Capitolul 5
Energii și forțe în câmp electromagnetic

5.1. Energia electromagnetică

Se numeşte energie electromagnetică termenul aditiv din expresia cea mai generală a energiei libere a unui sistem fizic, singurul care depinde numai de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic: $\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}$.

Drept *stare de referință*, față de care se calculează energia electromagnetică, se consideră, de câte ori este posibil, starea caracterizată prin *valori nule* ale acestor mărimi (Fig. 5.01).

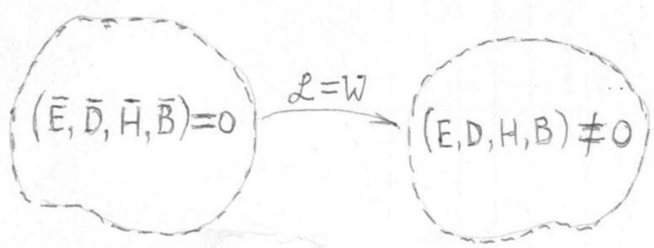


Fig. 5.01

Energia electromagnetică în noua stare considerată W corespunde unui lucru mecanic L al unor acțiuni efectuate din exterior pentru obținerea acestei noi stări.

Se numeşte *densitate de volum a energiei* limita către care tinde energia elementară a unui element de volum, când acesta tinde către zero:

$$w = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta v} = \frac{\delta W}{\delta v} \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}v}.$$

Energia totală dintr-un domeniu D se obține integrând densitatea de volum a energiei:

$$W = \int_D w \, \mathrm{d}v,$$

unde se va considera expresia densității energiei electromagnetice în funcție de mărimile de stare ale câmpului electromagnetic:

$$w = w\left(\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}\right).$$

a) Teorema energiei electromagnetice (Teorema Poynting)

Considerăm un sistem de corpuri rigide (nedeformabile) şi imobile, realizate din materiale liniare şi izotrope $\overline{D} = \varepsilon \overline{H}$, $\overline{B} = \mu \overline{H}$ incluse într-un domeniu D_Σ.

Numim:

$$\mathrm{rot}\,\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \qquad \text{- prima ecuaţie Maxwell,} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad \text{- a doua ecuaţie Maxwell.} \tag{2}$$

Bilanţul procesului energetic din unitatea de timp este:

$$\int_{D_\Sigma} \overline{E}\,\overline{J}\,\mathrm{d}v + \oint_\Sigma \overline{S}\,\mathrm{d}\overline{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_\Sigma} w\,\mathrm{d}v. \tag{3}$$

în care $\overline{S}$ este vectorul densităţii de putere prin suprafaţa Σ, numit ***vectorul Poynting***.

Densitatea de volum a puterii degajate prin efect Joule este:

$$p_J = \overline{E}\,\overline{J} = \overline{E}\,(\mathrm{rot}\overline{H} - \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}) = \overline{E}\,\mathrm{rot}\,\overline{H} - \overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}.$$

Calculăm

$$\mathrm{div}\left(\overline{E}\times\overline{H}\right) = \nabla\left(\overline{E}\times\overline{H}\right) = \overline{H}\,\mathrm{rot}\overline{E} - \overline{E}\,\mathrm{rot}\overline{H}$$

în care, conform (2), se identifică $\mathrm{rot}\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$.

Densitatea de volum a puterii degajate se mai scrie:

$$p_J = -\mathrm{div}\left(\overline{E}\times\overline{H}\right) - \left(\overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Cei doi termeni din ultima paranteză se vor calcula mai jos, astfel:

$$\overline{E}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \varepsilon\overline{E}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D}\right),$$

$$\overline{H}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \mu\overline{H}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{H}\,\overline{B}\right).$$

Bilanțul energetic din întregul domeniu considerat se obține prin integrarea relației (4)

$$\int_{D_\Sigma} p_J \mathrm{d}v + \oint_{\Sigma}\left(\overline{E}\times\overline{H}\right)\overline{\mathrm{d}A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_\Sigma}\left(\frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D}+\frac{1}{2}\overline{H}\,\overline{B}\right)\mathrm{d}v. \qquad (5)$$

Identificând această relație cu expresia din formula (3) se obține:

- Expresia vectorului Poynting: $\overline{S}=\overline{E}\times\overline{H}$ (6)
- Densitatea de volum a energiei electromagnetice: $w=\left(\frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D}+\frac{1}{2}\overline{H}\,\overline{B}\right)$, (7)

în care:

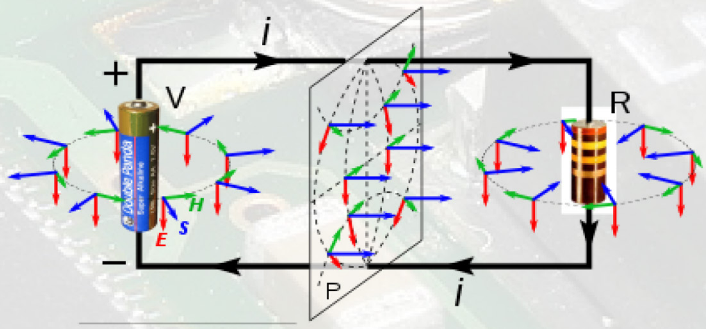
$w_e=\frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D}$ este *densitatea de volum a energiei din câmpul electric* în medii liniare

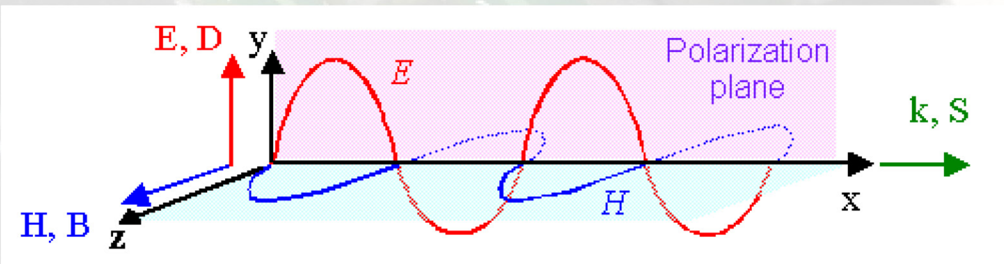
$w_m=\frac{1}{2}\overline{H}\,\overline{B}$ este *densitatea de volum a energiei din câmpul magnetic* în medii liniare.

Dacă toate sursele câmpului s-ar afla la o distanță finită, toate mărimile de stare ale câmpului s-ar anula la infinit, deoarece sunt proporționale cu $\frac{1}{r^2}$, iar potențialele cu $\frac{1}{r}$:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\overline{E},\overline{D},\overline{H},\overline{B}\right)\underset{\frac{1}{r^2}}{\to} 0$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(V,\overline{A}\right)\underset{\frac{1}{r}}{\to} 0.$$





b) Teorema Warburg

În cazul mediilor neliniare, cele patru valori de stare ale câmpului electromagnetic nu mai pot fi simultan nule. Starea de referință a câmpului electromagnetic, față de care se calculează energia, este:

$\overline{E}=0$, $\overline{D}_r \neq 0$ și $\overline{H}=0$, $\overline{B}_r \neq 0$, care sunt inducții de referință

În Fig. 5.02 se prezintă atât pentru mediul electric, cât și pentru cel magnetic, o porțiune din curba neliniară câmp – inducție, care nu trece prin originea axelor ca în medii liniare, ci taie axa ordonatelor în punctele remanente ale inducțiilor.

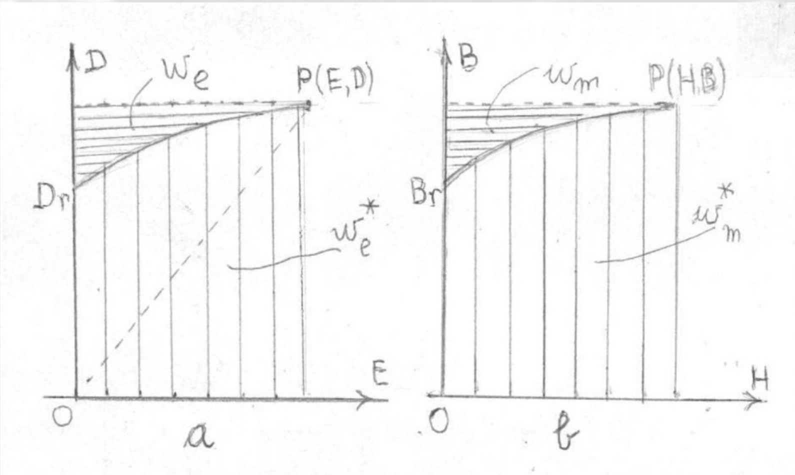


Fig. 5.02

Creşterea elementară a densității de volum a energiei electromagnetice este pentru medii izotrope $\mathrm{d}\,w=\overline{E}\,\mathrm{d}\overline{D}\,+\,\overline{H}\,\mathrm{d}\overline{B}$, iar densitatea de volum a energiei se obține prin integrare de la punctul de referință până într-un punct curent P:

$$w=\int_{ref}^{P}\mathrm{d}w=\int_{ref}^{P}\left(\overline{E}\,\mathrm{d}\overline{D}+\overline{H}\,\mathrm{d}\overline{B}\right)=\int_{ref}^{P}\left[\mathrm{d}\left(\overline{E}\overline{D}\right)-\overline{D}\,\mathrm{d}\overline{E}+\mathrm{d}\left(\overline{H}\overline{B}\right)-\overline{B}\,\mathrm{d}\overline{H}\right].$$

Considerând doar componenta câmpului electric rezultă:

$$w_e=\overline{E}\overline{D}\ \Big|_{\overline{D}_r,\overline{E}=0}^{\overline{D},\overline{E}}-\int_0^{\overline{E}}\overline{D}\,\mathrm{d}\overline{E}=\overline{E}\overline{D}-\int_0^{\overline{E}}\overline{D}\,\mathrm{d}\overline{E}$$

unde notăm $\int_0^{\overline{E}}\overline{D}\,\mathrm{d}\overline{E}=w_e^*$ ca fiind **coenergia electrică**.

Analog, pentru componenta câmpului magnetic:

$$w_m=\overline{H}\overline{B}\ \Big|_{\overline{B}_r,\overline{H}=0}^{\overline{B},\overline{H}}-\int_0^{\overline{H}}\overline{B}\,\mathrm{d}\overline{H}=\overline{H}\overline{B}-\int_0^{\overline{H}}\overline{B}\,\mathrm{d}\overline{H}$$

unde $\int_0^{\overline{H}} \overline{B}\,\mathrm{d}\overline{H} = w_m^*$ este **coenergia magnetică**.

În cazul parcurgerii complete a ciclului de histerezis electric sau magnetic (Fig. 5.03), pentru un singur parcurs al ciclului de histerezis electric (c.h.e.) sau magnetic (c.h.m.) densitățile de energie sunt:

$$\Delta w_e = -\oint_{c.h.e.} \overline{D}\mathrm{d}\overline{E} \quad \text{și} \quad \Delta w_m = -\oint_{c.h.m.} \overline{B}\mathrm{d}\overline{H},,$$

semnul minus arată că parcurgerea ciclului de histerezis este însoțită de o pierdere ireversibilă de energie calorică.

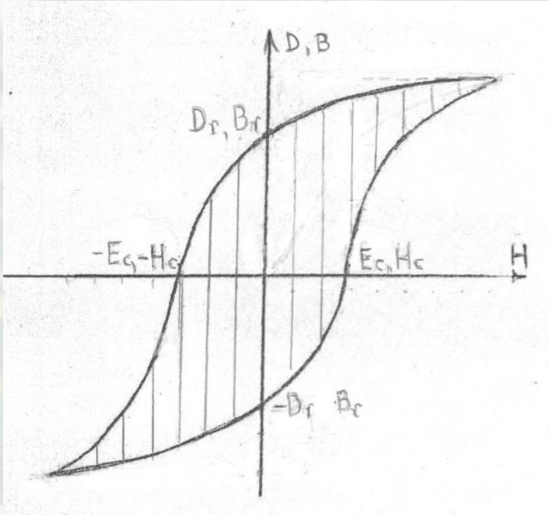


Fig.5.03

c) Puterea primită de un multipol pe la borne

Se consideră un circuit electric multipolar cu m borne de acces în regim cvasistaționar (Fig. 5.04) care alimentează un consumator situat în domeniul D_Σ mărginit de o suprafață închisă Σ.

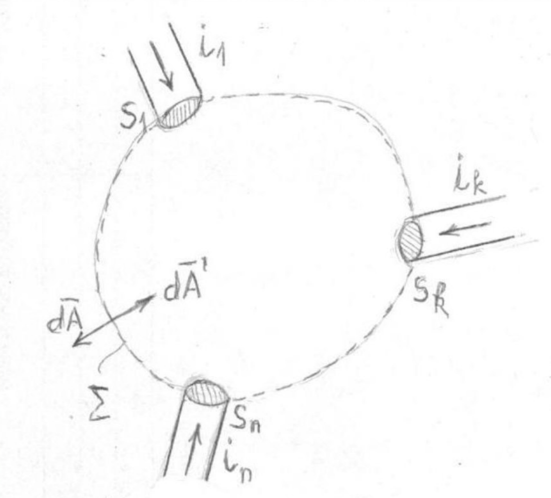


Fig5.04

Puterea primită de multipol se calculează cu ajutorul fluxului vectorului Poynting prin această suprafață pe care însă se deosebesc două tipuri de suprafețe:

- cele m secțiuni S_k conductoare, prin care pătrund curenții în domeniu
- suprafața S situată în afara lor: $S = \Sigma - \bigcup_{k=1}^{m} S_k$

Puterea prin secțiunile de intrare în D_Σ

Câmpul electric $\overline{E}_k$ este normal atât la secțiunea de intrare, cât și la câmpul magnetic circular $\overline{H}_k$ produs de curentul i_k.

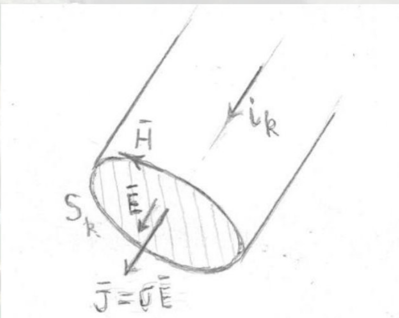


Fig. 5.05

Puterea intrată prin secțiune se calculează cu ajutorul vectorului Poynting:

$$P_k = \int_{S_k} \left(\overline{E}_k \times \overline{H}_k\right) \overline{\mathrm{d}A'},$$

în care $\overline{\mathrm{d}A'}$ este un vector arie dirijat normal spre interiorul domeniului.

Întrucât vectorii $\overline{E}_k \times \overline{H}_k$ și $\overline{\mathrm{d}A'}$ sunt perpendiculari, produsul lor scalar este nul, și deci $P_k = 0$.

Obs.: ***Prin toate secțiunile S_k și deci prin interiorul conductoarelor de alimentare, nu se transmit puteri.***

Puterea prin suprafața S

Puterea transmisă domeniului prin suprafața S a suprafeței închise Σ se calculează tot cu ajutorul vectorului Poynting, considerând înlocuirea $\overline{E} = -\mathrm{grad}V$

$$P_\Sigma = \int_S \left(\overline{E} \times \overline{H}\right) \overline{dA'} = \int_S \left(-\mathrm{grad}V \times \overline{H}\right) \overline{dA'}$$

în care $\overline{dA'} = -\overline{dA}$ este un element de arie dirijat spre interiorul suprafeței Σ.

Mărimea $-\mathrm{grad}V \times \overline{H}$ se determină din următoare formulă de calcul vectorial:

$$\mathrm{rot}\left(V\overline{H}\right) = \nabla\times\left(V\overline{H}\right) = V\left(\nabla\times\overline{H}\right) + \nabla V\times\overline{H} = V\ \mathrm{rot}\overline{H} + \mathrm{grad}V\times\overline{H}.$$

Reținem de aici termenul care urmează să fie înlocuit în expresia de mai sus a puterii:

$$-\mathrm{grad}\ V\times\overline{H} = V\,\mathrm{rot}\overline{H} - \mathrm{rot}\left(V\overline{H}\right).$$

sau, datorită faptului că suprafața S se află într-un mediu izolant, cu $\mathrm{rot}\,\overline{H} = \overline{J} = 0$ astfel încât:

$$-\mathrm{grad}\ V\times\overline{H} = -\mathrm{rot}\left(V\overline{H}\right).$$

Prin introducerea relației de mai sus în expresia puterii rezultă:

$$P_\Sigma = \int_S -\mathrm{rot}\left(V\overline{H}\right)\overline{\mathrm{d}A'} = \int_S \mathrm{rot}\left(V\overline{H}\right)\overline{\mathrm{d}A'} = \sum_{k=1}^{m} \oint_{\Gamma_k} V_k \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l_k} = \sum_{k=1}^{m} V_k \oint_{\Gamma_k} \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l_k}..$$

Dar, înlocuind cu teorema Ampère $\oint_{\Gamma_k} \overline{H}\,\overline{\mathrm{d}l_k} = i_k$, puterea cedată domeniului este:

$$P_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{m} V_k \; i_k .$$

Obs.: ***Puterea primită de multipol pe la bornele sale, este egală cu suma produsului dintre potențialele bornelor şi intensitățile curenților de conducție intrați în multipol pe la acele borne.***