UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Aritmética e códigos binários

Sistemas Digitais 2020/2021

Pedro Salgueiro
CLAV-256
pds@uevora.pt

Aritmética e códigos binários

- Aritmética
  - Operações
- Números com sinal
  - Complemento para 2
  - Overflow
- Códigos
  - Códigos binários
  - Códigos numéricos
  - Códigos alfanuméricos
- Exercícios

Aritmética

Operações

Os algoritmos são idênticos aos da aritmética decimal

- Soma e multiplicação
  - Noção de transporte

- Subtração
  - Noção de empréstimo

- <u>Os números têm de estar na mesma base!</u>

Adição

Base 10

	1	1	
	4	3	5
+	2	6	7
	7	0	2

transporte

- $435_{10} + 267_{10} = 702_{10}$

Base 2

	1	1		
	1	0	1	1
+		1	1	0
1	0	0	0	1

transporte

- $1011_2 + 110_2 = 10001_2$

Base 16

	1	1	
	4	A	5
+	2	6	B
	7	1	0

transporte

- $4A5_{16} + 26B_{16} = 710_{16}$

Subtração

Base 10

	4^3	$^1\cancel{3}^2$	^{15}
-	2	6	7
	1	6	8

emrpéstimo

- $435_{10} - 267_{10} = 168_{10}$

Base 2

	$\cancel{1}^0$	^{10}	1	1
-		1	1	0
	0	1	0	1

empréstimo

- $1011_2 - 110_2 = 101_2$

Base 16

	4	$\cancel{A}^9$	^{15}
-	2	6	B
	2	3	A

empréstimo

- $4A5_{16} - 26B_{16} = 23A_{16}$

Multiplicação

Base 10

		4	3	5
	x		2	3
	1	3	0	5
+	8	7	0	
1	0	0	0	5

Base 2

			1	0	1
		x	1	1	0
			0	0	0
		1	0	1	
+	1	0	1		
	1	1	1	1	0

Base 16

			4	A	3
		x		5	2
			9	4	6
+	1	7	2	F	
	1	7	C	3	6

- 435_{10} x 23_{10} = 10005_{10}
- $1\,0\,11_{2}$ x $1\,1\,0_{2}$ = $1\,1\,1\,1\,0_{2}$
- $4\,A\,3_{16}$ - $5\,2_{16}$ = $1\,7\,C\,3\,6_{16}$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Multiplicação

Base 10

	2	3	5	0	4	1
-	2	0	5		5	7
	0	3	0	0		
	-	2	8	7		
	0	0	1	3		

- $2350_{10} / 41_{10} = 57_{10} + 13_{10}$

Base 2

	1	0	0	0	1	1
-	0	1	1		1	0
	0	0	1	0		
	-		0	0		
	0	0	1	0		

- $1000_2 / 11_2 = 10_2 + 10_2$

Números com sinal

Números com sinal

Objetivo

- Utilizar o mesmo algoritmo para operações de adição e subtração

Solução

- Encontrar uma representação adequada para os números positivos e negativos
- Sistema binário
  - Representação complemento para dois

Complemento para 2

Complemento para 2^n de x

- É o resultado da operação $2^n - x$

- Exemplo
  - O complemento para 2^4 de 0101 é 1011

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- & & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

- Propriedade
  - O complemento para 2^n do complemento para 2^n de x é x

- Propriedade
  - Sendo conhecido o número de bits, diz-se apenas **complemento para 2**

Cálculo do complemento para 2

- Outra forma de calcular o complemento para 2
  1. Encontrar o complemento para 1
     - Trocar o valor de cada bit
  2. Somar 1

- Exemplo
  - O complemento para 2^4 de 0101 é 1011
  - 0101 $\xrightarrow{\text{complemento para 1}}$ 1010 $\xrightarrow{\text{somar 1}}$ 1011

Cálculo do complemento para 2

- Outra forma de calcular o complemento para 2
  1. Da direita para a esquerda, copiar os bits até ao primeiro 1 (inclusive)
  2. Trocar o valor de cada um dos outros bits

- Exemplo
  - O complemento para 2^4 de 0101 é 1011
  - 0101 $\xrightarrow{\text{copiar bits até ao primeiro 1}}$ xxx1 $\xrightarrow{\text{trocar os outros bits}}$ 1011

Representação de números em complemento para 2 com n bits

- O bit mais significativo representa o sinal
  - 0 → o número é positivo
  - 1 → o número é negativo
- Número positivo
  - É o próprio número (representado com n bits)
- Número negativo
  - É o complemento para 2 do número positivo correspondente (representado com n bits)
- Propriedades
  - O resultado da soma de um número com o seu simétrico é zero

Intervalo de representação

- Com n bits conseguem-se representar os números no intervalo
  - $[-2^{n-1}, +2^{n-1} - 1]$
- Exemplo
  - Com 4 bits é possível representar os números entre - 8 e 7

0000	0	1000	-8
0001	1	1001	-7
0010	2	1010	-6
0011	3	1011	-5
0100	4	1100	-4
0101	5	1101	-3
0110	6	1110	-2
0111	7	1111	-1

Adição na representação C2

- Dois números positivos
  - (+2) + (+5) = +7

	0	0	1	0_{c2}
+	0	1	0	1_{c2}
0	0	1	1	1_{c2}

- Dois números negativos
  - (-2) + (-5) = -7

	1	1	1	0_{c2}
+	1	0	1	1_{c2}
$\cancel{1}$	1	0	0	1_{c2}

- Um números positivo e um negativo
  - (-2) + (+5) = +3

	1	1	1	0_{c2}
+	0	1	0	1_{c2}
$\cancel{1}$	0	0	1	1_{c2}

Nota: Apenas se consideram os n bits menos significativos

Subtração na representação C2

- x - y é equivalente a
  - $x + (- y)$

- Exemplo
  - 5 - 8
    = 5 + (-8)
    = - 3

  - 5 = 0 1 0 1 $_{C2}$
  - - 8 = 1 0 0 0 $_{C2}$
  - - 3 = 1 1 0 1 $_{C2}$

	0	1	0	1	c2
+	1	0	0	0	c2
	1	1	0	1	c2

Overflow

- Que acontece se o resultado da operação estiver “fora” do intervalo de representação?
  - Existe um erro de overflow

- Quando acontece?
  - Sempre que a soma de dois números (do mesmo sinal) não for representável com o número de bits disponível

- Como verificar?
  - A soma de 2 números positivos parece ser negativa
  - A soma de 2 números negativos parece ser positiva

Overflow

Exemplo

- Representação C2 com 4 bits
  - intervalo de representação [-8, 7]

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 0_{c2} \\
+ & 0 & 1 & 0 & 1_{c2} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1_{c2}
\end{array}
$$

- (+4) + (+5) = +9
  - O resultado parece negativo

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1_{c2} \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0_{c2} \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 1_{c2}
\end{array}
$$

- (-5) + (-6) = -11
  - O resultado parece positivo

Códigos

Código binário

- O que é
  - Forma de representar informação com “0” e “1”s

- Como se define?
  - Estabelecem-se palavras binárias (sequências de bits) com um nº adequado de bits; **e**
  - Faz-se uma correspondência entre cada uma das possibilidades de informação a codificar e as palavras

- Tipos
  - Numéricos
  - Alfanuméricos

Conceitos

- Palavra de código
  - Conjunto de bits
  - Representa uma das possibilidades de informação a codificar
- Comprimento da palavra
  - Número de bits da palavra
- Código regular
  - Todas as palavras do código têm o mesmo comprimento

Código numérico

- É um código para informação numérica
  - Para codificar valores numéricos

- Exemplo
  - Construir um código regular para controlar o elevador de um prédio de 5 andares
  - Quantas palavras?
  - 6: uma para cada andar + R/C
  - Qual o comprimento mínimo?
  - 3 bits

andar	cód. 1	cód. 2
R/C	000	000
1º	001	001
2º	010	011
3º	011	010
4º	100	110
5º	101	111

Código redundante

- É um código com palavras de comprimento maior que o estritamente necessário
- A redundância confere-lhe alguma capacidade para:
  - detecção de erros
  - correção de erros (eventualmente)
- Exemplo
  - Código onde cada andar é codificado com um nº par de "1"s
  - Se o elevador estiver num piso codificado por "0111" houve um erro!

andar	cód. 1
R/C	0000
1º	0011
2º	0101
3º	1100
4º	1010
5º	1001

Código CBN

- Código Binário Natural (CBN)
  - Código regular
  - Codifica em binário o seu equivalente decimal

- Se *n* for o comprimento da palavra
  - O nº máximo de palavras do código é 2^n

- Exemplo
  - CBN de comprimento 5
  - Consegue codificar 32 palavras
  - Equivalentes decimais de 0_{10} a 31_{10}

Código de Gray

- É um CBR
  - Construído a partir de um CBR com palavras do mesmo tamanho;
  - As palavras em linhas consecutivas são adjacentes.

- Construção recursiva
  1. Considera-se o código com palavras de comprimento 1;
  2. Para formar o código de n bits, parte-se do código de n - 1 bits, repetindo cada uma das suas palavras por ordem inversa (reflectidas no espelho);
  3. Junta-se-lhe o n-ésimo bit igual a 0 nas primeiras 2^{n-1} posições e igual a 1 nas 2^{n-1} seguintes.

Código de Gray com 3 bits

1 bit

0
1

0	0	0
1	0	1
1	1	1
0	1	0

2 bits: 00, 01, 11, 10

0	0
0	1
1	1
1	0
1	0
1	1
0	1
0	0

3 bits

0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Código BCD

- BCD (binary coded decimal) – decimal codificado em binário
  - Codifica os 10 dígitos do sistema decimal
- Utiliza as 10 primeiras palavras de comprimento do CBN
- Cada dígito decimal é codificado diretamente em 4 bits
- Exemplos
  - 37.5_{10} = $0011\ 0111\ .\ 0101_{BCD}$
  - $1001\ 1001_{BCD}$ = 11000011_2

decimal	cód. BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Código BCD

- BCD (binary coded decimal) – decimal codificado em binário
  - Codifica os 10 dígitos do sistema decimal
- Utiliza as 10 primeiras palavras de comprimento do CBN
- Cada dígito decimal é codificado diretamente em 4 bits
- Exemplos
  - $37.5_{10} = 0011\ 0111\ .\ 0101_{BCD}$
  - $1001\ 1001_{BCD} = 11000011_{2}$

decimal	cód. BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Código alfanumérico

- Para além de codificar informação numérica, codifica informação alfanumérica
  - Letras maiúsculas e minúsculas
  - Símbolos
  - Letras acentuadas
  - Símbolos
  - Etc.
- Exemplos
  - ASCII
  - ISO-9960-1 (isolatin1)
  - UNICODE
  - ...

Código ASCII

- ASCII – American Standard Code for Information Interchange
  - Utiliza palavras de comprimento 7

- Codifica
  - Símbolos de controlo
  - Símbolos de pontuação
  - Algarismos
  - Letras maiúsculas e minúsculas (A..Za..z)
  - Símbolos algébricos

- Limitações
  - Não contém símbolos de acentuação (foi desenhado para a língua inglesa)
  - Não é capaz de codificar símbolos das línguas orientais

Outros códigos

- Extensão ao ASCII
  - Pressuposto
    - Aumentar o comprimento da palavra para 8 bits, mantendo os 7 bits menos significativos iguais
  - Problema
    - Foram criados vários códigos alfanuméricos com este pressuposto
  - Exemplo: ISO-8859-1
    - Permite os caracteres acentuados das línguas da Europa Ocidental

- UNICODE
  - Código evolutivo com palavras de 16 bits, aberto à inclusão de novos caracteres e símbolos

Exercícios

Aritmética

1. A que valor (base 10) correspondem as representações C2 (com 10 bits) de:
   a. 0001110101
   b. 1111111101

2. Qual a representação C2 com 10 bits dos números (em sistema decimal):
   a. + 65
   b. - 5

3. Que operações realizadas em C2 com 6 bits produzem overflow?
   a. (+30) + (+5)
   b. (+17) - (-21)

Exercícios

Códigos

1. Qual o código CBN de comprimento mínimo para
   a. n=31
   b. n=1647
   c. n=52674

2. Construa o código de Gray de 5 bits

3. Considere o número 352.4_8 e represente-o em binário, decimal e BCD

4. Indique o código BCD para
   a. 12.5_{10}
   b. 123.1_{10}
   c. 11000111_2
   d. 21.5_8

Tarefas até à próxima aula prática

- Ficha 2: Aritmética e códigos binários
  - 1b);
  - 2a); 2b); 2c);
  - 3a); 3b);
  - 5b); 5d);
  - 6b);