Tarefa 6

Gabriel Belém Barbosa RA: 234672

23 de Setembro de 2021

Conteúdo

1 Exercício 1

1.1 Item (a)

1.1.1 Padronização e fase I

Colocando o PL na forma padrão, tem-se
$min\ z = -x_1 - 3x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Como todas as desigualdades das restrições eram de menor igual e o vetor $b \geq 0$, vale que a origem do plano x_1x_2 é ponto extremo factível, assim como, portanto, sua base é factível (a base será uma matriz identidade nesse caso, como visto em aula). Logo, a fase I será pulada, e sistema básico associado a origem será o sistema inicial da fase II.

1.1.2 Fase II

Os sistemas lineares resolvidos a seguir foram efetuados computacionalmente pelo `Octave` com a função `linsolve` (usando o atalho $\backslash$).

- Primeira iteração
  - Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_3) \\ \hat{x}_{B_2}(x_4) \\ \hat{x}_{B_3}(x_5) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

    Solução factível; calcular o valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (0,0,0)(12,4,6)^T = 0$$

  - Passo 2: Cálculo dos custos relativos

* 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c_B^T B^{-1}}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (0,0,0)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,0,0)^T = (0,0,0)^T$$

* 2.2: Custos relativos
Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a_{N_1}} = c_{N_1} = -1$$

Associado a x_2:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a_{N_2}} = c_{N_2} = -3$$

* 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{-1,-3\} = -3$$

Logo $\hat{x}_{N_2}(x_2)$ entrará na base.

– Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{-1,-3\} = -3 < 0$$

A solução básica não é ótima, logo o método prossegue.

– Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{a_{N_2}}$$

$$\Rightarrow B\mathbf{y} = \mathbf{a_{N_2}} = (4,-1,1)^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = B \setminus (4,-1,1)^T = (4,-1,1)^T$$

– Passo 5: Determinar passo e variável a sair da base

$$\mathbf{y} \nleq 0$$

Logo o método prossegue. Determinar a variável a sair da base

$$\hat{\varepsilon} = min\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ t.q. } y_i > 0, j = 1,2,3\right\}$$
$$= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\}$$
$$= min\left\{\frac{12}{4}, \frac{6}{1}\right\} = 3$$

Logo $\hat{x}_{B_1}(x_3)$ deve sair da base.

- Passo 6: Trocar a primeira coluna de B pela segunda coluna de N.

- Segunda iteração

  - Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_2) \\ \hat{x}_{B_2}(x_4) \\ \hat{x}_{B_3}(x_5) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; calcular o valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (-3,0,0)(3,7,3)^T = -9$$

  - Passo 2: Cálculo dos custos relativos

    * 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (-3,0,0)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (-3,0,0)^T = \left(-\frac{3}{4},0,0\right)^T$$

    * 2.2: Custos relativos
    Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_1}} = -1 - \left(-\frac{3}{4},0,0\right)(-3,1,1)^T = -\frac{13}{4}$$

    Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_2}} = -\left(-\frac{3}{4},0,0\right)(1,0,0)^T = \frac{3}{4}$$

    * 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\left\{-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right\} = -\frac{13}{4}$$

    Logo $\hat{x}_{N_1}(x_1)$ entrará na base.

– Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j=1,2\} = min\left\{-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right\} = -\frac{13}{4} < 0$$

A solução básica não é ótima, logo o método prossegue.

– Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= B^{-1}\mathbf{a_{N_2}} \\ \Rightarrow B\mathbf{y} &= \mathbf{a_{N_2}} = (-3,1,1)^T \\ \Rightarrow \mathbf{y} &= B \setminus (-3,1,1)^T = \frac{1}{4}(-3,1,7)^T\end{aligned}$$

– Passo 5: Determinar passo e variável a sair da base

$$\mathbf{y} \nleq 0$$

Logo o método prossegue. Determinar a variável a sair da base

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i},\ \text{t.q. } y_i > 0, j=1,2,3\right\} \\ &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\} \\ &= min\left\{\frac{7}{\frac{1}{4}}, \frac{3}{\frac{7}{4}}\right\} = \frac{12}{7}\end{aligned}$$

Logo $\hat{x}_{B_3}(x_5)$ deve sair da base.

– Passo 6: Trocar a terceira coluna de B pela primeira coluna de N.

- Terceira iteração

  – Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_2) \\ \hat{x}_{B_2}(x_4) \\ \hat{x}_{B_3}(x_1) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = B \setminus b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 30 \\ 46 \\ 12 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; calcular o valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B}) = \mathbf{c_B^T}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = (-3,0,-1)\frac{1}{7}(30,46,12)^T = -\frac{102}{7}$$

– Passo 2: Cálculo dos custos relativos
  * 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c_B^T B^{-1}}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (-3,0,-1)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (-3,0,-1)^T = -\frac{1}{7}(2,0,13)^T$$

  * 2.2: Custos relativos
    Associado a x_5:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a_{N_1}} = \frac{1}{7}(2,0,13)(0,0,1)^T = \frac{13}{7}$$

    Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a_{N_2}} = \frac{1}{7}(2,0,13)(1,0,0)^T = \frac{2}{7}$$

  * 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\left\{\frac{13}{7}, \frac{2}{7}\right\} = \frac{2}{7}$$

    Logo $\hat{x}_{N_2}(x_3)$ entrará na base.

– Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\left\{\frac{13}{7}, \frac{2}{7}\right\} = \frac{2}{7} \geq 0$$

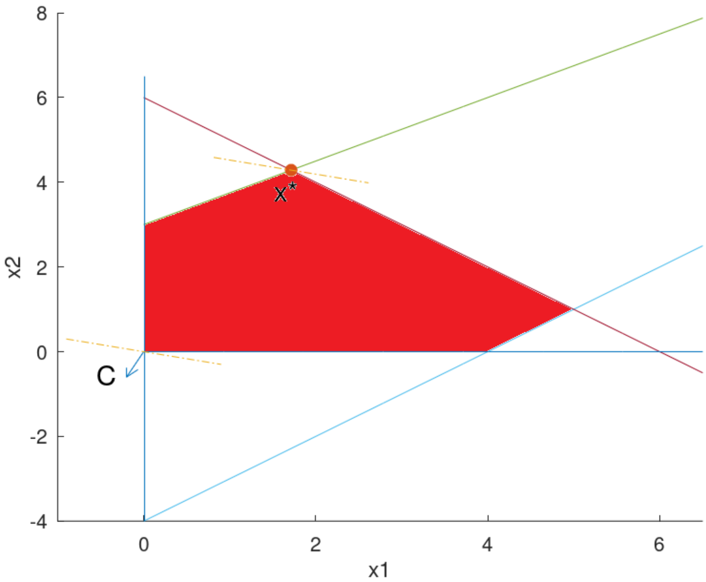
  A solução básica é ótima, logo o método para.

A solução ótima é $\mathbf{x}* = \frac{1}{7}(12,30,0,46,0)^T$, e o valor ótimo da função é $f(\mathbf{x}*) = -\frac{102}{7}$.

1.2 Item (b)

Como deseja-se minimizar a função objetivo, é necessário viajar na direção contrário ao gradiente. A curva de nível da função objetivo intersecta a região de factibilidade por último em $\mathbf{x}* = \frac{1}{7}(12,30)^T$, como pode ser visto no gráfico abaixo, e cujo valor ótimo é, da função objetivo, $f(\mathbf{x}*) = \frac{1}{7}(-12-3\cdot 30) = -\frac{102}{7}$. Esse resultado condiz com a solução obtida pelo algoritmo simplex no item (a).

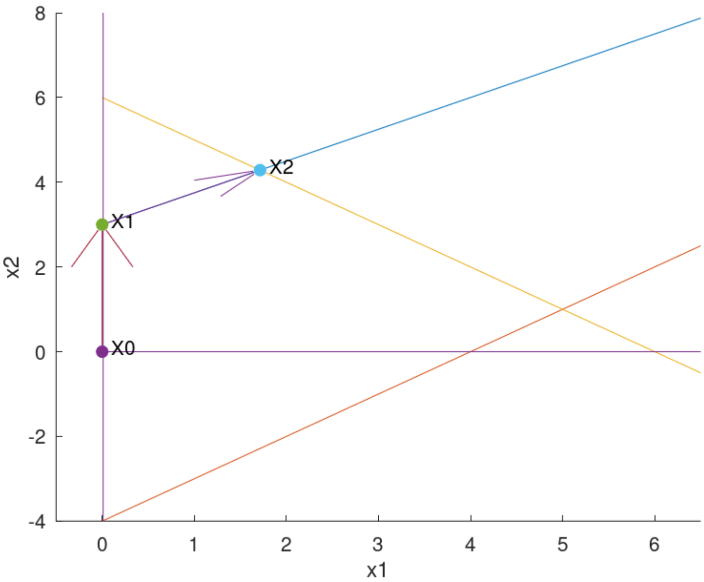
Figura 1: Resolução gráfica



Região de factibilidade em vermelho, vetor gradiente C e solução ótima x* denotados e curvas de nível pontilhadas.

Abaixo o comportamento do algoritmo simplex visto no item (a) pode ser acompanhado graficamente, com as soluções básicas (começando com X0, a solução básica factível inicial escolhida na seção 1.1.1, e terminando em X2, a solução ótima do PL inicial) e o movimento de cada iteração representado por setas.

Figura 2: Comportamento do algoritmo



Pode ser visto que o algoritmo se move de modo semelhante a direção de menos o gradiente (vide figura 1), priorizando o movimento em x_2 antes de x_1 (na primeira iteração) pela escolha do menor custo reduzido, o que pode ser correlacionado com o fato de que o vetor menos gradiente, $-C = (1,3)^T$, é maior em sua componente x_2 do que em x_1.