UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Sistemas de Numeração

Sistemas Digitais 2020/2021

Pedro Salgueiro
CLAV-256
pds@uevora.pt

Sumário

- Sistemas de numeração posicionais
  - Sistema decimal
  - Sistema de numeração posicional
  - Sistema binário
  - Outras bases
- Conversão entre bases
  - Número inteiro
  - Número fracionário
- Exercícios

Sistemas de numeração posicionais

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Sistema decimal

- O que representa o número **253**?
    - Duzentos e cinquenta e três

- Como é decomposto?
    - Duas centenas, cinco dezenas e três unidades
    - $2 \times 100 + 5 \times 10 + 3$

- Isto no **Sistema Decimal**...

Sistema decimal

- Quantos algarismos distintos (dígitos) existem?
  - Dez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Quanto vale cada algarismo no número?
  - Sempre uma potência de 10
  - Depende da sua posição no número
- 253
  - 2 tem peso 10^2 (100)
  - 5 tem peso 10^1 (10)
  - 3 tem peso 10^0 (1)
- Sistema de numeração posicional de **base 10**

Sistema de numeração posicional

- Sistema de numeração onde:
  - Um número é formado por uma sequência de **algarismos** (dígitos)
  - Cada algarismo possui um **peso** de acordo com a posição que ocupa na sequência
  - O peso depende da **base** em que o número está representado

- Base *b*
  - Quantos dígitos?
    - **b** dígitos: 0, 1, 2, . . . b – 1
  - Que quantidade representa?
    - ${d_2 d_1 d_0}_b = d_2 * b^2 + d_1 * b^1 + d_0 * b^0$

Sistema de numeração posicional

- Capacidade da base
  - É o nº de valores inteiros que é possível representar numa base
  - Na base ***b***, com ***n*** algarismos, podem representar-se b^n valores distintos
- Exemplo
  - 3 algarismos
  - Sistema decimal (base 10),
  - Capacidade: $\mathbf{10^3 = 1000}$
  - Valores possíveis: 0, . . . , 10^3 - 1
    - 0, 1, . . . 9, 10, . . . , 99, 100, . . . ,999
- Exemplo
  - 3 algarismos
  - Base **b**
  - Capacidade: $\mathbf{b}^3$
  - Valores possíveis: 0 . . . b^3 **- 1**
    - 0, 1, . . ., b – 1, b^1, . . . , $b^2 - 1$, b^2, . . . , $b^3 - 1$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Sistema de numeração binário

- Que base?
  - **b** = 2
- Quantos dígitos?
  - **Dois**: 0, 1
- Qual a capacidade com 4 dígitos?
  - $2^4 = 16$
- Conseguem-se representar 16 valores: 0,1, . . ., 15
  - $0, 1, \ldots, 2^4 - 1$
- $\mathbf{1101_2}$ que quantidade representa?
  - $1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 13$

Sistema binário

Algumas definições importantes

- bit
  - 1 dígito binário
  - binary digit
- *byte*
  - Conjunto de 8 bits
- bit mais significativo
  - bit com maior peso (bit mais à esquerda)
  - MSB, *most significant bit*
  - **1**101
- bit menos significativo
  - bit com menor peso (bit mais à direita)
  - LSB, *least significant bit*
  - 110**1**

Sistema binário

Exemplo: número com 10 bits

- Capacidade
  - $2^{10} = 1024$

- Peso do **MSB** (*most significant bit*)
  - $1 * 2^9 = 512$

- Valor de 1100110001_2
  - $= 1 * 2^9 + 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$
  - $= 1 * 2^9 + 1 * 2^8 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^0$
  - $= 2^9 + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^0$
  - $= 817$

Sistema binário

Potências de 2 (designações conhecidas)

- K: kilo
  - $2^{10} = 1024$
  - Potência de 2 que mais se aproxima de 1000
- M: mega
  - $2^{20} = 2^{10} * 2^{10} = 1024 * 1K = 1M$
- G: giga
  - $2^{30} = 2^{20} * 2^{10} = 1024 * 1M = 1G$
- T: tera
  - $2^{40} = 2^{30} * 2^{10} = 1024 * 1G = 1T$
- P: peta
  - $2^{50} = 2^{40} * 2^{10} = 1024 * 1T = 1P$

Potências de 2 até 10

n	**2^n**
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Outras bases

- Sistema hexadecimal
- Sistema octal

Sistema hexadecimal

- Que base?
  - b = 16
- Quantos dígitos?
  - Dezasseis: 0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F
  - $A_{16} = 10_{10}$
  - …
  - $F_{16} = 15_{10}$
- Qual a capacidade com 4 dígitos?
  - $16^4 = 65536 \rightarrow 0 \ldots 65535$
- **$1AC4_{16}$** que quantidade representa?
  - $1 * 16^3 + 10 * 16^2 + 12 * 16^1 + 4 * 16^0 = 4096 + 2560 + 192 + 4 = 6852$

Sistema octal

- Que base?
  - b = 8
- Quantos dígitos?
  - Oito: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- Qual a capacidade com 4 dígitos?
  - $8^4 = 4096 \rightarrow 0 \ldots 4095$
- 1274_8 que quantidade representa?
  - $1 * 8^3 + 2 * 8^2 + 7 * 8^1 + 4 * 8^0 = 512 + 128 + 56 + 4 = 700$

Conversão entre bases

Conversão entre bases

- Número inteiro
- Número fracionário

Número inteiro

- Valor de um número inteiro
  - Indica a **quantidade** representada

- A que **valor** corresponde a representação $d_3d_2d_1d_{0\ \boldsymbol{b}}$?
  - Converte-se da base ***b*** para decimal
  - $d_3d_2d_1d_{0\ \boldsymbol{b}} = d_3 * b^3 + d_2 * b^2 + d_1 * b^1 + d_0 * b^0$

- Exemplo
  - $1036_7 = 1 * 7^3 + 0 * 7^2 + 3 * 7^1 + 6 * 7^0$
    $= 343 + 0 + 21 + 6$
    $= 370$

Número inteiro

- Representação de um número inteiro
  - Representa uma determinada quantidade
  - A representação depende da **base**

- Qual a **representação** do número $d_3 d_2 d_1 d_0$ na base b?
  - Converte-se do sistema decimal para a base *b*
  - Utiliza-se o método das divisões sucessivas

Número inteiro

- Método das divisões sucessivas
  - Retêm-se os **restos** das sucessivas divisões inteiras e dos quocientes entretanto obtidos por **b**, até obter quociente nulo

- Peso dos algarismos
  - O **menos** significativo é aquele resultante da primeira divisão efectuada
  - O **mais** significativo é aquele resultante da última divisão efectuada

Método das divisões sucessivas

Exemplo

- Qual a representação de 136_{10} na base 2?
  - fazem-se **divisões inteiras** sucessivas por **dois**, retendo o resto
  - $136_{10} = 10001000_2$

quociente	resto	
136	**0**	← LSB
68	0	
34	0	
17	1	
8	0	
4	0	
2	0	
1	**1**	← MSB
0		

Método das divisões sucessivas

Base 16

- Fazem-se divisões inteiras sucessivas por **dezasseis**, retendo o resto

quociente	resto
136	8
8	8
0	

  - $136_{10} = 88_{16}$

Base 6

- Fazem-se divisões inteiras sucessivas por **seis**, retendo o resto

quociente	resto
136	4
22	4
3	3
0	

  - $136_{10} = 344_{6}$

Número inteiro

Conversão entre bases **b1** e **b2** (diferentes da base 10)

- Utiliza-se a **base 10** como base intermédia:
  1. Encontra-se o valor do número representado por b1
     - $b_1 \rightarrow b_{10}$
     - $d_3d_2d_1d_{0\ b1} = d_3 * b_1^2 + d_2 * b_1^2 + d_1 * b_1^1 + d_0 * b_1^0$
  2. Encontra-se a sua **representação** na base b_2
     - $b_{10} \rightarrow b_2$
     - método das divisões sucessivas por b_2

Número inteiro

Conversão directa entre bases

- Entre as bases binária e hexadecimal
  - Não é necessário usar a base intermédia
  - 16 é a quarta potência de 2 ($16 = 2^4$), cada dígito hexadecimal corresponde a 4 dígitos binário
- Binária para hexadecimal
  - A partir do bit menos significativo, **formar grupos de 4 bits** e escrever um dígito hexadecimal por cada grupo
- Hexadecimal para binária
  - Cada dígito hexadecimal é convertido em **4 bits**
- Exemplo
  - $\underline{110}\ \underline{1100}\ \underline{0010}_{\ 2} = 6C2_{\ 16}$
  - $A05_{\ 16} = 1010\ 0000\ 0101_2$

Número inteiro

Conversão directa entre bases

- Entre as bases binária e octal
  - 8 é a **terceira potência** de 2 ($8 = 2^3$), cada dígito octal corresponde a 3 dígitos binários

- Exemplo
  - $\underline{11}\ \underline{011}\ \underline{000}\ \underline{010}\ _2 = 3302\ _8$
  - $705\ _8 = 111\ 000\ 101\ _2$

- E entre as bases 3 e 9?

Número fraccionário

Se o número tiver parte fracionária

- Conversão $b_1 \rightarrow 10$
  - As potências são negativas para a parte fracionária
  - $d_0.d_1d_2d_{3\ b} = d_0 * b^0 + d_1 * b^{-1} + d_2 * b^{-2} + d_3 * b^{-3}$
- Conversão 10 → b1
  - Separa-se a parte inteira da parte fracionária
  - Parte inteira → método das divisões sucessivas
  - Parte Fracionária → método das multiplicações sucessivas

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Método das multiplicações sucessivas

- Retêm-se as partes inteiras da multiplicação por **b** das sucessivas partes fracionárias, até que seja atingida a parte fracionária nula (ou a precisão pretendida)
- Peso dos algarismos
  - O mais significativo é aquele resultante da primeira multiplicação efetuada
  - O menos significativo é aquele resultante da última multiplicação efetuada

Método das multiplicações sucessivas

Exemplo

- Qual a representação de 0.375_{10} na base 2?

parte fracionária	parte inteira	
0.375	0	← MSB
0.75	1	
0.5	1	← LSB
0		

  - $0.375_{10} = 0.011_2$

Método das multiplicações sucessivas

Precisão da conversão

- E se a parte fracionária nula não é atingida?
  - A capacidade na nova base $\mathbf{b_2}$ deve ser pelo menos igual à capacidade original $\mathbf{b_1}$:

$$b_2^{n_2} \geq b_1^{n_1} \Rightarrow n_2 \geq \frac{n_1 \ \log b_1}{log b_2}$$

- Exemplos
  - $201.1_3 = 20.3_{10}$

$$n_2 \geq \frac{1\ log3}{log10} = 0.4771 \rightarrow n_2 = 1$$

  - $0.48_{10} = 0.0111101_2$

$$n_2 \geq \frac{2\ log10}{log2} = 6.6439 \rightarrow n_2 = 7$$

Exercícios

Exercícios

Converta para base 10:

- 1010101_2
- $A2D.9B_{16}$
- 0.46_7

Converta para as bases 2 e 16:

- 2_{10}
- 712.5_{10}

Converta para base 2:

- $EA2.F5_{16}$
- 432.56_8
- 2031.123_4

Converta para as bases 8 e 16:

- 1101101.1001101_2
- 101110.0000111_2

Exercícios

Converta para base 10:

- 1010101_2
  - $= 1 * 2^6 + 1 * 2^4 + 1 * 2^2 + 1 * 2^0$
  - $= 64 + 16 + 4 +1$
  - $= 85_{10}$

- $A2D.9B_{16}$
  - $= A * 16^2 + 2 * 16^1 + D * 16^0 + 9 * 16^{-1} + B * 16^{-2}$
  - $= \mathbf{10} * 16^2 + 2 * 16^1 + \mathbf{13} * 16^0 + 9 * 16^{-1} + \mathbf{11} * 16^{-2}$
  - $= 10 * 256 + 2 * 16 + 13 * 1 + 9 * 0.0625 + 11 * 0.0039625$
  - $= 2605{,}60546875_{10}$

- 0.46_7
  - $= 4 * 7^{-1} + 6 * 7^{-2}$
  - $= 4 * 0.14 + 6 * 0.02$
  - $= 0.69_{10}$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exercícios

Converta 2_{10} para base 2

- Usar o métodos das divisões sucessivas por 2

quociente	resto
2	0
1	1
0	

  - $2_{10} = 1\,0_{2}$

Converta 2_{10} para base 16

- Usar o métodos das divisões sucessivas por 16

quociente	resto
2	2
0	

  - $2_{10} = 2_{16}$

Exercícios

Converta 712.5_{10} para base 2

- Parte inteira: usar o métodos das divisões sucessivas

quociente	resto
712	0
356	0
178	0
89	1
44	0
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

  - $712_{10} = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0_2$

- Parte fracionária: usar o métodos das multiplicações sucessivas

parte fracionária	parte inteira
0.5	1
0	

  - $0.5_{10} = 0.1_2$

- $712.5_{10} = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ .\ 1_2$

Exercícios

Converta 712.5_{10} para base 16

- Opção 1:
  - Converter directamente para base 16
  - Parte inteira: método das divisões sucessivas
  - Parte fracionário: método das multiplicações sucessivas

- Opção 2:
  - $16 = 2^4$
  - 16 é a 4ª potência de 2
  - Converter de base 10 para base 2
  - Converter directamente de base 2 para base 16
  - Cada 4 bits (na base 2), dá origem a 1 dígito hexadecimal

Exercícios

Converta 712.5_{10} para base 16

- Opção 1: Converter directamente para base 16
  - Parte inteira: divisões sucessivas por 16

quociente	resto	
712	8	712 /16 = 44 + 8
44	C	44 / 16 = 2 + 12
2	2	2 / 16 = 0 + 2
0		

  - Parte fracionária: multiplicações sucessivas por 16

parte fracionária	parte inteira	
0.5	8	0.5 * 16 = 8.0
0		

  - $712.5_{10} = 2\ C\ 8\ .\ 8\ _{16}$

Exercícios

Converta 712.5_{10} para base 16

- Opção 2: Conversão directa de base 2 para base 16
  - $16 = 2^4$
  - 16 é a 4ª potência de 2
  - Converter de base 10 para base 2
  - Converter directamente de base 2 para base 16
  - Cada 4 bits (na base 2), dá origem a 1 dígito hexadecimal

  - $$\begin{aligned} 712.5_{10} &= 1\,0\,\underline{1\,1\,0\,0}\,\underline{1\,0\,0\,0}\,.\,1_2 \\ &= \underline{0\,0\,1\,0}\,\underline{1\,1\,0\,0}\,\underline{1\,0\,0\,0}\,.\,\underline{1\,0\,0\,0}\;_2 \\ &= \quad 2 \qquad C \qquad 8 \quad . \quad 8\;_{16} \\ &= 2\,C\,8\,.\,8\;_{16} \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exercícios

Converta $EA2.F5_{16}$ para base 2

- Conversão directa de base 2 para base 16
    - $16 = 2^4$
    - 16 é a 4ª potência de 2
    - Converter directamente de base 2 para base 16
    - Cada dígito hexadecimal dá origem a 4 bits (na base 2)
        - $E_{16} = 14_{10} = 1\,1\,1\,0_2$
        - $A_{16} = 10_{10} = 1\,0\,1\,0_2$
        - $2_{16} = 2_{10} = 0\,0\,1\,0_2$
        - $F_{16} = 15_{10} = 1\,1\,1\,1_2$
        - $5_{16} = 5_{10} = 0\,1\,0\,1_2$
    - $EA2.F5_{16} = \underline{1\,1\,1\,0}\ \underline{1\,0\,1\,0}\ \underline{0\,0\,1\,0}\,.\,\underline{1\,1\,1\,1}\ \underline{0\,1\,0\,1}_2$

Exercícios

Converta 1101101.1001101_2 para as bases 8 e 16:

- Conversão directa de base 2 para base 8
  - $8 = 2^3$
  - Cada 3 bits dão origem a um dígito na base 8
  - $1\ \underline{1\,0\,1}\ \underline{1\,0\,1}\,.\,\underline{1\,0\,0}\,\underline{1\,1\,0}\,1_2$
  - $\underline{0\,0\,1}\ \underline{1\,0\,1}\ \underline{1\,0\,1}\,.\,\underline{1\,0\,0}\ \underline{1\,1\,0}\ \underline{1\,1\,1}_2$
  - $1 \quad 3 \quad 3 \;.\; 4 \quad 6 \quad 7_8$
  - $1\ 1\,0\,1\ 1\,0\,1\,.\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1_2 = 1\,3\,3\,.\,4\,6\,7_8$

Exercícios

Converta 1101101.1001101_2 para as bases 8 e 16:

- Conversão directa de base 2 para base 16
  - $16 = 2^4$
  - Cada grupo de 4 bits dá origem a um dígito na base 16
  - $1\,1\,0\ \underline{1\,1\,0\,1}\,.\,\underline{1\,0\,0\,1}\ 1\,0\,1_{\,2}$
  - $\underline{0\,1\,1\,0}\ \underline{1\,1\,0\,1}\,.\,\underline{1\,0\,0\,1}\ \underline{1\,0\,1\,0}_{\,2}$
  - 6 C . 9 A_{16}
  - $1\,1\,0\,1\,1\ 0\,1\,.\,1\,0\,0\ 1\,1\ 0\,1_{\,2} = 6C.9A_{16}$

Tarefas até à próxima aula prática

- Ficha 1: Bases de numeração
    - 1.a); 1.c)
    - 2.a); 2.c)
    - 3.a); 3.c)
    - 4.c)
    - 5.c)