

*Pianificazione e Gestione Servizi Sanitari***Problemi 5, 8 e 6**

Prof. Domenico Conforti – Lezione 8 – 11.10.2023 – Autori e Revisionatori: Luciani e Salvati

**PROBLEMA 5**

Una Azienda Farmaceutica, leader mondiale nella produzione di integratori dietetici, ha deciso di sviluppare un nuovo prodotto specifico per la dieta di pazienti diabetici, distribuito in forma granulare in confezioni da 500 gr.

Il controllo di qualità ha imposto che in ogni confezione devono essere contenuti almeno 120 gr. di vitamine, 115 gr. di proteine e 210 gr. di sali minerali. A tal fine, per la realizzazione del prodotto verranno utilizzati 3 composti di base, opportunamente miscelati.

Nella seguente tabella sono riportati il costo ed il contenuto in vitamine, proteine e sali minerali di 100 gr. di ognuno dei composti di base utilizzati.

Composto	Vitamine	Proteine	Sali Minerali	Altro	Costo
1	14	25	57	4	225
2	15	37	40	8	200
3	40	20	25	15	180

L'obiettivo dell'Azienda è determinare il mix di composti in modo tale da soddisfare i vincoli sulla qualità del prodotto e minimizzare i costi di produzione.

**Dati del problema**

INTEGRATORE CONFEZIONE 500 gr  
{ VITAMINE  $\geq 120$  gr  
PROTEINE  $\geq 115$  gr  
SALI MINERALI  $\geq 210$  gr  
3 COMPOSTI DI BASE  
COMPOSIZIONE DI 100 gr COMPOSTO

Lo scopo dell'azienda è produrre questo integratore partendo dall'avere come unità di misura le quantità di proteine, sali minerali e vitamine in 500 gr di integratore.

**MIX DI PRODOTTI PER REALIZZARE IL PRODOTTO  
MINIM. COSTO DI PRODUZIONE**

Nella tabella soprastante sono presenti anche i costi di 100 gr di ciascuno dei tre composti:

- 100 gr del composto 1 hanno un costo di 225 euro
- 100 gr del composto 2 hanno un costo di 200 euro
- 100 gr del composto 3 hanno un costo di 180 euro

Occorre quindi determinare il mix di composti per ottenere un prodotto finale tale che si ottengano le quantità minime richieste di vitamine, proteine e sali minerali, e che soprattutto si ottenga il minor costo possibile.

### DECISIONI

La decisione che bisogna prendere in questo problema è relativa alle quantità di composti 1, 2 e 3 da miscelare in 500 grammi di prodotto finale. Quindi andremo a definire tre variabili:

**$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$  QUANTITÀ IN GRAMMI DEI 3 COMPOSTI**

**NB.**  $x_1, x_2$  e  $x_3$  potrebbero anche indicare le percentuali di ciascuno dei tre composti nel prodotto finale. Essendo queste tre variabili la quantità di ciascuno dei 3 composti in 500 gr di prodotto finale, allora potremo scrivere:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 500 \text{ gr}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \rightarrow \text{SCRITTURA ALTERNATIVA}$$

La scrittura alternativa è anch'essa corretta perché, se si scrivono le tre variabili come percentuali, allora il totale sarà uguale a 1.

Nella formula si evince come il prodotto finale è realizzato **ESCLUSIVAMENTE** dai 3 composti iniziali.

*\*in questo caso le variabili non devono essere necessariamente intere\**

### OBIETTIVO

Assumiamo una relazione di proporzionalità diretta tra le quantità di composti utilizzati e il livello di costo da sostenere. Quindi, dato che ciascuno dei tre composti ha un certo costo da sostenere, dovremo scrivere:

$$C = 225 x_1 + 200 x_2 + 180 x_3$$

### VINCOLI

Per definire i vincoli bisogna fare attenzione ad alcuni dati del problema: la confezione di prodotto finale è di 500 gr, mentre i valori nutrizionali di ciascuno dei 3 composti fanno riferimento a 100 gr di composto. Per cui indicheremo i valori di proteine, vitamine e sali minerali minimi in 100 grammi di prodotto finale così come segue:

$$\begin{cases} \text{VITAMINE} \geq 120/5 = 24 \text{ gr} \\ \text{PROTEINE} \geq 115/5 = 23 \text{ gr} \\ \text{SALI MINERALI} \geq 210/5 = 42 \text{ gr} \end{cases}$$

A questo punto, per definire i vincoli, dobbiamo valutare le quantità minime di vitamine, proteine e sali minerali che dovranno essere presenti in 100 gr di composto finale, e ciascuno di questi valori nutrizionali sarà ottenuto da ciascuno dei tre composti. Per cui, andremo a scrivere:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 15x_2 + 40x_3 &\geq 24 \quad \rightarrow \text{VITAMINE} \\ 25x_1 + 37x_2 + 20x_3 &\geq 23 \quad \rightarrow \text{PROTEINE} \\ 57x_1 + 40x_2 + 25x_3 &\geq 42 \quad \rightarrow \text{SALI MINERALI} \end{aligned}$$

### PROBLEMA 8

Un'azienda farmaceutica produce cinque tipi di farmaci per pazienti cardiovascolari utilizzando, tra le altre, tre particolari sostanze chimiche (indicate con A, B e C) nelle seguenti percentuali:

- Farmaco1: 10% di A, 50% di B, 30% di C
- Farmaco2: 20% di A, 40% di B, 12% di C
- Farmaco3: 25% di A, 18% di B
- Farmaco4: 15% di B, 35% di C
- Farmaco5: 25% di A, 15% di B, 20% di C

I profitti che l'azienda può conseguire dalla vendita dei farmaci vengono stimati pari ad euro 5, 4, 7, 3, 6 rispettivamente per un kg di ognuno dei cinque farmaci. L'azienda dispone di tre serbatoi contenenti rispettivamente 2 tonnellate di A, 4 tonnellate di B e 3 tonnellate di C. Al termine della produzione si devono pulire tutti i serbatoi, per cui tali sostanze chimiche devono essere completamente utilizzate nella produzione, a causa della loro deperibilità.

Formulare un modello di ottimizzazione che consenta la produzione ottimale dei cinque farmaci.

*Produzione ottimale: determinare i livelli di produzione utilizzando qualche criterio di scelta (in questo caso si intende aumentare il livello di produzione dei farmaci massimizzando i profitti).*

### **Dati del problema**

$$F_1 = 0.10 A, 0.50 B, 0.30 C$$

$$F_2 = 0.20 A, 0.40 B, 0.12 C$$

$$F_3 = 0.25 A, 0.18 B$$

$$F_4 = 0.15 B, 0.35 C$$

$$F_5 = 0.25 A, 0.15 B, 0.20 C$$

Dei 5 farmaci che abbiamo, sono definite le quantità in percentuale delle sostanze A, B e C, mentre la restante parte che compone i farmaci sarà costituita da sostanze superflue ai fini della risoluzione. Ogni farmaco ha un profitto che viene ottenuto dalla vendita di ciascuno di essi:

$$F_1 \rightarrow \text{€ } 5$$

$$F_2 \rightarrow \text{€ } 4$$

$$F_3 \rightarrow \text{€ } 7$$

$$F_4 \rightarrow \text{€ } 3$$

$$F_5 \rightarrow \text{€ } 6$$

Infine, nel problema sono specificati dei serbatoi che contengono delle determinate quantità delle sostanze chimiche A, B e C, e per formare i farmaci questi serbatoi devono essere totalmente svuotati:

$$A \rightarrow 2000 \text{ Kg}$$

$$B \rightarrow 4000 \text{ Kg}$$

$$C \rightarrow 3000 \text{ Kg}$$

Quindi, lo scopo del problema è fornire un modello che permetta di produrre più farmaci possibili avendo un ricavo dalla vendita il più possibile ottimale.

L'obiettivo è quello di massimizzare il profitto totale.

### DECISIONI

Bisogna stabilire la quantità in kg dei 5 farmaci. In questo problema, però, vanno definite anche alcune **variabili decisionali**:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Con  $x_n$  indichiamo le quantità in kg di ciascuno dei 5 farmaci. Queste quantità devono per forza essere maggiori o uguali di zero (non si possono avere pesi negativi!) e soprattutto si possono prendere sia numeri interi che decimali.

### OBIETTIVO

La funzione obiettivo è legata alla definizione del profitto totale. Assumendo proporzionalità diretta tra la quantità venduta in kg di farmaco e il profitto che è possibile ottenere, allora si può scrivere la funzione obiettivo come segue:

$$P = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 6x_5$$

In questo problema, le risorse da gestire sono le sostanze chimiche A, B e C espresse in termini di quantità e di disponibilità. Queste verranno allocate, attraverso al modello, alla produzione dei livelli di farmaco finale. Inoltre, in questo problema, la quantità di A, B e C destinata ai farmaci è

indicata dai valori percentuali.

### VINCOLI

Il vincolo da tenere in considerazione è quello di allocare tutte le quantità di A, B e C presenti nei tre serbatoi all'interno dei farmaci. Per ogni singola sostanza, una certa quantità sarà allocata per ciascuno dei farmaci che si possono ottenere da A, B e C. Per cui scriveremo:

$$\begin{aligned} 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,25x_3 + 0x_4 + 0,25x_5 &= 2000 \text{ Kg A} \\ 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,18x_3 + 0,15x_4 + 0,15x_5 &= 4000 \text{ Kg B} \\ 0,3x_1 + 0,12x_2 + 0x_3 + 0,35x_4 + 0,20x_5 &= 3000 \text{ Kg C} \end{aligned}$$

**NB.** vi sono alcuni farmaci che non possiedono una percentuale di ciascuna sostanza al loro interno: tuttavia anche quantità vuote vanno tenute in considerazione nella scrittura dei vincoli, scrivendo semplicemente "0".

Nello specifico, le tre formule scritte sopra indicano:

- Quantità di A da smaltire tra i farmaci
- Quantità di B da smaltire tra i farmaci
- Quantità di C da smaltire tra i farmaci

### PROBLEMA 6

Un'azienda farmaceutica produce due tipi di farmaci, A e B, utilizzando due linee di produzione L1 e L2. Per completare la produzione della confezione di farmaco pronta per essere venduta, è necessaria la lavorazione di componenti di base solo su una delle due linee di produzione (*il ciclo di produzione per realizzare il farmaco si completa solo su una linea e quindi le due linee di produzione lavorano in parallelo; questa considerazione avrà un impatto sulla scelta delle decisioni*). La linea L1 può essere utilizzata per al massimo 1000 ore mensili, mentre la linea L2 è disponibile per al massimo 800 ore mensili. I tempi necessari per produrre una confezione di farmaco variano a seconda del tipo e della linea usata. Tali tempi sono indicati (in minuti) nella seguente tabella:

	Farmaco A	Farmaco B
Linea L1	6	36
Linea L2	24	48

*Per completare il ciclo di produzione di una unità del farmaco A sulla linea L1 sono necessari 6 minuti, sulla linea L2 invece 24.*

*Per completare il ciclo di produzione di una unità del farmaco B sulla linea L1 sono necessari 36 minuti, sulla linea L2 invece 48.*

*Le due linee, L1 ed L2, sono complessivamente le risorse disponibili per realizzare la produzione dei due farmaci A e B ma, nello specifico, la risorsa da utilizzare effettivamente per realizzare la*

produzione dei due farmaci è la risorsa tempo di lavorazione delle due linee. Infatti, il testo ci dice anche qual è la disponibilità complessiva in termini di tempo sulle due linee.

Il costo di lavorazione per ogni ora di linea di produzione utilizzata è pari a £100 per L1 ed £150 per L2. Il costo dei componenti di base per produrre ciascuna confezione (= una unità) di farmaco è di £40 per il tipo A ed £60 per il tipo B. Sapendo che ogni mese il numero di confezioni di farmaco di tipo A prodotte utilizzando la linea di produzione L1 deve essere pari ad almeno il doppio delle confezioni di farmaco dello stesso tipo prodotte su L2 e che il prezzo di vendita del farmaco di tipo A è pari a £90, mentre quello di tipo B è pari a £120, formulare il modello di ottimizzazione che permette di determinare un piano di produzione mensile tale da massimizzare il profitto, nel rispetto delle varie condizioni imposte.

### Dati del problema

FARMACI	L1	L2	COMPONENTI DI BASE	PREZZO VENDITA
A	6 min	24 min	£ 40	£ 90
B	36 min	48 min	£ 60	£ 120
disponibilità tempo	≤ 1000 h	≤ 800 h		
costo lavorazione	£ 100/h	£ 150/h		

$A(L1) \geq 2 A(L2)$

DETERMINARE  
 PIANO DI PRODUZIONE MENSILE  
 MAX PROFITTO MENSILE

Il piano di produzione mensile è relativo ai livelli di produzione dei farmaci A e B su un orizzonte temporale mensile.

Per piano di produzione, infatti, si intende la capacità dell'erogazione di un servizio su un orizzonte temporale indicato.

### DECISIONI

quantità di A e B da produrre e vendere

\* assumendo che tutto ciò che viene prodotto viene venduto \*

l'unità di misura di A e B è una generica confezione

### VARIABILI DECISIONALI

$X_{A1}, X_{A2}$  = quantità di A prodotte su L1 e L2

$X_{B1}, X_{B2}$  = quantità di B prodotte su L1 e L2

La quantità totale prodotta di A sarà la somma su L1 ed L2, stessa cosa per B.

La determinazione del piano di produzione mensile deve essere effettuata attraverso il criterio (l'obiettivo) di massimizzare il profitto totale.

### OBIETTIVO

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{profitto totale} = \text{ricavi} - \text{costi} = \\
 &= 90 (X_{A1} + X_{A2}) + 120 (X_{B1} + X_{B2}) + \\
 &- (40 + 0.1 \times 100) X_{A1} + (40 + 0.4 \times 150) X_{A2} + (60 + 0.6 \times 100) X_{B1} + (60 + 0.8 \times 150) X_{B2}
 \end{aligned}$$

6 min = 1/10h      24 min      36 min      48 min

### VINCOLI

$$0.1 X_{A1} + 0.6 X_{B1} \leq 1000 \quad L1$$

$$0.4 X_{A2} + 0.8 X_{B2} \leq 800 \quad L2$$

$$X_{A1} \geq 2 X_{A2}$$

$$\begin{aligned}
 X_{A1}, X_{A2} &\geq 0 \quad \text{INTERI} \\
 X_{B1}, X_{B2} &\geq 0 \quad \text{INTERI}
 \end{aligned}$$

\*fanno riferimento al numero di confezioni di farmaco, quindi numeri interi\*