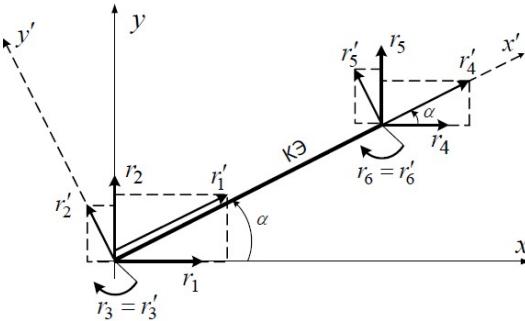
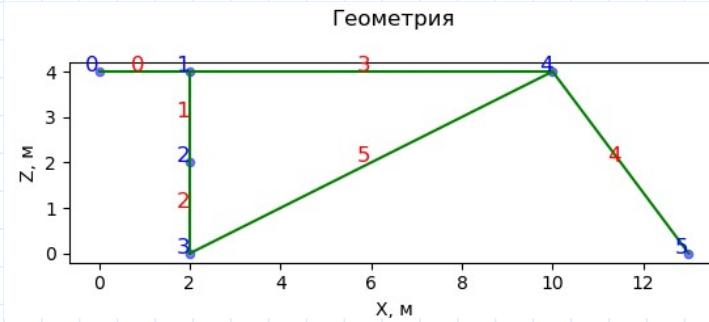
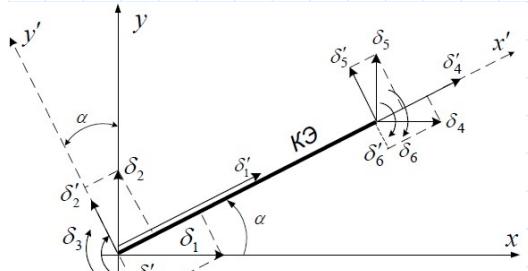


## Расчёт плоской рамы методом деформаций



**Узлы**

$x$ ( $m$ )	$z$ ( $m$ )	$U_x$ ( $kN$ )	$U_z$ ( $kN$ )	$R_y$ ( $kN$ )	$F_x$ ( $kN$ )	$F_z$ ( $kN$ )	$M_y$ ( $kN\cdot m$ )	$m_x$ (tonne)	$j_s$	$j_e$	$R_s$	$R_e$	$A$ ( $m^2$ )	$J$ ( $m^4$ )	$E$ ( $MPa$ )	$q_1$ ( $\frac{kN}{m}$ )	$q_2$ ( $\frac{kN}{m}$ )
0	4	0	0	0	0	-20	0	0	0	1	0	0	200	20	1	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	2	1	2	1	0	100	10	1	0	0
2	2	0	0	0	20	0	0	0	2	3	0	0	100	10	1	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0	2	4	0	0	200	20	1	0	0
10	4	0	0	0	0	0	0	2	4	5	0	0	100	10	1	0	-10
13	0	1	1	0	0	0	0	0	3	4	1	1	100	10	1	10	-5

1 - закрепление

1 - шарнир

количество узлов

$$n_j := \text{rows}(x) = 6$$

количество элементов

$$n_f := \text{rows}(j_s) = 6$$

Длины элементов

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ l_i \leftarrow \sqrt{(x_{j_{e_i}} - x_{j_{s_i}})^2 + (z_{j_{e_i}} - z_{j_{s_i}})^2} \end{array} \right\|_l$$

Косинусы  $\alpha$

$$\cos := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ c_i \leftarrow \frac{x_{j_{e_i}} - x_{j_{s_i}}}{l_i} \end{array} \right\|_c$$

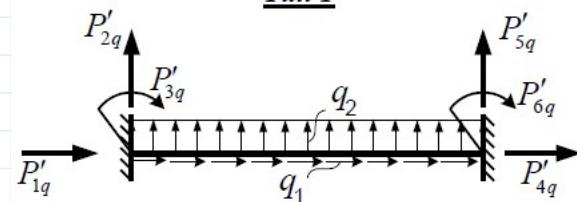
Синусы  $\alpha$

$$\sin := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ s_i \leftarrow \frac{z_{j_{e_i}} - z_{j_{s_i}}}{l_i} \end{array} \right\|_s$$

Матрица преобразования координат

$$T_\alpha(i) := \begin{bmatrix} \cos_i & \sin_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin_i & \cos_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos_i & \sin_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin_i & \cos_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tun 1



$$K'_1(i) := \begin{bmatrix} \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & -\frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & -\frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & \frac{4 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i} & 0 & \frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & \frac{2 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i} \\ \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & \frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & \frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & \frac{2 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i} & 0 & \frac{6 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & \frac{4 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i} \end{bmatrix}$$

Матрицы приведения размерностей

$$U_1 := \begin{bmatrix} m & m & m & m & m & m \\ m & m & 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & \frac{1}{m} & m & 1 & \frac{1}{m} \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & \frac{1}{m} & m & 1 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN} \quad P_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN}$$

Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
локальной системе координат

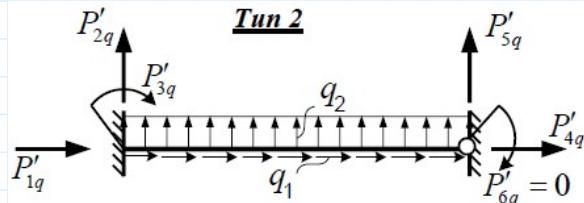
$$\begin{bmatrix} \frac{q_{1i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{q_{2i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{q_{2i} \cdot l_i^2}{12} \\ \frac{q_{1i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{q_{2i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{q_{2i} \cdot l_i^2}{12} \end{bmatrix}$$

Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
глобальной системе координат

$$P'_{q1}(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{K'_1(i)} \cdot \overrightarrow{U_1} \cdot T_\alpha(i)$$

$$P_{q1}(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{P'_{q1}(i)} \cdot \overrightarrow{P_1}$$

### Матрицы приведения размерностей



$$U_2 := \begin{bmatrix} m & m & m & m & m & m \\ m & m & 1 & m & m & m \\ m & 1 & \frac{1}{m} & m & 1 & m \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & 1 & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN}$$

$$P_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN}$$

$$K'_2(i) := \begin{bmatrix} \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i} & 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & 0 \\ -\frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^2} & 0 & \frac{3 \cdot E_i \cdot J_i}{l_i^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

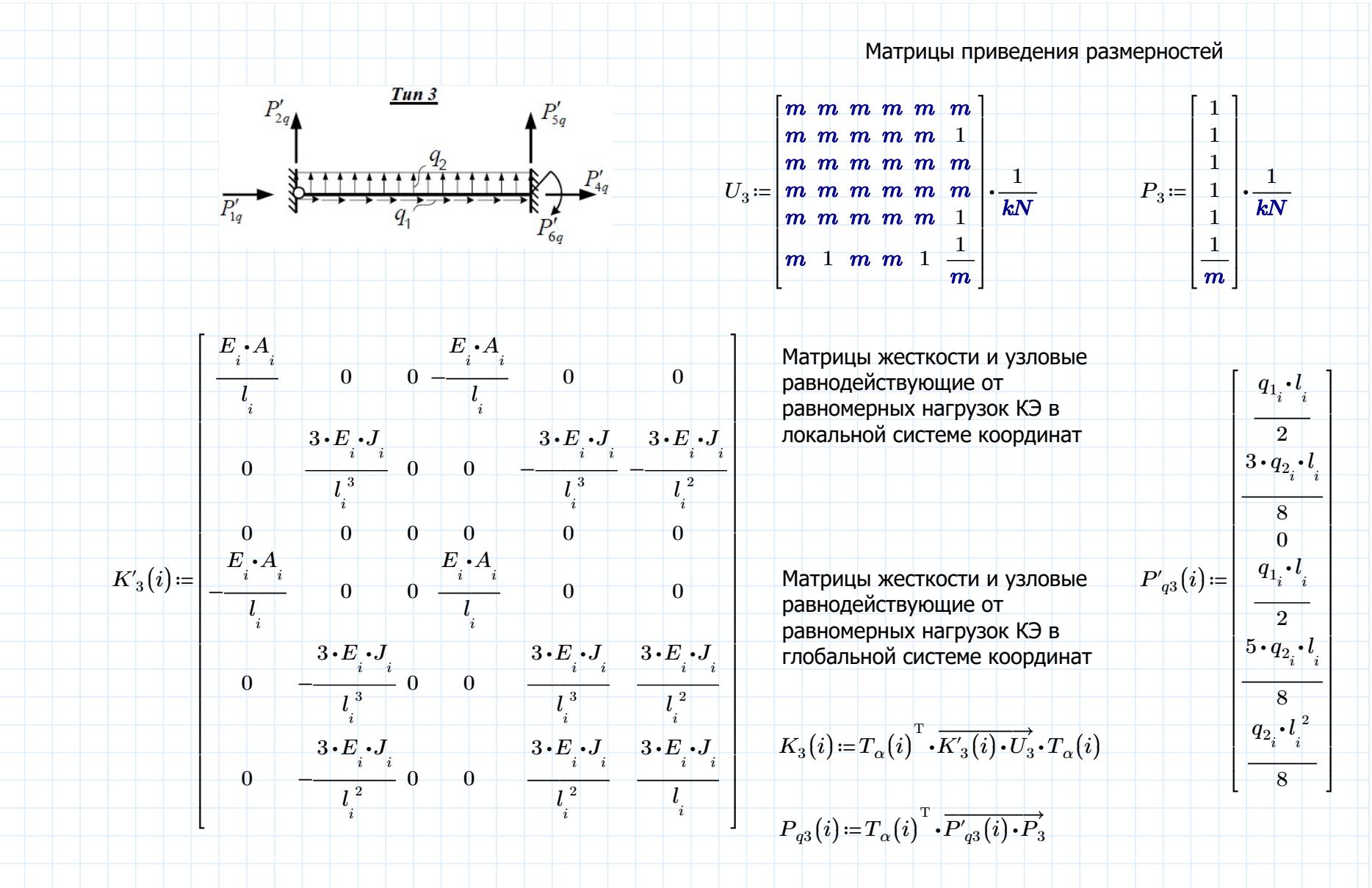
Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
локальной системе координат

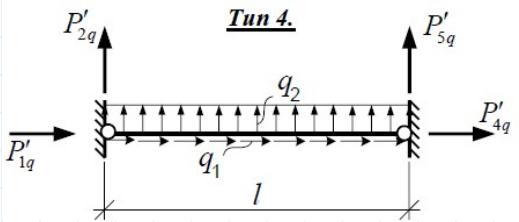
Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
глобальной системе координат

$$K_2(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{K'_2(i)} \cdot U_2 \cdot T_\alpha(i)$$

$$P_{q2}(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{P'_{q2}(i)} \cdot \overrightarrow{P_2}$$

$$P'_{q2}(i) := \begin{bmatrix} \frac{q_{1i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{5 \cdot q_{2i} \cdot l_i}{8} \\ \frac{q_{2i} \cdot l_i^2}{8} \\ \frac{q_{1i} \cdot l_i}{2} \\ \frac{3 \cdot q_{2i} \cdot l_i}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$





Матрицы приведения размерностей

$$U_4 := \begin{bmatrix} m & m & m & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \\ m & m & m & m & m & m \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN}$$

$$P_4 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{kN}$$

$$K'_4(i) := \begin{bmatrix} \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & -\frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_i \cdot A_i & 0 & 0 & \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 \\ -\frac{E_i \cdot A_i}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
локальной системе координат

Матрицы жесткости и узловые  
равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
глобальной системе координат

$$\begin{bmatrix} q_{1_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ q_{2_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ 0 \\ q_{1_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ q_{2_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P'_{q4}(i) := \begin{bmatrix} q_{1_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ q_{2_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ 0 \\ q_{1_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ q_{2_i} \cdot l_i \\ \hline 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{K'_4(i)} \cdot \overrightarrow{U_4} \cdot T_\alpha(i)$$

$$P_{q4}(i) := T_\alpha(i)^T \cdot \overrightarrow{P'_{q4}(i)} \cdot \overrightarrow{P_4}$$

Матрица жёсткости конечных элементов

```


$$K_i(i) := \begin{cases} \text{if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \| K \leftarrow K_1(i) \\ \text{else if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 1 \\ \quad \| K \leftarrow K_2(i) \\ \text{else if } R_{s_i} = 1 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \| K \leftarrow K_3(i) \\ \text{else} \\ \quad \| K \leftarrow K_4(i) \\ K \end{cases}$$


```

Узловые равнодействующие от равномерных нагрузок

```


$$P_q(i) := \begin{cases} \text{if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \| P \leftarrow P_{q1}(i) \\ \text{else if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 1 \\ \quad \| P \leftarrow P_{q2}(i) \\ \text{else if } R_{s_i} = 1 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \| P \leftarrow P_{q3}(i) \\ \text{else} \\ \quad \| P \leftarrow P_{q4}(i) \\ P \end{cases}$$


```

Степени свободы узлов

```


$$DoF := \begin{cases} k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n_j-1 \\ \quad \| \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \quad \| dof_{i,j} \leftarrow i + j + k \\ \quad \| k \leftarrow k + 2 \\ dof \end{cases}$$


```

Матрица топологии

```


$$A_f := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ \quad \| \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \quad \| af_{j,i} \leftarrow DoF_{j_{s_i},j} \\ \quad \quad \| af_{j+3,i} \leftarrow DoF_{j_{e_i},j} \\ af \end{cases}$$


```

Матрица положения КЭ

```


$$C_i(f) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..5 \\ \quad \| \text{for } j \in n_j..3-1 \\ \quad \quad \| c_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \| \text{for } i \in 0..5 \\ \quad \quad \| k \leftarrow A_{f_i,f} \\ \quad \quad \| c_{i,k} \leftarrow 1 \\ c \end{cases}$$


```

Узловые нагрузки

$$F_p := \begin{cases} \text{for } i \in n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f_i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f_{i \cdot 3} \leftarrow \frac{F_{x_{j_{s_i}}}}{\mathbf{kN}} \\ f_{i \cdot 3 + 1} \leftarrow \frac{F_{z_{j_{s_i}}}}{\mathbf{kN}} \\ f_{i \cdot 3 + 2} \leftarrow \frac{M_{y_{j_{s_i}}}}{\mathbf{kN} \cdot m} \end{array} \right| \end{array} \right| \\ f \end{cases}$$

Узловые равнодействующие от  
равномерных нагрузок

$$F_q := \begin{cases} \text{for } i \in n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f_i \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f_{j_{s_i} \cdot 3} \leftarrow f_{j_{s_i} \cdot 3} + P_q(i)_0 \\ f_{j_{s_i} \cdot 3 + 1} \leftarrow f_{j_{s_i} \cdot 3 + 1} + P_q(i)_1 \\ f_{j_{s_i} \cdot 3 + 2} \leftarrow f_{j_{s_i} \cdot 3 + 2} + P_q(i)_2 \\ f_{j_{e_i} \cdot 3} \leftarrow f_{j_{e_i} \cdot 3} + P_q(i)_3 \\ f_{j_{e_i} \cdot 3 + 1} \leftarrow f_{j_{e_i} \cdot 3 + 1} + P_q(i)_4 \\ f_{j_{e_i} \cdot 3 + 2} \leftarrow f_{j_{e_i} \cdot 3 + 2} + P_q(i)_5 \end{array} \right| \end{array} \right| \\ f \end{cases}$$

Полные узловые нагрузки

$$F := F_p + F_q$$

Матрица жесткости в глобальной  
системе координат

$$K := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow k + C_i(i)^T \cdot K_i(i) \cdot C_i(i) \end{array} \right| \end{array} \right| \\ k \end{array} \right| \end{cases}$$

Границные условия К

```

 $k_r(K) := \begin{cases} K_r \leftarrow K \\ \text{for } i \in 0..n_j - 1 \\ \quad \left\| \begin{matrix} U_{x_i} \\ U_{z_i} \\ R_{y_i} \end{matrix} \right\| \\ \quad rstr \leftarrow \begin{bmatrix} U_{x_i} \\ U_{z_i} \\ R_{y_i} \end{bmatrix} \\ \quad \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \quad \left\| \begin{matrix} \text{if } rstr_j \neq 0 \\ rs \leftarrow i \cdot 3 + j \\ \text{for } k \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \left\| \begin{matrix} K_{r_{rs,k}} \leftarrow 0 \\ K_{r_{k,rs}} \leftarrow 0 \\ K_{r_{rs,rs}} \leftarrow 1 \end{matrix} \right\| \\ \quad \text{if } K_{r_{i \cdot 3 + 2, i \cdot 3 + 2}} = 0 \\ \quad \quad \left\| K_{r_{i \cdot 3 + 2, i \cdot 3 + 2}} \leftarrow 1 \right\| \end{matrix} \right\| \\ K_r \end{cases}$ 

```

$$K_r := k_r(K)$$

Границные условия F

```

 $f_r(F) := \begin{cases} F_r \leftarrow F \\ \text{for } i \in 0..n_j - 1 \\ \quad \left\| \begin{matrix} U_{x_i} \\ U_{z_i} \\ R_{y_i} \end{matrix} \right\| \\ \quad rstr \leftarrow \begin{bmatrix} U_{x_i} \\ U_{z_i} \\ R_{y_i} \end{bmatrix} \\ \quad \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \quad \left\| \begin{matrix} \text{if } rstr_j \neq 0 \\ rs \leftarrow i \cdot 3 + j \\ F_{r_{rs}} \leftarrow 0 \end{matrix} \right\| \\ F_r \end{cases}$ 

```

$$F_r := f_r(F)$$

Узловые равнодействующие от  
равномерных нагрузок КЭ в  
локальной системе координат

$$P_{qi}(i) := \begin{cases} \text{if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \left\| P \leftarrow \overrightarrow{P'_{q1}(i)} \cdot \overrightarrow{P_1} \right. \\ \text{else if } R_{s_i} = 0 \wedge R_{e_i} = 1 \\ \quad \left\| P \leftarrow \overrightarrow{P'_{q2}(i)} \cdot \overrightarrow{P_2} \right. \\ \text{else if } R_{s_i} = 1 \wedge R_{e_i} = 0 \\ \quad \left\| P \leftarrow \overrightarrow{P'_{q3}(i)} \cdot \overrightarrow{P_3} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| P \leftarrow \overrightarrow{P'_{q4}(i)} \cdot \overrightarrow{P_4} \right. \\ P \end{cases}$$

Узловые усилия в КЭ

$$S_i := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \left\| U_- \leftarrow C_i(i) \cdot U \right. \\ \quad \left\| s_i \leftarrow (T_\alpha(i) \cdot K_i(i)) \cdot U_- - P_{qi}(i) \right. \\ s \end{cases}$$

Решение

$$U := \text{lsolve}(K_r, F_r)$$

Перемещения узлов

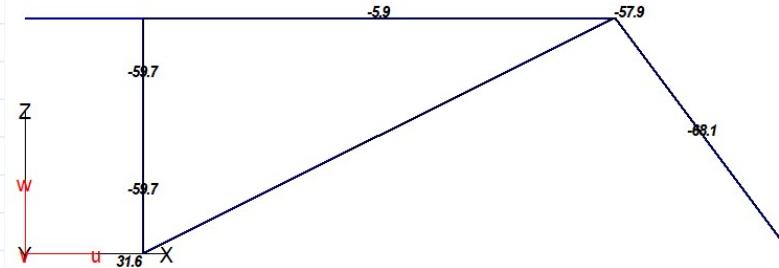
$$U_i := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n_j - 1 \\ \quad \left\| u_i \leftarrow \begin{bmatrix} U_{i \cdot 3} \cdot m \\ U_{i \cdot 3 + 1} \cdot m \\ U_{i \cdot 3 + 2} \cdot rad \end{bmatrix} \right. \\ u \end{cases}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} 0.000827 m \\ 0.000337 m \\ 0.000696 \\ 0.000827 m \\ -0.002389 m \\ 0.002696 \\ 0.001425 m \\ -0.001194 m \\ 0.000483 \\ 0 m \\ 0 m \\ 0 \\ 0.000592 m \\ -0.003811 m \\ -0.002192 \\ 0 m \\ 0 m \\ -0.002052 \end{bmatrix}$$

### Продольные силы в сечениях КЭ

$$N_i := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ \quad \left\| n_i \leftarrow \begin{bmatrix} -\left(S_{i,i}\right)_0 & \left(S_{i,i}\right)_3 \end{bmatrix} kN \right. \\ \quad \left. n \right\| \end{array} \right.$$

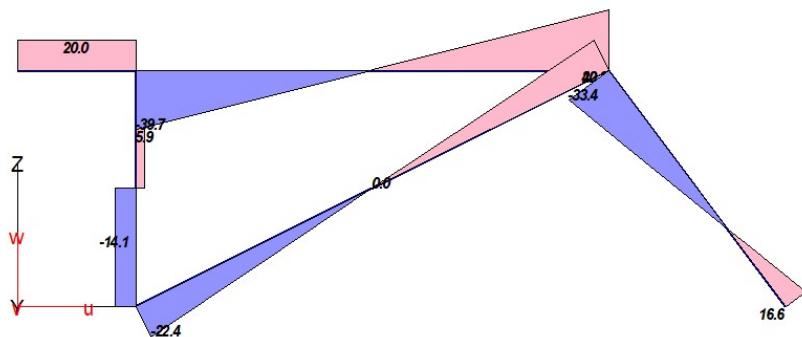
$$N_i = \begin{bmatrix} [0 \ 0] \\ [-59.722 \ -59.722] \\ [-59.722 \ -59.722] \\ [-5.862 \ -5.862] \\ [-68.09 \ -68.09] \\ [31.587 \ -57.856] \end{bmatrix} kN$$



### Поперечные силы в сечениях КЭ

$$Q_i := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f-1 \\ \quad \left\| q_i \leftarrow \begin{bmatrix} -\left(S_{i,i}\right)_1 & \left(S_{i,i}\right)_4 \end{bmatrix} kN \right. \\ \quad \left. q \right\| \end{array} \right.$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} [20 \ 20] \\ [5.862 \ 5.862] \\ [-14.138 \ -14.138] \\ [-39.722 \ 40.278] \\ [-33.445 \ 16.555] \\ [-22.361 \ 22.361] \end{bmatrix} kN$$



## Изгибающие моменты в сечениях КЭ

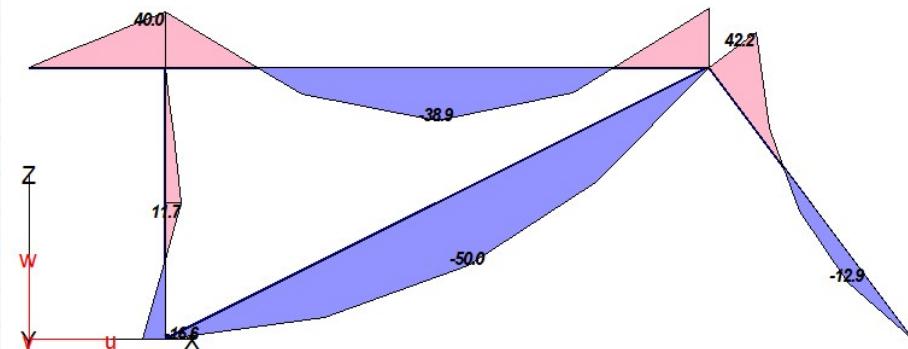
$n := 4$

```

 $M_i := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} l_i \\ \Delta l \leftarrow \frac{l_i}{n} \\ m_{i,0} \leftarrow \left(S_i\right)_2 \cdot kN \cdot m \\ m_{i,n} \leftarrow -\left(S_i\right)_5 \cdot kN \cdot m \\ \Delta m \leftarrow \frac{m_{i,n} - m_{i,0}}{l_i} \\ \text{for } j \in 0..n - 1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x \leftarrow (j+1) \cdot \Delta l \\ m_{i,j+1} \leftarrow -q_2 \cdot x \cdot \frac{(l_i - x)}{2} + m_{i,0} + x \cdot \Delta m \end{array} \right. \\ m \end{array} \right. \end{array} \right.$ 

```

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -20 & -30 & -40 \\ 0 & -2.931 & -5.862 & -8.794 & -11.725 \\ -11.725 & -4.656 & 2.413 & 9.481 & 16.55 \\ -40 & 19.443 & 38.887 & 18.33 & -42.226 \\ -42.226 & -8.232 & 10.137 & 12.881 & 0 \\ 0 & 37.5 & 50 & 37.5 & 0 \end{bmatrix} kN \cdot m$$



Матрица масс в локальной  
системе координат

$$M'(k) := \begin{array}{|c|} \hline \text{for } i \in 0..5 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{for } j \in 0..5 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline M_{i,j} \leftarrow 0 \\ m_{x_{j_{s_k}}} \\ \hline \end{array} \\ M_{0,0} \leftarrow \frac{\text{tonne}}{} \\ m_{x_{j_{e_k}}} \\ M_{3,3} \leftarrow \frac{\text{tonne}}{} \\ M \\ \hline \end{array}$$

Матрица масс в глобальной  
системе координат

$$M := \begin{array}{|c|} \hline \text{for } i \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{for } j \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{i,j} \leftarrow 0 \\ \hline \end{array} \\ \text{for } i \in 0..n_f - 1 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline m_i \leftarrow C_i(i)^T \cdot M'(i) \cdot C_i(i) \\ \text{for } j \in 0..n_j \cdot 3 - 1 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{if } m_{j,j} = 0 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{j,j} \leftarrow m_{i,j} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ m \\ \hline \end{array}$$

Число степеней  
свободы масс

$$n_m := \begin{array}{|c|} \hline n \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n_j - 1 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{if } m_{x_i} \neq 0 \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline n \leftarrow n + 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ n \\ \hline \end{array}$$

Матрица податливости

$$\delta := K_r^{-1}$$

$$d := \delta \cdot M$$

### Собственные значения

$$\lambda := \text{submatrix}(\text{eigenvals}(d), 0, n_m - 1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 3.053 \cdot 10^{-4} \\ 3.418 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

### Круговая частота

$$\omega := \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \begin{bmatrix} 57.234 \\ 171.037 \end{bmatrix}$$

### Техническая частота

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{bmatrix} 9.109 \\ 27.221 \end{bmatrix}$$

### Период

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.037 \end{bmatrix}$$

