Capitolul 3
Condensatoare electrice

3.7. Energia câmpului electrostatic al unui sistem de conductoare încărcate electric

Se consideră un sistem de n conductoare imobile încărcate cu sarcinile electrice Q_k plasate într-un mediu dielectric liniar şi izotrop, neîncărcat electric $\left(\rho_v = 0\right)$ infinit extins (Fig. 5.06).

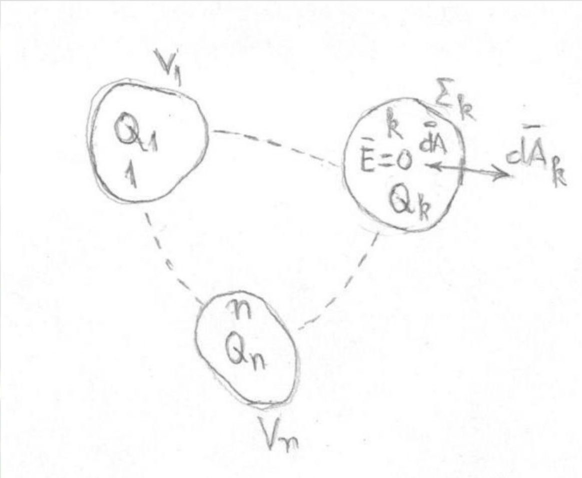


Fig. 5.06

Se integrează densitatea de volum a energiei electrice (expresia analitică se va demonstra în capitolul 5 al cursului, în cadrul analizei Teoremei energiei electromagnetice (*Teorema Poynting*)) în care se înlocuieşte câmpul electric cu gradientul cu semn schimbat al potenţialului

$$w_e = \frac{1}{2}\overline{E}\,\overline{D} = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{grad}\,V\right)\overline{D}$$

Pe altă parte, $\mathrm{div}\left(V\,\overline{D}\right) = V\,\mathrm{div}\,\overline{D} + \overline{D}\,\mathrm{grad}\,V = \overline{D}\,\mathrm{grad}\,V,$ deoarece mediul fiind neîncărcat $\mathrm{div}\,\overline{D} = \rho_v = 0.$

Rezultă deci densitatea de volum $w_e = -\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(V\,\overline{D}\right),$ care se integrează pentru a se determina energia electrică W_e din întregul spaţiul D_∞ :

$$W_e = \int_{D_\infty} w_e \mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\int_{D_\infty} \mathrm{div}(V\overline{D})\mathrm{d}V = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k} V\,\overline{D}\overline{\mathrm{d}A'}_k - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_\infty} V\,\overline{D}\overline{\mathrm{d}A}$$

Dar, ultima integrală este nulă deoarece V este proporțional cu $1/r$ iar D cu $1/r^2$.

Înlocuind elementul de arie $-\overline{\mathrm{d}A'_k}$ dirijat înspre interiorul lui Σ_k cu $\overline{\mathrm{d}A_k}$ dirijat spre exterior, rezultă:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k} V\,\overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A_k} \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oint_{\Sigma_k}\overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A_k}$$

Dar $\oint_{\Sigma_k}\overline{D}\,\overline{\mathrm{d}A_k} = Q_k$ astfel încât expresia energiei electrostatice a sistemului de n conductoare se poate exprima sub două forme particulare, care depind în ambele cazuri, de pozițiile relative în spațiu ale conductoarelor (descrise prin x_i, coordonate generalizate, $i=\overline{1,p}$ unde p este numărul de grade de libertate al sistemului de corpuri), respectiv de sarcinile electrice Q_k ale conductoarelor sau de potențialele electrostatice V_k ale acestora:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{kj} Q_j Q_k = W_e\left(x_1,\ldots,x_p;Q_1,\ldots,Q_n\right) \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{kj} V_j V_k = W_e\left(x_1,\ldots,x_p\,;V_1,\ldots,V_n\right) \end{cases}$$

în care s_{kj} sunt coeficienți de potențial care depind de geometria sistemului de conductoare și de proprietățile de material ale mediului, iar c_{kj} sunt coeficienții de influență electrostatică.

Energia înmagazinată între armăturile unui condensator plan (Fig. 5.07)

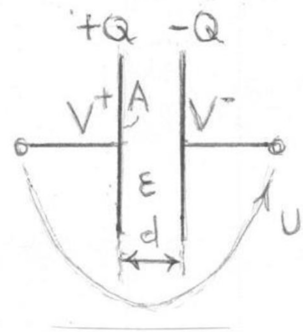


Fig. 5.07

Aplicând formulele prezentate mai sus, energia electrică a condensatorului plan (cu dimensiunile din figură) este:

$$W_e = \frac{1}{2}\left(QV^{+} - QV^{-} \right) = \frac{1}{2} Q\,U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

iar capacitatea lui, $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon E\, A}{E\, d} = \dfrac{\varepsilon A}{d}$

3.8. Teoremele forțelor generalizate în câmp electric

Se consideră un sistem de n conductoare încărcate cu sarcinile electrice q_k și având potențialele electrice V_k, situate într-un mediu dielectric, neîncărcat electric, infinit extins.

Configurația geometrică a sistemului poate fi caracterizată complet cu ajutorul a p variabile scalare corespunzătoare gradelor de libertate ale sistemului. Pentru modificarea unei coordonate generalizate x_j, trebuie să acționeze o componentă a unei forțe generalizate X_j, care necesită un lucru mecanic elementar:

$$\mathrm{d}L_j = X_j \mathrm{d}x_j,$$

unde X_j poate fi o forță, cuplu, tensiune superficială, presiune, iar x_j o lungime, un unghi, o suprafață, un volum. Prin însumare se obține lucrul mecanic elementar al tuturor celor p variabile:

$$\mathrm{d}L = \sum_{j=1}^{p} X_j \mathrm{d}x_j.$$

Pentru a putea încărca n corpuri cu sarcini electrice acestea trebuie să fie în legătură cu un sistem de surse prin intermediul unor conductoare filiforme (multipol). Puterea debitată de acestea este:

$$P = \sum_{k=1}^{n} V_k i_k = \sum_{k=1}^{n} V_k \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_{ext}}{\mathrm{d}t},$$

iar energia elementară primită de multipol:

$$\mathrm{d}W_{ext} = \sum_{k=1}^{n} V_k \,\mathrm{d}q_k.$$

Expresiile analitice se vor demonstra în capitolul 5 – Energii și forțe în câmp electromagnetic al cursului

Bilanțul energetic elementar al sistemului este:

$$\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}L = \mathrm{d}W_{ext}.$$

Evoluția sistemului se poate face fără aport de sarcină electrică din exterior $q_k = \mathrm{ct.}$ sau cu aport de sarcină electrică, dar în ipoteza unor potențiale electrostatice constante $V_k = \mathrm{ct.}$

a) Calculul forțelor la sarcina electrică constantă

Dacă $q_k = \text{ct.}$, atunci $\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}L = 0$, iar lucrul mecanic se face pe baza consumului de energie internă a sistemului:

$$\mathrm{d}L = -\left(\mathrm{d}W_e\right)_{q_k = ct}$$

Considerăm, în acest caz, că energia electrostatică a sistemului de corpuri conductoare se exprimă sub forma:

$$W_e = W_e\left(x_1,\ldots,x_p \;;\; q_1\ldots,q_n\right)$$

astfel încât componenta elementară a acesteia este (se consideră $\mathrm{d}q_k = 0$):

$$\mathrm{d}W_e = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial W_e}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_e}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j.$$

Rezultă *prima teoremă a forțelor generalizate în câmp electric*:

$$X_j = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right)_{q_k = \text{ct.}}.$$

b) Calculul forțelor la potențial electric constant

Dacă $V_k = \text{ct.}$, lucrul mecanic elementar considerat din exterior și utilizat pentru creșterea energiei sistemului (încărcarea cu sarcină electrică a conductoarelor) are expresia:

$$\mathrm{d}L_{ext} = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}q_k \int_{M_\infty}^{M_k} \overline{E}\,\overline{\mathrm{d}l} = \sum_{k=1}^{n} V_k\,\mathrm{d}q_k = \mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k\,q_k\right) - \sum_{1}^{n} q\mathrm{d}V_k,$$

iar lucrul mecanic al forțelor generalizate se pot scrie sub forma:

$$\mathrm{d}L_{ext} = \mathrm{d}L_{\text{int}} + \mathrm{d}W_e = \sum_{j=1}^{p} X_j\,\mathrm{d}x_j + \mathrm{d}W_e.$$

Prin egalarea celor două relații avem:

$$\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k\,q_k\right) - \mathrm{d}W_e = \sum_{k=1}^{n} q_k\,\mathrm{d}V_k + \sum_{j=1}^{p} X_j\,\mathrm{d}x_j,$$

dar

$$\mathrm{d}\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k\right) - \mathrm{d}W_e = \mathrm{d}W_e^{*},$$

în care W_e^{*} este *coenergia* sau *energia complementară*.

Aceasta este egală cu: $W_e^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k - W_e$.

Deoarece $V_k = \text{ct.}$ atunci $\mathrm{d}V_k = 0$, rezultă $\mathrm{d}W_d^{*} = \sum_{j=1}^{p} X_j \mathrm{d}x_j$.

Coenergia poate fi exprimată funcție de potențiale electrostatice și de coordonatele generalizate sub forma $W_e^{*} = W_e^{*}\left(x_1,\ldots,x_p;V_1,\ldots,V_n\right)$.

Componenta elementară a acesteia este:

$$\mathrm{d}W_e^{*} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial W_e^{*}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W_e^{*}}{\partial V_k}\mathrm{d}V_k,$$

dar, deoarece $\mathrm{d}V_k = 0$, rezultă *a doua teoremă a forțelor generalizate în câmp electric*:

$$X_j = \left(\frac{\partial W_e^{*}}{\partial x_j}\right)_{V_k=\text{ct.}}.$$

Pentru mediile liniare $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$, rezultă:

$$W_e^{*} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} V_k\, q_k = 2W_e - W_e = W_e$$

Obs.:

- Într-o stare dată forțele sunt unice
- Semnul rezultatului unic obținut indică sensul de variație al forței. Dacă rezultatul este pozitiv, rezultă că forța acționează în sensul creșterii coordonatei generalizate.

Aplicații

1) Determinarea forței de atracție dintre armăturile unui condensator plan (Fig. 5.18).

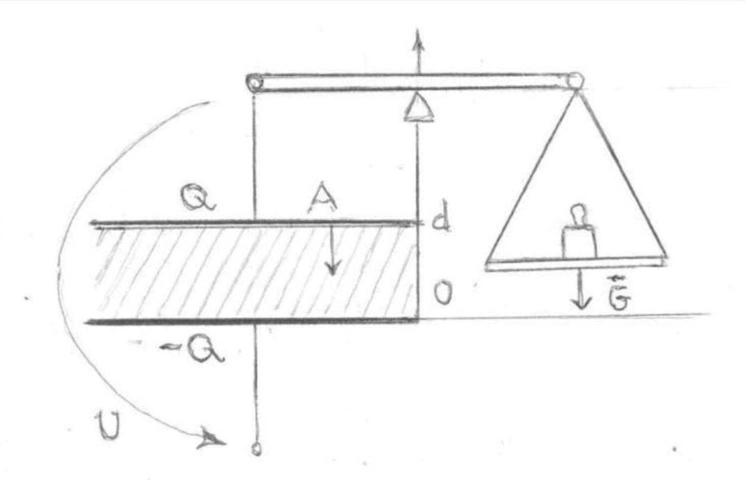


Fig.5.18

Din cele trei forme ale energiei electrice ale unui condensator plan utilizăm forma $W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$,

în care $C = \frac{\varepsilon A}{d}$, unde A este aria unei plăci plane, iar d distanța dintre armături.

La sarcină electrică constantă forța se calculează astfel:

$$F_d = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial d}\right)_{Q=\text{ct.}} = -\frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}Q^2\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{1}{C}\right)\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}Q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{\partial C}{\partial d} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon A}{d^2} < 0$$

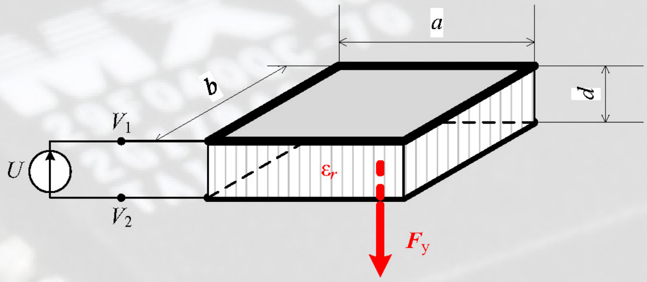
Semnul minus indică o forță de atracție.

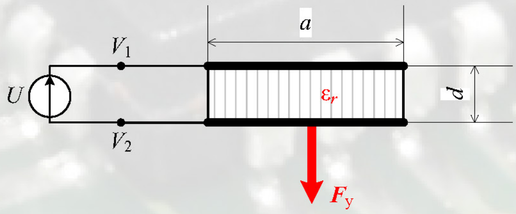
La potențial electric constant, forța se calculează astfel:

$$F_d = +\left(\frac{\partial W_e}{\partial d}\right)_{V=\text{ct.}} = \frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial d} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon A}{d^2} < 0,$$

rezultatul fiind identic cu cel anterior.

2) Se consideră un condensator plan, având dimensiunile din figură, care prezintă între armături un dielectric cu permitivitate relativă ε_r și grosime d. Armăturile condensatorului sunt conectate la bornele unei surse de tensiune U. Determinați expresia forței de tragere exercitate asupra armăturii inferioare necesare pentru desprinderea acesteia.

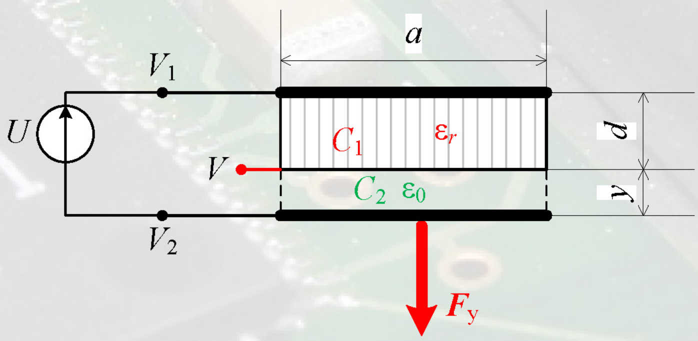


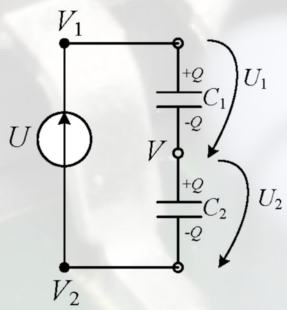


Sub acțiunea forței generalizate F_y are loc deplasarea armăturii inferioare pe distanța y (devine coordonată generalizată).

Se observă că între armătura inferioară și blocul dielectric apare un volum cu aer care este caracterizat prin permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 1$. Această zonă determină fizic un alt tip de condensator plan, care prezintă aceeași arie a armăturilor ca în configurația inițială, dar care sunt conectate la alte valori de potențial electric V (superioară), respectiv V_2 (inferioară). Această zonă determină un condensator plan notat C_2.

După deplasarea armăturii inferioare, blocul dielectric paralelipipedic va determina o configurație capacitivă cu armăturile conectate la potențialele V_1 și V. Această zonă determină un condensator plan notat C_1.





Capacitatea condensatorului cu dielectric de permitivitatea ε_r are expresia:

$$C_1 = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d},$$

iar pentru cel cu dielectric aer avem:

$$C_2 = \frac{\varepsilon A}{y} = \frac{\varepsilon_0 ab}{y}.$$

Pentru configurația capacitivă echivalentă, cele două condensatoare sunt conectate în serie astfel încât se obține:

$$\frac{1}{C_{es}(y)} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Prin calcul se determină expresia capacitații echivalente în funcție de coordonată generalizată:

$$C_{es}(y) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} \dfrac{\varepsilon_0 ab}{y}}{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} + \dfrac{\varepsilon_0 ab}{y}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} \dfrac{\varepsilon_0 ab}{y}}{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d} + \dfrac{\varepsilon_0 ab}{y}} = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab \varepsilon_0 ab}{dy}}{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r aby + \varepsilon_0 abd}{dy}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d + \varepsilon_r y}.$$

Energia electrostatică acumulată în structura capacitivă se poate scrie utilizând expresia în funcție de căderea de tensiune la borne:

$$W_e = \frac{1}{2} C_{es}(y) U^2 = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ab}{d + \varepsilon_r y}.$$

Se aplică a doua formă a teoremei forțelor generalizate, astfel încât expresia forței necesare pentru a desprinde armătura inferioară este:

$$F_y = \left(\frac{\partial W_e}{\partial y} \right)_{V_k = ct.} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C_{e\_s}(y)}{\partial y} = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r^2 ab}{(d + \varepsilon_r y)^2} < 0.$$

Valoarea negativă a forței se explică prin faptul că la alimentarea condensatorului cu tensiunea U asupra armăturii inferioare acționează o forță verticală orientată în sus ce tinde să mențină armătura lipită de blocul dielectric al condensatorului (de sens opusei celei calculate).