

MODELLO PROBABILISTICO APPLICATO ALLA LEZIONE 11 e PROBLEMA 10

Prof. Domenico Conforti – 19/10/2023 – Autori/ Revisionatori: Gervasi e Raponi

---

*Per comprendere meglio la lezione che segue, vi allego un piccolo schema riassuntivo delle variabili e della funzione obiettivo e dei vincoli*

- $y_j$  = nodi di servizio (=1 se si localizza qui la postazione di emergenza, altrimenti assume valore 0)
- $x_{ij}$  = numero dei mezzi di soccorso allocati in  $j$  per rispondere alla domanda di emergenza  $i$
- $c_j$  = costo fisso legato all'infratturazione del sito (legato alla variabile  $y_j$ )
- $c_{ij}$  = costo variabile associato ai nodi di servizio (legato alla variabile  $x_{ij}$ )
- $q_j$  = quantità max dei mezzi di soccorso da allocare in  $J$  (= nodi di servizio)
- $h_i$  = stima della domanda di emergenza del nodo

**Funzione obiettivo:**

$\min z$

$z = \sum_j c_j y_j + \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$  } questa funzione permette il calcolo del costo totale

**Vincoli:**

$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq h_i \quad \forall i \in I$  } questa funzione permette la garanzia di copertura della domanda di emergenza del nodo

$\sum_{i \in M_j} x_{ij} \leq q_j y_j$  } questa funzione permette di stabilire un limite alle risorse complessive disponibili

$y_j \in \{0, 1\}, x_{ij} \geq 0$  }  $y_j$ , come ho spiegato in precedenza, è una variabile binaria e può assumere solo i valori 0 o 1;  $x_{ij}$ , riferendosi ai mezzi di trasporto, può assumere solo valori positivi e interi

Per formulare e risolvere il problema di locazione e dimensionamento delle postazioni territoriali di emergenza si utilizza questo modello di decisione e ottimizzazione che consente di determinare dove localizzare le  $y$  (= postazioni territoriali) all'interno dell'insieme  $J$  (=possibili siti di localizzazione). Per ogni postazione  $y$  localizzata, determiniamo il numero di mezzi di soccorso allocati  $x_{ij}$  finalizzati a servire la richiesta di servizio che proviene dal nodo di domanda  $I$ .

Le variabili sono determinate sulla base della richiesta di ridurre i costi complessivi di localizzazione e dimensionamento (= si sceglie l'alternativa con il costo più basso).

Come ogni modello, le alternative possibili devono rispettare le condizioni imposte dai vincoli.

1. Il primo vincolo garantisce che per tutti i nodi di domanda siano presenti un numero sufficiente di mezzi di soccorso per ogni chiamata di soccorso (=garanzia di efficacia e qualità).
2. Il secondo vincolo permette una garanzia di efficienza. Infatti, non essendo presenti un numero illimitato di mezzi di soccorso, è necessario stabilire una soglia limite di mezzi di soccorso per ogni nodo di domanda sulla base del budget disponibile (= costi complessivi da sostenere precedentemente stimati).

I dati del modello (=parametri già definiti da fornire al software) sono i costi, la domanda e il limite di mezzi di soccorso. Essi sono stimati sulla base dello storico, quindi, dell'esperienza precedente. In questo caso, o si stima una media delle chiamate al pronto soccorso degli anni precedenti o si stima il rischio del territorio di riferimento (=quante richieste di emergenza possono arrivare sulla base delle caratteristiche del territorio).

$h_i$  è un dato caratterizzato da fattori di incertezza (=ci sono condizioni di contorno complessive che inducono a ritenere che  $h_i$  non sia un dato determinabile in modo certo). L'emergenza, infatti, è di per sé strutturalmente incerta.

Infatti, nelle programmazioni di interventi /trattamenti esistono interventi/trattamenti elettivi programmabili (esempio: interventi chirurgici programmati) e altri di emergenza.

Per questo motivo,  $h_i$ , dal punto di vista della formulazione matematica, diventa un evento incerto (= aleatorio). Per poter formulare in modo appropriato il modello matematico dobbiamo sostituire ad  $h_i$  (= parametro deterministico) un parametro aleatorio.

Viene sostituito con  $\xi_i$  (= variabile aleatoria). Alle variabili aleatorie sono associati modelli probabilistici (questo implica che dal nodo  $i$  possono arrivare un qualsiasi numero di chiamate nell'arco delle 24h). La variabile  $\xi_i$  viene anche definita discreta (= può assumere qualunque valore di numeri interi).

*Come si gestisce la variabile aleatoria  $\xi_i$  nel nostro modello?*

Supponiamo che, nel nostro scenario, ogni nodo  $i$  può assumere un numero finito e limitato di valori (es: [1,2,3]). In questa situazione, dovremmo rappresentare ogni singolo modello associato ad ogni valore possibile (così facendo avremmo tanti possibili modelli per quante sono le possibili realizzazioni di  $\xi_i$ ). Il processo diventa, quindi, troppo dispendioso.

Si procede, allora, così:

Il primo vincolo (che permette di determinare quanti mezzi di soccorso installare nei nodi  $j$  che vanno a servire ogni nodo  $i$ ) diventa un evento incerto perché, essendo incerta la richiesta, di conseguenza diventa incerta la possibilità di determinare il numero di mezzi di soccorso per soddisfare la richiesta.

*Per chiarire: se non sappiamo di quanti mezzi di soccorso abbiamo bisogno, non possiamo sapere se riusciremo a soddisfare questa richiesta con i mezzi di soccorso a disposizione.*

Quindi, la possibilità di soddisfare la richiesta diventa un fenomeno incerto e, in quanto tale, non può essere trattato in modo deterministico, ma deve essere trattato in modo probabilistico.

Quindi, la garanzia di copertura della domanda si modifica così:

$$P(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i \quad \forall i \in I) \geq p \quad p \in [0,1]$$

Si stabilisce, quindi, che la probabilità (indicata con  $P$ ) che la domanda sia coperta deve essere maggiore o uguale ad un livello di affidabilità del servizio (indicato con  $p$ ) che stabilisce il decisore e che viene modulato a seconda dell'analisi della zona coinvolta (se il territorio è maggiormente a rischio, si stabilisce un livello di affidabilità più alto).

Questo vincolo è definito vincolo probabilistico.

I vincoli sono tanti quanti sono i nodi di domanda. Ognuno degli  $n$  vincoli è un evento incerto. Per come abbiamo definito il vincolo, per tutti i nodi vale il livello di affidabilità definito. Tuttavia, possiamo associare livelli di affidabilità diversi per ogni nodo scrivendo così il vincolo:

$$P(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i) \geq p_i \quad \forall i \in I$$

La differenza è che, estraendo dalla sommatoria  $\forall i \in I$ , non abbiamo, come in precedenza, una probabilità congiunta di  $n$  eventi (=  $n$  vincoli associati a  $n$  nodi di domanda), ma una probabilità disgiunta.

Il decisore può, così, stabilire a seconda delle caratteristiche specifiche del nodo di domanda (= sulla base del livello di rischio di un territorio e, quindi, delle domande che potrebbero arrivare), un valore di  $p_i$  diverso.

Il vincolo può essere reso flessibile determinando  $S$  gruppi di nodi di domanda e possiamo scrivere:

$$P(\sum_{j \in N_i} x_{ij} \geq \xi_i, i = 1, 2, \dots, I_s) \geq p_s, s = 1, 2, \dots, S$$

Ognuno dei gruppi ha una cardinalità  $I_s$ . All'interno di ogni gruppo  $s$  ci sono  $I_s$  nodi di domanda. Così facendo, abbiamo imposto il calcolo della probabilità degli eventi legati al vincolo di copertura della domanda su ogni gruppo.  
I gruppi sono una clusterizzazione dei comuni, fatta dal decisore, sulla base di caratteristiche simili fra i comuni.

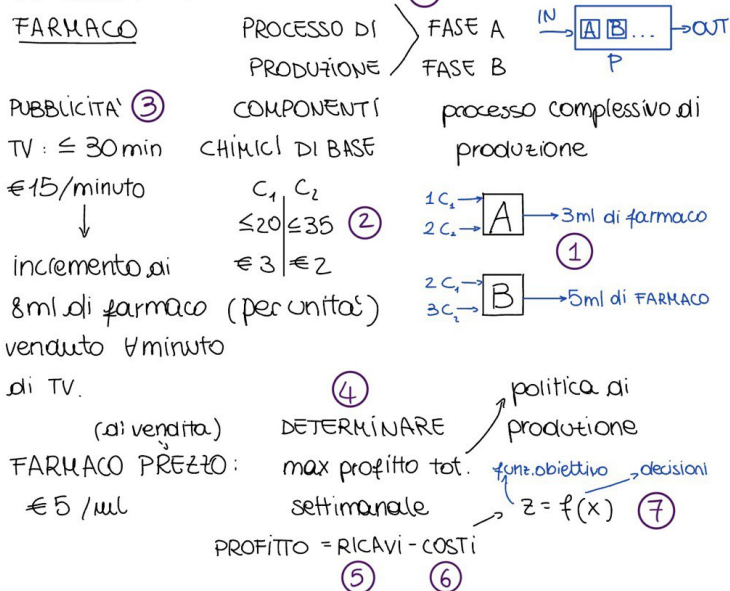
La formula, se  $S=I=1$ , è uguale alla formula iniziale.  
Nell'ultimo caso, abbiamo previsto che  $S=n$ .

Questi modelli saranno, poi, inseriti in un sistema di supporto alle decisioni.

## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA:

Un'azienda farmaceutica decide di lanciare sul mercato un nuovo farmaco omeopatico (*un singolo bene da produrre*). Per la sua realizzazione si utilizza un processo di produzione (pianificato su un orizzonte temporale settimanale) caratterizzato da fasi di tipo A e fasi di tipo B, durante le quali vengono opportunamente lavorati due componenti chimici di base, C1 e C2. Una fase di tipo A consente di convertire 1 unità di componente chimico C1 e 2 unità di componente chimico C2 in 3 ml di farmaco. Una fase di tipo B consente di convertire 2 unità di componente chimico C1 e 3 unità di componente chimico C2 in 5ml di farmaco. L'azienda spende, rispettivamente, €3 ed €2 per unità di componente chimico C1 e C2. Inoltre, ogni settimana, non possono essere acquistati più di 20 unità di C1 e più di 35 unità di C2. Per incentivare le vendite del farmaco, l'azienda decide di avviare una campagna pubblicitaria televisiva, con un costo di €15 al minuto. Sulla base di un'analisi delle previsioni di vendita, l'azienda stima un incremento delle vendite del farmaco di 8ml per ogni minuto di campagna pubblicitaria. Assumendo che l'azienda decida di utilizzare la campagna pubblicitaria per non più di 30 minuti alla settimana, e che ogni ml di farmaco venga venduto a €5, determinare la politica che deve essere intrapresa dall'azienda in modo da massimizzare il profitto complessivo settimanale.

### PROBLEMA 10:



### DECISIONI:

- $X_p$  = n. di minuti di pubblicità ⑧
- quantità di ml di farmaco prodotto e venduto ⑨
- ↳ numero di fasi di lavorazione
- $A \in B \rightarrow X_A \text{ e } X_B \geq 0$ , intere
- ⑩      valore di A = n. cicli di A
- ⑪      valore di B = n. cicli di B

FUNZIONE OBIETTIVO: (11)

$$\begin{aligned} (\max) \quad z = \text{RICAVI} - \text{COSTI} &= 5(3x_A + 5x_B + 8x_P) - [15x_P + 3(1x_A + 2x_B) + \\ &+ 2(2x_A + 3x_B)] \end{aligned}$$

$c_1$   
 $c_2$

VINCOLI:  $x_P \leq 30$  (minuti) (12)

$$x_A + 2x_B \leq 20 \quad c_1$$

$$2x_A + 3x_B \leq 35 \quad c_2$$

$$x_A, x_B \geq 0, \text{ intere} \quad x_P \geq 0 \text{ (non obbligatoriamente intero)}$$

La gestione del processo di produzione viene attuata settimana per settimana.

Quando si parla di orizzonte temporale si fa riferimento all'intervallo di tempo attraverso il quale il decision maker lavora sul problema.

Ho numerato i punti salienti del problema che il professore ha evidenziato, in modo tale da approfondirli nelle righe che seguono:

1. Un processo può essere schematicamente interpretato come una sequenza di fasi (o di procedure/ attività), in questo caso, le fasi A e B sono diverse in termini di articolazione e sono “parallele” o in raggruppamento complessivo; quindi, non si susseguono bensì danno risultati differenti.

Dall'uscita di ogni singola fase si ottiene già il farmaco finito.

All'interno dello svolgimento delle due fasi vengono lavorati i due componenti chimici C1 e C2, che corrispondono alle materie prime del farmaco.

Entrando nel dettaglio, viene spiegato come vengono lavorate le componenti C1 e C2:

enucleando la fase A e la fase B, vengono estratte dal processo complessivo di produzione e vengono evidenziate le caratteristiche di ingresso e uscita di ogni singola fase:

- una fase di tipo A consente di convertire 1 unità di componente chimico C1 e 2 unità di componente chimico C2 in 3 ml di farmaco;
- una fase di tipo B consente di convertire 2 unità di componente chimico C1 e 3 unità di componente chimico C2 in 5 ml di farmaco;

2. C1 e C2 sono le materie prime per ottenere il farmaco, ovvero le risorse per realizzare il bene, e sono **limitate**: di C1 ne si hanno, al più, 20 unità; di C2, al massimo 35.

Il costo, per ogni unità di C1 e C2 è, rispettivamente, di €3 ed €2 (l'azienda farmaceutica deve quindi acquistare i due componenti).

3. Un altro “settore” dell'attività dell'azienda è rappresentato dalla pubblicità (marketing), ovvero dalla campagna televisiva, che ha un limite di 30 minuti alla settimana e che porta ad un incremento di 8ml di farmaco venduto per ogni minuto di pubblicità.

4. **Determinare la politica che deve essere intrapresa dall'azienda in modo da massimizzare il profitto complessivo settimanale** (determinare quindi la politica di produzione). È necessario anche comprendere quale siano le possibili alternative, e la politica deve essere realizzata attraverso un determinato criterio, ovvero l'obiettivo, che è quello di ottenere il più alto profitto possibile.

5. Il ricavo è legato alle quantità di farmaco venduto, assumendo relazioni lineari e proporzionali: in questo caso, la vendita di 1 ml corrisponde ad un ricavo di 5€, 2ml corrispondono a 10€ etc.

6. I costi, invece, corrispondono ai costi delle materie prime e ai costi della pubblicità.

7. Questo è un tipico esempio in cui, l'identificazione più o meno appropriata delle decisioni, ovvero delle alternative che si possono assumere, non è proprio immediatissima, perché la decisione da assumere riguarda determinare la politica di produzione in modo tale da ottenere il profitto più alto possibile. Partendo da quest'ultimo, esso corrisponde a  $z = f(x)$ , in cui:

- $Z$  = profitto = obiettivo;
- $F(x)$  = decisioni.

Il profitto, se lo si vuole massimizzare, dipende dalle vendite e dai costi.

La pubblicità la si considera "a parte" (o comunque come un'aggiunta) poiché corrisponde a un'ulteriore decisione da assumere.

La politica di produzione complessiva è legata ad un determinato profitto (ricavo – costi), in cui il ricavo è dato dalla somma del prodotto venduto "regolarmente" e da un'ulteriore vendita che si può ottenere, secondo l'incremento già definito, attuando la campagna pubblicitaria.

In questa situazione, riguardo quest'ultima, la decisione da attuare è molto semplice e consiste nel determinare quanti minuti di pubblicità si sceglie di fare. Si stabilisce un  $X_p$  che corrisponde al numero di minuti di pubblicità. 8.

Questo vuol dire che, nella funzione ricavi, vi sarà una frazione che si potrà definire come  $8X_p$  (in cui il numero 8 corrisponde all'incremento di vendita di farmaco (in ml) per ogni min di pubblicità) che poi andrà moltiplicata per il prezzo di vendita del farmaco (€5).

9. Si considerino poi le quantità complessivamente vendute di farmaco relative al processo di produzione, ovvero di ml di farmaco prodotto e venduto. Quando non vi è un'indicazione specifica di un eventuale immagazzinamento del bene, si assume sempre che non vi sia, ovvero che tutto ciò che venga prodotto venga anche venduto.

*Si hanno un ventaglio di alternative possibili, che corrispondono alle decisioni, e si ha bisogno di un criterio guida per scegliere all'interno di questo ventaglio. Il criterio di guida è quello che, nel modello, è definito dalla funzione obiettivo, che in questo caso corrisponde ad "ottenere il più alto profitto possibile".*

Si sceglie dunque la configurazione (le alternative) di farmaco prodotto e venduto e di pubblicità da fare a cui corrisponde il più alto valore di profitto.

Ora si tratta di capire come tradurre il quadro decisionale in variabili decisionali.

I costi sono legati alle quantità di  $C_1$  e  $C_2$  che vengono utilizzati per produrre ml di farmaco;

per tradurre il quadro decisionale si hanno già i costi di pubblicità legati alla decisione che già è stata impostata ( $X_p$ ); vanno ad aggiungersi i costi delle materie prime  $C_1$  e  $C_2$ , quindi le quantità di questi ultimi consumate per la produzione del farmaco.

Il legame tra le quantità consumate di  $C_1$  e  $C_2$  e la quantità di farmaco prodotto, **viene definito dalle fasi** (che sono differenti sia per gli input che per gli output), quindi, il consumo complessivo di  $C_1$  e  $C_2$  e la produzione complessiva di farmaco, si possono assumere in funzione delle esse, ovvero in base al numero di volte che si fa lavorare una determinata fase (n. di cicli).

10. La politica di produzione si attua facendo lavorare la fase A tot volte e la fase B tot volte; quindi, l'alternativa possibile corrisponde a quante volte si decide di far lavorare le fasi A e le fasi B.

Si assume, sulla base del testo del problema che in un ciclo della fase entrino delle determinate quantità di  $C_1$  e  $C_2$  ed escano delle determinate quantità di prodotto (farmaco); lo stesso vale per la fase B.

*Quante volte bisogna far "ciclare" la fase A e quante volte B in termini di attività?* Si assume anche in questo caso una relazione lineare: due cicli richiederanno e produrranno il doppio degli elementi e così via. Alla luce di questo ragionamento si descrivono  $X_a$  ed  $X_b$  che corrispondono proprio a questi cicli, ovvero a quante volte vengano attivate le fasi.

11. A questo punto si può scrivere la funzione obiettivo, avendo già definito le decisioni.

I ricavi si ottengono moltiplicando la somma dei ml di farmaco ottenuti dalle differenti fasi (compresa la pubblicità) per il prezzo di vendita di questo che corrisponde a €5.

I costi comprendono:

- la pubblicità

- le materie prime (espresse come somme di quantità impiegate per ogni ciclo delle specifiche fasi)

Anche qui le quantità sono moltiplicate per i prezzi specifici.

I profitti, come si è già visto, vanno **massimizzati**, per questo si aggiunge "max" prima di "z"

**12.**Le limitazioni fanno parte delle funzioni di vincolo. Questi limiti sono presenti nella pubblicità e nelle quantità di C1 e C2 (materie prime disponibili): si hanno quindi 3 strutture di vincolo.

Alla luce di come si sono identificate le variabili decisionali, i vincoli non sono complessi.

*Tra le parentesi sono state inserite le somme dello specifico componente impiegato nelle differenti fasi; a destra vi è invece il numero massimo di unità disponibili dello stesso componente.*

*NB: Questi esercizi corrispondono al template delle slide, nello svolgimento della prova scritta si aspetta che venga eseguita una sequenza logica di questo tipo, descrivendo come si è arrivati alla formulazione del modello. Ci si ferma dopo la formulazione di quest'ultimo.*