

TP 2

Le but de ce TP est de montrer l'efficacité d'un algorithme de Schur (inexacte) sur un problème de Stokes (2d et voir 3d).

Ceci est un TP compétitif, le meilleur temps de résolution aura un bonus !

Le problème de Stokes incompressible s'écrit sur un domaine Ω :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (1)$$

On se placera dans le cas où $\Omega =]0,1[^2$, avec un modèle de cavité entraînée (voir [1] p112). Pour la discrétisation nous utiliserons un schéma de MAC (voir [1] p104) avec un pas d'espace $h = \frac{1}{N+1}$, qui donne une structure matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

A et B pouvant se sous-structurer bloc (bloc-diagonal pour A).

Supposons A inversible, alors soit S le complément de Schur correspondant à l'élimination de champ de vitesse.

1. Ecrire des fonctions pour assembler le système (1) par bloc. Faire une seule matrice (globale) (problème de la cavité entraînée), afficher la solution (\vec{u} et p). On utilisera l'opérateur `\` pour résoudre le système.
2. Tracer en fonction de h le temps de résolution de `\` et `gmres`. Pour cette dernière méthode on pourra utiliser un préconditionneur `ILU`.
3. Ecrire l'algorithme du gradient conjugué appliqué à S . On pourra utiliser différentes approches (sous blocs, préconditionneurs...). Implémenter une fonction `inex_Schur` avec les paramètres nécessaires (itérations interne ou réduction du résidu). Tracer en fonction de h les temps de résolution suivant les différentes stratégies.
4. Comparer les vitesses de résolution. L'objectif est à taille de problème fixée (assez grande) d'obtenir le meilleur temps de résolution suivant différentes stratégies (Matrice globale, matrice par bloc et complément de Schur...).
5. Et en 3d... que se passe-t-il ?

Référence :

[1] <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Jean-Francois.Scheid/Enseignement/polyM2IMOI.pdf>