

*федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования*  
**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»**

*Масленников Никита Сергеевич  
Белый Глеб Юрьевич  
Рогов Роман Дмитриевич  
студенты ФАКИ  
(группа Б03-905)*

**Вопросы бору**  
на тему:  
*«Дифракция Фраунгофера на отверстиях различных форм»*

Долгопрудный, 2021

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
<b>2 Теоретическая справка</b>	<b>3</b>
2.1 Дифракция Фраунгофера . . . . .	3
2.2 Расчет дифракции Фраунгофера на отверстиях . . . . .	5
<b>3 Расчет дифракции Фраунгофера на простых отверстиях</b>	<b>6</b>
3.1 Расчет дифракции Фраунгофера на прямоугольнике . . . . .	6
3.2 Расчет дифракции Фраунгофера на круге . . . . .	7
3.3 Расчет дифракции Фраунгофера на треугольнике . . . . .	9
<b>4 Экспериментальная установка</b>	<b>10</b>
<b>5 Анализ дифракционной картины</b>	<b>11</b>
5.1 Сравнение . . . . .	11
5.2 Закономерность изменения дифракционной картины на примере отверстия в виде треугольника . . . . .	12
<b>6 Метод композиций</b>	<b>13</b>
6.1 Моделирование прямоугольника через метод композиций . . . . .	13
<b>7 Заключение</b>	<b>14</b>
<b>8 Дополнение</b>	<b>14</b>
8.1 Сравнение fft и аналитического вычисления интеграла Френеля . .	14
8.2 Свойства преобразования Фурье . . . . .	15

# 1 Введение

Дифракция Фраунгофера - случай дифракции, при которой дифракционная картина наблюдается на значительном расстоянии от отверстия или препятствия. В учебниках приведены дифракционные картины для тривиальных отверстий, таких как щель и круг. Здесь мы рассматриваем и моделируем случай дифракции на треугольнике и применяем метод композиций, согласно которой возможен расчет отверстия любой формы за приемлемое время.

## 2 Теоретическая справка

### 2.1 Дифракция Фраунгофера

Количественная формулировка Гюйгенса-Френеля имеет вид:

$$g(x,y) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S f_o(\xi,\eta) \frac{e^{ikR}}{R} \cos \alpha \, d\xi d\eta$$

При условии, что размер препятствия (например, размер отверстия в непрозрачном экране) мал по сравнению с расстоянием  $R_o$  до точки наблюдения, амплитудный множитель  $\frac{1}{R}$ , учитывающий уменьшение амплитуды в сферической волне по мере удаления от вторичного источника  $ds$ , можно заменить постоянной величиной  $\frac{1}{R_0}$ . Множитель наклона  $\cos \alpha$  также считаем приблизительно одинаковым (и равным единице) для всех вторичных источников, расположенных в области отверстия. Тогда в этом приближении принцип Гюйгенса—Френеля приобретает следующий вид:

$$g(x,y) = \frac{1}{i\lambda R_0} \iint_S f_o(\xi,\eta) e^{ikR} \, d\xi d\eta \quad (1)$$

Рассмотрим дифракцию на отверстии в плоском экране, находящемся в плоскости  $z = 0$ :

Пусть точка наблюдения имеет координаты  $P(x,y,z)$ . Расстояние  $R$  от площадки  $ds$  в точке экрана  $(\xi;\eta)$  до точки  $P$  равно

$$R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{R_0 - (2x\xi + 2y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)},$$

где  $\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$  - расстояние начала координат  $O$  до точки наблюдения.

Полагая поправку к  $R_0$  малой, получим приближение:

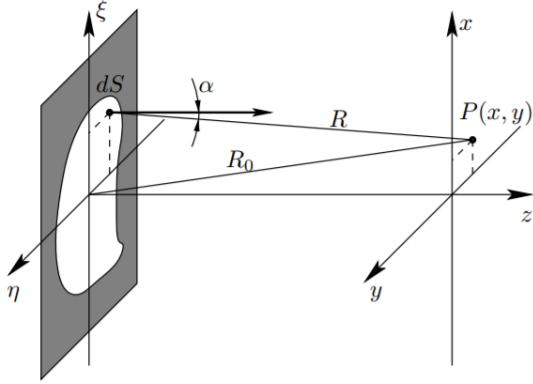


Рис. 1: Дифракция на отверстии

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\eta^2 + \xi^2}{2R_0} \quad (2)$$

Используем это выражение для оценки величины  $kR$  (показателя экспоненты в (1)).

Интересующая нас область изменения переменных  $(\xi, \eta)$  ограничена размерами отверстия в непрозрачном экране (в этой области отлично от нуля граничное поле  $f_0(\xi, \eta)$ ). Пусть максимальный размер отверстия равен  $b$ , так что  $\xi^2 + \eta^2 \leq b^2$ . Если точка наблюдения удалена от препятствия настолько, что выполняется условие

$$\frac{b^2}{R_0} \ll \lambda, \quad (3)$$

то последним слагаемым в (2) можно пренебречь, и тогда

$$R \approx R_0 - \frac{x\eta}{R_0} + \frac{y\eta}{R_0}.$$

В этом приближении принцип Гюйгенса—Френеля (1) запишется в виде:

$$g(x, y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) \exp^{-i\left(\frac{kx}{R_0}\xi + \frac{ky}{R_0}\eta\right)} d\xi d\eta \quad (4)$$

Условие (3), очевидно, выполняется, если  $b^2/(\lambda z) \ll 1$ . Эту область мы назвали ранее областью дифракции Фраунгофера (или дальней волновой зоной). Введя переменные

$$u = \frac{kx}{R_0} \quad v = \frac{ky}{R_0}$$

получим

$$g(u,v) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_o(\xi,\eta) \exp^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta \quad (5)$$

Эта формула показывает, что поле в плоскости наблюдения  $g(u,v)$  есть (с точностью до постоянного множителя) двумерное преобразование Фурье граничного поля  $f_o(\xi,\eta)$ .

Интенсивность вычисляется по формуле

$$I(P) = \frac{c}{8\pi} |E(P)|^2 \Rightarrow I(P) = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\lambda R_0} |\varepsilon(k_x, k_y)|^2. \quad (6)$$

## 2.2 Расчет дифракции Фраунгофера на отверстиях

Нас интересует дифракция Фраунгофера на двумерных структурах. Введем угловые координаты  $\theta$  и  $\psi$  точки наблюдения поля  $P$ , определив их следующим образом:

$$\sin \theta = \frac{x}{R_0} \qquad \qquad \qquad \sin \psi = \frac{y}{R_0}$$

а также пространственные частоты:

$$k_x = k \sin \theta \qquad \qquad \qquad k_y = k \sin \psi$$

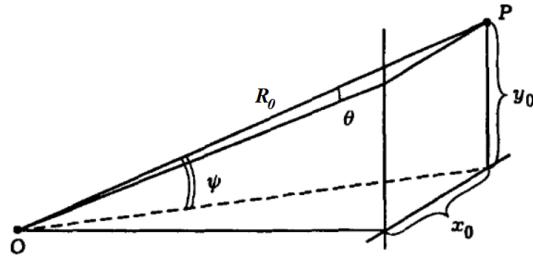


Рис. 2: Угловые координаты точки наблюдения

Тогда формулу (5) можно переписать в виде:

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\xi, \eta) \exp^{-i(k_x x + k_y y)} d\xi d\eta, \quad (7)$$

где  $f_0(\xi, \eta) = \varepsilon(\xi, \eta)$ .

Подстановка в (4) позволяет найти напряженность в точке  $P$  на плоскости экрана:

$$E(P) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \varepsilon(k_x, k_y). \quad (8)$$

$\varepsilon(k_x, k_y)$  - пространственная спектральная амплитуда, соответствующая двумерному начальному распределению поля  $\varepsilon(\xi, \eta)$ . Формула (7) означает, что при дифракции на двумерной структуре распределение поля в дальней зоне имеет вид двумерного преобразования Фурье.

В соответствии с (6) и (8) интенсивность света в точке наблюдения выражается формулой

$$I(P) = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{(\lambda R_0)^2} S_0(k_x, k_y), \quad (9)$$

где  $S_0(k_x, k_y) = |\varepsilon_0(k_x, k_y)|^2$  - пространственная спектральная плотность или угловой спектр излучения.

Расчитаем теперь дифракцию на прямоугольном, треугольном и круглом отверстиях.

### 3 Расчет дифракции Фраунгофера на простых отверстиях

#### 3.1 Расчет дифракции Фраунгофера на прямоугольнике

Пусть плоская монохроматическая волна дифрагирует на прямоугольном отверстии, длины сторон которого равны  $d_1, d_2$ :

Записав начальное распределение амплитуды поля в виде

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \varepsilon_0 \begin{cases} 1, & |\xi| \leq d_1/2, |\eta| \leq d_2/2 \\ 0, & \text{вне этой области} \end{cases} \quad (10)$$

и подставив (7) в (10), получим

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \varepsilon_0 \int_{-d_1/2}^{d_1/2} dx \int_{-d_2/2}^{d_2/2} e^{i[k_x x + k_y y]} dy = \varepsilon_0 d_1 d_2 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x d_1}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k_y d_2}{2}\right) \quad (11)$$

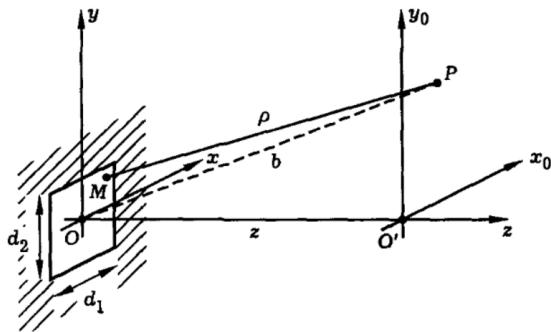


Рис. 3: К расчету картины дифракции света на прямоугольном отверстии

Подставляя (11) в (9), получим следующую формулу для углового распределения интенсивности излучения в дальней зоне:

$$I(\theta, \psi) = I_{max} \left( \frac{\sin \frac{\pi d_1 \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d_1 \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi d_2 \sin \psi}{\lambda}}{\frac{\pi d_2 \sin \psi}{\lambda}} \right)^2,$$

где  $I_{max} = I_0 \frac{d_1 d_2}{\lambda R_0}^2$ ;  $I_0$  — интенсивность падающей волны.

### 3.2 Расчет дифракции Фраунгофера на круге

Введем полярные координаты  $r$  и  $\phi$  на плоскости отверстия  $x, y$  и  $r, \phi$  на плоскости наблюдения  $x_0, y_0$ .

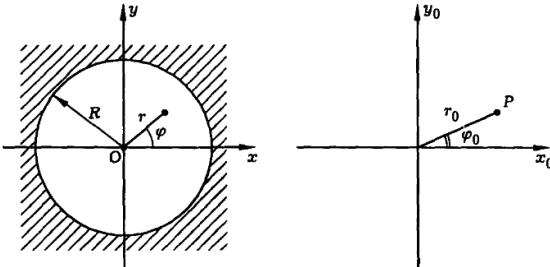


Рис. 4: Система координат для расчет дифракции на круглом отверстии

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & x_0 &= r_0 \cos \phi_0, \\ y &= r \sin \phi, & y_0 &= r_0 \sin \phi_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее введем угол  $\theta$  между осью  $z$  и направление наблюдения  $x_0, y_0$  (рис. 5). Из

рисунка видно, что  $\sin \theta = \frac{r_0}{R_0}$ . Обозначим  $k \sin \theta = k_{\perp}$ . Тогда перепишем  $k_x, k_y$ , входящие в (7), следующим способом:

$$k_x = \frac{kx_0}{R_0} = k_{\perp} \cos \phi_0, \quad k_y = \frac{ky_0}{R_0} = k_{\perp} \sin \phi_0. \quad (13)$$

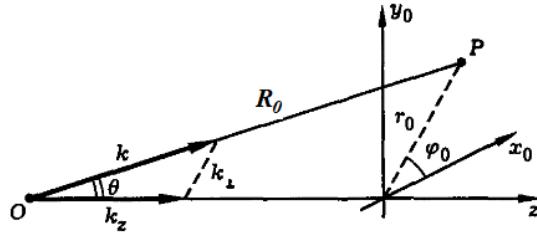


Рис. 5: К расчету дифракции на круглом отверстии

Из (12) и (13) следует, что

$$k_x x + k_y y = k_{\perp} r \cos(\phi - \phi_0).$$

В новых переменных пространственная спектральная амплитуда поля принимает вид

$$\varepsilon(k_{\perp}, \phi_0) = \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} \varepsilon(r, \phi) e^{ik_{\perp} r \cos(\phi - \phi_0)} d\phi$$

Ограничимся рассмотрением случая осесимметрического начального распределения поля, полагая  $\varepsilon(k_{\perp}, \phi_0) = \varepsilon(r)$ .

$$J_{\alpha}(x) = \int_0^{2\pi} e^{i(\alpha\tau - x \sin \tau)} d\tau$$

Используя функции Бесселя нулевого и первого порядков, получим распределение поля на плоскости экрана:

$$\varepsilon(k_{\perp}) = \varepsilon_0 2\pi R^2 \frac{J_1(k_{\perp} R)}{(k_{\perp} R)}. \quad (14)$$

Вычислим угловое распределение интенсивности света в дифракционной картине. Используя (9), (14) и полагая  $\theta$  малым,  $\sin \theta = \theta$ ,  $k_{\perp} = k \sin \theta = k\theta$ , получим:

$$I(\theta) = I_{max} \left[ \frac{J_1(2\pi\theta R/\lambda)}{\pi\theta R/\lambda} \right]^2,$$

$$\text{т.е. } I(\theta) = I_0 \left( \frac{\pi R^2}{\lambda b} \right).$$

### 3.3 Расчет дифракции Фраунгофера на треугольнике

Сместим систему координат к одной из вершин треугольника (дифракционная картина от этого не изменится). Экран находится на расстоянии  $z = z_0$ . Границы треугольника соответственно равны (рис. 6):

$$\begin{cases} x = a, \text{ основание треугольника} \\ y = x, \text{ сторона при } y > 0 \\ y = -x, \text{ сторона при } y \leq 0 \end{cases}$$

Тогда пространственная спектральная амплитуда:

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a e^{-ik_x x} \int_{-x}^x e^{-ik_y y} dy dx$$

Считая интеграл по  $dy$ , получим:

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \frac{e^{ikz}}{ik_y z} \int_0^a [e^{-i(k_x - k_y)x} - e^{-i(k_x + k_y)x}] dx$$

Пользуясь свойством линейности интеграла, рассчитаем интеграл по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-i(k_x - k_y)x} dx &= \frac{1 - e^{-ia(k_x - k_y)}}{i(k_x - k_y)} = 2ae^{-\frac{ia}{2}(k_x - k_y)} \operatorname{sinc}\left(\frac{(k_x - k_y)a}{2\pi}\right) \\ \int_0^a e^{-i(k_x + k_y)x} dx &= \frac{1 - e^{-ia(k_x + k_y)}}{i(k_x + k_y)} = 2ae^{-\frac{ia}{2}(k_x + k_y)} \operatorname{sinc}\left(\frac{(k_x + k_y)a}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

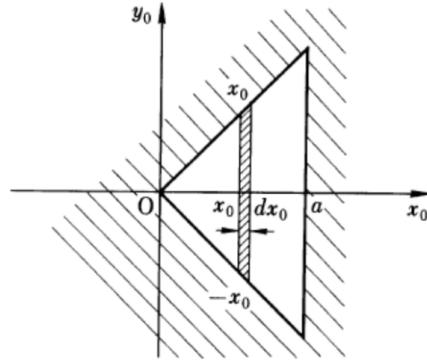


Рис. 6: К расчету дифракции на равнобедренном треугольнике

Получаем конечное выражение для пространственной спектральной амплитуды:

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \frac{2ae^{ikz}}{ik_y z} \left[ e^{-\frac{ia}{2}(k_x - k_y)} \text{sinc}\left(\frac{(k_x - k_y)a}{2\pi}\right) - e^{-\frac{ia}{2}(k_x + k_y)} \text{sinc}\left(\frac{(k_x + k_y)a}{2\pi}\right) \right] \quad (15)$$

Зная пространственную спектральную амплитуду (15), найдем интенсивность на экране  $z = z_0$  через (9).

## 4 Экспериментальная установка

Эксперимент проводился на лабораторной установке, использовавшейся в лабораторном курсе по общей физике. Схема представлена на рисунке:

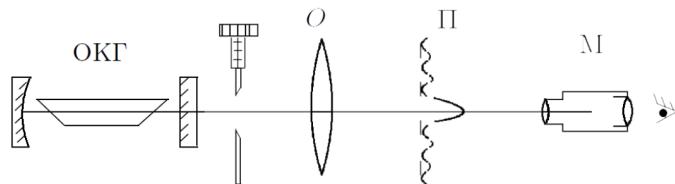


Рис. 7: Схема установки для наблюдения дифракции Фраунгофера

Дифракционная картина наблюдается здесь в фокальной плоскости объектива **П**. Поскольку объектив не вносит дополнительной разности хода в его фокальной плоскости наблюдается неискаженная дифракционная картина Фраунгофера. Эта картина соответствует бесконечно удаленной плоскости.

**Параметры установки.** Используется гелий-неоновый лазер **ОКГ** (длина волны  $\lambda = 579\text{нм}$ ), уширитель пучка, линза **О** для фокусировки пучка. В фокальной плоскости установлен экран **П**, на котором наблюдается дифракционная картина, через микроскоп **М**. Наблюдение проводилось качественно, поэтому параметры установки подбирались для нахождения четкой картины и, соответственно, не изменились.

- Радиус кругового отверстия 0.1 мм;
- Сторона квадрата 0.3 мм;
- Сторона равностороннего треугольника 0.1 мм.

**Методика эксперимента.** Микроскоп настраивается на фокальную плоскость линзы **П**. Перемещая микроскоп, находим резкое изображение дифракционной картины.

## 5 Анализ дифракционной картины

Для подробного анализа дифракционной картины была создана математическая модель дифракции Фраунгофера в среде программирования MatLab. Приверим достоверность математической модели, сравнив срез в плоскости  $xOy$  3D-графиков интенсивностей из MatLab и дифракционных картин, полученных на установке. Это можно сделать, т.к. дифракционную картину можно интерпретировать как распределение интенсивности падающего света.

### 5.1 Сравнение

Сравним дифракционные картины, полученные тремя способами: с помощью математического моделирования преобразования Фурье; аналитического вычисления интеграла Френеля; непосредственного наблюдения дифракционных картин на экспериментальной установке, схема которой указана на рис. 7.

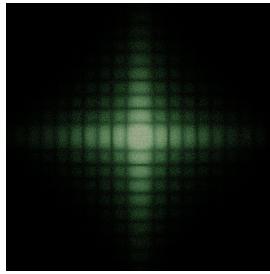


Рис. 8: Наблюдение дифракционных картин на экспериментальной установке

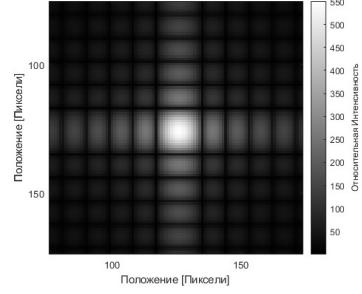


Рис. 9: Расчет дифракционной картины через математическое моделирование

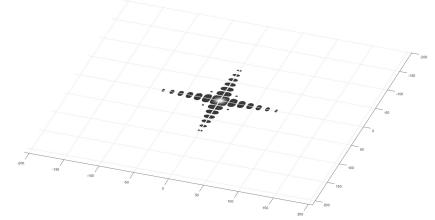


Рис. 10: Расчет дифракционной картины через аналитическое вычисление интеграла Френеля

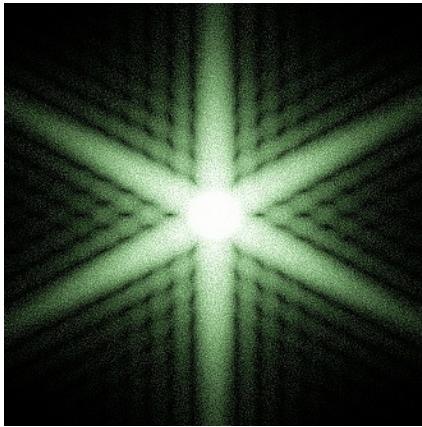


Рис. 11: Наблюдение дифракционных картин на экспериментальной установке

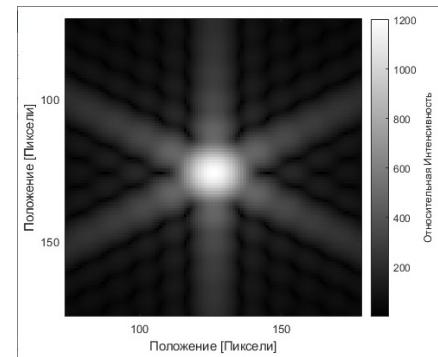


Рис. 12: Расчет дифракционной картины через математическое моделирование

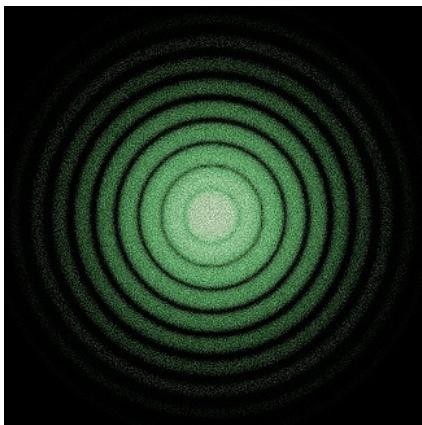


Рис. 13: Наблюдение дифракционных картин на экспериментальной установке

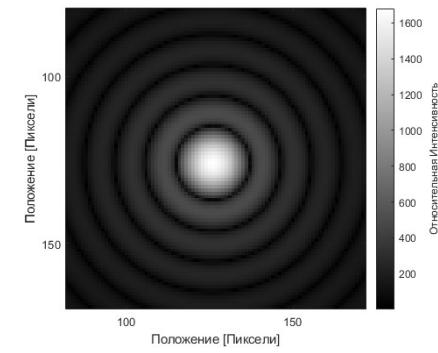


Рис. 14: Расчет дифракционной картины через математическое моделирование

## 5.2 Закономерность изменения дифракционной картины на примере отверстия в виде треугольника

Свойства преобразования Фурье, с помощью которых можно определить вид дифракционной картины до ее построения, подробно описаны в 8.2. Свойство "изменение масштаба" позволяет по известной дифракционной картине получить новые дифракционные картины, без вычислений измененных преобразований Фурье. Для этого надо отверстие равномерно вытянуть или сжать в том же направлении. Так, при растягивании круглого отверстия, оно переходит в эллиптическое, а дифракционные кольца сжимаются, принимая эллиптическую форму.

Также изменение масштабов отверстия ведет к изменению интенсивности преобразованной дифракционной картины. Так, при растяжении фигуры в  $n$  раз,  $I$  увеличивается в  $n^2$  раз.

Проиллюстрируем выполнение этих свойств на следующем примере. Имеется отверстие в виде равнобедренного треугольника. Варьируя размер стороны основания треугольника, можно добиться наблюдения дифракционной картины не затрачивая большого количества времени на компьютерные вычисления: (рис. 7)

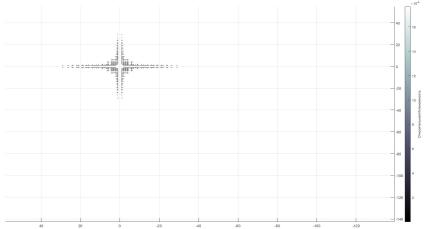


Рис. 15: Уменьшим сторону

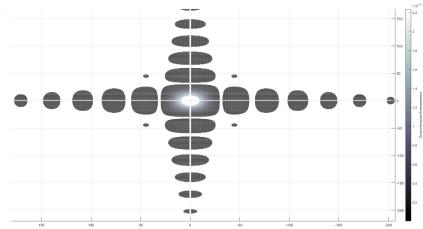


Рис. 16: Увеличим сторону

## 6 Метод композиций

### 6.1 Моделирование прямоугольника через метод композиций

Рассмотрим свойство линейности преобразования Фурье (см. 8.2). Простейшими преобразованиями (изменение масштаба, вращение, перемещение) простейших фигур, для которых известны дифракционные распределения, можно получить нужные апертуры требуемой формы. Тогда из полученных соотношений для изменения дифракционной картины, можно получить период и интенсивность получившейся дифракционной картины произвольной формы. Так как произвольная многоугольная апертура состоит из конечного числа треугольников, то дифракционная картина может быть получена как композиция дифракционных картин элементарных треугольников, преобразованных по требованию сетки.

Для подтверждения данного свойства было проведено численное моделирование дифракционной картины от квадрата и соответственно двух прямоугольных треугольников, полученных при рассечении квадрата по диагонали:

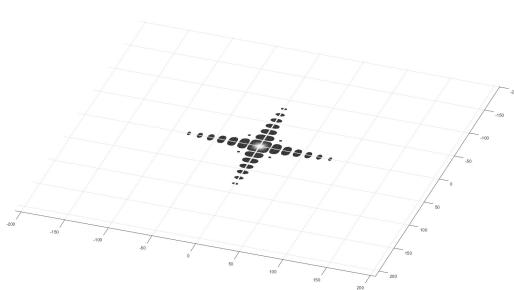


Рис. 17: Дифракция Фраунгофера на прямоугольнике обычным расчетом

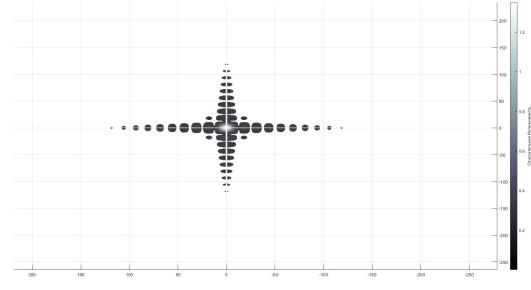


Рис. 18: Дифракция Фраунгофера на прямоугольнике, используя метод композиций

## 7 Заключение

В этой работе была изучена и замоделирована дифракция Фраунгофера на отверстиях различных форм. Основываясь на свойствах преобразования Фурье, было приведено качественное доказательство применимости этих свойств для оптимизации моделирования дифракционных картин. Был разобран метод композиций, на основании которого, в качестве примера, моделировалась дифракционная картина для отверстия в виде прямоугольника. Полученный способ позволяет создать математическую модель дифракции Фраунгофера для любого отверстия.

## 8 Дополнение

### 8.1 Сравнение fft и аналитического вычисления интеграла Френеля

Прямой просчет преобразования Фурье от сложных функций затрачивает много ресурсов и, соответственно, много времени. Поэтому в математической модели все пространственные спектральные амплитуды просчитываются через fft - "Быстрое преобразование Фурье". Сравним оба способа:

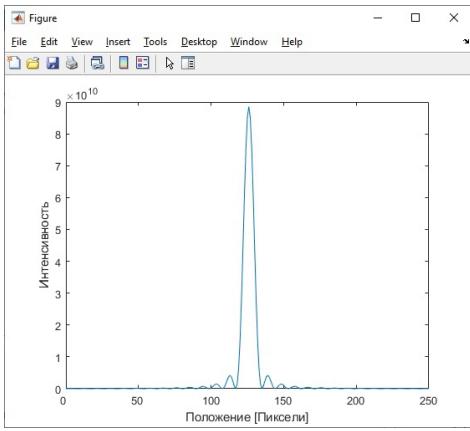


Рис. 19: Через математическое моделирование преобразования Фурье

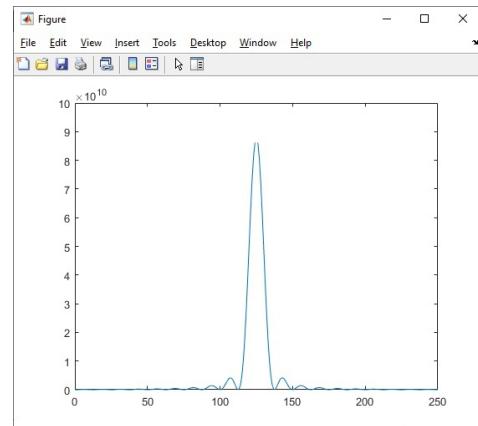


Рис. 20: Через аналитическое вычисление интеграла Френеля

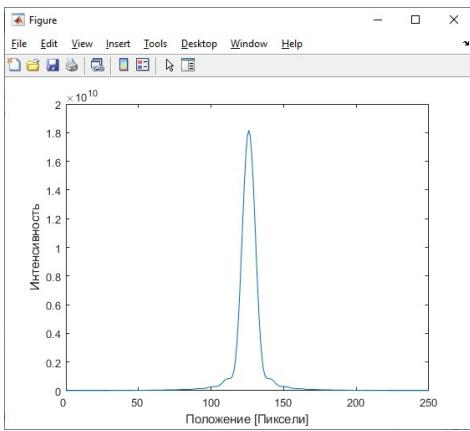


Рис. 21: Через математическое моделирование преобразования Фурье

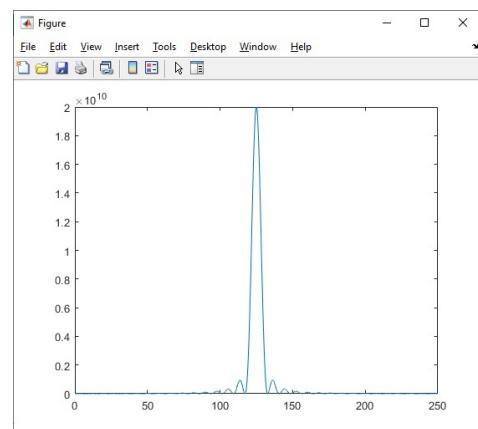


Рис. 22: Через аналитическое вычисление интеграла Френеля

Как мы видим, графики идентичны. Тогда, просчет дифракции Фраунгофера на круге проведем через fft.

## 8.2 Свойства преобразования Фурье

**Свойства линейности.** Пусть  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$  Фурье-образы функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно, а  $a_1$  и  $a_2$  - произвольные комплексные числа. В этом случае Фурье-образ функции

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

равен

$$F(u) = a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u).$$

Таким образом, спектр пространственных частот сложного объекта любой произвольной формы можно получить как сумму спектров простых геометрических фигур, пространственные спектры которых известны, что значительно упрощает вычислительные процедуры.

**Изменение масштаба.** Пусть  $a$  действительное число, тогда

$$f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right).$$

Это свойство является очень важным для дифракции. Оно позволяет связать изменение размера изделия с изменением периода пространственного спектра. Показывает их обратно пропорциональную зависимость.

**Свойства сдвига.** Если функцию  $f(x)$  сдвинуть на величину  $a$ , то мы получим

$$f(x - a) \leftrightarrow e^{-jua} F(u).$$

Из этого выражения следует, что смещение функции  $f(x)$  на величину  $a$  приводит лишь к дополнительному вращению фазы на величину  $ua$ , а модуль Фурье-образа остается неизмененным.

Из этого свойства следует одно из основных достоинств приборов и устройств, основанных на дифракции - инвариантность к смещениям исследуемого объекта.

Доказанные свойства справедливы и для двумерного преобразования Фурье, которые используются в работе.