Politecnico di Torino

Homework 2 Metodi quantitativi per la gestione del rischio: Ottimizzazione di Portafoglio

Leonardo Turrisi(S290064), Giovanni Porta(S288385), Giuseppe Biagio Lapadula (S292220)

10 Agosto 2022

Modello di Ottimizzazione di Portafoglio LP

Il modello che andiamo a costruire è un modello di ottimizzazione del tipo Media-Rischio, dove in questo caso la misura di rischio è il Conditional Value at Risk di una loss(abbr. $CV@R$). L'obbiettivo del nostro modello è quello di trovare un portafoglio finanziario ottimale che vada a minimizzare il rischio e che ci dia almeno una quantità minima di ricchezza dopo un tempo di maturità, dati un insieme di asset e i loro rendimenti;questo portafoglio inoltre deve poter soddisfare un certo budget. Il modello è caratterizzato da tre componenti principali:

- Il funzionale di rischio da minimizzare, la nostra funzione obbiettivo, che all'ottimo restituirà il CV@R di una Loss.
- Una quantità minima di profitto atteso (dalla realizzazione dei fattori di rischio) inserita nei vincoli.
- I vincoli che determinano l'insieme di feasibility della soluzione.

Il nostro modello è costruito per poter essere risolto su un insieme di scenari S discreto; Gli scenari non sono altro che i returns degli asset.

Funzione Obbiettivo

Per poter parlare della funzione obbiettivo, dobbiamo prima definire la loss; in particolare, la loss in questo caso è la deviazione della ricchezza finale dalla ricchezza iniziale:

$$Loss(x; s) = W_0 - W_T(x; s)$$

Con x vettore di quantità di denaro investite negli asset, s lo scenario, W_0 budget iniziale, $W_T(x; s)$ ricchezza alla maturità.

Il $CV@R_{1-\alpha}(x)$ di $Loss(x; s)$ è calcolato in base ad un livello di probabilità scelto per gli eventi rischiosi. Noi vogliamo poter calcolare il valore atteso della Loss che supera un certo quantile al livello di probabilità $1 - \alpha$ (questo quantile è un'altra misura di rischio, il Value at Risk (abbr.$V@R(X)$).
Essendo il nostro modello basato su scenari(insieme discreto), possiamo considerare il calcolo del $CV@R_{1-\alpha}(x)$ come il calcolo del valore atteso sull'insieme degli scenari S che superano il $V@R_{1-\alpha}(X)$, che chiameremo $B(x)$. Sia

$\zeta \equiv V@R_{1-\alpha}(X)$; gli scenari hanno inoltre una probabilità di realizzarsi π_s, pertanto, per calcolare l'attesa sull'insieme $B(x; s)$:

$$CV@R_{1-\alpha}(X) = E[Loss(x; s)|s \in B(x)] = E[Loss(x; s)|Loss(x; s) > \zeta] =$$

$$= \frac{\sum_{s \in B(x)} \pi_s L(x; s)}{\sum_{s \in B(x)} \pi_s} = \frac{1}{\alpha} \sum_{s \in B(x)} \pi_s L(x; s)$$

Introduciamo la variabile ausiliaria :

$$z_s = \max\{0, Loss(x; s) - V@R_{1-\alpha}\} \quad \forall s \in S$$

Ciò ci permette di riscrivere la nostra funzione obbiettivo:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{s \in B(x)} \pi_s L(x; s) = \zeta + \frac{1}{\alpha} \sum_{s \in S} \pi_s z_s = \zeta + \frac{1}{\alpha |S|} \sum_{s \in S} z_s$$

Quindi la nostra funzione obbiettivo da minimizzare sarà:

$$F(x, z, \zeta) = \zeta + \frac{1}{\alpha |S|} \sum_{s \in S} z_s$$

Variabili decisionali

Le variabili decisionali di questo modello saranno le quantità di denaro x_i da allocare ad ogni asset per poter ottenere il portafogli ottimale. Da queste si può facilmente ricavare la quantità di asset acquistati, dividendo i valori delle variabili x_i per il prezzo iniziale dell'asset P_{0i}. Le variabili x_i possono essere non negative o possono assumere anche valori negativi, dipende se si sceglie di poter fare Short selling o meno.
Fra le variabili ottimizzate dal modello rientrano inoltre anche il ζ e le variabili ausiliarie z_s definite prima, ma ai fini delle decisioni esse non vengono utilizzate.Le variabili ausiliarie z_s sono sempre non negative.

Vincoli

Vincolo sulla ricchezza minima

Per soddisfare una quantità di ricchezza minima consideriamo il return R_{is} per l'asset i e lo scenario s:

$$\hat{R}_{iT} = \sum_{s \in S} \pi_s R_{is} \approx \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} R_{is}$$

Allora avremo il vincolo di ricchezza minima W_T^{min}:

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\hat{R}_{iT})x_i \geq W_T^{min}$$

con n asset.

Vincolo di Budget

Dato un budget iniziale di denaro W_0, noi possiamo esprimere il seguente vincolo:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = W_0$$

Vincolo di variabile ausiliaria z_s

Per come sono costruite, le variabili ausiliarie devono rispettare il seguente vincolo:

$$z_s \geq W_0 - \sum_{i=1}^{n}(1+\hat{R}_{iT})x_i - \zeta \quad \forall s \in S$$

Modello di ottimizzazione

Unendo il tutto otteniamo il seguente modello:

$$\min \zeta + \frac{1}{\alpha|S|}\sum_{s\in S} z_s$$

$$s.t$$

$$z_s \geq W_0 - \sum_{i=1}^{n}(1+\hat{R}_{iT})x_i - \zeta \quad \forall s \in S$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\hat{R}_{iT})x_i \geq W_T^{min}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = W_0$$

$$z_s \geq 0 \quad \forall s \in S$$

$$x \in X$$

Con $X = R^{n+}$ oppure $X = R^n$ e

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$CV@R$ per un portafoglio con return distribuiti secondo una normale multivariata

Nel caso in cui gli scenari degli asset provengono da una distribuzione Normale multivariata, con vettore media μ e matrice di varianza-covarianza Σ, è possibile calcolare il $CV@R$ esattamente; Infatti, ricordiamo che

$$Loss(x; s) = W_0 - \sum_{i=1}^{n}(1 + R_{is})x_i$$

con x_i quantità di moneta allocata nell'asset i.
Quindi:

- La media della loss
$$\mu_L = W_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i(1 + \mu_i)$$
- La varianza
$$\sigma_P^2 = x^T \Sigma x$$
con $\hat{R_T}$ vettore dei returns.

Quindi il $CV@R_{1-\alpha}$ per una distribuzione normale si può calcolare con la formula:

$$CV@R_{1-\alpha} = \mu_p + \frac{\sigma_p}{\alpha}\Phi(z_{1-\alpha})$$

con $\Phi(z_{1-\alpha})$ valore della densità di probabilità della normale standard valutata nel quantile del livello di probabilità $1 - alpha$.

N.B. Nell'algoritmo Matlab è implementata anche una versione che ha in sè x_i come quantità di asset i allocata, comprata al prezzo P_{0i}.