Funções binárias

Sistemas Digitais 2020/2021

Pedro Salgueiro
CLAV-256
pds@uevora.pt

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Funções binárias

- Álgebra de Boole binária
  - Álgebra de Boole
  - Álgebra de Boole binária
  - Tabelas de verdade
  - Propriedades e Teoremas

- Representação de funções
  - Representação Algébrica
  - Logigrama
  - Tabela de verdade

- Formas canónicas
  - Soma de Mintermos
  - Produto de Maxtermos

- Conjunto Universal de funções

- Exercícios

Algebra de Boole binária

Algebra de Boole binária

Algebra de Boole

- Definida por George Boole em 1854

- Conceitos básicos
  - Variável com 2 valores possíveis
  - VERDADE (TRUE)
  - FALSO (FALSE)

- 3 operadores
  - E (AND)
  - OU (OR)
  - NÃO (NOT)

Algebra de Boole binária

Variáveis e funções booleanas

- Variável booleana
  - Toma valores do conjunto *{ V, F }*
  - Exemplos: x, A, z5, w

- Função booleana de *n* variáveis
  - Aplicação do conjunto $\{ V, F \}^n$ no conjunto $\{ V, F \}$
  - exemplo: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Algebra de Boole binária

- É a adaptação da álgebra de Boole aos circuitos digitais
  - Proposta por Claude Shannon em 1938
- Como um circuito digital tem dois estados possíveis
  - LOW: 0
  - HIGH: 1
- Foi proposto o seguinte mapeamento
  - FALSO → 0
  - VERDADEIRO → 1

Algebra de Boole binária

- Variável binária
  - Toma valores do conjunto {0,1}
  - Exemplos: A, B, C, …

- Função binária de n variáveis
  - A aplicação do conjunto $\{0,1\}^n$ no conjunto {0,1}
  - Exemplo: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- Operadores
  - Complemento: ~ **ou** $\overline{}$
  - Soma lógica: +
  - Produto lógico: · (ponto)

Algebra de Boole binária

Funções de 1 variável

- Funções constantes
  - $f(x) = 1$
  - $f(x) = 0$

- Função identidade
  - $f(x) = x$

- Função complemento (negação, NÃO, NOT)
  - $f(x) = \overline{x}$
  - Se $x=1 \rightarrow f(x) = 0$
  - Se $x=0 \rightarrow f(x) = 1$

Algebra de Boole binária

Funções de 2 variáveis

- Funções constantes
  - $f(x,y) = 0$
  - $f(x,y) = 1$

- Função identidade
  - $f(x,y) = x$
  - $f(x,y) = y$

- Função complemento
  - negação, NÃO, NOT
  - $f(x,y) = \overline{x}$
  - $f(x,y) = \overline{y}$

- Soma lógica (OU, OR)
  - $f(x,y) = x + y$
  - f(x) = 1 quando x =1 ou y = 1

- Produto lógico (E, AND)
  - $f(x,y) = x \cdot y$
  - f(x) = 1 quando x = 1 e y = 1

Algebra de Boole binária

Funções de 2 variáveis

- NOR (Negated OR)
  - $f(x, y) = \overline{x + y}$
  - É o complemento da função OR
- NAND (Negated AND)
  - $f(x, y) = \overline{x . y}$
  - É o complemento da função AND
- XOR (eXclusive OR)
  - $f(x, y) = x \oplus y$
  - f(x) = 1 quando x ≠ y
- EQ (Equivalence)
  - Também conhecida como XNOR
  - Negated XOR
  - $f(x, y) = \overline{x \oplus y}$
  - f(x) = 1 quando x = y
  - Complemento da função XOR

Algebra de Boole binária

Funções com mais de 2 variáveis

- AND
  - $f(k, l \ldots, z) = k \cdot l \cdot \ldots \cdot z$
  - É 1 quando **todas** as variáveis são 1
- OR
  - $f(k, l \ldots, z) = k + l + \ldots + z$
  - É 1 quando **pelo menos** uma variável é 1
- XOR
  - $f(k, l \ldots, z) = k \oplus l \oplus \ldots \oplus z$
  - É 1 quando um número ímpar de variáveis é 1

- NAND
  - $f(k, l \ldots, z) = \overline{k \cdot l \cdot \ldots \cdot z}$
- NOR
  - $f(k, l \ldots, z) = \overline{k + l + \ldots + z}$
- XNOR
  - $f(k, l \ldots, z) = \overline{k \oplus l \oplus \ldots \oplus z}$

Tabela de verdade

- É uma representação em extensão
  - Indica o valor da função para cada valor possível da variável

- Funções de 1 variável

Função constante 0

x	$f(x) = 0$
0	0
1	0

Função constante 1

x	$f(x) = 1$
0	1
1	1

Função identidade

x	$f(x) = x$
0	0
1	1

Função complemento

x	$f(x) = \overline{x}$
0	1
1	0

Tabela de verdade

Funções de 2 variáveis

- Existem 16 funções diferentes

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$f_0(x,y) = 0$

$f_{15}(x,y) = 1$

$f_{12}(x,y) = x$

$f_{10}(x,y) = y$

$f_3(x,y) = \overline{x}$ NOT x

$f_5(x,y) = \overline{y}$ NOT y

$f_8(x,y) = x \cdot y$ AND

$f_{14}(x,y) = x + y$ OR

$f_1(x,y) = \overline{x + y}$ NOR

$f_7(x,y) = \overline{x \cdot y}$ NAND

$f_6(x,y) = x \oplus y$ XOR

$f_5(x,y) = \overline{x \oplus y}$ XNOR

Tabela de verdade

Nº de funções distintas

- 1 variável
  - 4 funções
  - 1 variável: 2 valores possíveis (2^1)
  - $4 = (2^2)^1$
- 2 variáveis
  - 16 funções
  - 2 variáveis: 4 valores possíveis (2^2)
  - $16 = (2^2)^2$
- …
- n variáveis
  - $(2^2)^n$ funções
  - n variáveis: 2^n valores possíveis

Propriedades e teoremas

Convenções

- Precedência
    - produto lógico > soma lógica
    - $A + B . C = A + (B . C)$
- Omissão do operador lógico
    - $AB = A . B$
    -
- Um literal é uma variável ou o seu complemento

Propriedades e teoremas

Propriedades das funções

- Comutativa
  - $A \cdot B = B \cdot A$
  - $A + B = B + A$

- Associativa
  - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$

- Distributiva
  - $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
  - $A + B \cdot C = (A + B) . (A + C)$

Propriedades e teoremas

Propriedades das funções

- Elemento neutro
  - $A \cdot 1 = A$
  - $A + 0 = A$
- Elemento absorvente
  - $A \cdot 0 = 0$
  - $A + 1 = 1$
- Complemento
  - $A \cdot \overline{A} = 0$
  - $A + \overline{A} = 1$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Propriedades e teoremas

Teoremas principais

- Idempotência
  - $A \cdot A = A$
  - $A + A = A$
- Dupla negação
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- Leis de DeMorgan
  - $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
  - $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Propriedades e teoremas

Outro teoremas

- Absorção
  - $A + A \cdot B = A$
  - $A \cdot (A + B) = A$

- Redundância
  - $A + \overline{A} \cdot B = A + B$
  - $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

- Adjacência
  - $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$
  - $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

Propriedades e teoremas

Propriedades do XOR - OU-exclusivo

- Comutativa
  - $A \oplus B = B \oplus A$
- Associativa
  - $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- Outras
  - $A \oplus 0 = A$
  - $A \oplus 1 = \overline{A}$
  - $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
  - $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B = A \oplus \overline{B}$

Representação de funções

Representação algébrica

- Utiliza expressões booleanas

- Várias expressões podem representar a mesma função
  - Passa-se de uma para as outras através de manipulações algébricas

- Exemplo
  - $F(A, B, C) = A\,B + A\,\overline{C} = A\,(\,B + \overline{C}\,)$
  - A 2ª expressão é obtida utilizando a distributividade do produto em relação à soma

Representação algébrica

Formas de representação

- Forma normal disjuntiva ou soma de produtos
  - $F = A\,B + A\,\overline{C}$
- Forma normal conjuntiva ou produto de somas
  - $F = A\,(B + \overline{C})$
- Forma mista
  - $G = A\,B + \overline{A}\,B\,C\,(X + Y)$
- Nota
  - É sempre possível obter as formas normais

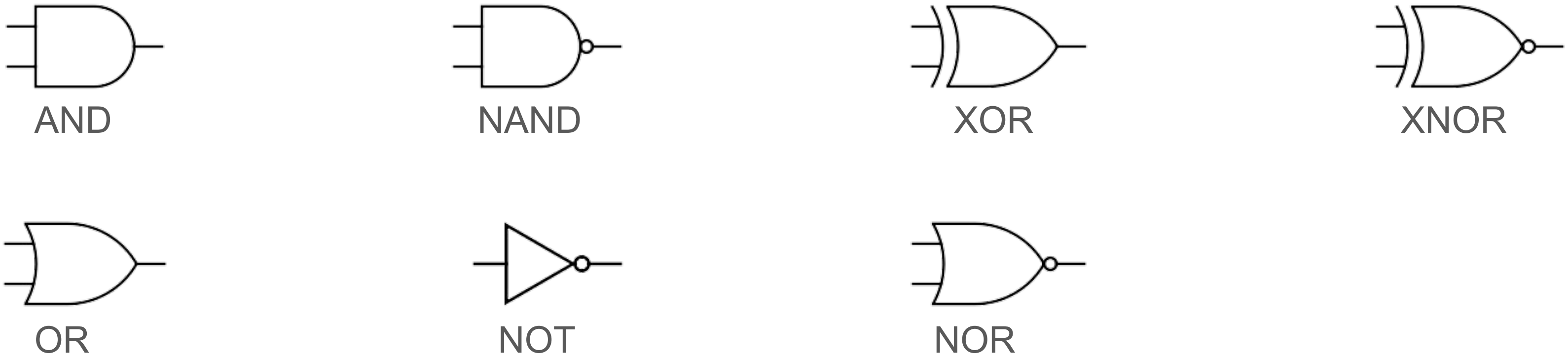
Representação através de Logigrama

- Representação através de **simbologia gráfica**
  - Conjunto de entradas, uma saída e componentes
- Conjunto de entradas
  - Variáveis da função
- Saída
  - Valor da função
- Componentes
  - Circuitos lógicos
  - Ligações

Representação através de Logigrama

Porta lógica

- Representação gráfica de cada função lógica básica

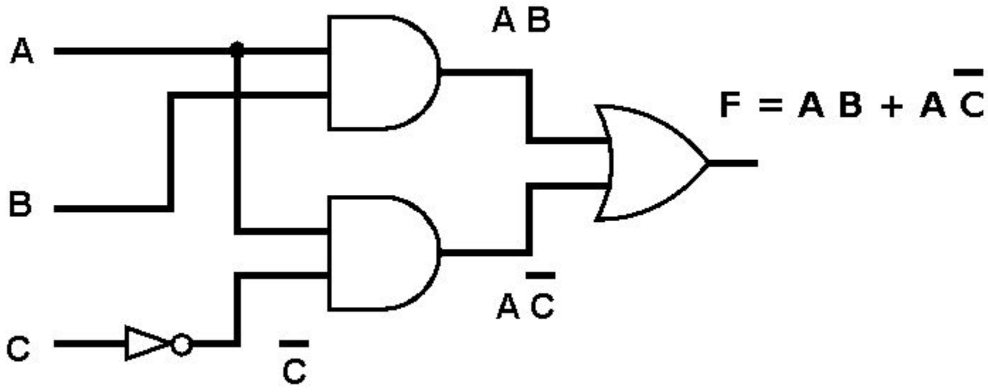


- O nº de entradas pode ser estendido para um número de n ≥ 2, excepto o NOT que apenas tem uma entrada

Circuito Lógico

- Um circuito lógico é construído ligando as saídas das portas lógicas à entrada de outras conforme a função a implementar

- $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$



Representação através de Tabela de verdade

- É **única** para cada função
- Estrutura
  - n + 1 colunas
    - n para as variáveis booleanas
    - 1 para o resultado da função
  - 2^n linhas
    - 1 para cada combinação possível de valores das variáveis

Exemplo

- $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Construção das linhas da tabela de verdade

- N variáveis → 2^n linhas
- Começa-se por preencher a variável mais à esquerda
  - as primeiras $2^n/2$ linhas têm valor 0
  - as últimas têm valor 1
- Preenche-se depois a variável à direita
  - as primeiras 2^n / 4 linhas têm valor 0
  - as seguintes 2^n / 4 linhas têm valor 0
  - repete-se o procedimento para as restantes 2^n / 2 linhas
- Vai-se repetindo o procedimento. A última variável tem, alternadamente os valores 0 e 1 em cada linha

Construção das linhas da tabela de verdade

- Exemplo: 3 variáveis
  - 3 variáveis: 8 linhas

A	B	C
0		
0		
0		
0		
1		
1		
1		
1		

A	B	C
0	0	
0	0	
0	1	
0	1	
1	0	
1	0	
1	1	
1	1	

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Leitura da tabela de verdade

Cada linha corresponde a um produto lógico de todos os literais

- F é 1 quando
  - (A,B,C) = (1,0,0), ou seja $A\,\overline{B}\,\overline{C} = 1$
  - (A,B,C) = (1,1,0), ou seja $A\,B\,C = 1$
  - (A,B,C) = (1,1,1), ou seja $A\,B\,\overline{C} = 1$
- Ou seja
  - $F = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
- Por manipulação algébrica
  - $F = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
    $= A\,\overline{C}\,(\overline{B} + B) + A\,B\,C$
    $= A\,\overline{C} + A\,B\,C$
    $= A\,(\overline{C} + B\,C)$
    $= A\,(\overline{C} + B)$
    $= A\overline{C} + A\,B$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Escrita da tabela de verdade

- Analisar os casos em que a função é 1
- G(A,B,C) = A B C + A B + A
- G é quando
    - $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ = 1, ou seja, (A,B,C) = (0,0,0)
    - $\overline{A}$ B = 1, ou seja, (A,B,C) = (0,1,0)
(A,B,C) = (0,1,1)
    - A = 1, ou seja, (A,B,C) = (1,0,0)
(A,B,C) = (1,0,1)
(A,B,C) = (1,1,0)
(A,B,C) = (1,1,1)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

UNIVERSIDADE
DE ÉVORA

Escrita da tabela de verdade

- Para funções mais complexas
  - pode-se gerar as tabelas de funções parciais para construir a função final

- G(A,B,C) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B} + A$

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,B$	A	G
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Formas canónicas

Soma de mintermos

- **Mintermo** ou **termo minimal**
  - Produto que envolve **todos** os literais
  - Corresponde a uma linha da tabela de verdade

- **Soma de mintermos**
  - Soma de produtos onde todos os factores são mintermos
  - Cada mintermo está associado a **um 1** da tabela

- **Também conhecida como**
  - 1ª Forma canónica
  - Forma canónica disjuntiva
  - Forma canónica AND-OR

Soma de mintermos

Representação decimal

- Ao numerar as linhas, cada mintermo pode ser referido através das respectiva linha linha da tabela de verdade

- Soma de mintermos
  - $F = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

- Representação decimal
  - $F = m_4 + m_6 + m_7$
  - $F = \sum m(4,6,7)$

	A	B	C	F	
0	0	0	0	0	m_0
1	0	0	1	0	m_1
2	0	1	0	0	m_2
3	0	1	1	0	m_3
4	1	0	0	1	m_4
5	1	0	1	0	m_5
6	1	1	0	1	m_6
7	1	1	1	1	m_7

Produto de maxtermos

- **Maxtermo** ou **termo maximal**
  - Soma que envolve **todos** os literais
  - Corresponde a uma linha da tabela de verdade

- **Produto de maxtermos**
  - Produto das somas onde **todas** as parcelas são maxtermos
  - Cada maxtermo está associado a **um 0** da tabela

- **Também conhecida como:**
  - Segunda forma canónica
  - Forma canónica conjuntiva
  - Forma canónica OR-AND

Produto de maxtermos

Representação decimal

- Cada maxtermo é construído utilizando uma função
  - É 0 para uma linha da tabela em que a função é zero
  - É 1 para as restantes linhas
- Produto de maxtermos
  - $F = G1 \cdot G2 \cdot G3 \cdot G4 \cdot G5$
  - $G1 = A + B + C$
  - $G2 = A + B + \overline{C}$
  - $G3 = A + \overline{B} + C$
  - $G4 = A + \overline{B} + \overline{C}$
  - $G5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
- Representação decimal
  - $F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5$
  - $F = \prod M(0, 1, 2, 3, 5)$

	A	B	C	F	G_1	G_2	G_2	G_4	G_5	
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	M_0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	M_1
2	0	1	0	0	1	1	0	1	1	M_2
3	0	1	1	0	1	1	1	0	1	M_3
4	1	0	0	1	1	1	1	1	1	M_4
5	1	0	1	0	1	1	1	1	0	M_5
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	M_6
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	M_7

Mintermos e Maxtermos

- Para qualquer função booleana de n variáveis
  - $m_i = \overline{M_i}$
  - $M_i = \overline{m_i}$, com $0 \leq i \leq 2^n - 1$
- No entanto,
  - se a função possui m_i, na primeira forma canónica, não pode conter M_i
- Exemplo
  - $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$
  - $F = m_4 + m_6 + m_7 = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
  - $F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5$
    $= (A + B + C)\,(A + B + \overline{C})\,(A + \overline{B} + C)\,(A + \overline{B} + \overline{C})\,(\overline{A} + B + \overline{C})$

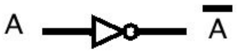
Conjunto universal de funções

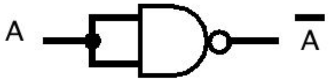
Conjunto universal de funções

- Conjunto Universal ou Completo
  - É um conjunto de funções booleanas (básicas) que permite representar qualquer função booleana simples
- {AND, OR, NOT}
  - 1ª e 2ª formas canónicas
- {NAND}
- {NOR}

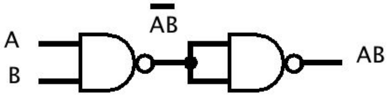
Conjunto universal {NAND}

- NOT

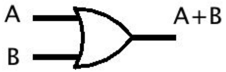


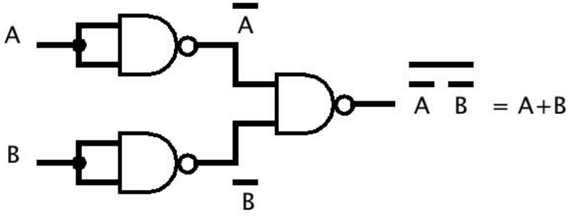


- AND



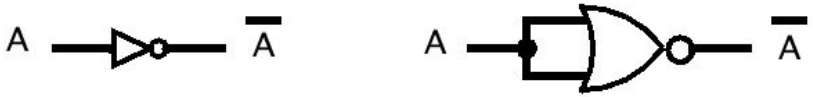
- OR



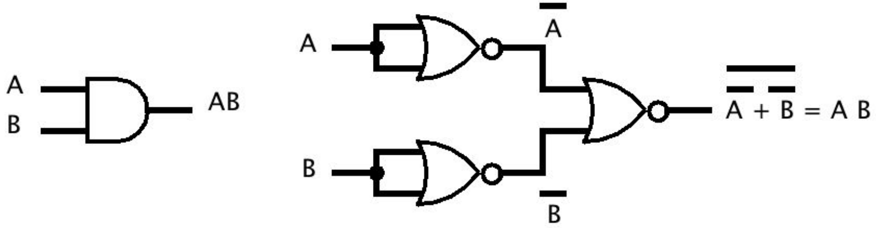


Conjunto universal {NOR}

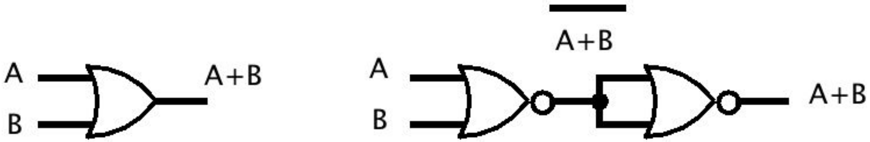
- NOT



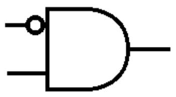
- AND

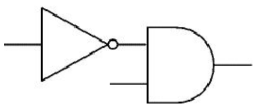


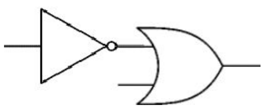
- OR



Outra simbologia usada







UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exercícios

1. Determine a expressão mais simples na forma normal disjuntiva da função
   a. $f(A, B, C) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C)$

2. Desenhe a tabela de verdade e logigrama das funções seguintes e identifique as correspondentes formas canónicas
   a. $f(A, B, C, D) = \overline{A}\,(\overline{B} + \overline{C}(B + D))$
   b. $g(A, B, C) = \overline{AC} + BC$

3. Numere os seguintes mintermos e maxtermos
   a. $A + B$
   b. $A\,B\,\overline{C}$
   c. $A\overline{B}C\overline{D}$

4. Desenhe o logigrama da função $f(A, B, C) = (A \oplus C)\,B + BC + AC$ utilizando apenas
   a. AND, OR e NOT
   b. NANDs
   c. NORs

Tarefas até à próxima aula prática

- Ficha 3: Funções binárias e álgebra de Boole
    - 1.a)
    - 2.a)
    - 3.a), 3.b)
    - 5.a), 5.b, 5.c)