СВТ
Численное решение 1D-уравнения Лапласа

Арсений Е. Грознецкий

21-е марта 2025 года

Содержание

1 Постановка задачи

Требуется численно решить следующую краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0;1) \\ u(0) = a, \; u(1) = b \end{cases}$$

Для этого на отрезке $(0;1)$ вводится равномерная сетка $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, где $x_i = ih$, $h = 1/N$ - шаг сетки. Обозначив $y_i = u(x_i)$ получим дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

Уравнения образуют следующую систему:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} +2 & -1 & & & \\ -1 & +2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & +2 & -1 \\ & & & -1 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) + a/h^2 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + b/h^2 \end{bmatrix}$$

Системы с трёхдиагональными матрицами можно решать методом прогонки.

2 Прогонка

Система уравнений $Ax = F$ равносильна соотношению:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i. \tag{1}$$

Здесь A_i, B_i, C_i - элементы нижней, главной и верхней диагоналей соответственно. Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{2}$$

Тогда выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (1):

$$(A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + B_i\alpha_i + C_i)x_{i+1} + A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + B_i\beta_{i+1} - F_i = 0, \tag{3}$$

где F_i — правая часть i-го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать:

$$\begin{cases} A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + B_i\alpha_i + C_i = 0, \\ A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + B_i\beta_{i+1} - F_i = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i\alpha_i + B_i}, \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + B_i}. \end{cases} \tag{5}$$

Из первого уравнения получим:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{-C_1}{B_1}, \\ \beta_2 = \frac{F_1}{B_1}. \end{cases} \tag{6}$$

После нахождения прогонных коэффициентов α и β, используя уравнение (2), получим решение системы. При этом:

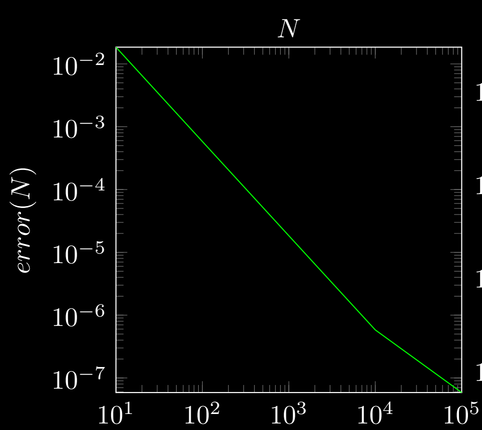
$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1. \tag{7}$$

$$x_n = \frac{F_n - A_n\beta_n}{B_n + A_n\alpha_n}. \tag{8}$$

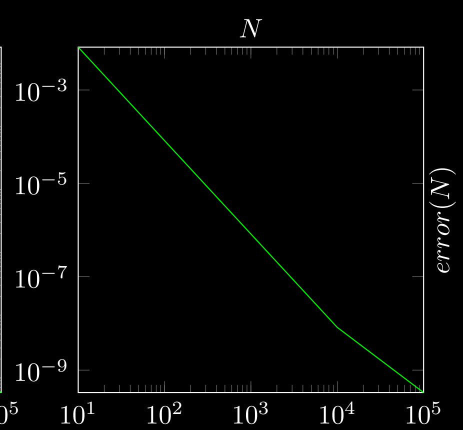
Пользуясь этим методом, решим систему при разных N.

3 Численные результаты

Задача Дирихле решалась для $u(x) = \sin(\pi x)$, то есть $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$. Резултаты экспериментов представлены на графике 1 ниже.



(a) L-2 метрика



(b) Чебышевская метрика

Рис. 1: Сходимость решения задачи Дирихле по разным метрикам.

4 Выводы

В данной задаче реализовали алгоритм решения задачи Дирихле, и убедились в его численной сходимости.