MA311 - Cálculo III

Ricardo M Martins
rmiranda@unicamp.br

http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda

November 19, 2021

Integrais

Sabemos como encontrar funções $y(t)$ *boas* e com a propriedade de que

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t), \tag{1}$$

onde $f(t)$ é outra função:

Integrais

Sabemos como encontrar funções $y(t)$ *boas* e com a propriedade de que

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t), \tag{1}$$

onde $f(t)$ é outra função: fixando $y(0) = c$ então

$$y(t) = \int_0^t f(s)\, ds + c.$$

Integrais

Sabemos como encontrar funções $y(t)$ *boas* e com a propriedade de que

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t), \tag{1}$$

onde $f(t)$ é outra função: fixando $y(0) = c$ então

$$y(t) = \int_0^t f(s)\, ds + c.$$

Estaremos interessados agora em equações parecidas com (1), mas com o lado direito também dependendo de $y(t)$.

Um primeiro exemplo

Pergunta 1

Você consegue achar uma função $u(t)$ que satisfaz

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + u(t) = 0? \tag{2}$$

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).
- Denote $v(t) = u'(t)$.

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).
- Denote $v(t) = u'(t)$.
- Então $v'(t) = u''(t)$.

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).
- Denote $v(t) = u'(t)$.
- Então $v'(t) = u''(t)$.
- Como $u(t)$ é solução de (2), $u''(t) = -u(t)$.

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).
- Denote $v(t) = u'(t)$.
- Então $v'(t) = u''(t)$.
- Como $u(t)$ é solução de (2), $u''(t) = -u(t)$.
- Logo $v'(t) = u''(t) = -u(t)$.

Colocando o problema de outra forma

Vamos obter equações equivalentes a $u''(t) + u(t) = 0$.

- Seja $u(t)$ uma solução da equação (2).
- Denote $v(t) = u'(t)$.
- Então $v'(t) = u''(t)$.
- Como $u(t)$ é solução de (2), $u''(t) = -u(t)$.
- Logo $v'(t) = u''(t) = -u(t)$.

O sistema abaixo é equivalente a (2):

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -u(t). \end{array}\right. \tag{3}$$

Colocando o problema de outra forma

$$\begin{cases} u'(t) &= v(t), \\ v'(t) &= -u(t). \end{cases}$$

Colocando o problema de outra forma

$$\begin{cases} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -u(t). \end{cases}$$

- Antes procurávamos uma função (mas que dependia de uma derivada de 2a ordem).
- Agora procuramos duas funções (mas que dependem somente de derivadas de 1a ordem).

Colocando o problema de outra forma

$$\begin{cases} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -u(t). \end{cases}$$

- Antes procurávamos uma função (mas que dependia de uma derivada de 2a ordem).
- Agora procuramos duas funções (mas que dependem somente de derivadas de 1a ordem).

Quais as soluções do sistema de equações acima?

Colocando o problema de outra forma

$$\begin{cases} u'(t) &= v(t), \\ v'(t) &= -u(t). \end{cases}$$

- Antes procurávamos uma função (mas que dependia de uma derivada de 2a ordem).
- Agora procuramos duas funções (mas que dependem somente de derivadas de 1a ordem).

Quais as soluções do sistema de equações acima?

$$\begin{cases} u(t) &= a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t), \\ v(t) &= -a\,\mathrm{sen}(t) + b\cos(t), \ \ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Colocando o problema de outra forma

Considere a curva parametrizada

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \big(u(t), v(t)\big) \\ &= \big(a\cos(t) + b\,\text{sen}(t), -a\,\text{sen}(t) + b\cos(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Qual o traço de α?

Colocando o problema de outra forma

Considere a curva parametrizada

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \big(u(t), v(t)\big)\\ &= \big(a\cos(t) + b\,\text{sen}(t), -a\,\text{sen}(t) + b\cos(t)\big),\ \ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Qual o traço de α?
Note que

$$\big(a\cos(t) + b\,\text{sen}(t)\big)^2 + \big(-a\,\text{sen}(t) + b\cos(t)\big)^2 = a^2 + b^2,$$

logo o traço de α está contido numa circunferência de raio $a^2 + b^2$ (na verdade, é a circunferência).

Colocando o problema de outra forma

- Todas as circunferências de raio $r \geq 0$ são soluções de (3).

Colocando o problema de outra forma

- Todas as circunferências de raio $r \geq 0$ são soluções de (3).
- Dado um ponto $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única circunferência que é solução de (3) e passa por (p, q).

Colocando o problema de outra forma

- Todas as circunferências de raio $r \geq 0$ são soluções de (3).
- Dado um ponto $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única circunferência que é solução de (3) e passa por (p, q).

Teorema (Existência e Unicidade)

Seja $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ e F, G funções boas. Existe uma única solução da equação

$$\begin{cases} u'(t) & = & F(u(t), v(t)), \\ v'(t) & = & G(u(t), v(t)) \end{cases}$$

que satisfaz $u(0) = p$ e $v(0) = q$.

Este teorema é muito mais geral do que isto.

Colocando o problema de outra forma

Será que todas as soluções não-constantes de (2) são periódicas?

Colocando o problema de outra forma

Será que todas as soluções não-constantes de (2) são periódicas?

Sim!

E a geometria?

$$\begin{cases} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -u(t). \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t), -a\,\mathrm{sen}(t) + b\cos(t))$$

E a geometria?

$$\begin{cases} u'(t) &= & v(t), \\ v'(t) &= & -u(t). \end{cases}$$

$\leftarrow$ E se pensarmos nisto como um campo vetorial?

$$\alpha(t) = (a\cos(t) + b\,\text{sen}(t), -a\,\text{sen}(t) + b\cos(t))$$

E a geometria?

$$\begin{cases} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -u(t). \end{cases}$$ $\leftarrow$ Teremos um campo vetorial tangente às soluções!

$$\alpha(t) = (a\cos(t) + b\,\text{sen}(t), -a\,\text{sen}(t) + b\cos(t))$$

E a geometria?

Resumindo

Supondo boas funções P, Q, o campo vetorial

$$X(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

é tangente às soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & = & P\big(x(t), y(t)\big), \\ y'(t) & = & Q\big(x(t), y(t)\big), \end{cases}$$

e as soluções deste sistema existem e são únicas (fixado um ponto (p,q) por onde a solução passa).

Uma solução de um sistema como o acima é chamada de órbita ou trajetória do sistema.

Segundo exemplo

Pergunta 2

Você consegue achar uma função periódica $u(t)$ que satisfaz

$$u''(t) + u(t) = 2u'(t)?$$

Segundo exemplo

Pergunta 2

Você consegue achar uma função periódica $u(t)$ que satisfaz

$$u''(t) + u(t) = 2u'(t)?$$

Usando nosso truque, o desafio é equivalente a encontrar uma solução periódica (curva fechada) do sistema

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u + 2v. \end{cases} \tag{4}$$

Segundo exemplo

Como entramos uma solução do sistema anterior?

Segundo exemplo

Como entramos uma solução do sistema anterior?

- Propondo soluções $u(t), v(t)$ polinomiais: não funciona.

Segundo exemplo

Como entramos uma solução do sistema anterior?

- Propondo soluções $u(t), v(t)$ polinomiais: não funciona.
- Soluções $u(t), v(t)$ trigonométricas: não funciona.

Segundo exemplo

Como entramos uma solução do sistema anterior?

- Propondo soluções $u(t), v(t)$ polinomiais: não funciona.
- Soluções $u(t), v(t)$ trigonométricas: não funciona.
- Misturando funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas: funciona!

Segundo exemplo

Como entramos uma solução do sistema anterior?

- Propondo soluções $u(t), v(t)$ polinomiais: não funciona.
- Soluções $u(t), v(t)$ trigonométricas: não funciona.
- Misturando funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas: funciona!

Propondo uma solução da forma $u(t) = e^{a_1 t}(a_2 + a_3 t)$ e $v(t) = e^{b_1 t}(b_2 + b_3 t)$, encontraremos que

$$u(t) = e^t(a_2 + a_3 t),\ v(t) = e^t(a_2 + a_3 + a_3 t),$$

para todo $a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Encontrando as soluções

Note que se calcularmos $||(u(t), v(t))||$ vamos perceber que

$$||(u(t), v(t))|| \to \infty,$$

logo nenhuma solução pode ser periódica.

Encontrando as soluções

Importante: originalmente, durante a aula, o argumento que garantia a inexistência da solução periódica foi baseado no Teorema de Green.
O argumento estava correto, mas faltava explicar o motivo de uma das integrais dar zero.
Aqui estão mais alguns detalhes.
Suponha que exista uma solução suave $\alpha(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ T-periódica para o sistema (4). Seja R a região delimitada pela curva α.

Encontrando as soluções

Então
$$\oint_\alpha (v, -u + 2v) \cdot n \, ds = \oint_\alpha v \, dv - (2v - u) \, du,$$
mas a integral da esquerda precisa ser zero, já que o campo $(v, -u + 2v)$ é tangente à curva α e n, sendo normal a α, será normal também a $(v, -u + 2v)$.

Por outro lado, pelo Teorema de Green,
$$\oint_\alpha v \, dv - (2v - u) du = \iint_R 2 \, du \, dv.$$
e certamente esta integral não pode dar zero (pois é uma área). De onde vem o absurdo? De termos suposto que existe a curva α, solução periódica.

Terceiro exemplo

Pergunta 3

Você consegue achar uma função periódica $u(t)$ que satisfaz

$$u''(t) - (1 - u^2)u' + u = 0?$$

ou:

Pergunta 3'

Você consegue achar uma solução periódica (curva fechada) do sistema abaixo?

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= -u + (1 - u^2)v. \end{cases} \tag{5}$$

Problemas, muitos problemas

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= -u + (1 - u^2)v. \end{cases}$$

Esta equação é conhecida com equação de *van der Pol*.

Problemas, muitos problemas

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= -u + (1 - u^2)v. \end{cases}$$

Esta equação é conhecida com equação de *van der Pol*.
Podemos provar que existe uma **única** solução periódica, mas não conseguimos exibir uma parametrização para a solução.

Problemas, muitos problemas

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= -u + (1 - u^2)v. \end{cases}$$

Esta equação é conhecida com equação de *van der Pol*.

Podemos provar que existe uma **única** solução periódica, mas não conseguimos exibir uma parametrização para a solução.

Ou seja: não podemos obter a solução de forma explícita.

Problemas, muitos problemas

$$\begin{cases} u' &= v, \\ v' &= -u + (1 - u^2)v. \end{cases}$$

Esta equação é conhecida com equação de *van der Pol*.
Podemos provar que existe uma **única** solução periódica, mas não conseguimos exibir uma parametrização para a solução.
Ou seja: não podemos obter a solução de forma explícita.
É aí que entra a teoria qualitativa das equações diferenciais: obter informações sobre as soluções da equação diferencial somente a partir do campo vetorial.

Problemas, muitos problemas

A curva vermelha é uma aproximação para a solução periódica de van der Pol.

Problemas, muitos problemas

A curva vermelha é uma aproximação para a solução periódica de van der Pol.

As soluções “internas” se aproximam da curva vermelha, e o mesmo acontece com as soluções “externas”.

Problemas, muitos problemas

A curva vermelha é uma aproximação para a solução periódica de van der Pol.

As soluções "internas" se aproximam da curva vermelha, e o mesmo acontece com as soluções "externas".

A curva vermelha é um típico *ciclo limite atrator*.

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange
- Soluções em série

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange
- Soluções em série
- Rápida introdução às EDPs

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange
- Soluções em série
- Rápida introdução às EDPs
- Sistemas lineares

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange
- Soluções em série
- Rápida introdução às EDPs
- Sistemas lineares
- Introdução aos sistemas dinâmicos

Nosso curso

Discutiremos os seguintes problemas neste curso:

- Existência de soluções para EDOs
- Soluções de equações de primeira e segunda ordem
- Transformações de Laplace e Lagrange
- Soluções em série
- Rápida introdução às EDPs
- Sistemas lineares
- Introdução aos sistemas dinâmicos
- Modelos matemáticos

Nosso curso

Referências básicas:

- William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*.
- Djairo Guedes Figueiredo & Aloisio Freiria Neves, *Equações diferenciais aplicadas*.
- Gilbert Strang, *Differential equations and linear algebra*.
- George F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*.
- Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*.

Nosso curso

Critérios de avaliação

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)
- peso 3: Prova 1 24/04

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)
- peso 3: Prova 1 24/04
- peso 4: Prova 2 29/06

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)
- peso 3: Prova 1 24/04
- peso 4: Prova 2 29/06
- peso 0, mas vale Bis: competições no Kahoot!.

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)
- peso 3: Prova 1 24/04
- peso 4: Prova 2 29/06
- peso 0, mas vale Bis: competições no Kahoot!.

Cálculo da média final: média ponderada.

Nosso curso

Critérios de avaliação

- peso 1: Atividades online (Classroom)
- peso 2: Testinhos (aula do PED)
- peso 3: Prova 1 24/04
- peso 4: Prova 2 29/06
- peso 0, mas vale Bis: competições no Kahoot!.

Cálculo da média final: média ponderada.
Exame final: 17/07

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.
- Ter alguma lembrança sobre Séries de Taylor.

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.
- Ter alguma lembrança sobre Séries de Taylor.
- Habilidade para parametrizar curvas e entender o traço de uma parametrização.

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.
- Ter alguma lembrança sobre Séries de Taylor.
- Habilidade para parametrizar curvas e entender o traço de uma parametrização.
- Conhecimentos de autovalores/autovetores e diagonalização.

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.
- Ter alguma lembrança sobre Séries de Taylor.
- Habilidade para parametrizar curvas e entender o traço de uma parametrização.
- Conhecimentos de autovalores/autovetores e diagonalização.
- Noções sobre modelagem matemática (pode ser as que você adquiriu nos cursos de física)

Nosso curso

O que é esperado que vocês saibam?

- Derivar e integrar com bastante habilidade.
- Ter alguma lembrança sobre Séries de Taylor.
- Habilidade para parametrizar curvas e entender o traço de uma parametrização.
- Conhecimentos de autovalores/autovetores e diagonalização.
- Noções sobre modelagem matemática (pode ser as que você adquiriu nos cursos de física)

Kahoot!

`https://kahoot.it`

Kahoot!

`https://kahoot.it`

Aula de 6a: testinho de diagnóstico

Kahoot!

https://kahoot.it

Aula de 6a: testinho de diagnóstico

Até mais!

Algumas coisas burocráticas

- Plano de Desenvolvimento/Ementa
- Provas: 11/04, 23/05 e 27/06 (Exame 10/07)
- Bibliografia: Guidorizzi, Stewart, Apostol, Simmons
- PEDs/PADs
- Google Classroom e e-mail oficial
- WolframAlpha & Mathematica
- Participação em sala de aula
- Média final

Trabalho

Bloco xxx

asdfg

Exemplo

Determine o trabalho realizado pelo campo

Exercício

kawabanga

Teorema

asdfg

Solução

kaka

Próxima aula

- Vamos resolver em grupo a P3 de 2018 (6a/manhã).