Introduzione alla computazione quantistica

Maria Bondani
Ricercatrice e docente di ottica e informazione quantistica
CNR - Istituto di fotonica e nanotecnologie, Como
e-mail: maria.bondani@uninsubria.it

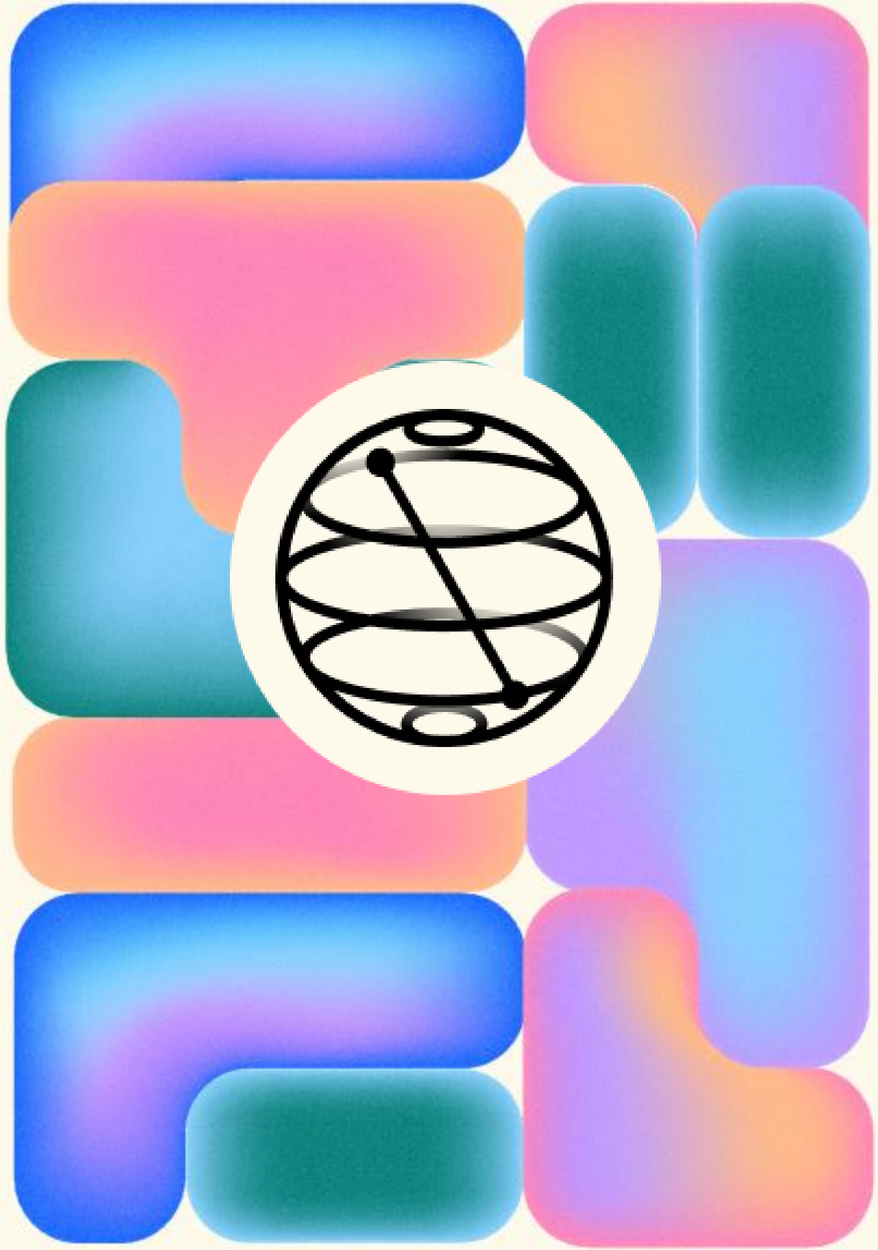
Gabriele Cenedese
Dottorando in Fisica
DISAT - Università dell'Insubria, Como
e-mail: gcenedese@uninsubria.it

Qiskit | Fall Fest 2023

IFN

UNIVERSITAS STUDIORUM INSUBRIAE

NQSTI National Quantum Science and Technology Institute



Postulati della Meccanica Quantistica

I postulati della Meccanica Quantistica riassumono la descrizione di un **sistema fisico** riguardo a:

1. il suo stato;
2. le misure su di esso;
3. la sua evoluzione dovuta alla dinamica o alla misura.

Postulati della Meccanica Quantistica

- **Postulato 1 (Stati di un sistema quantistico).**
  Gli stati possibili di un sistema fisico corrispondono a *vettori complessi normalizzati* di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$

  $$|\psi\rangle \qquad \psi \in C \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

  I sistemi composti, ovvero fatti di più di un un oggetto fisico o da diversi gradi di libertà dello stesso oggetto sono descritti da vettori in uno spazio di Hilbert che è il prodotto tensore dei corrispondenti spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

  - **Principio di sovrapposizione:** se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono stati possibili di un sistema allora anche ogni loro combinazione lineare normalizzata è uno stato possible del sistema:

  $$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \alpha, \beta \in C$$

Postulati della Meccanica Quantistica

- **Postulato 2 (Osservabili e misure quantistiche)**

  Le quantità osservabili sono descritte da *operatori Hermitiani* $\hat{A}$, $\hat{A} = \hat{A}^{+}$

  - $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ $a \in R$ autovalori e $|a\rangle$ autostati
  - $\{|a\rangle\}$ forma una base dello spazio di Hilbert ovvero

    $\langle a'|a\rangle = \delta_{a,a'}$ (ortonormalità)

    $\sum_a |a\rangle\langle a| = \hat{I}$ (completezza) con $\Pi_a = |a\rangle\langle a|$ proiettore sullo stato $|a\rangle$

  - Ogni operatore Hermitiano ammette *decomposizione spettrale*

$$\hat{A} = \sum_a a|a\rangle\langle a| = \sum_a a\Pi_a$$

Postulati della Meccanica Quantistica

- La **probabilità** di ottenere un valore a dalla misura di $\hat{A}$ è data da

$$p_a = |\langle\psi|a\rangle|^2 = \langle\psi|\Pi_a|\psi\rangle = |c_a|^2 \qquad |\psi\rangle = \sum_a c_a|a\rangle$$

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = Tr\left[|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}\right]$$

Regola di Born

- Lo stato del **sistema dopo la misura** è la proiezione normalizzata dello stato prima della misura sull'autostato relativo all'autovalore osservato

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_a}}\Pi_a|\psi\rangle = \frac{c_a}{\sqrt{p_a}}|a\rangle$$

Collasso della funzione d'onda

Postulati della Meccanica Quantistica

- **Postulato 3 (Dinamica di un sistema quantistico)**

L'evoluzione dinamica di un sistema quantistico è descritta da **operatori unitari**

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\hat{U}(t,t_0)\hat{U}^+(t,t_0) = \hat{U}^+(t,t_0)\hat{U}(t,t_0) = \hat{I}$$

Stato di un sistema quantistico

Lo stato di un sistema quantistico non solo permette di ricavare i risultati delle misure sul sistema, ma ne fornisce una descrizione completa.

Infatti non tutte le informazioni sul sistema sono contenute nelle probabilità (ad esempio le fasi).

In questo senso lo stato quantistico parla in qualche modo delle “proprietà” del singolo oggetto quantistico e non solo delle “proprietà” di un insieme statistico di oggetti uguali.

E’ importante che le proprietà quantistiche dello stato vengano “protette” per poterlo usare all’interno di algoritmi.

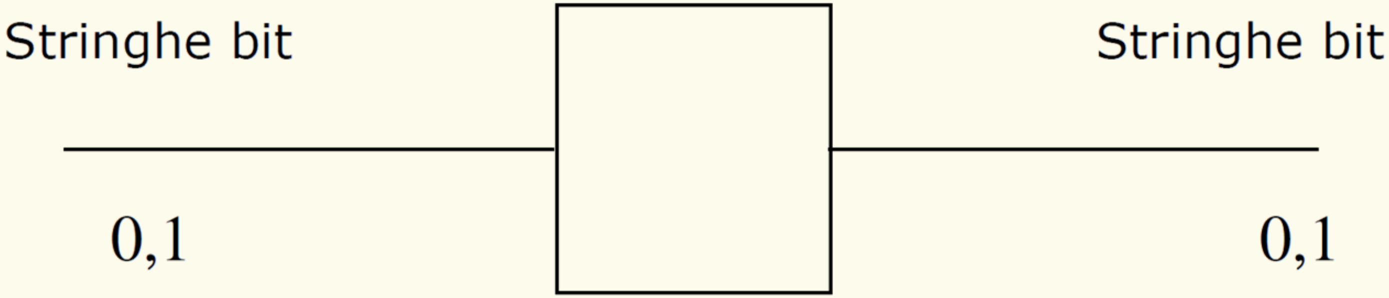
Dal bit al qubit

Codifica informazione

Elaborazione informazione

Informazione in uscita

Funzioni booleane
Porte logiche



$$f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^m$$

Preparazione

Trasformazione

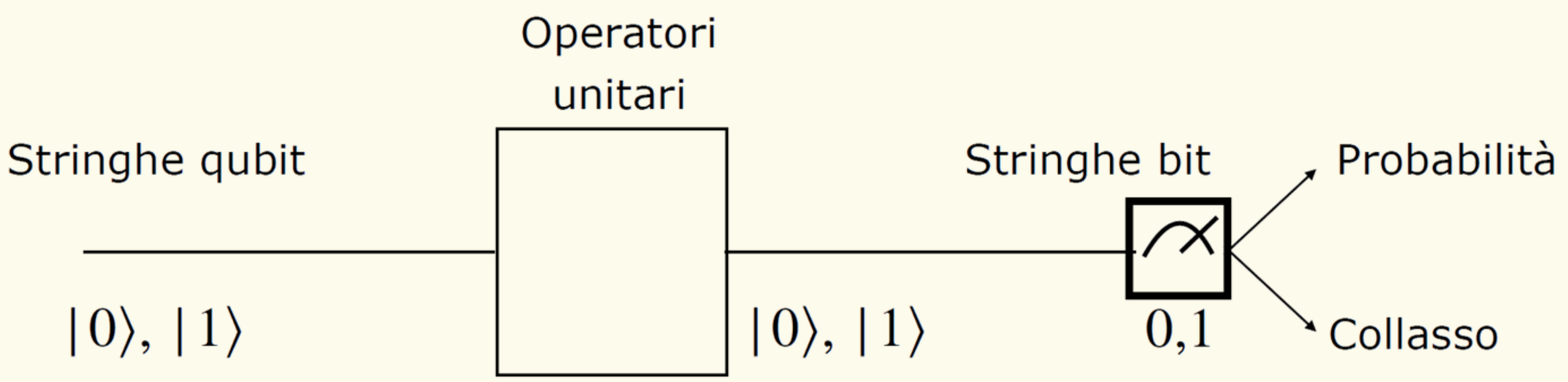
Misurazione

Dal bit al qubit

Preparazione

Trasformazione

Misurazione



Codifica informazione

Elaborazione informazione

Informazione in uscita

Computazione quantistica

Bit → **Qubit**

0

1

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$|0\rangle$

$|1\rangle$

Porte logiche classiche → **Porte logiche quantistiche**

$$f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^n$$

Operatori unitari

Misura classica → **Misura quantistica**

Probabilità

Qubit

Notazione di Dirac $|0\rangle \ , \ |1\rangle$

$$|\phi\rangle \cdot |\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{1} \phi_i^* \psi_i$$

Rappresentazione matriciale $|0\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ |1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$|\phi\rangle \cdot |\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \phi_0^* & \phi_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \phi_0^* \psi_0 + \phi_1^* \psi_1$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

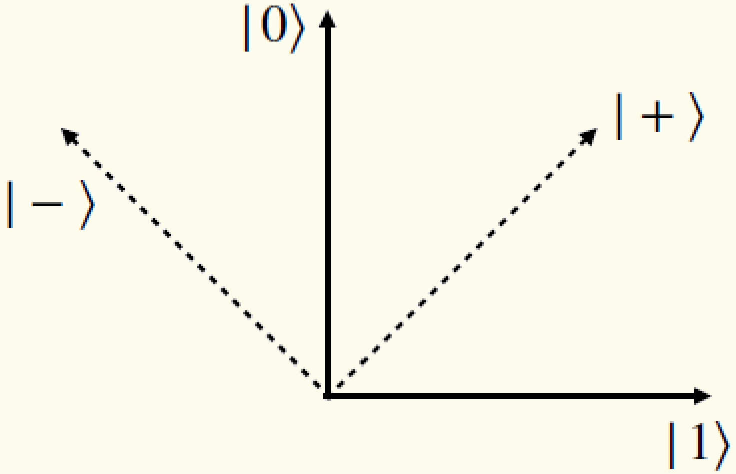
$$|\alpha|^2 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = p_0$$

$$|\beta|^2 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = p_1$$

p_0 e p_1 : probabilità che a valle di una misura sulla base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ stato «collassi» su $|0\rangle$ o $|1\rangle$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \alpha, \beta \in C$$

Qubit



La scelta della base è totalmente arbitraria

$$B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

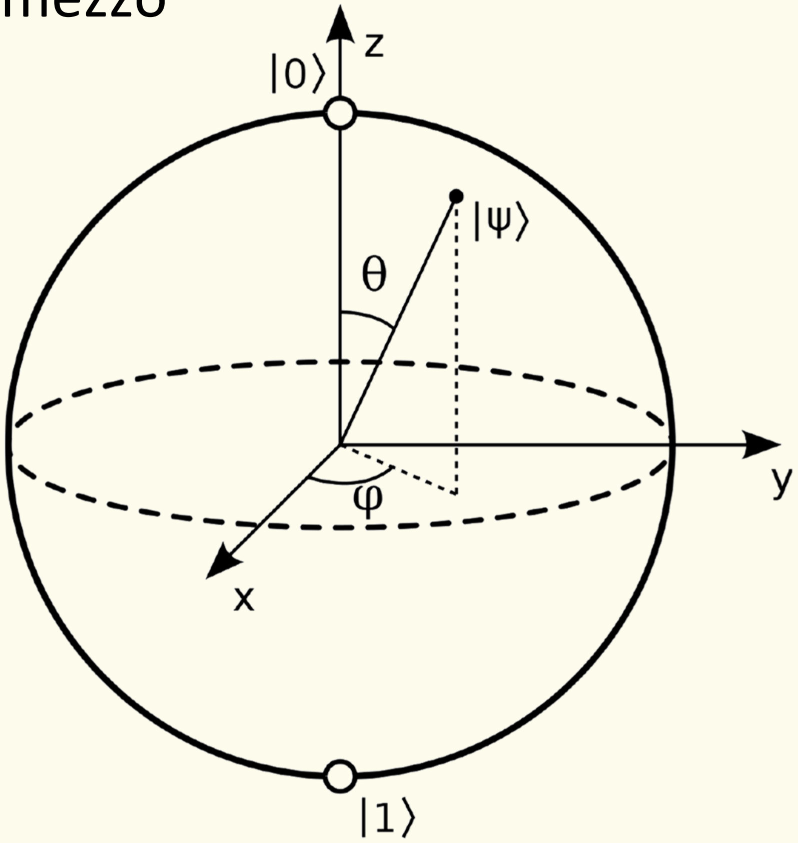
Base computazionale

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \qquad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \qquad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

Sfera di Bloch

Un modo comune di rappresentare lo stato di un qubit è per mezzo di un punto sulla superficie della sfera di Bloch.



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \alpha, \beta \in C$$

Possiamo trovare angoli γ, δ, θ tali che

$$\alpha = e^{i\gamma} \cos\frac{\theta}{2} \qquad \beta = e^{i\delta} \sin\frac{\theta}{2}$$

Poiché la fase globale è fisicamente non rilevante, possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \qquad 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Le coordinate di un punto sulla sfera sono $(x, y, z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

Qubit

Conosciamo il valore di

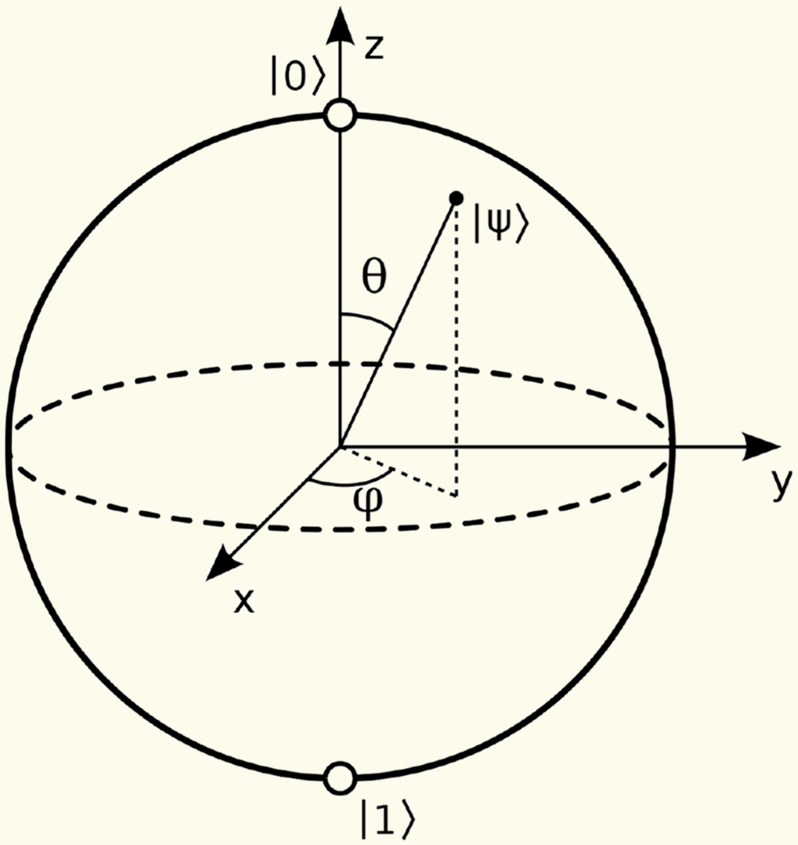
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \alpha, \beta \in C$$

Possiamo trovare angoli γ, δ, θ tali che

$$\alpha = e^{i\gamma}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \beta = e^{i\delta}\sin\frac{\theta}{2}$$

Poiché la fase globale è fisicamente non rilevante, possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \qquad 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$



Le coordinate di un punto sulla sfera sono $(x, y, z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

Porte logiche (gate) a singolo qubit

L'informazione codificata mediante i qubit, può essere manipolata mediante delle porte logiche che saranno estensione di porte classiche oppure nuove porte quantistiche.

Le porte logiche sono in generale operatori unitari (conservano il prodotto scalare).

Notazione di Dirac

$$I|0\rangle = |0\rangle$$
$$I|1\rangle = |1\rangle$$

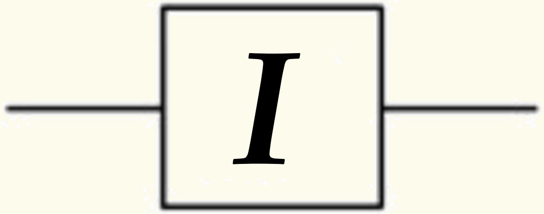
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$I|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Rappresentazione matriciale

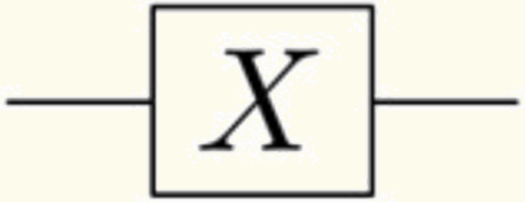
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Rappresentazione circuitale



Pauli X gate (NOT)



Agisce su un qubit - gate classico

Notazione di Dirac

$$X|0\rangle = |1\rangle \qquad |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle \qquad X|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

Rappresentazione matriciale

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \qquad X\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pauli Y gate

Agisce su un qubit - gate quantistico

Notazione di Dirac

$$Y|0\rangle = i|1\rangle$$
$$Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$Y|\psi\rangle = i\left(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\right)$$

Rappresentazione matriciale

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y$$

$$Y\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pauli Z gate (phase flip)

Agisce su un qubit - gate quantistico

Notazione di Dirac

$$Z|0\rangle = |0\rangle$$
$$Z|1\rangle = -|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$Z|\psi\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Rappresentazione matriciale

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$Z\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà delle matrici di Pauli

$$\sigma_x \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=+1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_x \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_y \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}=+1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

$$\sigma_y \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}=-1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$$

$$\sigma_z \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=+1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\sigma_z \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Le matrici di Pauli hanno tutte autovalori $\lambda_i = \pm 1$

Proprietà delle matrici di Pauli

Gli autostati di σ_z sono i vettori $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ovvero σ_z è diagonale nella base computazionale

Gli autostati di σ_x sono i vettori $\left\{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right\}$

Gli autostati di σ_y sono i vettori $\left\{|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - i|1\rangle\right)\right\}$

Le matrici di auli non commutano

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i\sigma_z$$

$$\sigma_y\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = -i\sigma_z$$

$$\left[\sigma_x, \sigma_y\right] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$$

Le matrici di Pauli sono autoaggiunte

Ogni gate a singolo qubit si può scrivere in funzione di $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

Proprietà delle matrici di Pauli

$$\left[\sigma_x,\sigma_y\right]=\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2i\sigma_z$$

$$(\sigma_x)^2=\left(\sigma_y\right)^2=(\sigma_z)^2=1$$

$$\Delta\sigma_x=\sqrt{\left\langle(\sigma_x)^2\right\rangle-\langle\sigma_x\rangle^2}=\sqrt{1-\langle\sigma_x\rangle^2}$$

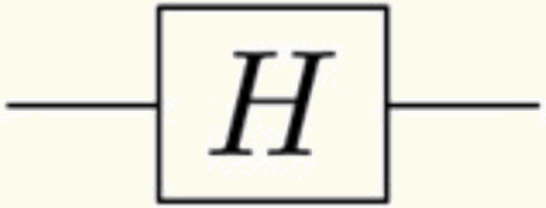
$$\Delta\sigma_y=\sqrt{1-\left\langle\sigma_y\right\rangle^2}$$

$$\Delta\sigma_z=\sqrt{1-\langle\sigma_z\rangle^2}$$

$$\Delta\sigma_x\Delta\sigma_y\geq\frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\sigma_x,\sigma_y\right]\right\rangle\right|^2=\left|\left\langle\sigma_z\right\rangle\right|^2$$

Principio di indeterminazione

Hadamard gate



Agisce su un qubit - gate quantistico

Notazione di Dirac

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = |+\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = |-\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\alpha+\beta)|0\rangle + (\alpha-\beta)|1\rangle\right]$$

Rappresentazione matriciale

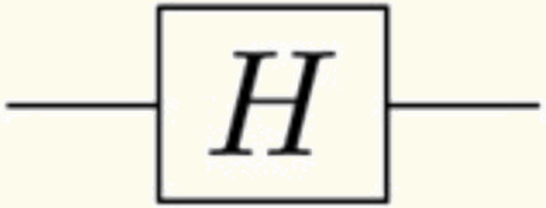
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_z + \sigma_x\right)$$

$$H^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Misuriamo



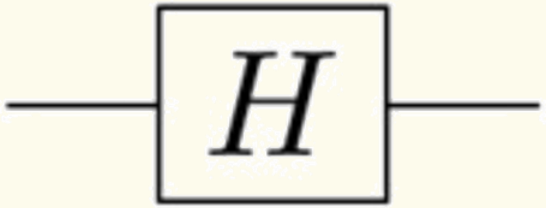
$$\langle 0|\sigma_z|0\rangle = 1 \qquad \langle +|\sigma_x|+\rangle = \langle +|(+1)|+\rangle = 1$$

$$\langle 1|\sigma_z|1\rangle = -1 \qquad \langle -|\sigma_x|-\rangle = \langle -|(-1)|-\rangle = -1$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$\langle \psi|\sigma_z|\psi\rangle = (+1)|\alpha|^2 + (-1)|\beta|^2 = \sum_{i=0}^{1} \lambda_i p_i = p_0 - p_1$$

Misuriamo



$$H|+\rangle = |0\rangle \qquad H|-\rangle = |1\rangle$$

$$\langle + | \sigma_x | + \rangle = \langle 0 | H^+ \sigma_x H | 0 \rangle = 1$$

$$H^+\sigma_x H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

$$A = I + \sigma_x - \sigma_z$$

Due possibilità:

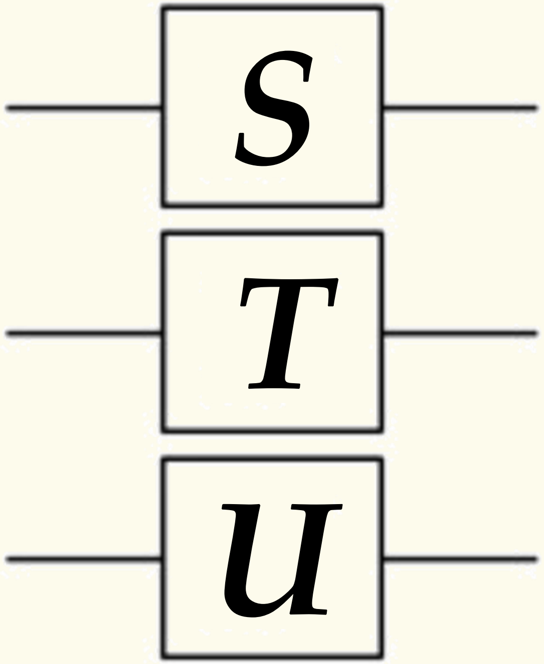
Diagonalizzare l'operatore A tutto insieme sapendo che le sue parti non commutano e poi fare una sola misura

Diagonalizzare le singole parti e fare misure diverse che hanno significato statistico

Altri gate

Agiscono su un qubit - gate quantistici

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix}$$

$$S|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\pi/2}|1\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$T|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\pi/4}|1\rangle$$

$$U = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i(\varphi+\lambda)}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$U|\psi\rangle = \alpha\left(\cos\frac{\theta}{2} - e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \beta e^{i\varphi}\left(\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Altri gate – rotazioni sulla sfera di Bloch

Agiscono su un qubit - gate quantistici

$$R_X(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 & -i\sin\theta/2 \\ -i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Y} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Z} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$$X = R_X(\pi) \quad Y = R_Y(\pi) \quad Z = R_Z(\pi) \quad S = R_Z(\pi/2) \quad T = R_Z(\pi/4)$$

Stati di due qubit

La rappresentazione di uno stato di due qubit richiede uno spazio di Hilbert di dimensione 4.

Dati due qubit, lo stato totale si ottiene dal prodotto tensore dei due stati

$$|\phi\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \\ \phi_1 \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0\psi_0 \\ \phi_0\psi_1 \\ \phi_1\psi_0 \\ \phi_1\psi_1 \end{bmatrix}$$

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\phi\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \qquad |a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1$$

Stati di due qubit

Due tipi di stati composti:

- Stati **fattorizzati** (separabili) $|\phi\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$
  - esempio $|\phi\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)|0\rangle = |\phi\rangle|\psi\rangle$
- Stati **entangled** (non-fattorizzati, inseparabili) $|\phi\psi\rangle \neq |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$
  - esempio $|\phi\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle \neq |\phi\rangle|\psi\rangle$

I più importanti stati entangled a due qubit sono gli stati di Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

Stati di molti qubit

$$|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle = c_{00}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{01}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_{10}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + c_{11}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = |c_{ij}|^2$$

$$|\psi\rangle = c_{000}|000\rangle + c_{001}|001\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{011}|011\rangle + c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{111}|111\rangle =$$

$$= c_{000}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{001}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{010}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{011}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{100}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_{101}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_{110}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + c_{111}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$p_{ijk} = |c_{ijk}|^2$$

Porte logiche (gate) ad due qubit

Prodotto tensore tra due operatori (prodotto di Kronecker)

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{12} \end{bmatrix}$$

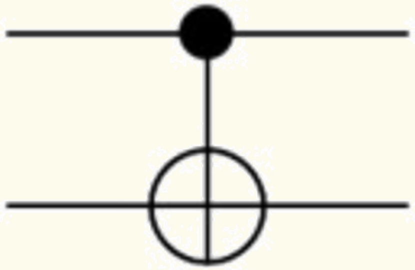
$$X \otimes H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D$$

$$(A \otimes B)^{+} = A^{+} \otimes B^{+}$$

CNOT gate (Controlled NOT)



Agisce su due qubit - gate classico

Notazione di Dirac

$$CNOT|00\rangle = |00\rangle$$
$$CNOT|01\rangle = |01\rangle$$
$$CNOT|10\rangle = |11\rangle$$
$$CNOT|11\rangle = |10\rangle$$

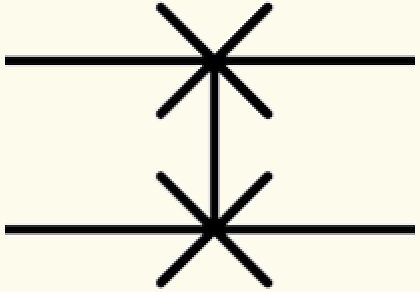
$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$
$$CNOT|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle$$

Rappresentazione matriciale

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CNOT|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

SWAP gate



Agisce su due qubit - gate classico

Notazione di Dirac

$$SWAP|00\rangle = |00\rangle$$
$$SWAP|01\rangle = |10\rangle$$
$$SWAP|10\rangle = |01\rangle$$
$$SWAP|11\rangle = |11\rangle$$

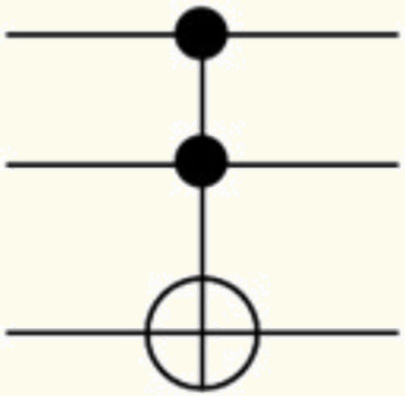
$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|10\rangle$$
$$CNOT|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle$$

Rappresentazione matriciale

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SWAP|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Toffoli gate (Controlled CNOT)



Agisce su tre qubit – gate classico

Notazione di Dirac

$$|\psi\rangle = \alpha|110\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|011\rangle + \delta|100\rangle$$

$$Toffoli|\psi\rangle = \alpha|111\rangle + \beta|110\rangle + \gamma|011\rangle + \delta|100\rangle$$

Rappresentazione matriciale

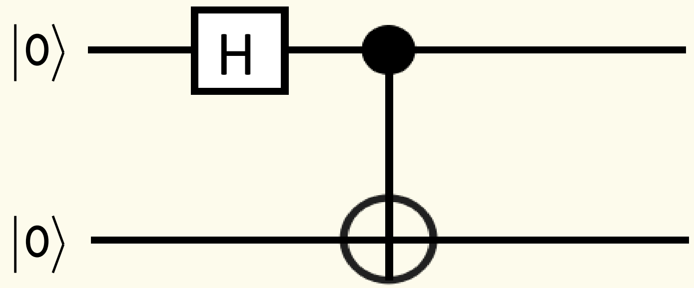
$$TOFFOLI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Circuiti quantistici

Le porte logiche possono essere applicate in successione, per formare un **circuito** che realizza un certo algoritmo.

Circuiti quantistici

Le porte CNOT e Hadamard possono essere usate per costruire gli **stati di Bell**



Ad esempio lo stato di Bell $\left|\Phi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|00\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|11\right\rangle$

si ottiene facendo agire il circuito in figura sullo stato iniziale $\left|00\right\rangle$

$$CNOT\left(H\otimes I\right)\left|00\right\rangle = CNOT\left(\frac{\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left|0\right\rangle = CNOT\,\frac{\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|\Phi^{+}\right\rangle$$

sovrapposizione

correlazione

Algoritmi quantistici

I gate nativi per realizzare algoritmi quantistici sui computer di IBM non sone le matrici di Pauli ma

$$CNOT, I, R_z, S_x = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), X$$

Il **transpiler** traduce i circuiti nel linguaggio del computer

Sul computer reale ogni circuito è un esperimento!

Algoritmi quantistici

Tre livelli di esecuzione degli algoritmi:

- statevector simulator (usa algebra lineare)

- simulatore quantistico esatto
- simulatore quantistico con rumore (tempi di coerenza, errori sull'applicazione dei gate, errori di misura)

- esecuzione su computer reale

Sul computer reale ogni circuito è un esperimento!

Thank you