Modelli di Ottimizzazione

1 Introduzione

I modelli di ottimizzazione traducono in termini quantitativi/matematici il processo di selezione della "migliore" decisione tra un insieme di alternative possibili.

Il criterio di valutazione adottato nella scelta riflette la "desiderabilità" di una data caratteristica, esempio tipico, la minimizzazione dei costi o la massimizzazione del profitto e dipende, in ogni caso, dallo specifico problema considerato. Supponiamo, ad esempio, di trovarci a gestire un servizio di consegne a domicilio. Ogni sera un certo numero di richieste di pizza viene inoltrato alla Pizzeria Smart. Disponendo di un unico automezzo occorre stabilire quale itinerario seguire in modo da raggiungere tutti i clienti. In questo caso una misura di desiderabilità è la minimizzazione dei costi di trasporto, la quale dipende dall'itinerario scelto. A livello concettuale, il problema di ottimizzazione consiste nell'individuare tra tutte le alternative ammissibili, ovvero gli itinerari che ci consentono di servire tutti i clienti, quella di minimo costo, ovvero il percorso più breve.

In termini matematici, il problema si traduce individuando tre "ingredienti" fondamentali:

- le **variabili**. In un modello di ottimizzazione, esistono due tipi di variabili: *esogene* ed *endogene*. Le prime sono variabili incontrollabili, ovvero parametri del problema o dati tecnologici, mentre le seconde sono le incognite, cioé le decisioni da assumere, ovvero le variabili controllabili da parte del decisore.

- i **vincoli**. Si tratta dei legami funzionali esistenti tra le variabili e i requisiti richiesti, ovvero condizioni e limitazioni derivanti da considerazioni di varia natura (fisica, economica, etc.);

- la **funzione obiettivo**. Si tratta della misura della desiderabilità della soluzione.

Nel nostro esempio, i parametri del problema sono le distanze tra i vari clienti, le decisioni sono gli itinerari da costruire, i vincoli sono dettati dalla copertura di tutti i clienti, mentre la funzione obiettivo è, ad esempio, la lunghezza dell'itinerario. L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile*.

Indicando con x le decisioni, con X l'insieme ammissibile e con $c(x)$ la funzione obiettivo, il problema di ottimizzazione può essere formulato matematicamente come segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x) \\ & x \in X \end{aligned} \tag{1}$$

Il problema che si pone è, quindi, quello di determinare un $x^* \in X$ tale che $c(x^*) \leq c(x)$ per ogni $x \in X$. La soluzione x^* è detta **soluzione ottima** del problema e $c(x^*)$ è detto **valore ottimo**.

In generale, non è detto che esista sempre una soluzione ottima, e, qualora esista, non è detto che sia unica. In particolare, se l'insieme X è vuoto diremo che il problema (1) è **inammissibile**. Se invece accade che per ogni valore $k > 0$ esiste un punto $x \in X$ tale che $c(x) < -k$, allora diremo che (1) risulta (inferiormente) **illimitato**.

Nel seguito, parleremo indifferentemente di problema di massimo o di minimo dal momento che:

$$\min_{x \in X} c(x) = -\max_{x \in X}(-c(x)).$$

Infatti, poichè i due problemi hanno la stessa regione ammissibile X, una soluzione x^* che renda minima la funzione $c(x)$, massimizza al tempo stesso la funzione $-c(x)$.

Come evidenziato prima, decisioni, vincoli e obiettivi sono i tre ingredienti di base per la definizione di un modello di ottimizzazione. E' naturale chiedersi se tutti e tre questi ingredienti siano indispensabili o se si possa prescindere da alcuni di loro.

- **Variabili**

  Senza dubbio, le variabili, ovvero le incognite del problema, sono indispensabili. Infatti, senza variabili non è possibile definire nè funzione obiettivo, nè vincoli.

- **Vincoli**

  I vincoli non sono strettamente necessari nella definizione di un modello di ottimizzazione. I problemi non vincolati hanno tuttavia una applicabilità limitata nella rappresentazione di processi decisionali complessi, dal momento che i contesti reali impongono al decisore una serie di restrizioni di diversa natura.

- **Funzione obiettivo**

  Tipicamente, si assume che il decisore disponga di un unico criterio per valutare la qualità delle soluzioni adottate. Esistono, tuttavia, due importanti, eccezioni:

  - *Assenza di funzione obiettivo.*

    In alcuni casi si richiede semplicemente la determinazione di una qualsiasi soluzione ammissibile; questo tipo di problema è detto più propriamente *problema decisionale* o di *esistenza.*

  - *Obiettivo multiplo.* Molto spesso, un decisore vuole perseguire più obiettivi contemporaneamente. Ad esempio, un direttore della produzione potrebbe ritenere ideale un piano di produzione che minimizza i costi, garantisce un modesto accumulo delle giacenze, ed è in grado di adeguadarsi a cambiamenti dell'ultima ora. Tipicamente, i diversi obiettivi sono incompatibili: le variabili che ottimizzano un obiettivo sono lontani dall'ottimo per gli altri. Nella pratica, i problemi con obiettivi multipli sono riformulati come problemi a singolo obiettivo, o formando una combinazione pesata dei diversi obiettivi, oppure sostituendo alcuni degli obiettivi tramite vincoli.

Ritorniamo al modello generale di ottimizzazione (1). Tipicamente si assume che la regione ammissibile X sia un sottoinsieme dello spazio vettoriale R^n descritto tramite un insieme finito di vincoli funzionali del tipo $g(x) \geq b$, dove g è una funzione definita su R^n e a valori reali e $b \in R$. Quindi, date m funzioni $g_i : R^n \to R$, $i = 1, \ldots, m$ ed m scalari b_i, il modello (1) può essere riscritto come:

$$\begin{array}{ll} \min & c(x) \\ & g_i(x) \geq b_i \quad i = 1, \ldots, m \end{array} \tag{2}$$

Osserviamo che nella formulazione (2) sono stati utilizzati i vincoli di diseguaglianza nella forma di maggiore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi nella forma di minore-uguale o il caso di uguaglianza; infatti, si può trasformare un vincolo di minore o uguale del tipo $g(x) \leq b$ in un vincolo di maggiore o uguale, semplicemente riscrivendolo nella forma $-g(x) \geq -b$. Inoltre, un vincolo di uguaglianza $g(x) = b$ può essere riscritto nella forma equivalente $g(x) \geq b$ e $-g(x) \geq -b$.

I modelli di ottimizzazione vengono tipicamente classificati in base alla natura delle variabili di decisione. In particolare, si distingue tra:

- **Problemi di Ottimizzazione Continua**
  nei quali le variabili di decisione possono assumere tutti i valori reali.

- **Problemi di Ottimizzazione Discreta**
  nei quali tutte o alcune delle variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi. All'interno di questa classe si distinguono altre due sottoclassi:

  - *Programmazione a numeri interi* se $x \in Z^n$;
  - *Programmazione binaria o booleana* se $x \in B^n$.

Ulteriore classificazione è fatta rispetto alla funzione obiettivo e di vincolo. In particolare, si distingue tra:

- **Problemi di Programmazione Lineare**
  quando sia la funzione obiettivo $c(x)$ che i vincoli $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ sono rappresentati mediante espressioni lineari;

- **Problemi di Programmazione Non Lineare**
  quando $c(x)$ e/o $g_i(x)$ sono non lineari.

In particolare, ci interesseremo principalmente di problemi di programmazione lineare e programmazione lineare intera, dedicando particolare attenzione al processo di costruzione di tali modelli.

2 Formulazione Modelli di Ottimizzazione

La formulazione di buoni modelli di ottimizzazione è un'arte che può essere affinata solo con il tempo e l'esperienza. L'abilità consiste nello sviluppare dei modelli semplici che siano comunque una buona rappresentazione del problema reale che si vuole affrontare. Nel seguito vengono elencate alcune regole pratiche di ausilio in fase di formulazione.

- **Semplicità del modello**
  Il modello matematico è una astrazione della realtà che deve contenere solo gli elementi essenziali utili alla formulazione delle decisioni. In generale è utile adottare un atteggiamento induttivo, ovvero partire da un modello elementare per poi arricchirlo progressivamente.

- **Limitare la complessità**
  La complessità del modello deve essere comunque la minima necessaria a raggiungere gli scopi prefissati. Introdurre degli elementi inessenziali ai fini delle decisioni strategiche, aggiunge solo complessità al modello senza migliorarne la qualità.

- **Coinvolgere l'utilizzatore finale**
  In fase di costruzione del modello è importante coinvolgere attivamente l'utilizzatore finale che dovrà illustrare il problema da affrontare specificando gli obiettivi da perseguire, le restrizioni da rispettare, etc.

- **Valutare l'onere computazionale richiesto**
  La fase di raccolta dei dati necessari e l'onere computazionale richiesto per pervenire ad una soluzione del problema sono elementi da non sottovalutare. Il Ricercatore Operativo interviene, infatti, non solo nella fase di costruzione del modello matematico, ma anche in quella della definizione dei metodi di soluzione.

Ma come si formula un modello? Esistono due approcci principali.

1. **Approccio da Template (maschera, sagoma) di riferimento**;

2. **Approccio Costruttivo**.

Il primo approccio richiede di individuare (e utilizzare) tra i modelli standard disponibili in letteratura quello che più si adatta al problema considerato. Se il problema è sufficientemente simile ad un modello di riferimento, allora saranno necessari cambiamenti minimali.

Per altro, la classifica dei modelli di riferimento è molto ampia e contiene, tra gli altri, le seguenti classi di problemi:

- Mix produttivo;
- Miscelazione;
- Pianificazione multiperiodale;
- Reti, Distribuzione;
- Scorte;
- Giochi
- ...

Il vantaggio di questo approccio è che si evita di fare uno sforzo per definire quanto fatto già dagli altri. D'altro canto, è difficile che un problema si adatti completamente ad un modello di riferimento, e spesso richiede la combinazione di template di due o più categorie.

L'approccio costruttivo è più generale, richiede una maggiore abilità, ma si adatta a qualsiasi situazione. Il processo di costruzione si articola in tre passi:

1. Identificare e definire le variabili di decisione. La definizione include anche la specifica dell'unità in cui le variabili sono misurate. Un modo per identificare le variabili di decisione è rispondere alla seguente domanda: Quale dovrebbe essere il formato di un rapporto che fornisce la soluzione del problema? Ad esempio, i numeri che costituiscono la risposta potrebbero essere: la quantità di bene da produrre, la quantità di ingrediente da utilizzare, etc.

2. Specificare i vincoli, insieme alle unità utilizzate. Data una soluzione del problema, quali verifiche numeriche dovrei eseguire per provarne la validità?

3. Definire una funzione obiettivo e l'unità in cui misurarla. Tra tutte le soluzioni ammissibili, come potrei misurare la preferenza/bontà di una alternativa?

Nella pratica comune, l'approccio seguito per la formulazione dei modelli è una combinazione di quello da template e di quello costruttivo. In altre parole, si cerca il template che si adatta meglio al problema in esame, e lo si modifica costruttivamente quanto serve.