Tarefa 6

Gabriel Belém Barbosa RA: 234672

01 de Outubro de 2021

Conteúdo

Os sistemas lineares resolvidos a seguir foram efetuados computacionalmente pelo `Octave` com a função `linsolve` (usando o atalho \).

1 Item (a)

1.1 Padronização

Colocando o PL na forma padrão, tem-se
min $g(x) = -3x_1 + 4x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Forma Big-M

Colocando o PL na forma do método Big-M, tem-se
min $f(x) = -3x_1 + 4x_2 + 1000z_1$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + z_1 = 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, z_1 \geq 0 \end{cases}$$

Para a primeira iteração, a terceira e quinta colunas da matriz A do PL acima formam uma base factível, como provado em aula, uma vez que $b = (4, 18)^T \geq 0$ e B será a matriz identidade.

1.3 Método simplex

- Primeira iteração
  - Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_3) \\ \hat{x}_{B_2}(z_1) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (0, 1000)(4, 18)^T = 18000$$

- Passo 2: Cálculo dos custos relativos
    * 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c_B^T B^{-1}}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (0,1000)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,1000)^T = (0,1000)^T$$

    * 2.2: Custos relativos
      Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a_{N_1}} = -3 - (0,1000)(1,2)^T = -2003$$

      Associado a x_2:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a_{N_2}} = 4 - (0,1000)(1,3)^T = -2996$$

      Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_3} = c_{N_3} - \lambda^T \mathbf{a_{N_3}} = -(0,1000)(0,-1)^T = 1000$$

    * 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{-2003, -2996, 1000\} = -2996$$

      Logo $\hat{x}_{N_2}(x_2)$ entrará na base.
- Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{-2003, -2996, 1000\} = -2996 < 0$$

  A solução básica não é ótima, logo o método prossegue.
- Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{a_{N_2}}$$

$$\Rightarrow B\mathbf{y} = \mathbf{a_{N_2}} = (1,3)^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = B \setminus (1,3)^T = (1,3)^T$$

- Passo 5: Determinar passo e variável a sair da base

$$\mathbf{y} \not\leq 0$$

Logo o método prossegue. Determinar a variável a sair da base

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i},\ \text{t.q. } y_i > 0, j = 1,2,3\right\} \\
&= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}\right\} \\
&= min\left\{\frac{4}{1}, \frac{18}{3}\right\} = 4
\end{aligned}$$

Logo $\hat{x}_{B_1}(x_3)$ deve sair da base.

– Passo 6: Trocar a primeira coluna de B pela segunda coluna de N.

• Segunda iteração

– Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_2) \\ \hat{x}_{B_2}(z_1) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (4, 1000)(4, 6)^T = 6016$$

– Passo 2: Cálculo dos custos relativos

∗ 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \mathbf{B}^{-\mathbf{1}}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (4, 1000)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (4, 1000)^T = (-2996, 1000)^T$$

∗ 2.2: Custos relativos

Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_1}} = -3 - (-2996, 1000)(1, 2)^T = 993$$

Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_2}} = -(-2996, 1000)(1, 0)^T = 2996$$

Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_3} = c_{N_3} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_3}} = -(-2996, 1000)(0, -1)^T = 1000$$

- $*$ 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{993, 2996, 1000\} = 993$$

Logo $\hat{x}_{N_1}(x_1)$ entrará na base.

– Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = minmin\{993, 2996, 1000\} = 993 \geq 0$$

A solução básica é ótima, logo o método para.

A solução ótima do PL é $\mathbf{x}* = (0,4,0,0,6)^T$, e o valor ótimo da função auxiliar é $f(\mathbf{x}*) = 6016$ (para a função da forma padrão, o valor é $g(x*) = \mathbf{c^T x}* = (-3,4,0,0)(0,4,0,0)^T = 16$, e no PL original $z* = -g(x*) = -16$).

1.4 Análise de solução

Como a variável auxiliar z_1 pertence à base ao fim do processo, o PL inicial não tem solução factível, e portanto não tem solução, como visto em aula.

2 Item (b)

2.1 Padronização

Colocando o PL na forma padrão, tem-se
$min\ g(x) = 2x_1 + x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + 6.5x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

2.2 Forma do problema auxiliar

Colocando o PL na forma do problema auxiliar da fase I do método 2 fases, tem-se
$min\ f(x) = z_1 + z_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} x_1 + 6.5x_2 - x_3 + z_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + z_2 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{cases}$$

Para a primeira iteração, a quinta, sexta e sétima colunas da matriz A do PL acima formam uma base factível, como provado em aula, uma vez que $b = (5,4,20)^T \geq 0$ e B será a matriz identidade com suas colunas trocadas.

2.3 Método simplex - Fase I

- Primeira iteração
  - Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_5) \\ \hat{x}_{B_2}(z_1) \\ \hat{x}_{B_3}(z_2) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$f(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (0,1,1)(20,5,4)^T = 9$$

  - Passo 2: Cálculo dos custos relativos
    * 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} \mathbf{B}^{-1}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (0,1,1)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,1,1)^T = (1,1,0)^T$$

    * 2.2: Custos relativos
      Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_1}} = -(1,1,0)(1,2,5)^T = -3$$

Associado a x_2:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_2}} = -(1,1,0)(6.5,1,4)^T = -7.5$$

Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_3} = c_{N_3} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_3}} = -(1,1,0)(-1,0,0)^T = 1$$

Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_4} = c_{N_4} - \lambda^T \mathbf{a}_{\mathbf{N_4}} = -(1,1,0)(0,-1,0)^T = 1$$

* $*$ 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j=1,2\} = min\{-3,-7.5,1,1\} = -7.5$$

Logo $\hat{x}_{N_2}(x_2)$ entrará na base.

- Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j=1,2\} = min\{-3,-7.5,1,1\} = -7.5 < 0$$

A solução básica não é ótima, logo o método prossegue.

- Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{a_{N_2}}$$

$$\Rightarrow B\mathbf{y} = \mathbf{a_{N_2}} = (6.5,1,4)^T$$
$$\Rightarrow \mathbf{y} = B\setminus(6.5,1,4)^T = (4,6.5,1)^T$$

- Passo 5: Determinar passo e variável a sair da base

$$\mathbf{y} \not\leq 0$$

Logo o método prossegue. Determinar a variável a sair da base

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ t.q. } y_i > 0, j=1,2,3\right\}\\ &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\}\\ &= min\left\{\frac{20}{4}, \frac{10}{13}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{10}{13}\end{aligned}$$

Logo $\hat{x}_{B_2}(z_1)$ deve sair da base.

- Passo 6: Trocar a segunda coluna de B pela segunda coluna de N.

• Segunda iteração

- Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 6.5 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}\hat{x}_{B_1}(x_5)\\ \hat{x}_{B_2}(x_2)\\ \hat{x}_{B_3}(z_2)\end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 20\end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\hat{x}_B} = B \setminus b = \frac{2}{13}\begin{pmatrix}110\\5\\21\end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$f(\mathbf{\hat{x}_B}) = \mathbf{c_B^T}\mathbf{\hat{x}_B} = (0,0,1)\frac{2}{13}(110,5,21)^T = \frac{42}{13}$$

- Passo 2: Cálculo dos custos relativos
  - 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c_B^T}\mathbf{B^{-1}}$$

$$\Rightarrow B^T\lambda = (0,0,1)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,0,1)^T = \left(-\frac{2}{13},1,0\right)^T$$

  - 2.2: Custos relativos
    Associado a x_1:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T\mathbf{a_{N_1}} = -\left(-\frac{2}{13},1,0\right)(1,2,5)^T = -\frac{24}{13}$$

Associado a z_1:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T\mathbf{a_{N_2}} = 1 - \left(-\frac{2}{13},1,0\right)(1,0,0)^T = \frac{15}{13}$$

Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_3} = c_{N_3} - \lambda^T\mathbf{a_{N_3}} = -\left(-\frac{2}{13},1,0\right)(-1,0,0)^T = -\frac{2}{13}$$

Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_4} = c_{N_4} - \lambda^T\mathbf{a_{N_4}} = -\left(-\frac{2}{13},1,0\right)(0,-1,0)^T = 1$$

  - 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = \frac{1}{13}min\{-24,15,-2,13\} = -\frac{24}{13}$$

Logo $\hat{x}_{N_1}(x_1)$ entrará na base.

– Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = \frac{1}{13} min\{-24, 15, -2, 13\} = -\frac{24}{13} < 0$$

A solução básica não é ótima, logo o método prossegue.

– Passo 4: Cálculo da direção simplex

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= B^{-1}\mathbf{a_{N_1}} \\ \Rightarrow B\mathbf{y} &= \mathbf{a_{N_1}} = (1,2,5)^T \\ \Rightarrow \mathbf{y} &= B \setminus (1,2,5)^T = \frac{1}{13}(57,2,24)^T \end{aligned}$$

– Passo 5: Determinar passo e variável a sair da base

$$\mathbf{y} \nleq 0$$

Logo o método prossegue. Determinar a variável a sair da base

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_i}}{y_i}, \text{ t.q. } y_i > 0, j = 1,2,3\right\} \\ &= min\left\{\frac{\hat{x}_{B_1}}{y_1}, \frac{\hat{x}_{B_2}}{y_2}, \frac{\hat{x}_{B_3}}{y_3}\right\} \\ &= min\left\{\frac{220}{57}, \frac{10}{2}, \frac{42}{24}\right\} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Logo $\hat{x}_{B_3}(z_2)$ deve sair da base.

– Passo 6: Trocar a terceira coluna de B pela primeira coluna de N.

- Terceira iteração

– Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_5) \\ \hat{x}_{B_2}(x_2) \\ \hat{x}_{B_3}(x_1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{\hat{x}_B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\hat{x}_B} = B \setminus b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$f(\mathbf{\hat{x}_B}) = \mathbf{c_B^T}\mathbf{\hat{x}_B} = (0,0,0)\frac{1}{4}(37,2,7)^T = 0$$

- Passo 2: Cálculo dos custos relativos
  - 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c_B^T B^{-1}}$$

$$\Rightarrow B^T \lambda = (0,0,0)^T$$

$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,0,0)^T = (0,0,0)^T$$

  - 2.2: Custos relativos
    Associado a z_2:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T \mathbf{a_{N_1}} = 1 - (0,0,0)(0,1,0)^T = 1$$

    Associado a z_1:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T \mathbf{a_{N_2}} = 1 - (0,0,0)(1,0,0)^T = 1$$

    Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_3} = c_{N_3} - \lambda^T \mathbf{a_{N_3}} = -(0,0,0)(-1,0,0)^T = 0$$

    Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_4} = c_{N_4} - \lambda^T \mathbf{a_{N_4}} = -(0,0,0)(0,-1,0)^T = 0$$

  - 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{1,1,0,0\} = 0$$

    Logo $\hat{x}_{N_4}(x_4)$ ou $\hat{x}_{N_3}(x_3)$ entrará na base.
- Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{1,1,0,0\} = 0 \geq 0$$

  A solução básica é ótima, logo o método para.

A solução ótima do problema auxiliar é $\mathbf{x}* = \frac{1}{4}(7,2,37,0,0,0,0)^T$, e o valor ótimo da função auxiliar é $f(\mathbf{x}*) = 0$.

2.4 Análise de solução da fase I

Como as variáveis auxiliares estão todas fora da base, a solução acima é factível para o PL original (e, consequentemente, sua base associada é factível). Logo o método prossegue para a fase II na qual o método simplex é aplicado na forma padrão mostrada na seção 2.1 e a base do primeiro passo é igual à acima.

2.5 Fase II

- Primeira iteração
  - Passo 1: Cálculo da solução básica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6.5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{B_1}(x_5) \\ \hat{x}_{B_2}(x_2) \\ \hat{x}_{B_3}(x_1) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = B \setminus b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \geq 0$$

Solução factível; cálculo do valor da função na solução básica

$$g(\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} = (0,1,2)\frac{1}{4}(37,2,7)^T = 4$$

  - Passo 2: Cálculo dos custos relativos
    - 2.1: Cálculo do vetor multiplicador simplex

$$\lambda^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-\mathbf{1}}$$
$$\Rightarrow B^T\lambda = (0,1,2)^T$$
$$\Rightarrow \lambda = B^T \setminus (0,1,2)^T = (0,1,0)^T$$

    - 2.2: Custos relativos
Associado a x_3:

$$\hat{c}_{N_1} = c_{N_1} - \lambda^T\mathbf{a}_{\mathbf{N_1}} = -(0,1,0)(-1,0,0)^T = 0$$

Associado a x_4:

$$\hat{c}_{N_2} = c_{N_2} - \lambda^T\mathbf{a}_{\mathbf{N_2}} = -(0,1,0)(0,-1,0)^T = 1$$

    - 2.3: Escolha da variável a entrar na base

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{0,1\} = 0$$

Logo $\hat{x}_{N_1}(x_3)$ entrará na base.

  - Passo 3: Teste de otimalidade

$$min\{\hat{c}_{N_j}, j = 1,2\} = min\{0,1\} = 0 \geq 0$$

A solução básica é ótima, logo o método para.

A solução ótima do PL na forma padrão é $\mathbf{x}* = \frac{1}{4}(7,2,37,0,0)^T$, e o valor ótimo da função original (que é igual a função da forma padrão) é $g(\mathbf{x}*) = z* = 4$.