Pianificazione e Gestione Servizi Sanitari

Esercizi

Prof. Domenico Conforti – Lezione 30 – 06/12/23 – Autori/Revisionatori: Luciani e Salvati

PROBLEMA 26

Una azienda di distribuzione di dispositivi biomedicali deve rifornire i suoi grandi clienti C1, C2, C3, C4 e C5, che sono dislocati in diverse località sul territorio nazionale.

Per ottimizzare il rifornimento, l'azienda vuole costruire un numero di depositi non superiore a 2, disponendo di 3 possibili siti dove costruirli. A seconda del sito in cui vengono costruiti, i 3 possibili depositi hanno un costo di costruzione e una capacità massima diversi. La tabella che segue riporta questi costi in migliaia di euro e le capacità in tonnellate.

	Costo costruzione	**Capacità massima**
Deposito 1	***10000***	***180***
Deposito 2	***15000***	***230***
Deposito 3	***13000***	***500***

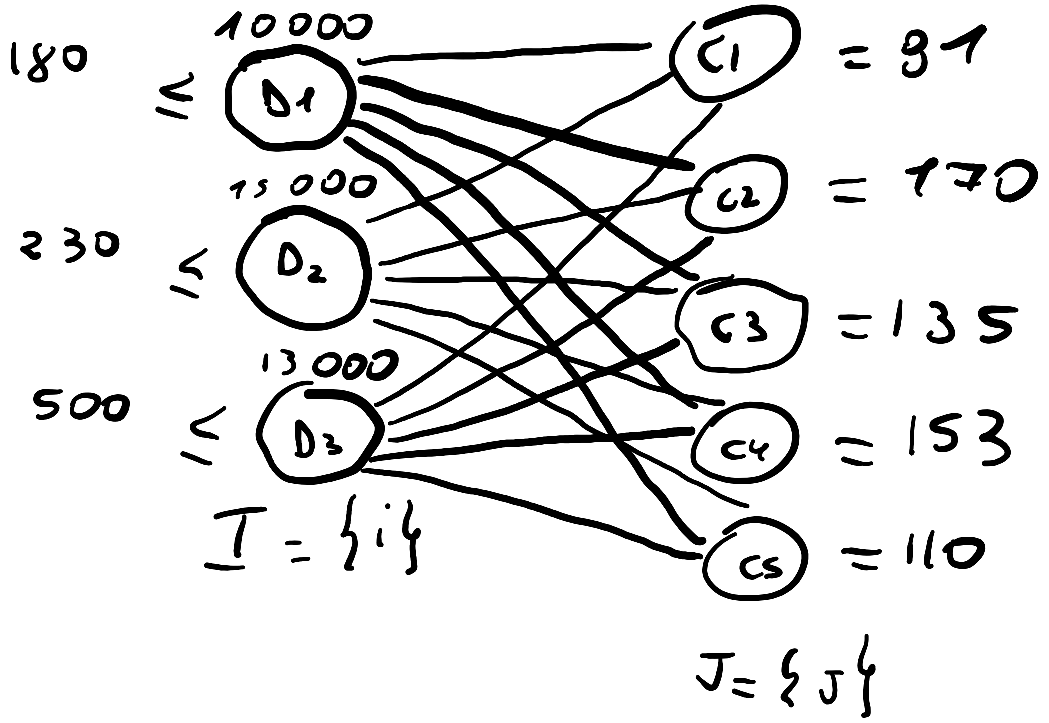
Il quantitativo di merce (in tonnellate) richiesto da ciascun cliente è riportato nella tabella che segue, insieme ai costi (in migliaia di euro) del trasporto di una unità di merce da ciascuno dei possibili depositi a ciascun cliente.

Sviluppare un modello di ottimizzazione che rappresenti il problema in analisi, per soddisfare esattamente le richieste minimizzando il costo complessivo, trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità massime di merci trasportabili.

	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**
Richiesta	***91***	***170***	***135***	***153***	***110***
Deposito 1	***15***	***13***	***27***	***9***	***7***
Deposito 2	***12***	***21***	***34***	***21***	***3***
Deposito 3	***7***	***10***	***2***	***17***	***12***

SVOLGIMENTO

Il primo passo per lo svolgimento è andare a disegnare uno schema di questo modello decisionale, andando a definire i nodi clienti e i nodi depositi:



Ciascun nodo deposito è collegato a ciascun nodo cliente e sugli archi saranno indicati i prezzi che serviranno per trasportare le merci dai depositi ai clienti. Inoltre, si vanno a definire due insiemi: l'insieme I (con indici i) che indica l'insieme dei depositi, e l'insieme J (con indici j) che indica l'insieme dei clienti.

L'obiettivo di questo problema decisionale è quello di minimizzare il costo totale di trasporto delle merci dai depositi ai clienti, trascurando la possibilità di costruire ulteriori collegamenti rispetto a quelli esistenti e supponendo che non ci siano limitazioni sulle quantità di merci trasportate.

VARIABILI DECISIONALI

Per ottimizzare questo modello, bisogna determinare:

- La localizzazione dei depositi. Infatti, come scritto nella traccia, l'azienda, rispetto ai tre siti potenziali (D1, D2 e D3), vuole costruire al massimo due di questi depositi, e una volta costruiti, vuole determinare la configurazione delle quantità di merce che verranno spedite da questi depositi ai grandi clienti. Per cui, il numero dei depositi deve essere <=2.
  La decisione di localizzazione è una decisione di natura binaria.

- Quantità di merce da trasportare dai depositi ai clienti.

Schematicamente, indicando con y_i il deposito da localizzare e con x_{ij} la merce che viene trasportata dal nodo deposito i al nodo cliente j, si può scrivere:

$$\begin{cases} y_i = \begin{cases} 1 & \text{se deposito localizzato nel nodo } i,\ i = D_1, D_2, D_3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ x_{iJ} \geq 0,\ \text{INTERO, numero di dispositivi da trasportare da } i \text{ a } J \end{cases}$$

NB. gli archi rappresentati nel grafo soprastante rappresentano i costi per traportare la merce dal deposito i al cliente j, e questo costo verrà indicato come $\mathbf{C_{ij}}$. Essendo massimo 2 i depositi che si potrebbero costruire, allora tutti gli archi costo trasporto che fanno parte di un deposito che non verrà costruito vanno poi eliminati.

FUNZIONE OBIETTIVO

La funzione obiettivo dovrà minimizzare il costo di trasporto delle merci.

$$z = 10000\, y_1 + 15\,000\, y_2 + 13\,000\, y_3 + \sum_{i,j} C_{ij}\, x_{ij}$$

Quindi, per calcolare z si indicano i costi di costruzione di ogni singolo deposito (che per D1=10000, D2=150000, D3=13000) e si moltiplica per la variabile y, di natura binaria, che varrà 1 se il deposito sarà costruito e 0 se non sarà costruito; a questi va aggiunta la sommatoria dei costi di ciascun prodotto trasportato dal deposito i al cliente j moltiplicato per la quantità di merce di quella determinata unità che andrà trasportata sempre dal deposito i al cliente j.

VINCOLI

I vincoli da rispettare sono:

- Rispettare quelle che sono le richieste dei nodi domanda. Ad ogni cliente viene consegnata la quantità esatta di merce da egli richiesta proveniente dai tre potenziali depositi:

$$\begin{cases} \sum_{i=D1}^{D3} x_{i1} = 91 \\ \sum_{i=D1}^{D3} x_{i2} = 170 \\ \sum_{i=D1}^{D3} x_{i3} = 135 \\ \sum_{i=D1}^{D3} x_{i4} = 153 \\ \sum_{i=D1}^{D3} x_{i5} = 110 \end{cases}$$

- **Condizioni sulla capacità dei depositi se costruiti**: i depositi che verranno costruiti dovranno rispettare una capacità massima della merce che possono contenere al loro interno:

$$\begin{cases} \sum_{J=C1}^{CS} x_{1J} \leq 180\, y_1 \\ \sum_{J=C1}^{CS} x_{2J} \leq 230\, y_2 \\ \sum_{J=C1}^{CS} x_{3J} \leq 500\, y_3 \end{cases} \qquad x_{iJ} \geq 0 \text{, INTERI}$$

- Il numero massimo di depositi che potranno essere costruiti sarà 2:

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \qquad y_i \in \{0, 1\}$$

PROBLEMA 28

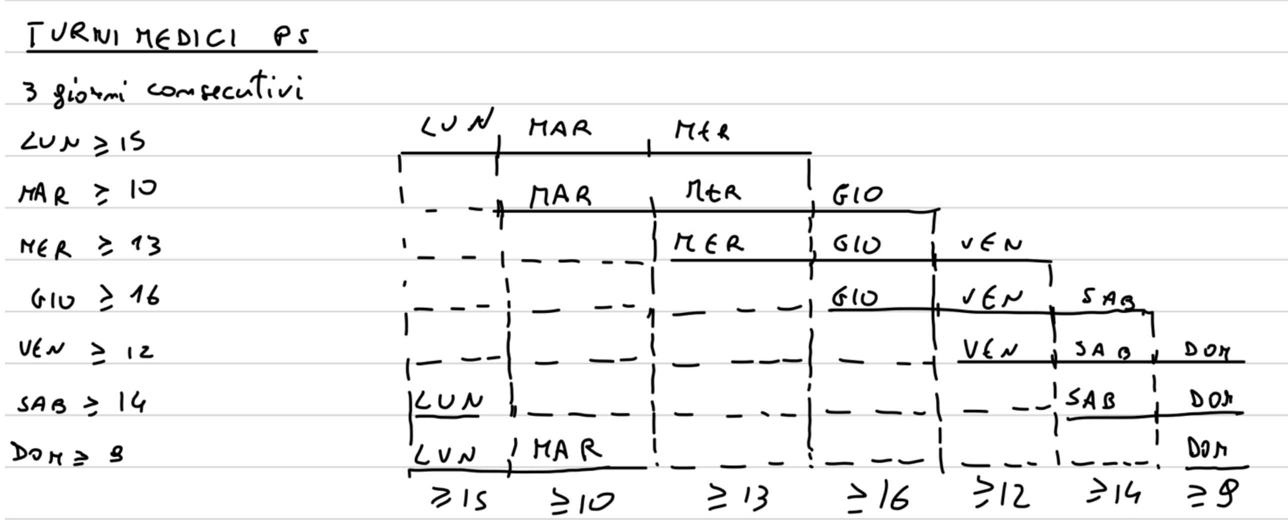
Una grande Azienda Ospedaliera deve organizzare i turni dei medici in pronto soccorso. Ogni medico deve lavorare 3 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a 1 giorno di riposo.

Al fine di garantire la qualità del servizio erogato si richiede, per i vari giorni della settimana, la presenza di almeno 15 medici il Lunedì, di almeno 10 il Martedì, di almeno 13 il Mercoledì, di almeno 16 il Giovedì, di almeno 12 il Venerdì, di almeno 14 il Sabato, e di almeno 9 la Domenica.

Si chiede di sviluppare un modello di ottimizzazione in grado di organizzare il servizio minimizzando il numero complessivo di medici da impegnare.

SVOLGIMENTO

Come scritto nella traccia, i medici devono lavorare per tre giorni consecutivi, e ogni giorno della settimana deve avere un numero minimo di medici in servizio. Per cui, si può disegnare una sorta di calendario riassuntivo dello schema decisionale da attuare:



L'obiettivo è quello di pianificare i turni minimizzando il numero complessivo di medici.

VARIABILI DECISIONALI

Le decisioni riguardano il numero di medici il cui turno inizia il giorno i della settimana. Denominando x_i la decisione da prendere, allora potremo scrivere così:

$$x_i \geq 0 \text{ , INTERI} \qquad i = \{LUN, MAR, \dots, DOM\}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

Con questa funzione si deve semplicemente minimizzare il numero di medici che lavorano ogni giorno della settimana. Per cui la funzione obiettivo sarà indicata come una sommatoria di tutti i medici che prestano servizio ogni giorno:

$$z = \sum_{i=LUN}^{DOM} x_i$$

VINCOLI

L'unico vincolo di cui bisogna tener conto è quello di rispettare il numero minimo di medici per ogni giorno della settimana. Se ad esempio si prende in considerazione il Lunedì, bisognerà considerare che in quella giornata saranno presenti i medici che iniziano il turno di lunedì, quelli che lo iniziano di sabato e quelli che lo iniziano di domenica. Per cui se diamo dei valori interi ad i, dove i=1 rappresenta il lunedì, i=2 rappresenta il martedì e così via fino ad arrivare ad i=7 che rappresenta la domenica, allora potremo scrivere:

VINCOLI	
$x_1 + x_6 + x_7 \geq 15$	LUN
$x_1 + x_2 + x_7 \geq 10$	MAR
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 13$	MER
$x_2 + x_3 + x_4 \geq 16$	GIO
$x_3 + x_4 + x_5 \geq 12$	VEN
$x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$	SAB
$x_5 + x_6 + x_7 \geq 9$	DOM

Se invece si vogliono rappresentare i vincoli sotto forma di una specie di "calendario" allora andremo a scrivere:

LUN	MAR	MER	GIO	VEN	SAB	DOM	
$x_1 +$					x_6	$+ x_7$	≥ 15
x_1	$+ x_2$					$+ x_7$	≥ 10
x_1	$+ x_2$	$+ x_3$					≥ 13
	x_2	$+ x_3$	$+ x_4$				≥ 16
		x_3	$+ x_4$	$+ x_5$			≥ 12
			x_4	$+ x_5$	$+ x_6$		≥ 14
				x_5	$+ x_6$	$+ x_7$	≥ 9

PROBLEMA 30

Il blocco operatorio di un grande ospedale è costituito da ***m*** sale operatorie uguali, in cui poter eseguire ***n*** interventi chirurgici.

L'intervento ***i***-esimo, ***i* = *1, …, n***, può essere eseguito in una qualsiasi sala e richiede un tempo di esecuzione d_i indipendente dalla stessa sala.

L'esecuzione dell'intervento ***i***-esimo viene avviata al tempo t_i; essendo d_i la sua durata, l'intervento verrà completato al tempo $t_i + d_i$.

Occorre, evidentemente, garantire che se due interventi ***i*** e ***h*** vengono assegnati alla stessa sala ***j***, allora gli intervalli $[t_i, t_i + d_i]$ e $[t_h, t_h + d_h]$ devono essere disgiunti; in altri termini, si deve avere che $t_i + d_i <= t_h$ oppure $t_h + d_h <= t_i$.

A tal fine, per ogni intervento ***i***, ***i* = *1, …, n-1***, è possibile definire l'insieme ***S(i)*** degli interventi ***h***, con ***h>i***, che sono incompatibili con esso, ovvero:

$$S(i) = \{\ h \in \{i+1, \dots, n\}\ :\ [t_i, t_i + d_i] \cap [t_h, t_h + d_h] \neq \emptyset\ \} \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \ .$$

Obiettivo operativo dell'ospedale è utilizzare il minor numero possibile di sale operatorie per eseguire gli interventi, assegnando alla stessa sala interventi i cui tempi di esecuzione non si sovrappongono, e assegnando ciascun intervento ad una e una sola sala operatoria.

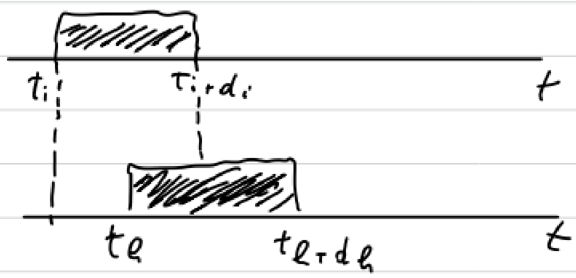
Sviluppare un modello di ottimizzazione che consenta di affrontare il problema.

SVOLGIMENTO

m OR

n INTERVENTI

$d_i = 1, 2, \dots, n$ DURATA INTERVENTO i



$t_i + d_i \le t_h \qquad t_h + d_h \le t_i$

$\forall i \quad i = 1 \quad n-1$

$S(i) \quad h, \ h > 1$ INCOMPATIBILI

$S(i) = \{ h \in \{i+1, \dots, n\} : [t_i, \ t_i + d_i] \cap [t_h, t_h + d_h] \neq \emptyset \}$ $i = 1, \dots, n-1$

L'obiettivo è, quindi, minimizzare il numero di sale operatorie da utilizzare mentre le condizioni al contorno sono relative al rispettare nell'assegnamento le incompatibilità e assegnare ogni intervento ad una e una sola sala.

VARIABILI DECISIONALI

In termini di decisioni, bisogna stabilire:

- Quale intervento ***i*** assegnare a ***ORj***
  È una decisione di tipo binaria in quanto l'intervento i viene assegnato o no alla sala j.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ASSEGNAMENTO } i \text{ a } j \\ 0 \end{cases}$$

- Utilizzo di ***ORj*** (per ridurre il numero complessivo di sale da utilizzare, bisogna discriminare quale delle n sale utilizzare)
  È un'altra decisione di tipo binaria in quanto ogni sala può essere utilizzata o meno.

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{UTILIZZO } OR_j \\ 0 \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

min

$$z = \sum_j y_j$$

VINCOLI

- Condizione di assegnamento → assegnare ogni intervento ad una e una sola sala.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

$$(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + \ldots + x_{1,m} = 1)$$

(solo uno di questi termini vale 1, tutti gli altri devono valere 0)

- Condizione di utilizzo → ha una logica uguale all'allocazione nodo domanda a nodo servizio e localizzazione nodo servizio, quindi bisogna stabilire una dipendenza logica tra la decisione di assegnamento e quella di utilizzo della sala: se la sala è assegnata, allora la si usa (se $x_{ij} = 1$, necessariamente $y_j = 1$; tuttavia, se $y_j = 1$, x_{ij} può anche valere 0 perché la sala j viene utilizzata senza avergli assegnato l'intervento i, che è stato assegnato ad un'altra sala).

$$x_{ij} \leq y_j \qquad \forall i, \forall j$$

- Condizione di incompatibilità → in una specifica sala j, gli interventi i ed h appartenenti all'insieme S(i) devono essere effettuati in intervalli disgiunti.

$$x_{ij} + x_{hj} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \quad h \in S(i) \quad \forall j$$

Le tre combinazioni possibili sono:
0 + 1 <= 1
1 + 0 <= 1
0 + 0 <= 1