sursă ideală de tensiune. Puterea debitată de sursă conduce la apariţia curenţilor i_k şi a fluxurilor φ_k, deci conduce la apariţia câmpului magnetic în domeniul Ω din afara spirelor. Fie o curbă Γ_k ce trece prin interiorul părţii perfect conductoare a spirei *k* şi se închide pe la bornele sursei. Aplicăm pe această curbă închisă legea inducţiei electromagnetice:

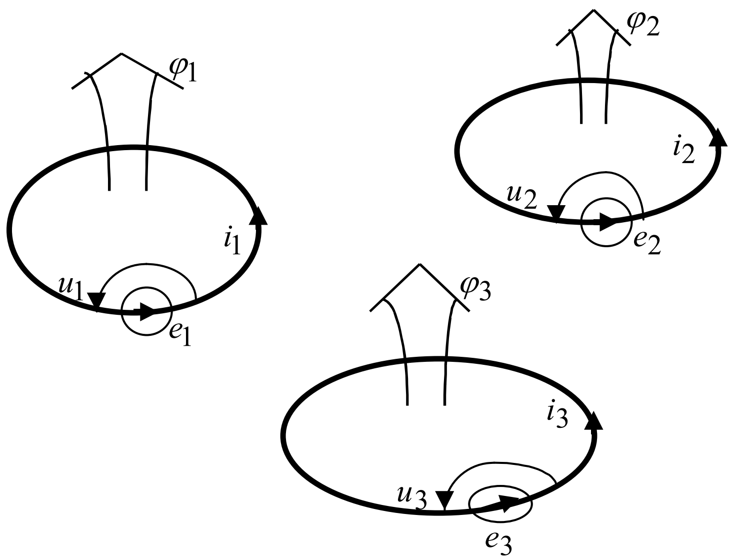

Fig. 3.1. Energie primită de sistemul format din spire şi câmp magnetic.

$$\oint_{\Gamma_k} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{interior} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \int_{borne} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0 - u_k = -\frac{d\varphi_k}{dt}$$

Puterea debitată de sursă este:

$$p_k = u_k i_k = i_k \frac{d\varphi_k}{dt}$$

Energia pe care o primeşte sistemul format din spire şi din câmpul magnetic este deci:

$$dW = \sum_{k=1}^{n} p_k dt = \sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k = dW_m + dL \qquad (3.1)$$

Am admis ca aeasta energie acopera doar cresterea energiei campului magnetic dW_m si lucrul mecanic dL pe care-l consuma corpurile din incinta in cazul in are s-ar deplasa sub influenta fortelor de natura magnetica.

Dacă ţinem spirele imobile, atunci întreaga energie va fi dată câmpului magnetic. Presupunem că modificările termice din domeniul Ω sunt neglijabile. Atunci:

$$dW_m = \sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k \qquad (3.2)$$

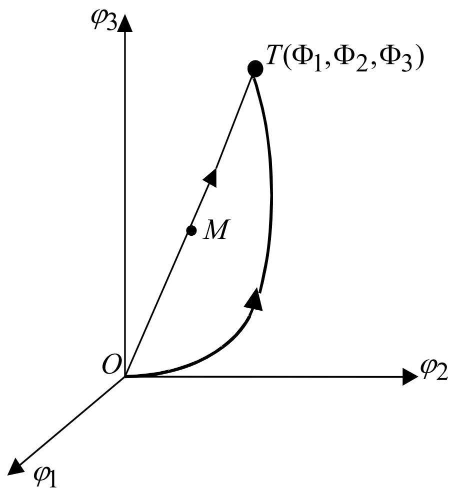

Fig. 3.2 Spaţiul stărilor $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Conform teoremei de unicitate, fluxurile spirelor definesc unic câmpul magnetic, deci ele sunt variabile de stare pentru câmpul magnetic. Curenţii i_k sunt funcţii de φ_k. Pentru a determina energia câmpului magnetic într-o anumită stare $T(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, se integrează (3.2) între starea cu energie nulă (originea de exemplu) şi punctul *T*, pe orice curbă din spaţiul stărilor (Fig. 3.2):

$$W_m(T) = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k \tag{3.3}$$

Rezultatul din relaţia (3.3) nu depinde de drum şi deci, în relaţia (3.2), avem o diferenţială totală exactă.

În cazul mediilor liniare, cel mai comod drum de integrare este segmentul *OT*, unde un punct oarecare *M* are coordonatele $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \lambda(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, cu $\lambda \in [0,1]$. Dacă în punctul *T* avem curenţii electrici (I_1, I_2, I_3), atunci în punctul *M* avem $(i_1,\ i_2,\ i_3)=\lambda(I_1, I_2, I_3)$. Rezultă $i_k = \lambda I_k$, $d\varphi_k = \Phi_k d\lambda$ şi integrala (3.3) devine

$$W_m(T) = \int_0^1 \sum_k \lambda I_k \Phi_k d\lambda = \sum_k I_k \Phi_k \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Deci

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k \tag{3.4}$$

3.2. Coenergia câmpului magnetic

Prin definiţie, variaţia de coenergie este:

$$dW_m^* = d\left(\sum_{k=1}^{n} i_k \varphi_k \right) - dW_m \tag{3.5}$$

Ţinând cont de (3.2) şi dezvoltând diferenţiala sumei din membrul drept, rezultă:

$$dW_m^* = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k di_k \tag{3.6}$$

Conform teoremei de unicitate, curenţii spirelor definesc unic câmpul magnetic, deci şi aceştia pot fi consideraţi variabile de stare. Fluxurile spirelor φ_k sunt funcţii de i_k (relaţia (2.2)). Pentru a determina coenergia câmpului magnetic într-o anumită stare $T(I_1, I_2, I_3)$, se integrează (3.6) între starea de coenergie nulă şi punctul T, pe orice curbă din spaţiul stărilor (i_1, i_2, i_3):

$$W_m^* = \int_o^T \sum_k \varphi_k di_k \tag{3.7}$$

Rezultatul integralei (3.7) nu depinde de drum. În cazul mediilor liniare, cel mai comod drum de integrare este segmentul OT, unde un punct oarecare M are coordonatele $(i_1,\ i_2,\ i_3) = \lambda(I_1, I_2, I_3)$, cu $\lambda \in [0,1]$. Dacă în punctul T avem fluxurile magnetice (Φ_1, Φ_2, Φ_3), atunci în punctul M avem fluxurile $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ $= \lambda(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Rezultă $\varphi_k = \lambda\Phi_k$, $di_k = I_k d\lambda$ şi integrala (3.7) devine:

$$W_m^*(T) = \int_0^1 \sum_k \lambda I_k \Phi_k d\lambda = \sum_k I_k \Phi_k \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Deci:

$$W_m^* = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k \tag{3.8}$$

Se observă că în cazul mediilor liniare energia este egală cu coenergia.

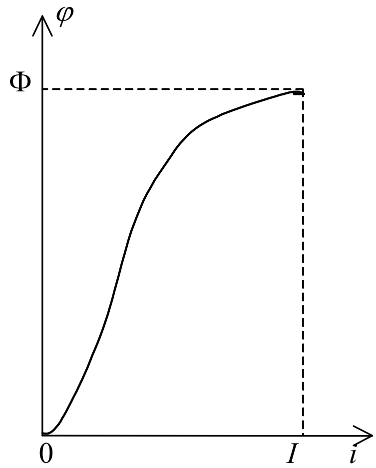

Fig.3.3. Relaţia *φ-i* pentru o spiră în mediu neliniar.

Exemplul 1

Energia şi coenergia câmpului magnetic al unei spire. Să presupunem că relaţia dintre fluxul magnetic şi curentul electric al spirei este neliniară (Fig.3.3). Energia câmpului magnetic pentru fluxul Φ al spirei este (3.3):

$$W_m = \int_0^\Phi i d\varphi$$

Valoarea energiei câmpului magnetic este dată de aria suprafeţei cuprinsă între grafic şi axa *oφ*.

Coenergia câmpului magnetic este (3.7):

$$W_m^* = \int_0^I \varphi di$$

Valoarea coenergiei câmpului magnetic este dată de aria suprafeţei cuprinse între grafic şi axa *oi*.. In cazul mediului liniar, avem:

$$W_m = W_m^* = \frac{1}{2}\Phi I = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \tag{3.9}$$

Exemplul 2

Energia şi coenergia câmpului magnetic a două spire cuplate magnetic. Presupunem că mediul este liniar. Atunci, conform relaţiilor (3.4) şi (3.8), avem:

$$W_m = W_m^* = \frac{1}{2}(\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2) \tag{3.10}$$

Dacă ţinem cont de relaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi (2.2), atunci avem:

$$W_m = W_m^* = \frac{1}{2}(L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2) + L_{12} I_1 I_2 \tag{3.11}$$

Primul termen din membrul drept se mai numeşte energie (coenergie) magnetică proprie:

$$W_{m_p} = W_{m_p}^* = \frac{1}{2}(L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2)$$

în timp ce al doilea se numeşte energie (coenergie) magnetică de interacţiune:

$$W_{m_i} = W_{m_i}^* = L_{12} I_1 I_2$$

Simetria matricei inductivitatilor

Deoarece relaţia (3.6) este o diferenţială totală exactă, sunt valabile relaţiile:

$$\varphi_k = \frac{\partial W_m^*}{\partial i_k} \quad \text{şi} \quad \varphi_j = \frac{\partial W_m^*}{\partial i_j} \tag{3.12}$$

Relatiilor dintre curentii si fluxurile magnetice ale spirelor (2.2) sunt:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_j, \qquad k=1,2,...,n \tag{2.2}$$

Deci

$$L_{kj} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial i_j} \text{ si } L_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial i_k} \tag{3.13}$$

Din relatiile (3.12) si (3.13) rezulta:

$$L_{kj} = L_{jk} \tag{3.14}$$

Deci, matricea inductivităţilor este simetrică.

Dacă relaţia de reciprocitate (3.14) nu este indeplinită, atunci nu poate fi definită coenergia câmpului magnetic.

3.3. Densitatea de volum a energiei şi a coenergiei

Dacă fluxurile bobinelor au o mică creştere $d\varphi_k$, atunci şi mărimile **H**,**B** din domeniul Ω au mici creşteri $\delta\mathbf{H}, \delta\mathbf{B}$. Se poate arata /1/ că variaţia densităţii de volum a energiei câmpului magnetic este:

$$\delta w_m = \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = H_x \delta B_x + H_y \delta B_y + H_z \delta Bz \tag{3.15}$$

iar densitatea de volum a energiei campului magnetic este:

$$w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} \tag{3.16}$$

In relatia (3.16) avem o integrala curbilinie de a 2-a speta, asemnatoare cu cea care defineste lucrul mechanic sau tensiunea magnetica. Spatiul pe care se face integrala are coordonatele B_x, B_y, B_z, asemanator cu spatial *xyz*, in care se defineste lucrul mechanic. Rezultatul integralei nu depinde de drum, in caz contrar, densitatea de energie a campului magnetic nu poate fi definita. Deci integrantul $\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}$ este diferentiala totala exacta.

Variaţia densităţii de volum a coenergiei câmpului magnetic se defineste prin

$$\delta w_m^* = \delta(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) - \delta w_m \tag{3.17}$$

si tinand cont de (3.15), rezulta:

$$\delta w_m^* = \mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H} = B_x\delta H_x + B_y\delta H_y + B_z\delta Hz \tag{3.18}$$

Fiind diferenta dintre doua diferentiale totale exacte, expresia (3.18) este tot diferentiala totala exacta. Densitatea de volum a coenergiei campului magnetic este deci:

$$w_m^* = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H}dv \tag{3.19}$$

În cazul în care mediul este liniar:

$$w_m = w_m^* = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \tag{3.20}$$

Matricea inductivităţilor (L) este pozitiv definită

Matriceal, relatiie dintre fluxurile magnetice si curentii unor spire perfect conductoare sunt $\Phi = LI$. Energia campului magnetic este data de relatia (3.4) si tinand cont de expresia densitatii de volum a energiei, in domeniul Ω avem

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_k I_k\Phi_k = \frac{1}{2}I^T\Phi = \frac{1}{2}I^T LI = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{B^2}{\mu}dv > 0$$

Deci $I^T LI$ >0.

Simetria tensorului permeabilitatii magnetice

In cazul mediilor liniare anizotrope, relatia dintre inductia magnetica **B** si intensitatea campului magnetic **H** este, intr-un system de coordinate carteziene:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{2.9c'}$$

Pentru B_x si B_y avem:

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} Hy + \mu_{xz} H_z$$

$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} Hy + \mu_{yz} H_z$$

Deci:

$$\mu_{xy} = \frac{\partial B_x}{\partial H_y} \tag{3.21}$$

si

$$\mu_{yx} = \frac{\partial B_y}{\partial H_x} \tag{3.22}$$

Deoarece (3.18) este diferentiala totale exacta, avem:

$$B_x = \frac{\partial w_m^*}{\partial H_x} \tag{3.23}$$

si

$$B_y = \frac{\partial w_m^*}{\partial H_y} \tag{3.24}$$

Introducand (3.23) in (3.21) si (3.24) in (3.22), rezulta:

$$\mu_{xy} = \frac{\partial^2 w_m^*}{\partial H_y \partial H_x} \text{ si } \mu_{yx} = \frac{\partial^2 w_m^*}{\partial H_x \partial H_y}$$

Deci $\mu_{xy} = \mu_{yx}$.

3.4. Forţe generalizate în câmp magnetic

Vom proceda la fel ca în cazul forţelor generalizate de natură electrică. Pentru a calcula forţele ce se exercită asupra unui corp în câmp magnetic, lăsăm acel corp să se deplaseze în direcţia forţei pe o mică distanţă δx şi determinăm lucrul mecanic astfel obţinut (Fig.3.4). Energia pe care o primeşte sistemul format din câmp magnetic şi corpuri este dată de relaţia (3.1). Ea se consumă atât pentru creşterea energiei câmpului magnetic, cât şi pentru lucrul mecanic efectuat de corpuri în deplasarea lui:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k = dW_m + F_x \delta x \tag{3.25}$$

Dacă impunem ca, în timpul deplasării corpului, ca fluxurile spirelor să fie constante, avem:

$$F_x = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{\substack{\varphi_k = ct \\ k=1,2,\ldots,n}} \tag{3.26}$$

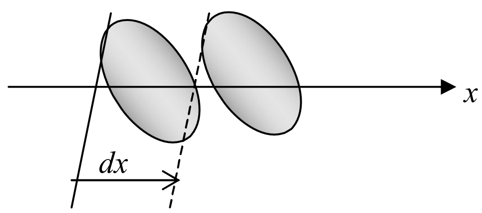

Fig. 3.4. Mică deplasare pe direcţia *x*.

Observaţii: a) În relaţia (3.26), F_x şi dx pot fi orice cuplu de mărimi al căror produs este lucru mecanic. De exemplu:

forţă inerţială - deplasare, cuplu - unghi, presiune - volum etc. Din acest motiv, F_x se numeşte forţă generalizată, iar *dx*, coordonată generalizată. Relaţia (3.26) se numeşte prima formulă a forţelor generalizate în câmp magnetic.

b) În relaţia (3.26), energia câmpului magnetic apare ca funcţie de variabilele de stare φ_k. Coordonata generalizată *x* apare ca parametru.

c) Condiţia ca fluxurile spirelor φ_k să fie constante este o condiţie teoretică. Dar ea este îndeplinită pentru spire perfect conductoare. Într-adevăr, oricare ar fi suprafaţa S_k cu bordura ∂S_k pe suprafaţa spirei *k*, din legea inducţiei electromagnetice rezultă că:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = -\oint_{\partial S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

deoarece în mediul perfect conductor **E=0**.

În relaţia (3.25), inlocuim energia cu coenergia folosind relaţia (3.5) şi obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k = d\left(\sum_{k=1}^{n} i_k \varphi_k \right) - dW_m^* + F_x \delta x$$

dezvoltand diferentiala $d\left(\sum_{k=1}^{n} i_k \varphi_k \right)$ si simplificand suma $\sum_{k=1}^{n} i_k d\varphi_k$, rezulta

$$0 = -dW_m^* + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k di_k + F_x \delta x$$

Dacă impunem ca, în timpul deplasării corpului, curenţii spirelor să fi constanţi, avem:

$$F_x = \left. \frac{\partial W_m^*}{\partial x} \right|_{\substack{i_k = ct \\ k = 1,2,\dots,n}} \tag{3.27}$$

Observaţii: a) Relaţia (3.27) este a doua formulă a forţelor generalizate în câmp magnetic.

b) În relaţia (3.27), coenergia câmpului magnetic apare ca funcţie de variabilele de stare i_k. Coordonata generalizată x apare ca parametru.

c) Condiţia de a avea curenţii spirelor i_k constanţi este o condiţie teoretică. Practic, ea poate fi îndeplinită dacă plasăm în fiecare spiră o sursă de curent.

Observatie. In Partea VI se va arata ca fortele in camp magnetic se pot determina usor determinand fluxul tensorului Maxwell pe o suprafata inchisa ce inconjoara corpul asupra caruia se exercita forta. Utilizarea tensorului Maxwell nu necesita determinarea energiei campului magnetic si nu este necesara derivarea in raport cu coordonata x. In calculele numerice, determinarea derivatelor este dificila.

4. CIRCUITE MAGNETICE

Una din cele mai simple şi eficiente metode de a aprecia câmpul magnetic într-o instalaţie electrotehnică este de a adopta, atunci când este posibil, un model de circuit magnetic, care poate fi uşor analizat prin metodele utilizate la circuitele de curent continuu. Procedura permite obţinerea rapidă a unor rezultate calitative necesare dimensionării instalaţiilor. Din păcate, de multe ori, aproximările făcute prin adoptarea modelului de circuit magnetic sunt destul de grosolane şi atunci, pentru o analiză mai fină a câmpului magnetic, sunt folosite metode numerice mai sofisticate. O analiză detaliată a acestor metode nu intră în obiectivele acestui curs.

4.1. Latura de circuit magnetic

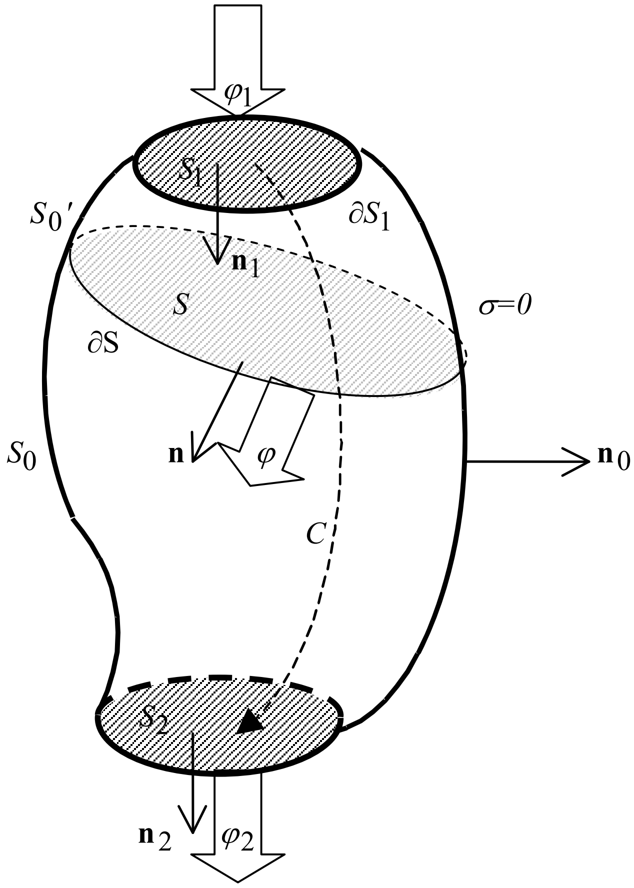

Fig. 4.1. Latură de circuit magnetic.

Fie un domeniu Ω, fără curent electric ($\mathbf{J}$=0), cu frontiera $\partial\Omega$ (Fig.4.1), unde câmpul magnetic ($\mathbf{B}$,$\mathbf{H}$) verifică următoarele condiţii de frontieră:

(α) pe suprafeţele disjuncte $S_1, S_2 \subset \partial\Omega$, componenta tangenţială a intensităţii câmpului magnetic **H** este nulă;

(β) pe restul frontierei S_0, componenta normală a inducţiei magnetice **B** este nulă.

Domeniul conductor Ω cu condiţiile de frontieră (α), (β) se numeşte **latură de circuit magnetic**.

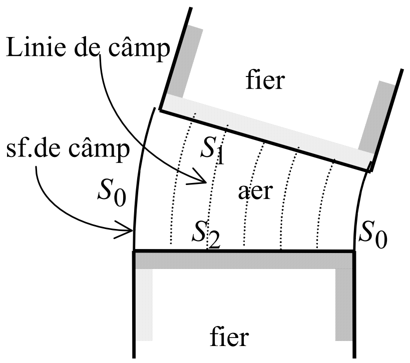

Fig.4.2. Întrefier.

Observaţii: a) Din punct de vedere tehnic, condiţia de frontieră (α) poate fi realizată atunci când suprafeţele S_1, S_2 învecinează domeniul Ω cu un mediu mult mai bun conductor magnetic decât cel din Ω

($\mu_{ext} >> \mu_{\Omega}$), sau când structura studiată ne permite să admitem, apriori, că aceste suprafeţe sunt ortogonale pe **H** (pot fi considerate suprafeţe echipotenţiale). Un exemplu din prima categorie ar putea fi marginile feromagnetice ale unui întrefier (Fig.4.2). Un exemplu din a doua categorie ar putea fi secţiunile transversale "ortogonale" dintr-un tub de flux (Fig.4.3).

b) Din punct de vedere tehnic, condiţia de frontieră (β) poate fi realizată atunci când suprafaţa S_0 învecinează domeniul Ω cu un mediu mult mai slab conductor magnetic decât cel din Ω ($\mu_{ext} << \mu_{\Omega}$) sau când structura studiată ne permite să admitem, a priori, că aceste suprafeţe sunt suprafeţe de câmp pentru **B**. Un exemplu din prima categorie ar putea fi marginile ce învecinează o piesă feromagnetică (Fig.4.3) de aerul din jurul ei. Un exemplu din a doua categorie ar putea fi marginile unui tub de flux (Fig.4.2).

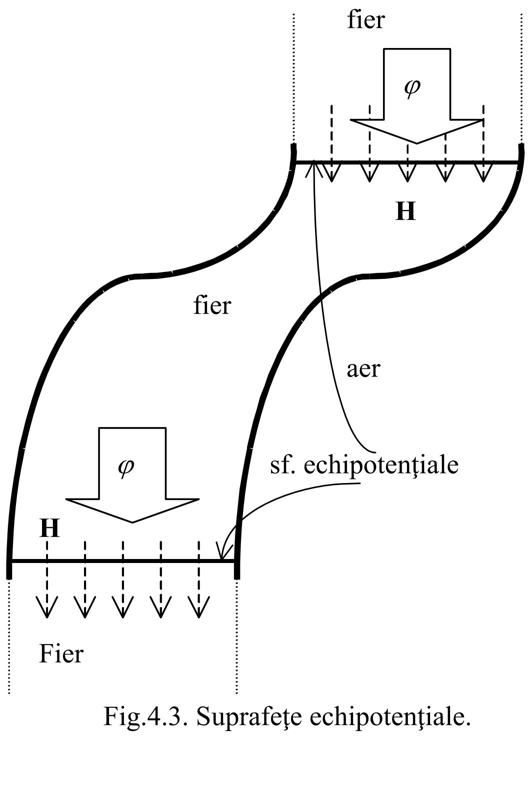

Fig.4.3. Suprafeţe echipotenţiale.

c) Deoarece în Ω avem *rot***H**=0, rezultă că este valabilă teorema potenţialului magnetic scalar V_m. Din condiţia de frontieră (α), rezultă că suprafeţele S_1, S_2 sunt echipotenţiale magnetic. Ele se numesc borne. Notăm cu V_{m1} şi V_{m2} potenţialele bornelor.

d) Este bine definită tensiunea magnetică a laturii de circuit magnetic u_m ca fiind tensiunea magnetică pe orice curbă *C* care leagă cele două borne. Avem:

$$u_m = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = V_{m1} - V_{m2}$$

e) Este bine definit fluxul magnetic al laturii de circuit magnetic, numit *flux fascicular*, ca fiind fluxul magnetic prin orice secţiune transversală S a laturii de circuit magnetic. Într-adevăr, fie suprafaţa închisă $\Sigma = S_1 \cup S \cup S_0'$, unde S_0' este porţiunea din suprafaţa S_0 mărginită de bordurile ∂S_1 şi ∂S ale suprafeţelor S_1 şi, respectiv, S (Fig.4.1). Din legea fluxului magnetic, aplicată acestei suprafeţe, rezultă:

$$-\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_0 dS = 0$$

Ţinând cont de condiţia de frontieră (β), rezultă:

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

sau:

$$\varphi_1 = \varphi$$

În particular, dacă $S = S_2$, atunci:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

Reluctanţa laturii de circuit magnetic. Conform teoremei de unicitate a câmpurilor staţionare (/1/ Anexa B), dacă se dă fluxul lui **B** prin una dintre suprafeţele S_1 sau S_2, adică dacă se dă fluxul fascicular φ al laturii de circuit magnetic, atunci câmpul magnetic (**B**,**H**) este unic determinat şi deci tensiunea magnetică u_m este unic determinată. Este deci bine definită funcţia:

$$\varphi \rightarrow u_m = f(\varphi) \qquad (4.1)$$

Pentru medii liniare, funcţia *f* este liniară şi relaţia (4.1) devine:

$$u_m = R_m \varphi \qquad (4.2)$$

unde R_m este reluctanţa laturii de circuit magnetic. În maniera de la Partea a III-a, Cap.2 (Rezistorul), se poate arăta că $R_m > 0$. Inversa reluctanţei se numeşte permeanţă:

$$\Lambda = \frac{1}{R_m}$$

Analogia cu rezistorul.

Comparând definiţia şi proprietăţile laturii de circuit magnetic de la acest paragraf cu definiţia şi proprietăţile rezistorului (Partea III-a, Cap.2), se văd imediat corespondenţele:

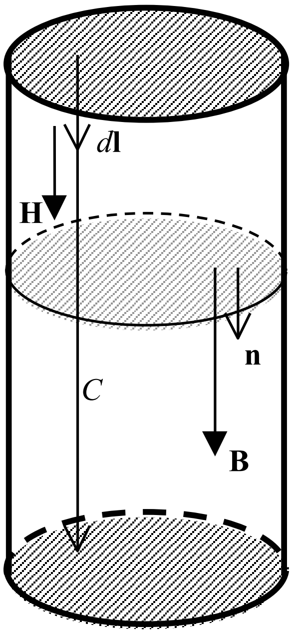

Fig.4.4. Latură de circuit magnetic

Latură de circuit magnetic	Rezistor
H	**E**
*rot***H**=0	*rot***E**=0
B	**J**
*div***B**=0	*div***J**=0
μ	σ
u_m	u
V_m	V
φ	i
R_m	R
Λ	G

Aplicaţie. În baza acestei analogii rezultă că reluctanţa unei laturi de circuit magnetic de formă cilindrică (Fig.4.4), de lungime l, cu aria secţiunii transversale A, format dintr-un mediu omogen, de permeabilitate μ este:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \tag{4.3}$$