MAE5032 Final Report

12132392 郭琳

2022/6/9

目录

备注：本次 Project 我选择问题 B。需要特别说明的是，开始我选择的是合作完成问题 A （即，二维传热问题），但是我们遇到了一些关于 Petsc 和解析解求解的问题，难以解决，因此在征得老师的同意后我们改为一维问题，完整的过程详见 Github 记录。其中，Github 仓库中的根目录文件、”heat-trans-explicit” 文件夹、”heat-trans-implicit” 文件夹是已经写好的二维传热问题代码，问题 B 的代码在”1D-heat-transfer” 文件夹中。

1 问题描述

我们考虑一维域 Ω:=(0,1) 的瞬态传热方程，该域的边界为 $\Gamma = [0,1]$。设 f 是单位体积下的热源，u 是温度，ρ 是密度，c 是热容，u_0 是初始温度，κ 是传导率，n_x 是单位外法向的笛卡尔分量。边界数据包括 Γ_g 上的温度 g 和 Γ_h 上的热流密度 h。边界 Γ 允许不重叠分解: $\Gamma = \Gamma_g \bigcup \Gamma_h$，$\emptyset = \Gamma_g \bigcap \Gamma_h$。数学表达形式如下：

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad on \quad \Omega \times (0,T)$$
$$u = g \quad on \quad \Gamma_g \times (0,T)$$
$$\kappa \frac{\partial u}{\partial x} n_x = h \quad on \quad \Gamma_h \times (0,T)$$
$$u|_{t=0} = u_0 \quad in \quad \Omega.$$

2 差分格式

2.1 前向欧拉格式

考虑边界条件与初值条件为，

$$f = sin(l\pi x), \quad u_0 = e^x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \kappa = 1.0, \quad h = 0$$

在时间上，使用前向欧拉格式进行离散；在空间上，我使用中心差分格式进行离散。从而得到：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{f}{\rho c}$$

经过移项，可以得到显式计算公式为：

$$u_j^{n+1} = \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2} u_{j-1}^n + (1 - 2\frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}) u_j^n + \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2} u_{j+1}^n + \frac{f \Delta t}{\rho c}$$

为了表述的简便与代码的实现，这里定义 $CFL = \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}$

因为 PETSc 是对矩阵和向量进行运算，将各项迭代量对应的系数提取出来写作矩阵的形式，如下所示：

$$\begin{bmatrix} 1-2CFL & CFL & & & \\ CFL & 1-2CFL & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & CFL \\ & & & CFL & 1-2CFL \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_n^{n+1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

2.2 反向欧拉格式

考虑边界条件与初值条件为，

$$f = sin(l\pi x), \quad u_0 = e^x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \kappa = 1.0, \quad h = 0.$$

在时间上，使用反向欧拉格式进行离散；在空间上，我使用中心差分格式进行离散。从而得到：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{f}{\rho c}$$

经过移项，可以得到隐式计算公式为：

$$u_j^n + \frac{f\Delta t}{\rho c} = -\frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2} u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}) u_j^{n+1} - \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2} u_{j+1}^{n+1}$$

为了表述的简便与代码的实现，这里定义 $CFL = \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}$
因为 PETSc 是对矩阵和向量进行运算，将各项迭代量对应的系数提取出来写作矩阵的形式，如下所示：

$$\begin{bmatrix} 1+2CFL & -CFL & & & \\ -CFL & 1+2CFL & -CFL & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -CFL \\ & & & -CFL & 1+2CFL \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_n^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

该方程组可以调用 PETSc 的 KSP 求解器进行求解。

3 代码实现

LaTex 源文件格式为普通的 ASCII 文件, 你可以使用任何文本编辑器来创建. LaTex 源文件不仅包括你要排版的文本, 还包括 LaTex 所能识别的, 如何排版这些文本的命令.

4 稳定性及误差分析

4.1 稳定性分析

对于显式方程来说，定义 $CFL = \frac{\kappa \Delta t}{\rho c \Delta x^2}$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\rho c} \cdot \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$
$$U_j^{n+1} = U_j^n + CFL \cdot (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

则误差方程为：

$$\delta u_j^{n+1} = \delta u_j^n + CFL \cdot \left[\delta u_{j-1}^n - 2\delta u_j^n + \delta u_{j+1}^n\right] = (1 - 2 \cdot CFL)\delta u_j^n + CFL \cdot \left[\delta u_{j-1}^n + \delta u_{j+1}^n\right]$$

令

$$\delta u_j^n \sim e^{\sigma t^n} \cdot e^{i(k \cdot x_j)} \sim e^{\sigma \cdot n\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot j\Delta x)}$$

$$\begin{aligned} e^{\sigma \cdot (n+1)\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot j\Delta x)} = (1 - 2 \cdot CFL)e^{\sigma \cdot n\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot j\Delta x)} \\ + CFL \cdot \left[e^{\sigma \cdot n\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot (j-1)\Delta x)} + e^{\sigma \cdot n\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot (j+1)\Delta x)}\right] \end{aligned}$$

$$e^{\sigma \cdot \Delta t} = (1 - 2 \cdot CFL) + CFL \cdot \left[e^{i(-k \cdot \Delta x)} + e^{i(k \cdot \Delta x)}\right] = (1 - 2 \cdot CFL) + 2 \cdot CFL \cdot \cos(k\Delta x)$$

稳定性要求为：

$$|(1 - 2 \cdot CFL) + 2 \cdot CFL \cos(k\Delta x)| \le 1$$
$$-1 \le 1 - 4 \cdot CFL \le 1$$
$$CFL \le \frac{1}{2}$$

对于隐式方程来说，定义 $CFL = \frac{\kappa\Delta t}{\rho c\Delta x^2}$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\rho c} \cdot \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$
$$U_j^{n+1} = U_j^n + CFL \cdot (U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1})$$

则误差方程为：

$$\delta u_j^{n+1} = \delta u_j^n + CFL \cdot \left[\delta u_{j-1}^{n+1} - 2\delta u_j^{n+1} + \delta u_{j+1}^{n+1}\right]$$

令

$$\delta u_j^n \sim e^{\sigma t^n} \cdot e^{i(k \cdot x_j)} \sim e^{\sigma \cdot n\Delta t} \cdot e^{i(k \cdot j\Delta x)}$$

$$e^{\sigma \cdot \Delta t} = \frac{1}{1 + 4 \cdot CFL \cdot sin^2(\frac{k\Delta x}{2})}$$

LaTex 源文件格式为普通的 ASCII 文件, 你可以使用任何文本编辑器来创建. LaTex 源文件不仅包括你要排版的文本, 还包括 LaTex 所能识别的, 如何排版这些文本的命令.

5 LaTex 源文件

LaTex 源文件格式为普通的 ASCII 文件, 你可以使用任何文本编辑器来创建. LaTex 源文件不仅包括你要排版的文本, 还包括 LaTex 所能识别的, 如何排版这些文本的命令.

6 结论

LaTeX, 我看行!