Tarefa 10

Gabriel Belém Barbosa   RA: 234672

21 de Novembro de 2021

Conteúdo

1 Fase I **3**

2 Fase II **3**

3 Análise de solução **7**

1 Fase I

Colocando o PL na forma padrão, tem-se

$$\min f(\mathbf{x}) = x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 4x_4$$
$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 1 \\ x_{1,\dots,6} \geq 0 \end{cases}$$

Cujo dual é

$$\max g(\lambda) = 2\lambda_1 + \lambda_2$$
$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 \leq 1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 12 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \leq 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 4 \\ -\lambda_1 \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0 \\ -\lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Para a primeira iteração, $\lambda = (0,0)^T$ é claramente uma solução factível para o dual, isto é

$$B = \begin{pmatrix} a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Fase II

- Primeira iteração
  - Passo 1: Cálculo da solução básica dual e custos relativos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{B_1}(\lambda_1) \\ \hat{\lambda}_{B_2}(\lambda_2) \end{pmatrix}}_{\hat{\lambda}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c_B}}$$
$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{\mathbf{B}} = B^T \backslash \mathbf{c_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo dos custos relaticos:

Associado a x_1 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_1} = c_{\mathbf{N}_1} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_1} = 1$$

Associado a x_2 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_2} = c_{\mathbf{N}_2} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_2} = 12$$

Associado a x_3 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_3} = c_{\mathbf{N}_3} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_3} = 3$$

Associado a x_4 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_4} = c_{\mathbf{N}_4} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_4} = 4$$

– Passo 2: Teste de otimalidade

  * 2.1: Cálculo da solução básica primal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{\mathbf{B}_1}(x_5) \\ \hat{x}_{\mathbf{B}_2}(x_6) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ngeq 0$$

  * 2.2: Determinar variável a sair da base

$$\hat{x}_{\mathbf{B}_l} = min\{\hat{x}_{\mathbf{B}_i}, i = 1,2\} = min\{-2,-1\} = -2$$

  Como $\hat{x}_{\mathbf{B_l}} < 0$, o método prossegue, e $\hat{x}_{\mathbf{B_1}}$ sairá da base.

– Passo 3: Cálculo da direção dual simplex

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \eta_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{e}_1}$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \mathbf{B} \setminus \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Passo 4: Determinar passo e variável a entrar na base

$$\begin{aligned} \widehat{\delta} = \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_k}}{\eta_\ell^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_k}} &= \min_{j=1,\ldots,n-m} \left\{ \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_j}}{\eta_1^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_j}} \text{ tal que } \eta_1^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_j} > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_1}}{\eta_1^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_1}}, \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_2}}{\eta_1^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_2}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{12}{6} \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Logo $x_{\mathbf{N}_1}$ (x_1) entrará na base.

– Passo 5: Nova partição básica

  Troca-se a primeira coluna de B pela primeira coluna de N.

• Segunda iteração

– Passo 1: Cálculo da solução básica dual e custos relativos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{B_1}(\lambda_1) \\ \hat{\lambda}_{B_2}(\lambda_2) \end{pmatrix}}_{\hat{\lambda}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_{\mathbf{B}}}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{\mathbf{B}} = B^T \backslash \mathbf{c}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo dos custos relaticos:
Associado a x_5 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_1} = c_{\mathbf{N}_1} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_1} = 0 - (1,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Associado a x_2 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_2} = c_{\mathbf{N}_2} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_2} = 12 - (1,0)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 9$$

Associado a x_3 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_3} = c_{\mathbf{N}_3} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_3} = 3 - (1,0)\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 5$$

Associado a x_4 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_4} = c_{\mathbf{N}_4} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_4} = 4 - (1,0)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$$

- Passo 2: Teste de otimalidade
  * 2.1: Cálculo da solução básica primal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{\mathbf{B}_1}(x_1) \\ \hat{x}_{\mathbf{B}_2}(x_6) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

  * 2.2: Determinar variável a sair da base

$$\hat{x}_{\mathbf{B}_l} = min\{\hat{x}_{\mathbf{B}_i}, i = 1,2\} = min\{2,-3\} = -3$$

Como $\hat{x}_{\mathbf{B_l}} < 0$, o método prossegue, e $\hat{x}_{\mathbf{B_2}}$ sairá da base.

- Passo 3: Cálculo da direção dual simplex

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \eta_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\mathbf{e}_2}$$

$$\Rightarrow \eta_2 = \mathbf{B} \setminus \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– Passo 4: Determinar passo e variável a entrar na base

$$\begin{aligned}\widehat{\delta} = \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_k}}{\eta_\ell^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_k}} &= \min_{j=1,\ldots,n-m} \left\{ \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_j}}{\eta_2^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_j}} \text{ tal que } \eta_2^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_j} > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_2}}{\eta_2^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_2}}, \frac{\widehat{c}_{\mathbf{N}_4}}{\eta_2^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_4}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{9}{5}, \frac{6}{1} \right\} = \frac{9}{5}\end{aligned}$$

Logo $x_{\mathbf{N}_2}$ (x_2) entrará na base.

– Passo 5: Nova partição básica

Troca-se a segunda coluna de B pela segunda coluna de N.

- Terceira iteração

– Passo 1: Cálculo da solução básica dual e custos relativos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{B_1}\,(\lambda_1) \\ \hat{\lambda}_{B_2}\,(\lambda_2) \end{pmatrix}}_{\hat{\lambda}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c_B}}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{\mathbf{B}} = B^T \backslash \mathbf{c_B} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo dos custos relaticos:

Associado a x_5 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_1} = c_{\mathbf{N}_1} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_1} = 0 - \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{14}{5}$$

Associado a x_2 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_2} = c_{\mathbf{N}_2} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_2} = 0 - \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{9}{5}$$

Associado a x_3 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_3} = c_{\mathbf{N}_3} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_3} = 3 - \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 14$$

Associado a x_4 :

$$\hat{c}_{\mathbf{N}_4} = c_{\mathbf{N}_4} - \hat{\lambda}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_{\mathbf{N}_4} = 4 - \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{21}{5}$$

– Passo 2: Teste de otimalidade

* 2.1: Cálculo da solução básica primal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{\mathbf{B}_1}(x_1) \\ \hat{x}_{\mathbf{B}_2}(x_2) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \geq 0$$

* 2.2: Determinar variável a sair da base

$$\hat{x}_{\mathbf{B}_l} = min\{\hat{x}_{\mathbf{B}_i}, i = 1,2\} = min\left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right\} = \frac{1}{5}$$

Como $\hat{x}_{\mathbf{B_l}} \geq 0$, o método para.

3 Análise de solução

A solução ótima do PL primal é $\mathbf{x}* = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$, e o valor ótimo da função do primal é $f(\mathbf{x}*) = \frac{37}{5}$, e, como visto, $\lambda* = \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)^T$, logo o valor ótimo da função do dual é $g(\lambda*) = \frac{37}{5}$, o que coincide com o do primal e valida o resultado. Vale ressaltar que $\left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)^T$ é o vetor multiplciador simplex na solução do primal, e como este é não negativo, caso o método usado fosse o primal simplex e ele se encontrasse nesse ponto, de fato não haveria direção a se tomar nessa iteração e o método pararia.