

Uso das regras DNQ

Porque é que $\forall x\ p(x) \vdash \exists x\ p(x)$ mas $\exists x\ p(x) \nvdash \forall x\ p(x)$

Regras

Regra	Forma	Restrições
$\forall-$	$\forall x\ p(x) \vdash p(t)$	t livre para x em p.
$\exists+$	$p(t) \vdash \exists x\ p(x)$	t livre para x em p.
$\forall+$	$[a: \dots p(a)] \vdash \forall x\ p(x)$	a não ocorre fora da subprova nem em hipóteses.
$\exists-$	$\exists x\ p(x), [a: p(a) \vdash q] \vdash q$	a não ocorre fora da subprova.

Casos

$\forall x\ p(x) \vdash \exists x\ p(x)$

Linha	Fórmula	Regra	Base	Observação
1	$\forall x\ p(x)$	H		
2	$p(a)$	$\forall-$	1	a variável nova.
3	$\exists x\ p(x)$	$\exists+$	2	como a é nova, não ocorre em p logo é livre para x em p.

$\exists x\ p(x) \nvdash \forall x\ p(x)$

Linha	Fórmula	Regra	Base	Observação
1	$\exists x\ p(x)$	H		
2	$p(a)$	H	(3)	a variável nova
3	$\forall x\ p(x)$	$\forall+$	2–2	a não ocorre aqui
4	$\forall x\ p(x)$	$\exists-$	1, 2–3	a não ocorre em (3)

O erro está na linha 3; Não se pode aplicar $\forall-$ porque a ocorre numa hipótese, 2 $p(a)$ H.

$\forall x\ p(x) \vdash \forall y\ p(y)$

Linha	Fórmula	Regra	Base	Observação
1	$\forall x\ p(x)$	H		
2	$p(a)$	$\forall-$	1 (3)	a variável nova.
3	$\forall y\ p(y)$	$\forall+$	2–2	a já não ocorre aqui.

Note-se que a não ocorre em nenhuma hipótese.

$\exists x\ p(x) \vdash \exists y\ p(y)$

Linha	Fórmula	Regra	Base	Observação
1	$\exists x\ p(x)$	H		
2	$p(a)$	H	(4)	a variável nova
3	$\exists y\ p(y)$	$\exists+$	2	como a nova também livre para x em p
4	$\exists y\ p(y)$	$\exists-$	1, 2–3	a não ocorre em (3)