Problema do fluxo máximo

Redes de fluxos (1)

Modelam redes de ligações, por onde flui algo:

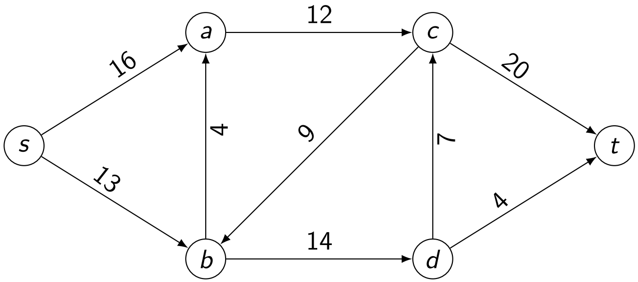
- Líquidos
- Gases
- Trânsito automóvel
- Comunicações
- ...

Cada ligação liga dois pontos da rede, tem uma direcção e uma capacidade

Em cada rede de fluxos existem dois pontos especiais:

- Fonte (*source*) Origem de tudo o que flui na rede
- Dreno (*sink*) Destino final de tudo o que flui na rede

Redes de fluxos (2)



c é a capacidade da ligação (u, v)

Redes de fluxos (3)

Rede de fluxos (*Flow network*)

- Modelada através de um grafo orientado $G = (V, E)$
- $c(u, v) > 0$ é a capacidade do arco (u, v)
- $s \in V$ é a fonte (*source*) da rede
- $t \in V$ é o dreno (*sink*) da rede ($s \neq t$)
- Se $(u, v) \in E$, então $(v, u) \notin E$
- Assume-se que, qualquer que seja o vértice $v \in V$, existe um caminho $s \ldots v \ldots t$

  (Logo, $|E| \geq |V| - 1$)

Fluxos (1)

Fluxo

- Um fluxo numa rede de fluxos é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$, que satisfaz:

  Capacidade O fluxo que passa numa ligação não pode exceder a sua capacidade

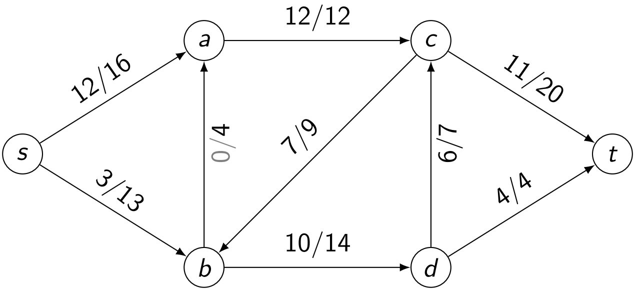
  $$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

  Conservação do fluxo O fluxo que entra num vértice (diferente de s e de t) é o fluxo que sai do vértice

  $$\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \quad \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

- $(u, v) \notin E \to f(u, v) = 0$

Fluxos (2)



f é o fluxo que passa pela ligação (u, v), com capacidade c

NOTA: Quando f é 0, por vezes, omite-se o '0/'

Fluxos (3)

Valor do fluxo

O valor de um fluxo é o fluxo produzido pela fonte s

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

Rede residual (1)

Dado um fluxo f, a capacidade residual da rede $G = (V, E)$ é

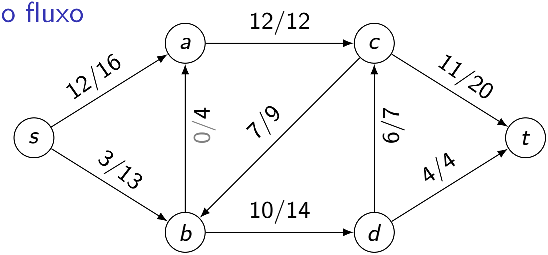
$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A rede residual resultante é $G_f = (V, E')$, com

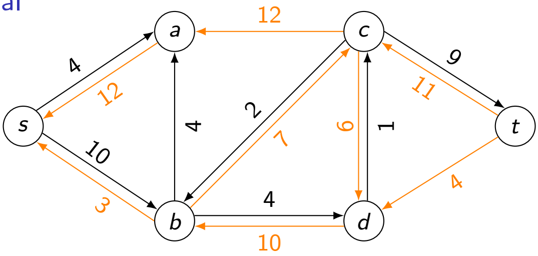
$$E' = \{\, (u,v) \mid c_f(u,v) > 0 \,\}$$

Rede residual (2)

Rede com o fluxo



Rede residual



Rede residual (3)

Numa rede residual

- A capacidade dos arcos comuns à rede original corresponde à capacidade não utilizada pelo fluxo
- A capacidade dos arcos com orientação oposta à dos da rede original corresponde à quantidade de fluxo que pode ser cancelada

Uma rede residual indica os limites das alterações que podem ser feitas a um fluxo

Problema do fluxo máximo

Dada uma rede de fluxos, qual é o valor máximo de um fluxo?

Incremento de um fluxo (1)

Seja G_f uma rede residual e seja $p = v_1\, v_2\, \ldots\, v_k$, com $v_1 = s$ e $v_k = t$, um caminho simples em G_f, da fonte s para o dreno t

A capacidade residual de p é

$$c_f(p) = \min_{1 \leq i < k} \{\, c_f(v_i, v_{i+1})\, \} > 0$$

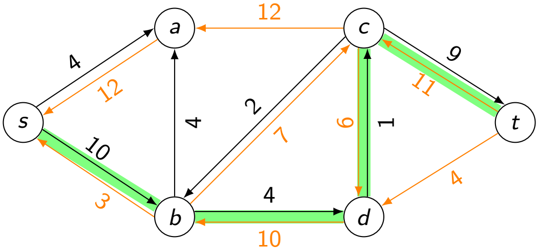
O fluxo aumentado por p é

$$f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + c_f(p) & \text{se } (u,v) \in E \text{ está em } p \\ f(u,v) - c_f(p) & \text{se } (v,u) \in E \text{ está em } p \\ f(u,v) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

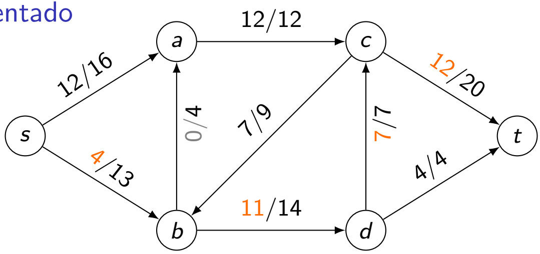
O valor de f' é $|f'| = |f| + c_f(p)$

Incremento de um fluxo (2)

Caminho $s \ldots t$ na rede residual



Fluxo aumentado



Incremento de um fluxo (3)

Numa rede residual

- A capacidade dos arcos comuns à rede original corresponde à capacidade não utilizada pelo fluxo
- A capacidade dos arcos com orientação oposta à dos da rede original corresponde à quantidade de fluxo que pode ser cancelada

Uma rede residual indica os limites das alterações que podem ser feitas a um fluxo

Método de Ford-Fulkerson

1. Inicializar $f(u, v) = 0$, para todo $(u, v) \in E$
2. Enquanto houver um caminho simples $p = s \ldots t$ na rede residual
   a. Seja $c_f(p) = \min \{ c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ está em } p \}$
   b. Para cada arco (u, v) em p
      - Se $(u, v) \in E$, o fluxo no arco (u, v) é aumentado em $c_f(p)$ unidades

        $$f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$$

      - Senão, então $(v, u) \in E$ e são canceladas $c_f(p)$ unidades de fluxo no arco (v, u)

        $$f(v, u) = f(v, u) - c_f(p)$$

Algoritmo de Edmonds-Karp

EDMONDS-KARP(G, s, t)

```
for each edge (u,v) in G.E do
    (u,v).f <- 0                   // fluxo f(u,v) = 0
Gf <- RESIDUAL-NET(G)
while (cf <- BFS-FIND-PATH(Gf, s, t)) > 0 do
    v <- t
    while v.p != NIL do
        if edge (v.p,v) is in G.E then
            (v.p,v).f = (v.p,v).f + cf
        else // edge (v,v.p) is in G.E
            (v,v.p).f = (v,v.p).f - cf
        v <- v.p
    UPDATE(Gf, G)
```

Complexidade temporal $O(VE^2)$

Complexidade temporal do algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo representado através de listas de adjacências

Linhas

1–2 Ciclo executado $|E|$ vezes

3 Construção da rede residual: $\Theta(V + E)$

4–12 Ciclo executado $O(VE)$ vezes

- 4 Percurso em largura no grafo: $O(V + E)$
- 6–11 Ciclo executado $O(V)$ vezes
- 12 Actualização da rede residual: $O(V)$

Complexidade temporal do algoritmo

$$\Theta(E) + \Theta(V + E) + O(VE(V + E)) = O(VE^2)$$

($\forall_{v \in V}$, existe um caminho $s \ldots v \ldots t$, pelo que $|E| \geq |V| - 1$)

Restantes operações com complexidade temporal constante

Cortes (1)

Um corte (*cut*) (S, T), numa rede de fluxos $G = (V, E)$, é uma partição tal que

- $s \in S$
- $t \in T$
- $T = V - S$

A capacidade do corte (S, T) é soma das capacidades das ligações que o atravessam, de S para T

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

Considera-se que $c(u, v) = 0$, se $(u, v) \notin E$

Cortes (2)

Dado um fluxo f, o fluxo (líquido) que atravessa o corte (S, T) é a diferença entre o fluxo que o atravessa de S para T e o que o atravessa de T para S

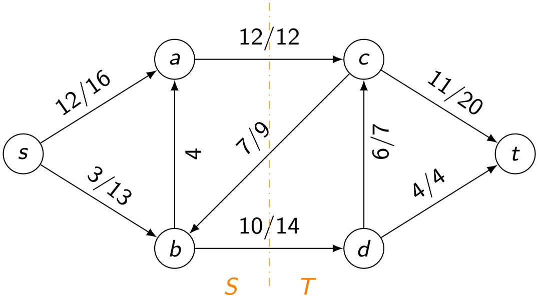
$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u)$$

O fluxo (líquido) que atravessa o corte (S, T) não pode ser superior à capacidade do corte

$$f(S, T) \leq c(S, T)$$

Cortes (3)

Corte (S, T) numa rede de fluxos



$S = \{s, a, b\}$, $T = \{t, c, d\}$

Capacidade do corte: $c(S, T) = 12 + 14 = 26$

Fluxo que atravessa o corte: $f(S, T) = 12 + 10 - 7 = 15$

Corte mínimo

Um corte é mínimo se não existe nenhum corte com capacidade inferior

Nenhum fluxo pode ter um valor superior à capacidade de um corte mínimo

Teorema do fluxo-máximo corte-mínimo (*Max-flow min-cut theorem*)

Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxos e f um fluxo em G

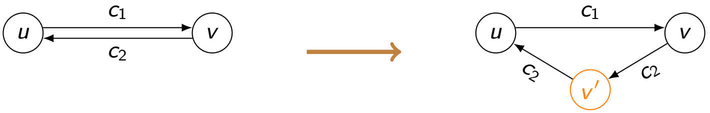
f é um fluxo máximo sse existe um corte (S, T) de G tal que

$$|f| = c(S, T)$$

Variações (1)

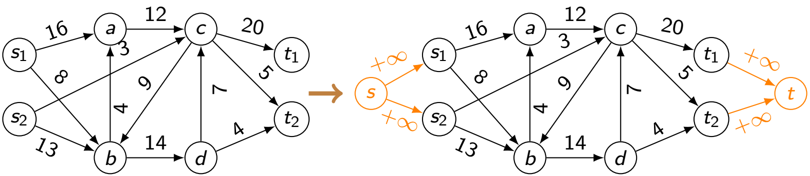
Arcos anti-paralelos

Podem eliminar-se acrescentado um novo vértice intermédio



Múltiplas fontes e/ou múltiplos drenos

Acrescenta-se uma nova fonte s, ligada às anteriores por arcos de capacidade $+\infty$, e/ou um novo dreno t, a que os anteriores são ligados por arcos de capacidade $+\infty$



Variações (2)

Vértices com capacidade

Divide-se o vértice u em dois

1. O vértice de entrada u_e, que será o destino de todos os arcos que tinham destino u
2. O vértice de saída u_s, que será a origem de todos os arcos que tinham origem u

Acrescenta-se o arco (u_e, u_s), com a capacidade de u