

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA CIVIL - GUARAPUAVA**  
**ENGENHARIA CIVIL**

**DANIEL DAL AGNOL GROSSMANN**

**OTIMIZAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO COM  
SEÇÕES RETANGULARES E CIRCULARES SUBMETIDOS À  
FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**GUARAPUAVA**

**2019**

**DANIEL DAL AGNOL GROSSMANN**

**OTIMIZAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO COM  
SEÇÕES RETANGULARES E CIRCULARES SUBMETIDOS À  
FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada  
como requisito parcial à obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil, da Coordenação  
de Engenharia Civil da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Me. Edson Florentino de  
Souza

Coorientador: Prof. Me. Carlos Francisco  
Pecapedra Souza

**GUARAPUAVA**

**2019**

## **ATA DA DEFESA**

Realizou-se no dia **06**, de **dezembro** de 2019, às **10 h 00 min**, no Campus Guarapuava da UTFPR, a defesa Trabalho de Conclusão de Curso, como requisito parcial para aprovação do aluno **DANIEL DAL AGNOL GROSSMANN**, na disciplina de TCC2 do Curso de Engenharia Civil intitulado: **OTIMIZAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÕES RETÂNGULARES E CIRCULARES SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA**

A Banca foi composta pelo Presidente:

**Edson Florentino de Souza** (Orientador), e pelos seguintes membros:

**Carlos Francisco Pecapedra Souza**

**Marly Terezinha Quadri Simões da Silva**

**Dyorgge Alves Silva**

Guarapuava, 03 de dezembro de 2019.

“A folha de aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Professor Edson Florentino de Souza, pelo auxílio, paciência e ensinamentos não só durante este trabalho, mas também ao longo de toda a minha graduação.

Ao meu coorientador, Professor Carlos Francisco Pecapedra Souza, por estar sempre disposto a ajudar.

Ao Professores Petrônio Rodrigo Mello Montezuma e Angelo Giovanni Bonfim Corelhano, pela disponibilização do livro “Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado – volume 1”, que não se encontrava disponível em nenhuma biblioteca da UTFPR, além de não ser mais comercializado atualmente.

A Paula Mayer dos Santos Souza, por compartilhar o programa “POtimo” para desenvolvimento dos meus resultados.

A minha família, por todo o incentivo, recursos, compreensão e apoio dados sempre. Sem vocês não teria sido possível.

A Ana Gabriella Chekalski da Silva, pelos conselhos, ajuda e parceria. Com você esses anos foram mais felizes.

## RESUMO

GROSSMANN, Daniel Dal Agnol. **Otimização de pilares de concreto armado com seções retangulares e circulares submetidos à flexão composta oblíqua.** 2019. 165 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2019.

Este trabalho apresenta um algoritmo computacional, denominado “PFOC”, para otimização de pilares circulares e retangulares submetidos à flexão composta oblíqua. São abordados pilares com esbeltez  $\lambda \leq 90$ , armadura simétrica, sem esforços transversais, com otimização discreta para a área de aço (arranjo de barras), de forma que a solução obtida é executável. São considerados, ainda, aspectos como bitolas comerciais, recomendações construtivas da NBR 6118 (ABNT, 2014), possibilidade de armaduras suplementares, dimensões para a seção transversal que facilitam a execução, e resistência característica à compressão de até 90 MPa. O programa efetua a otimização de pilares por meio de cinco etapas independentes, as quais contemplam a delimitação das soluções possíveis, cálculo do custo, determinação dos esforços de cálculo e verificação do ELU das combinações avaliadas, com a adoção de uma metodologia, adaptada da literatura, para considerar a não linearidade das tensões do concreto. Apresentam-se exemplos de validação das sub-rotinas de verificações de seções circulares e retangulares, e comparações entre os resultados da otimização discreta utilizada no algoritmo implementado, com os da otimização contínua. O “PFOC” foi desenvolvido na linguagem de programação *Python*, o uso e modificação do programa é livre, seu código-fonte encontra-se disponibilizado na página <https://github.com/DanielDgrossmann/PFOC>.

**Palavras-chave:** Pilares. Otimização. Flexão composta oblíqua. Não linearidade. Concreto armado.

## ABSTRACT

GROSSMANN, Daniel Dal Agnol. **Optimization of reinforced concrete columns with rectangular and circular cross sections subjected to axial forces and biaxial bending.** 2019. 165 f. Work of Conclusion Course in Civil Engineering - Federal Technology University - Paraná. Guarapuava, 2019.

This work presents a computational algorithm, called "PFOC", for optimization of reinforced concrete columns of rectangular and circular cross sections subjected to axial forces and biaxial bending. Columns with a slenderness coefficient  $\lambda \leq 90$  with reinforcement distributed in a symmetric form on section, without transverse loads and with discrete optimization for the steel area (bar arrangement) were studied, so that the solution obtained is executable. Aspects such as commercial gauges to the bars, design recommendations of the NBR 6118 (ABNT, 2014), possibility of additional reinforcement, dimensions for the cross section that facilitate the execution and  $f_{ck}$  up to 90 MPa are also considered. The program performs the optimization of columns through five independent steps, which include the delimitation of possible solutions, cost calculation, calculation of the resulting efforts and Ultimate Limit States (ULE) verification of the evaluated combinations, with the adoption of a methodology, adapted from the literature to consider the nonlinearity of concrete stresses. Examples of validation of the subroutines for circular and rectangular cross sections checks are presented, and comparisons between the results of the discrete optimization used in the implemented algorithm, and those of continuous optimization. "PFOC" was developed in the Python programming language, the use and modification of the program is free, its source code is available at <https://github.com/DanielDgrossmann/PFOC>.

**Keywords:** Columns. Optimization. Biaxial Bending with Axial Force. Nonlinearity. Reinforced concrete.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Convenção de sinais para as solicitações normais .....	22
Figura 2 – Convenção dos momentos e das suas direções .....	23
Figura 3 - Espessura do cobrimento em uma seção de concreto .....	29
Figura 4 - Comprimento de flambagem em pilares engastados na base e livres no topo.....	32
Figura 5 – Cálculo do $\ell_e$ em pilares vinculados em ambas as extremidades.....	33
Figura 6 – Imperfeições locais em pilares .....	34
Figura 7 – Momentos de 1 <sup>a</sup> e 2 <sup>a</sup> ordem em pilares em balanço .....	35
Figura 8 – Seções principais de um pilar.....	38
Figura 9 – Espaçamento entre eixos e livre .....	40
Figura 10 – Espaçamento entre eixos de um pilar circular com seis barras .....	41
Figura 11 – Região com emendas por traspasse em seções retangulares e circulares.....	42
Figura 12 – Classificação de pilar e pilar-parede em seções retangulares .....	44
Figura 13 – Tipos de ganchos para estribos .....	46
Figura 14 – Aproximação dos ganchos para seções retangulares .....	47
Figura 15 – Configuração dos estribos para cada geometria.....	47
Figura 16 – Proteção contra flambagem em seções poligonais.....	48
Figura 17 – Arranjos de estribos para diferentes situações .....	49
Figura 18 – Comprimento das barras de travamento.....	50
Figura 19 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto .....	50
Figura 20 – Simplificação do diagrama da parábola retângulo .....	52
Figura 21 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas.....	52
Figura 22 – Domínios de estado-limite de uma seção transversal .....	53
Figura 23 – Regiões de deformação .....	54
Figura 24 – Parâmetros empregados para o cálculo dos esforços resistentes .....	55
Figura 25 – Seções transversais sob FCO .....	56
Figura 26 – Flexão composta oblíqua (seção retangular).....	56
Figura 27 – Esforços atuantes em uma seção retangular com 4 barras .....	57
Figura 28 – Situações para momentos resistentes .....	59
Figura 29 – Superfície de iteração .....	60
Figura 30 – Área de concreto comprimida considerando a simplificação do diagrama parábola-retângulo .....	66
Figura 31 – Inclinação do vetor momento solicitante .....	68
Figura 32 – Tensões no concreto ( $\sigma_{cd,p}$ e $\sigma_{cd,r}$ ) .....	71
Figura 33 – Sistemas de coordenadas para $\alpha \neq 0$ .....	72
Figura 34 – Parâmetros empregados para o cálculo dos esforços resistentes .....	72
Figura 35 - Cálculo dos esforços contribuintes da parcela retangular (seção retangular).....	75
Figura 36 – Características da seção circular .....	76
Figura 37 – $\sigma_{cd,r}$ para seção circular.....	76
Figura 38 – Exemplo de discretização utilizando o processo das malhas .....	78
Figura 39 – Aplicação do Teorema de Green.....	79
Figura 40 – Exemplo de divisão de áreas para aplicação das integrais .....	79
Figura 41 – Regiões de integração possível para a parábola (coordenadas polares).....	80
Figura 42 – Situações possíveis ao aplicar o teorema de Green em seções retangulares .....	81
Figura 43 - Situações possíveis ao aplicar o teorema de Green em seções circulares .....	85
Figura 44 – Fluxograma das etapas principais do “PFOC” .....	89
Figura 45 – Momentos característicos atuantes.....	90

Figura 46 – Inserção correta e incorreta dos esforços em pilares retangulares .....	90
Figura 47 – Critérios de projeto.....	91
Figura 48 – Fluxograma da etapa 1 (dados de entrada).....	92
Figura 49 – Parâmetros que compõem a disposição da armadura em seções retangulares .....	93
Figura 50 - Parâmetros que compõem a disposição da armadura em seções circulares .....	94
Figura 51 – Fluxograma simplificado da Etapa 2.....	99
Figura 52 – Sentido da análise dos AE na etapa 4.....	105
Figura 53 – Fluxograma geral da etapa 4 .....	106
Figura 54 – Exemplos de pilares em cada classificação.....	107
Figura 55 – S.C para os diferentes tipos de pilares .....	108
Figura 56 – Fluxograma Etapa 4 (sub-rotina dos esforços de cálculo) .....	109
Figura 57 – Fluxograma Etapa 5 (verificação à FCO) .....	111
Figura 58 – Arranjos das barras possíveis nos ábacos.....	114
Figura 59 – Ábaco 14A (parcial).....	114
Figura 60 – Dados de entrada na sub-rotina ( $N = 9$ , grupo I) .....	115
Figura 61 – Dados de saída da sub-rotina ( $N = 9$ , grupo I) .....	115
Figura 62 – Inserção das propriedades dos materiais .....	117
Figura 63 – Definição da geometria e descrição das barras .....	117
Figura 64 – Obtenção dos ER para o $\alpha$ escolhido .....	118
Figura 65 – Diferença entre as convenções consideradas .....	118
Figura 66 – Dados de entrada na sub-rotina ( $N = 1$ , grupo II) .....	119
Figura 67 - Dados de saída da sub-rotina ( $N = 1$ , grupo II) .....	119
Figura 68 – Número de lados para os diferentes diâmetros considerados.....	121
Figura 69 –Dados de entrada na sub-rotina ( $N = 8$ ) .....	121
Figura 70 – Dados de saída da sub-rotina ( $N = 8$ ).....	122
Figura 71 – Custos inseridos no “POtimo” para seções retangulares.....	123
Figura 72 – Região de integração da parcela retangular em seções circulares.....	136
Figura 73 – Esforços solicitantes e critérios de projeto considerados no exemplo .....	155
Figura 74 – Arquivos que compõem o “PFOC” .....	155
Figura 75 – Informações editáveis em cada arquivo .....	157
Figura 76 – Inserção do custo dos materiais e parâmetros otimizados .....	158
Figura 77 – Inserção dos critérios e esforços de projeto .....	158
Figura 78 - Dados dos materiais e escolha da geometria (2).....	159
Figura 79 – Relatório gerado ao finalizar a execução do “PFOC” (1).....	160
Figura 80 - Relatório gerado ao finalizar a execução do “PFOC” (2).....	161
Figura 81 – Solução ótima.....	162
Figura 82 – Algoritmo de Brent em FORTRAN 77 .....	164

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Coeficientes $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ .....	25
Quadro 2 - Valores do coeficiente $\gamma_{f2}$ .....	25
Quadro 3 - Valores dos coeficientes $\gamma_c$ e $\gamma_s$ .....	27
Quadro 4 - Classes de agressividade ambiental (CAA) .....	28
Quadro 5 - Correspondência entre a CAA e a qualidade do concreto.....	29
Quadro 6 - Correspondência entre a CAA e o cobrimento nominal para $\Delta c = 10$ mm.....	30
Quadro 7 - Valores do coeficiente adicional $\gamma_n$ para pilares.....	45
Quadro 8 – Diâmetro dos pinos ( $d_p$ ) de dobramento dos estribos .....	46
Quadro 9 - Caracterização dos domínios de deformação .....	54
Quadro 10 – Resumo dos trabalhos referentes ao uso de diagramas de iteração para pilares à FCO .....	63
Quadro 11 - Equações utilizadas para determinação dos esforços resistentes do concreto em seções retangulares .....	82
Quadro 12 - Equações utilizadas para determinação dos esforços resistentes do concreto em seções circulares .....	86
Quadro 13 - Intervalos de aplicação das Equações para seções circulares .....	87
Quadro 14 – $\phi_p$ considerados inicialmente .....	94
Quadro 15 – Dimensões de base consideradas .....	95

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação das ações .....	24
Tabela 2 - Métodos para cálculo dos efeitos locais de 2 <sup>a</sup> ordem .....	37
Tabela 3 – Resumo dos parâmetros que compõem cada AE nas diferentes seções .....	98
Tabela 4 – Custos unitários das armaduras ( $C_{u,arm-L}$ e $C_{u,arm-T}$ ) .....	102
Tabela 5 – Custos unitários para concretos .....	102
Tabela 6 – Materiais para fabricação, montagem e desmontagem das fôrmas de pilares retangulares.....	103
Tabela 7 – Características das fôrmas de papelão e de madeira.....	103
Tabela 8 – Materiais para fabricação, montagem e desmontagem das fôrmas de pilares circulares.....	104
Tabela 9 – Resultado das comparações entre a sub-rotina e os ábacos de Pinheiro <i>et al</i> (2009) .....	116
Tabela 10 – Resultado das comparações entre a sub-rotina para seção retangular e o “OblqCalco” .....	120
Tabela 11 - Resultado das comparações entre a sub-rotina para seção circular e o “OblqCalco” .....	122
Tabela 12 – Dados do exemplo 1 .....	124
Tabela 13 – Resultados obtidos com o Exemplo 1.....	124
Tabela 14 – Diferenças dos custos entre os resultados.....	125
Tabela 15 – Diferença total de custo caso o “POtimo” considerasse o custo dos estribos ....	126
Tabela 16 – Esforços solicitantes característicos e critérios de projeto no Exemplo 2.....	126
Tabela 17 – Resultados obtidos com o Exemplo 2.....	127
Tabela 18 - Diferenças dos custos entre os resultados .....	127
Tabela 19 – Diferenças totais caso o “POtimo” considerasse o custo da armadura transversal .....	128
Tabela 20 – Seções transversais consideradas inicialmente em pilares retangulares .....	150
Tabela 21 – Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção retangular com $B = 19$ cm e $H = 19$ cm .....	151
Tabela 22 - Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção circular fixando $\phi_p = 22$ cm.....	152

## LISTA DE SIMBOLOS

### Letras minúsculas e maiúsculas

1/r	Curvatura na seção crítica;
A <sub>c</sub>	Área da seção transversal;
A <sub>cc</sub>	Área de concreto comprimida;
A <sub>cc(s)</sub>	Área de concreto comprimida considerando a simplificação do diagrama da parábola-retângulo;
A <sub>s</sub>	Área de aço total na seção transversal;
A <sub>s,máx</sub>	Armadura longitudinal máxima;
A <sub>s,min</sub>	Armadura longitudinal mínima;
A <sub>si</sub>	Área da barra i;
A <sub>so</sub>	Área de aço inicial;
b	Menor dimensão da seção transversal do pilar;
B	Base do pilar;
c <sub>1</sub>	Seno do ângulo formado entre o eixo x e y <sub>2</sub> ;
C <sub>armaduras</sub>	Custo da seção referente a armadura (R\$/m);
C <sub>concreto</sub>	Custo da seção referente ao concreto (R\$/m);
C <sub>est,c</sub>	Comprimento dos estribos em seções circulares;
C <sub>est,r</sub>	Comprimento dos estribos em seções retangulares;
C <sub>est,sup</sub>	Comprimento dos estribos suplementares (C <sub>est,sup - x</sub> ou C <sub>est,sup - y</sub> );
C <sub>fôrmas</sub>	Custo da seção referente as fôrmas (R\$/m);
c <sub>min</sub>	Cobrimento mínimo;
c <sub>nom</sub>	Cobrimento nominal;

$C_{\text{total}}$	Custo total da seção (R\$/m), inclui concreto, armadura e fôrmas;
$C_{u,\text{arm}}$	Custo unitário (R\$/m) da armadura longitudinal ( $C_{u,\text{arm-L}}$ ), ou da transversal ( $C_{u,\text{arm-T}}$ );
$C_{u,\text{conc}}$	Custo unitário do concreto (R\$/m <sup>3</sup> );
$C_{u,f}$	Custo unitário das fôrmas (R\$/m <sup>2</sup> ) retangulares ( $C_{u,f-R}$ ) ou circulares ( $C_{u,f-C}$ );
$d'$	distância entre o eixo da armadura de compressão e a face mais próxima do elemento
$d_1$	Distância (inclinada) entre a fibra do concreto com maior compressão e a barra mais distante;
$d_i$	Distância entre a fibra mais comprimida e a barra i
$D_{\text{máx}}$	Maior dimensão da seção transversal;
$d_{\text{máx,agreg}}$	Diâmetro máximo do agregado;
$d_p$	Diâmetro do pino de dobramento;
$e_1$	Excentricidade de 1 <sup>a</sup> ordem na direção considerada;
$e_{\text{eixos}}$	Espaçamento entre eixos das barras;
$e_{\text{livre}}$	Espaçamento livre entre faces das barras;
$e_{\text{livre,e-c}}$	Espaçamento livre nas emendas (seção circular);
$e_{\text{livre,e-x}}$	Espaçamento livre nas emendas ao longo da direção x (seção retangular);
$e_{\text{livre,e-y}}$	Espaçamento livre nas emendas ao longo da direção y (seção retangular);
$e_{\text{max,eixos}}$	Espaçamento máximo entre eixos das barras;
$e_{\text{min,livre}}$	Espaçamento mínimo livre entre faces das barras;
$E_s$	Modulo de elasticidade do aço;
$f_{cd}$	Resistência de cálculo a compressão do concreto à compressão;
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto à compressão;
$F_d$	Valor de cálculo para combinação última;

$F_{gk}$	Representa as ações permanentes diretas;
$F_{q1k}$	Representa a ação variável direta principal;
$F_{qjk}$	Representa as ações variáveis diretas secundárias;
$F_{r,c}$	Força resistente (total) do concreto;
$F_{r,p}$	Força resistente do concreto da parcela parabólica;
$F_{r,r}$	Força resistente do concreto da parcela retangular;
$f_{yd}$	Resistência ao escoamento de cálculo do aço;
$f_{yk}$	Resistência ao escoamento característica do aço;
$F_{\varepsilon gk}$	Representa as ações indiretas permanentes como a retração;
$F_{\varepsilon qk}$	Representa as ações variáveis indiretas (temperatura);
$h$	Dimensão do pilar na direção considerada;
$H$	Altura do pilar;
$H_a$	Altura inclinada da seção;
$H_{\max}$	Altura máxima para pilares retangulares;
$H_{\min}$	Altura mínima para pilares retangulares;
$H_{vx}$	Altura da viga (ou na ausência, da laje) na direção x;
$H_{vy}$	Altura da viga (ou na ausência, da laje) na direção y;
$h_x$	Comprimento do pilar ao longo do eixo x;
$h_y$	Comprimento do pilar ao longo do eixo y;
$i$	Raio de giração;
$I$	Momento de inércia na direção considerada;
$\ell$	Distância entre os eixos dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;
$\ell_e$	Distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;

$M_{1d,A}$	Valor de cálculo de 1 <sup>a</sup> ordem do momento $M_A$ ;
$M_{1d,C}$	Momento de cálculo atuante na seção intermediária “c”;
$M_{1d,mín}$	O momento mínimo de 1 <sup>a</sup> ordem para dada direção;
$M_A$	Maior valor absoluto dos momentos de 1 <sup>a</sup> ordem nas extremidades do pilar;
$M_B$	Menor valor absoluto dos momentos de 1 <sup>a</sup> ordem nas extremidades do pilar;
$M_{rd}$	Momento solicitante de cálculo em dada direção (x ou y) e posição (topo ou base);
$M_{rx,c}$	Momento resistente (total) do concreto ao longo do eixo x;
$M_{rx,p}$	Momento resistente do concreto ao longo do eixo x oriundo da parcela parabólica;
$M_{rx,r}$	Momento resistente do concreto ao longo do eixo x oriundo da parcela retangular;
$M_{ry,c}$	Momento resistente (total) do concreto ao longo do eixo y;
$M_{ry,p}$	Momento resistente do concreto ao longo do eixo y advindo da parcela parabólica;
$M_{ry,r}$	Momento resistente do concreto ao longo do eixo y advindo da parcela retangular;
$M_{sd}$	Momento solicitante de cálculo em dada direção (x ou y) e posição (topo ou base);
$M_{sk}$	Momento solicitante característico em dada direção (x ou y) e posição (topo ou base);
n	Número de barras em dada direção, ou, expoente da parcela parabólica do diagrama da parábola-retângulo;
$N_{AL}$	Número total de barras da armadura longitudinal, em seções retangulares é dado por $2 \cdot (N_x + N_y) - 4$ , já para as circulares é igual a $N_c$ ;
$N_c$	Número total de barras (seção circular);
$N_{est}$	Número total de estribos em 1 metro;
$N_g$	Número de ganchos ao longo de x/y ( $N_{g,x}$ e $N_{g,y}$ );
$N_{max}$	Número máximo de barras em dada direção e geometria ( $N_{y,max}$ , $N_{x,max}$ e $N_{c,max}$ );
$N_{min}$	Número mínimo de barras em dada direção e geometria ( $N_{y,min}$ , $N_{x,min}$ e $N_{c,min}$ );
$N_{sd}$	Esforço normal solicitante de cálculo;

$N_x$	Número de barras na direção x (seção retangular);
$N_y$	Número de barras na direção y (seção retangular);
$R$	Raio do pilar (seções circulares);
$R_d$	Resistência de cálculo;
$R_s$	Resistência solicitante;
$S_{\max,est}$	Espaçamento máximo dos estribos;
$S_t$	Espaçamento dos estribos;
$S_x$	Momento estático de área ao longo do eixo x;
$S_y$	Momento estático de área ao longo do eixo y;
$x_o$	Profundidade da linha neutra (com relação a fibra mais comprimida do concreto);
$x_{si}$	Posição em relação ao eixo x da barra i;
$x_{\varepsilon_c2}$	Altura, com relação a linha neutra, onde a tensão é igual a $\varepsilon_{c2}$ ;
$y_1$	Profundidade da linha neutra com relação aos eixos x e y (seção circular);
$y_2$	Altura, com relação aos eixos x e y, onde a tensão é igual a $\varepsilon_{c2}$ ;
$y_{\max}$	Distância entre a fibra mais comprimida de concreto e o centroide da armadura (com relação aos eixos x' e y');
$y_{si}$	Posição em relação ao eixo y da barra i.

### **Letras gregas**

$\alpha$	Inclinação da linha neutra;
$\alpha_b$	Parâmetro de instabilidade;
$\alpha_c$	Coeficiente de ajuste da tensão do concreto na simplificação do diagrama da parábola-retângulo;
$\gamma_c$	Coeficiente de ponderação da resistência do concreto;
$\gamma_f$	Coeficiente de ponderação das ações no ELU;

$\gamma_{f1}$	Parte do coeficiente de ponderação das ações $\gamma_f$ , que considera a variabilidade das ações;
$\gamma_{f2}$	Parte do coeficiente de ponderação das ações $\gamma_f$ , que considera a simultaneidade de atuação das ações;
$\gamma_{f3}$	Parte do coeficiente de ponderação das ações $\gamma_f$ , que considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações;
$\gamma_g$	coeficiente de ponderação para ações diretas permanentes;
$\gamma_n$	coeficiente de ajustamento para pilares com dimensão menor que 19 cm;
$\gamma_q$	Coeficiente de ponderação para ações variáveis diretas;
$\gamma_s$	Coeficiente de ponderação da resistência do aço;
$\gamma_{eg}$	Coeficiente de ponderação para ações indiretas permanentes, como retração e fluênci;a;
$\gamma_{eq}$	Coeficiente de ponderação para ações variáveis indiretas, ou seja, para a temperatura;
$\Delta c$	Tolerância de execução;
$\epsilon_c$	deformação específica do concreto;
$\epsilon_{c2}$	Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;
$\epsilon_{cu}$	deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;
$\epsilon_s$	deformação específica do aço da armadura passiva;
$\epsilon_{yd}$	deformação específica de cálculo do aço da armadura passiva no início do escoamento;
$\theta_d$	inclinação do vetor momento solicitante;
$\theta_r$	inclinação do vetor momento resistente;
$\lambda$	Índice de esbeltez, ou constante para simplificação do diagrama da parábola-retângulo;
$\lambda_1$	Valor limite;
$\mu_x$	momento em x adimensionalizado;

$\mu_y$	momento em y adimensionalizado;
$v$	força normal adimensionalizada;
$\sigma_{cd}$	Tensão de cálculo do concreto;
$\sigma_{cd,p}$	Tensão de cálculo do concreto referente a parcela parabólica;
$\sigma_{cd,r}$	Tensão de cálculo do concreto referente a parcela retangular;
$\sigma_{sd2\%}$	tensão aço para uma deformação de 2%;
$\sigma_{sid}$	Tensão de cálculo da barra i;
$\phi_l$	Diâmetro da armadura longitudinal;
$\phi_p$	Diâmetro do pilar;
$\phi_t$	Diâmetro da armadura transversal;
$\psi_{0j}$	fator de redução de combinação para ações variáveis diretas;
$\psi_{0\varepsilon}$	fator de redução de combinação para ações variáveis indiretas;
$\omega$	Área de aço adimensionalizada.

## Siglas

AE	Arranjo estrutural (combinação de $f_{ck}$ , seção transversal e disposição de armadura);
ER	Esforços resistentes ( $N_{rd}$ , $M_{rd,x}$ , $M_{rd,y}$ );
ES	Esforços solicitantes ( $N_{sd}$ , $M_{sd,x}$ , $M_{sd,y}$ );
FCN	Flexão composta normal;
FCO	Flexão composta oblíqua;
MPPCA	Método do pilar-padrão com curvatura aproximada;
NAE	Número (total) de arranjos estruturais;
S.C	Situações de cálculo;
SINAPI	Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil;
TCPO	Tabela de composições e preços para orçamentos.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>18</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	19
1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA .....	20
1.3 OBJETIVOS.....	20
1.3.1 Objetivo geral.....	20
1.3.2 Objetivos específicos .....	21
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>22</b>
2.1 CONVENÇÕES .....	22
2.2 CRITÉRIOS PARA DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS DE CÁLCULO .....	23
2.2.1 Ações e coeficientes de ponderação.....	23
2.2.2 Cobrimento e resistência característica à compressão mínima .....	28
2.2.3 Esbeltez .....	31
2.2.4 Momentos mínimos.....	33
2.2.5 Efeitos locais de segunda ordem .....	34
2.3 DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS .....	39
2.3.1 Espaçamento máximo e mínimo .....	39
2.3.2 Área máxima e mínima .....	43
2.3.3 Bitolas mínimas.....	43
2.3.4 Dimensões mínimas e máximas .....	44
2.3.5 Detalhamento dos estribos .....	45
2.3.6 Proteção contra flambagem.....	48
2.4 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	50
2.4.1 Relações tensão-deformação .....	50
2.4.2 Domínios de deformação .....	53
2.5 FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA.....	55
2.5.1 Diagramas de iteração .....	58
2.5.2 Processos indiretos .....	65
2.6 MÉTODO DE BRENT.....	69
<b>3 ESFORÇOS RESISTENTES DO CONCRETO .....</b>	<b>71</b>
3.1 PARCELA RETANGULAR.....	74
3.1.1 Seção retangular .....	74
3.1.2 Seção circular .....	75
3.2 PARCELA PARABÓLICA .....	77
3.2.1 Seção retangular .....	81
3.2.2 Seção circular .....	84
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>88</b>
4.1 MATERIAIS .....	88
4.2 MÉTODOS .....	88
4.2.1 Etapa 1 – Dados de entrada .....	89
4.2.2 Etapa 2 – Obtenção dos AE possíveis.....	93
4.2.2.1 Seção transversal.....	94
4.2.2.2 Disposição da armadura longitudinal .....	96
4.2.2.3 $f_{ck}$ .....	98
4.2.3 Etapa 3 – Cálculo do custo dos AE.....	99
4.2.4 Etapa 4 – Determinação dos esforços de cálculo e verificação dos AE.....	104
4.2.4.1 Esforços de cálculo .....	106
4.2.4.2 Verificação dos AE.....	110

4.2.5 Etapa 5 – Dados de saída .....	112
<b>5 DISCUSSÕES E RESULTADOS.....</b>	<b>113</b>
5.1 SUB-ROTINA DE VERIFICAÇÃO À FCO DE SEÇÕES RETANGULARES .....	113
5.1.1 Concretos do grupo I.....	113
5.1.2 Concretos do grupo II.....	117
5.2 SUB-ROTINA DE VERIFICAÇÃO À FCO DE SEÇÕES CIRCULARES .....	120
5.3 “PFOC”.....	123
5.3.1 Exemplo 1 – Seção circular.....	124
5.3.2 Exemplo 2 – Seção retangular.....	126
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>129</b>
6.1 CONCLUSÕES .....	129
6.2 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	130
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>132</b>
<b>APÊNDICE A - Equações para pilares circulares .....</b>	<b>135</b>
<b>APÊNDICE B - Equações para pilares retangulares .....</b>	<b>141</b>
<b>APÊNDICE C - Tabelas e Quadros adicionais.....</b>	<b>149</b>
<b>APÊNDICE D - Exemplo de utilização do “PFOC” .....</b>	<b>154</b>
<b>ANEXO A - ALGORITMO de Brent adaptado para FORTRAN 77.....</b>	<b>163</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Leonhardt e Mönning (1979) definem três requisitos necessários para que uma construção seja considerada segura:

1. Capacidade de carregamento e estabilidade suficientes;
2. Cumprimento dos critérios de utilização com relação à finalidade prevista;
3. Durabilidade adequada.

O primeiro requisito está intimamente relacionado com a análise estrutural. Como definido pela NBR 6118 “Projeto de estruturas de concreto – Procedimento”, a análise estrutural possui a finalidade de obter os efeitos das ações em uma estrutura, com o objetivo de realizar a verificação dos estados-limites. Satisfazendo os critérios estabelecidos em cada um dos estados-limites, garante-se a capacidade de carga e estabilidade suficientes (ABNT, 2014).

Para que a análise estrutural atenda os critérios normativos, deve-se utilizar um modelo estrutural adequado ao objetivo em análise (ABNT, 2014). Geralmente em estruturas de concreto armado, método construtivo predominante no Brasil, os modelos estruturais são compostos por elementos estruturais, como vigas, pilares, lajes, fundações, dentre outros.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) define pilares como elementos lineares de eixo reto, situados na vertical, onde as forças normais de compressão são predominantes. Segundo Clímaco (2016), em estruturas usuais de concreto armado ocorre a ação conjunta de força normal e momento fletor sobre o pilar, denominada flexão composta. Essa pode ser reta/normal (FCN), tendo momento fletor em uma direção, ou oblíqua (FCO, ou FOC), com momento fletor em ambas as direções.

De acordo com Benincá (2016), dentre os modelos estruturais o pórtico espacial é aquele que apresenta de forma mais realista os comportamentos estruturais, sendo esse utilizado e recomendado por programas comerciais. Levando isso em consideração e que, como mencionado por Smaniotto (2005) e Santos (1981), nesse modelo dificilmente os momentos atuantes serão nulos, tem-se todos os pilares sujeitos à FCO.

Diante o exposto, e dado também o fato de que o dimensionamento ótimo de elementos de concreto armado constituir-se, ainda, em objeto de estudos, é o tema do presente trabalho o estudo de otimização de pilares retangulares e circulares submetidos à flexão composta oblíqua.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

No dimensionamento manual de pilares submetidos à FCO utilizam-se simplificações, onde as principais são ábacos e tabelas. O emprego destas apresenta vantagens: facilidade de uso; dimensionamento em tempo satisfatório e resultados já aprovados pela literatura, garantindo os requisitos de segurança exigidos (SMANIOTTO, 2005). Porém, o uso das simplificações também apresenta empecilhos: limitação na disposição das armaduras e nas seções que podem ser analisadas, restrição na precisão dos resultados obtidos.

Com a evolução dos computadores nas últimas décadas ocorreram grandes avanços na análise estrutural do concreto armado, tornando possível a adoção de métodos e procedimentos de dimensionamento inviáveis de serem realizados manualmente (SILVA, 2015), nesse contexto inserem-se os pilares à FCO. Através do desenvolvimento de um programa computacional é possível solucionar os problemas descritos.

Atualmente há diversos softwares computacionais que dimensionam pilares, com variadas geometrias de seções, submetidos à FCO. Contudo, considerando a grande competitividade do mercado, torna-se essencial minimizar os custos das construções (BASTOS, 2004). Portanto, no dimensionamento de estruturas de concreto armado além de encontrar uma configuração de seção transversal, disposição de armadura e resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), que resista aos esforços solicitantes, deseja-se obter a solução com maior vantagem econômica (SOUZA, 2017). Deste modo, faz-se necessário responder a seguinte pergunta: qual o arranjo estrutural (AE), ou seja, combinação de seção transversal,  $f_{ck}$  e disposição de armadura, que satisfaz o estado limite último (ELU), é mais econômica?

Devido ao número de AE possíveis, são inviáveis as verificações de todas as combinações possíveis e a otimização de forma manual, o que implica no uso de um algoritmo ou programa computacional para realização das mesmas.

Diversos autores abordam a otimização de pilares à FCO, porém conforme Souza (2017), a necessidade de pesquisas voltadas a otimização de pilares permanece, já que há tópicos poucos abordados, como pilares com dimensões inferiores a 19 cm e concretos do grupo II (classe C55 a C90).

Outros pormenores também podem ser trabalhados. Souza (2017) apresenta um programa computacional em MATLAB que aborda os tópicos acima, entretanto, para implementação deste, é utilizado um modelo de otimização contínua. Logo, conforme explicitado pela autora, não há garantia de que a bitola calculada corresponda a um dos

diâmetros comercializados, além disso, as geometrias indicadas podem não ser adequadas em relação aos aspectos construtivos.

Assim sendo, no presente trabalho, desenvolveu-se um algoritmo computacional - denominado “PFOC” (pilares à flexão oblíqua composta) - que a partir de um determinado estado de solicitação à FCO, verifique a solução de maior vantagem econômica que satisfaça o ELU, e os critérios recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

Salienta-se que, para efetuar a otimização o “PFOC” emprega uma abordagem discreta, isto é, consideram-se apenas AE com parâmetros viáveis:  $f_{ck}$ s disponíveis, bitolas comerciais, e seções que facilitem a execução do pilar. Ademais, na análise da solução mais econômica avaliam-se somente os custos dos materiais (concreto, fôrmas e aço).

## 1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

O “PFOC” abrange pilares com índice de esbeltez  $\lambda \leq 90$ , pois, como explicitado por Bastos (2017), a maioria dos pilares das edificações satisfazem esse critério. Com relação a geometria, foram avaliadas a retangular e a circular, visto que, segundo Carvalho e Pinheiro (2009), essas são aquelas com maior utilização em edificações de concreto armado. Quanto à disposição da armadura e esforços solicitantes, consideram-se apenas pilares com armadura simétrica sem esforços transversais.

## 1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem em seu escopo os objetivos principal e secundários apresentados a seguir.

### 1.3.1 Objetivo geral

O objetivo principal do presente trabalho foi elaborar um programa computacional que, a partir de um pilar solicitado à FCO (situação de projeto), analise as possibilidades de AE quanto aos critérios recomendados pela NBR 6118 (ABNT, 2014), e dentre esses, apresente aquele de maior vantagem econômica que satisfaz a verificação do ELU.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos secundários deste trabalho foram:

- Verificar quais os critérios construtivos da NBR 6118 (ABNT, 2014) que limitam possíveis combinações de seção transversal, armadura (longitudinal e transversal) e  $f_{ck}$ ;
- Determinar os procedimentos necessários para que a partir de determinados esforços de projeto, encontre-se os esforços de cálculo para dado AE;
- Desenvolver e validar sub-rotinas que verifiquem o ELU de pilares retangulares e circulares submetidos à FCO.
- Elaborar exemplos de aplicação do “PFOC”, comparando a otimização discreta, utilizada no presente trabalho, com a otimização contínua, por meio de programa computacional já existente.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se o embasamento teórico que foi necessário para o desenvolvimento da presente monografia.

Com o intuito de evitar possíveis desentendimentos, apresenta-se no item 2.1 as convenções de sinais empregadas ao longo deste estudo.

Nos itens 2.2 e 2.3, expõem-se os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014), referente a obtenção dos esforços de cálculo para pilares submetidos à FCO com esbeltez  $\lambda \leq 90$ , e em relação aos aspectos construtivos de pilares que irão limitar os AE possíveis, respectivamente.

Já o item 2.4 explicita as propriedades dos materiais (concreto e aço) necessárias para a verificação de seções retangulares e circulares à FCO, de acordo com os preceitos da NBR 6118 (ABNT, 2014).

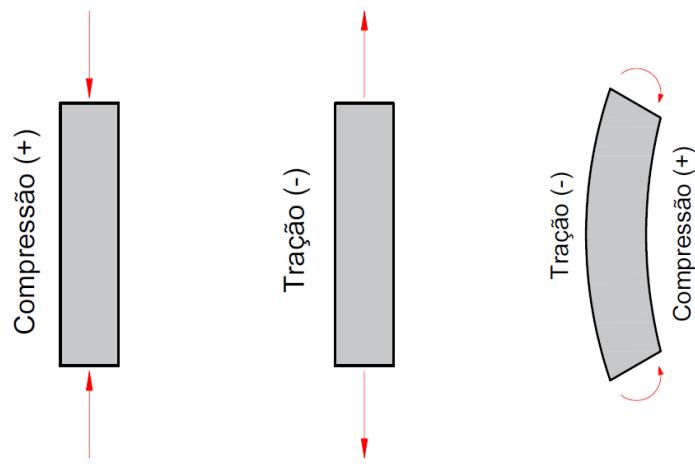
Em sequência, no item 2.5 efetua-se uma breve revisão sobre os trabalhos que contemplam a verificação de pilares à FCO, dando ênfase nos aspectos mais relevantes, e/ou naqueles em comum com o presente trabalho.

Por fim, no item 2.6 descreve-se o método numérico que foi aplicado na verificação das seções à FCO.

### 2.1 CONVENÇÕES

A Figura 1 apresenta a convenção de sinais utilizada para os esforços normais de tração e compressão.

**Figura 1 – Convenção de sinais para as solicitações normais**

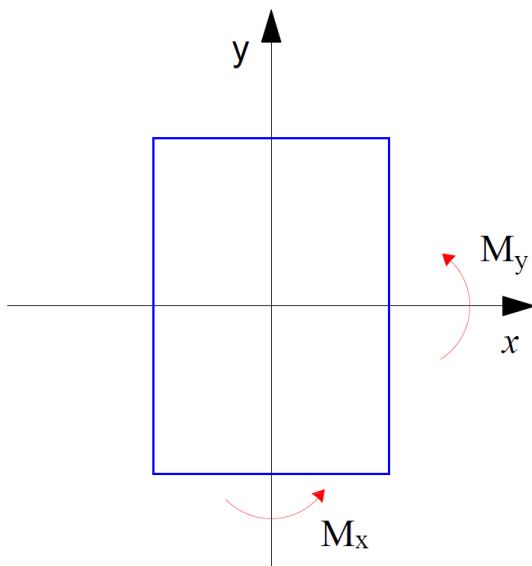


**Fonte:** Adaptado de Smaniotto (2005).

Utiliza-se a convenção descrita pela Figura 1, pois, de acordo com Smaniotto (2005), apesar de a convenção usualmente empregada ser a oposta, a descrita pela Figura 1 é a mais conveniente para estruturas de concreto armado.

Para os momentos, adota-se a convenção de Pinheiro *et al* (2009), que convenciona os momentos ao longo dos eixos que estão atuando, conforme detalhado na Figura 2. Adota-se esta configuração devido ao fato dela ser usada nos diferentes ábacos para dimensionamento de pilares submetidos à FCN e FCO.

**Figura 2 – Convenção dos momentos e das suas direções**



Fonte: Adaptado de Smaniotto (2005).

## 2.2 CRITÉRIOS PARA DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS DE CÁLCULO

### 2.2.1 Ações e coeficientes de ponderação

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014), na análise estrutural deve ser avaliada a influência de todas as ações que ocasionam resultados relevantes para a segurança da estrutura considerada.

De acordo com a norma, pode-se classificar as ações em permanentes, variáveis e excepcionais. Na Tabela 1 resume-se as principais ações e suas respectivas classificações exemplificadas pela NBR 6118 (ABNT, 2014) e por Campos (2015).

**Tabela 1 – Classificação das ações**

<b>Classificação</b>	<b>Ação</b>
	Peso próprio
Ações permanentes diretas	Elementos fixos
	Instalações permanentes
	Retração do concreto
Ações permanentes indiretas	Fluênciça do concreto
	Imperfeições geométricas (locais e globais)
Ações variáveis diretas	Sobrecarga (uso da construção)
	Ação do vento
Ações variáveis indiretas	Variação de temperatura
	Ações dinâmicas
Ações excepcionais	Choques
	Explosões

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Determinadas as ações mais significativas atuantes, realiza-se a combinação das ações, que segundo o item 11.8.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), deve possibilitar a verificação dos efeitos mais desfavoráveis na estrutura. No ELU, estado limite abordado neste trabalho, os valores de cálculo ( $F_d$ ) são obtidos pela multiplicação dos valores característicos pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_f$ , dado pela Equação (1).

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad (1)$$

Onde:

$\gamma_{f1}$  é a parte do coeficiente de ponderação das ações  $\gamma_f$ , que considera a variabilidade das ações;

$\gamma_{f2}$  é a parte do coeficiente de ponderação das ações  $\gamma_f$ , que considera a simultaneidade de atuação das ações;

$\gamma_{f3}$  é a parte do coeficiente de ponderação das ações  $\gamma_f$ , que considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações.

Os valores referentes aos fatores  $\gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$  e  $\gamma_{f2}$  podem ser verificados nos Quadros 1 e 2, respectivamente.

**Quadro 1 - Coeficientes  $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$** 

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (q)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1.4 <sup>a</sup>	1.0	1.4	1.2	1.2	0.9	1.2	0.0
Especiais ou de construção	1.3	1.0	1.2	1.0	1.2	0.9	1.2	0.0
Excepcionais	1.2	1.0	1.0	0.0	1.2	0.9	0.0	0.0

Onde:

D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.

a) Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Fonte: ABNT (2014).

**Quadro 2 - Valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$** 

	Ações	$\gamma_{f2}$		
		$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>a</sup>	0.5	0.4	0.3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>b</sup>	0.7	0.6	0.4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0.8	0.7	0.6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0.6	0.3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0.6	0.5	0.3

a) Edifícios residenciais;  
b) Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

Fonte: Adaptado da ABNT (2014).

Destaca-se que, de acordo com o item 5.1.4.1 da NBR 8681 “Ações e segurança nas estruturas – Procedimento”, os valores presentes nos quadros acima são válidos para edificações onde as cargas acidentais não superam 5 kN/m<sup>2</sup>.

Conforme o item 11.8.2.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a multiplicação entre os valores característicos, ou seja, de projeto, e os coeficientes de ponderação, detalhados nos

Quadros 1 e 2, para as combinações normais últimas, são definidas pela Equação (2).

$$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} \cdot F_{\varepsilon gk} + \gamma_q \cdot \left[ F_{q1k} + \sum (\psi_{0j} \cdot F_{qjk}) \right] + \gamma_{\varepsilon q} \cdot \psi_{0\varepsilon} \cdot F_{\varepsilon qk} \quad (2)$$

Onde:

$F_d$  é o valor de cálculo para combinação última;

$F_{gk}$  representa as ações permanentes diretas;

$F_{q1k}$  representa a ação variável direta principal;

$F_{qjk}$  representa as ações variáveis diretas secundárias;

$F_{\varepsilon gk}$  representa as ações indiretas permanentes como a retração;

$F_{\varepsilon qk}$  representa as ações variáveis indiretas (temperatura).

$\gamma_q$  é o coeficiente de ponderação para ações variáveis diretas (ver Quadro 1, pág. 25);

$\gamma_{\varepsilon g}$  é o coeficiente de ponderação para ações indiretas permanentes, como retração e fluência (Quadro 1);

$\gamma_{\varepsilon q}$  é o coeficiente de ponderação para ações variáveis indiretas, ou seja, para a temperatura (Quadro 1);

$\gamma_g$  é o coeficiente de ponderação para ações diretas permanentes (Quadro 1, pág. 25);

$\psi_{0j}$  é o fator de redução de combinação para ações variáveis diretas (Quadro 2, pág. 25);

$\psi_{0\varepsilon}$  é o fator de redução de combinação para ações variáveis indiretas (Quadro 2, pág. 25).

Enfatiza-se que em pilares com dimensão inferior a 19 cm, deve multiplicar o valor de cálculo encontrado na combinação última por um coeficiente adicional  $\gamma_n$  (ver item 2.3.4, pág. 32).

No presente trabalho considera-se apenas pilares à FCO, deste modo não são examinados pilares com solicitações tangenciais, oriundos da ação do vento, por exemplo. Também se avalia somente ações permanentes diretas. Com relação as ações variáveis, considera-se apenas cargas advindas do uso da edificação (sobrecarga), pois, estas configuram-se nas ações verticais variáveis mais comuns nas edificações (CAMPOS, 2015). Assim pode-

se simplificar a Equação (2), obtendo-se as Equações (3) e (4), para cálculo da normal e dos momentos de cálculo, respectivamente.

$$N_{sd} = \gamma_f \cdot \gamma_n \cdot N_{sk} \quad (3)$$

$$M_{sd} = \gamma_f \cdot \gamma_n \cdot M_{sk} \quad (4)$$

Onde:

$N_{sd}$  é o esforço normal solicitante de cálculo;

$\gamma_n$  é o coeficiente de ajustamento para pilares com dimensão menor que 19 cm;

$N_{sk}$  é o esforço normal solicitante característico (de projeto);

$M_{sd}$  é o momento solicitante de cálculo em dada direção e posição (topo ou base).

$M_{sk}$  é o momento solicitante característico em dada direção e posição.

Segundo o item 12.5.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), para que uma estrutura seja segura a resistência de cálculo ( $R_d$ ) deve ser igual ou superior a resistência solicitante ( $R_s$ ), como explicitado pela Equação (5). Assim, além de realizar a combinação de ações, deve-se determinar a resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ) e do aço ( $f_{yd}$ ). Estas são definidas pelas Equações (6) e (7), respectivamente, onde os coeficientes de minoração ( $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ ) são indicados no Quadro 3.

$$R_d \geq R_s \quad (5)$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (6)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (7)$$

Quadro 3 - Valores dos coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$

Combinações	Concreto ( $\gamma_c$ )	Aço ( $\gamma_s$ )
Normais	1.4	1.15
Especiais ou de construção	1.2	1.15
Expcionais	1.2	1.0

Fonte: ABNT (2014).

Onde:

$f_{yk}$  é a resistência ao escoamento característica do aço. No presente trabalho considera-se para a armadura longitudinal apenas barras de aço CA-50, logo,  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ .

### 2.2.2 Cobrimento e resistência característica à compressão mínima

A Durabilidade é um dos requisitos apontados pela NBR 6118 (ABNT, 2014) que devem se satisfeitos pelas estruturas de concreto. Segundo a norma, para que uma estrutura satisfaça esse critério ela deve suportar as influências ambientais previstas. Deste modo, é necessário verificar a agressividade do ambiente em que a estrutura está inserida. No item 6.4.2 dela é apresentado o Quadro 4, para a classificação da agressividade ambiental (CAA) de acordo com o ambiente da localidade em que se encontra a estrutura.

**Quadro 4 - Classes de agressividade ambiental (CAA)**

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural Submersa	Insignificante
II	Moderada	Urbana	Pequeno
III	Forte	Marinha Industrial	Grande
IV	Muito forte	Industrial Respingos de maré	Elevado

**Fonte: Adaptado da ABNT (2014).**

Destaca-se que conforme a norma:

pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

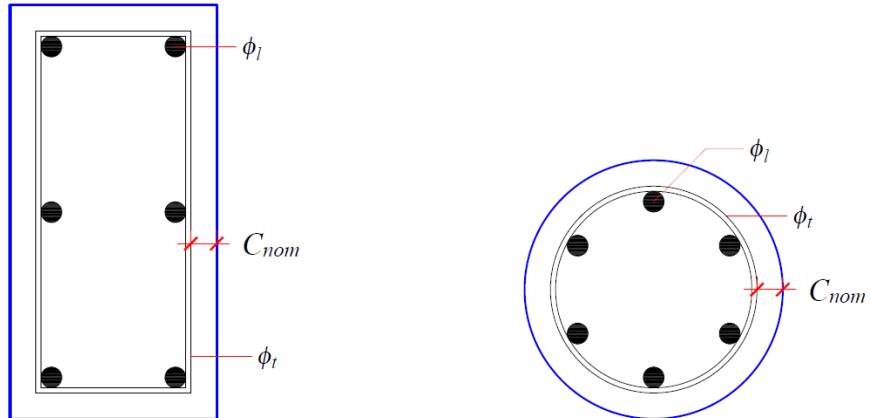
A CAA da estrutura implica diretamente na relação água/cimento máxima e nos valores mínimos de  $f_{ck}$  que podem ser utilizados, como detalhado pelo Quadro 5. Isso ocorre devido a durabilidade estar diretamente relacionada com as propriedades do concreto (ABNT, 2014).

**Quadro 5 - Correspondência entre a CAA e a qualidade do concreto**

Concreto	Tipo	Classe de agressividade (Quadro 1)			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	CA	$\leq 0.65$	$\leq 0.60$	$\leq 0.55$	$\leq 0.45$
	CP	$\leq 0.60$	$\leq 0.55$	$\leq 0.50$	$\leq 0.45$
Classe de concreto (ABNT NBR 8953)	CA	$\geq \text{C}20$	$\geq \text{C}25$	$\geq \text{C}30$	$\geq \text{C}40$
	CP	$\geq \text{C}25$	$\geq \text{C}30$	$\geq \text{C}35$	$\geq \text{C}40$

Fonte: Adaptado da ABNT (2014).

Outro fator determinado pela CAA é o cobrimento (Figura 3), espessura de camada de concreto encarregada pela proteção da armadura (BASTOS, 2017). O cobrimento deve ser considerado adequadamente, pois segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), esse influencia diretamente na durabilidade da estrutura.

**Figura 3 - Espessura do cobrimento em uma seção de concreto***Seção retangular*

Fonte: Autoria própria (2019).

*Seção circular*

Conforme o item 7.4 da norma, o cobrimento nominal ( $c_{nom}$ ) de um elemento estrutural é obtido através da Equação (8), sendo a soma entre o cobrimento mínimo ( $c_{min}$ ) e a tolerância de execução ( $\Delta c$ ).

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c \quad (8)$$

O Quadro 6 apresenta o cobrimento nominal de elementos estruturais para um  $\Delta c$  de 10 mm, salienta-se que esse pode ser considerado igual a 5 mm, quando ocorrer “controle adequado de qualidade e limites rígidos da tolerância da variabilidade das medidas durante a execução” (ABNT, 2014).

**Quadro 6 - Correspondência entre a CAA e o cobrimento nominal para  $\Delta c = 10$  mm**

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Quadro 4)			
		I	II	III	IV <sup>b</sup>
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje <sup>a</sup>	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>c</sup>	30		40	50
Concreto protendido	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

a - Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências deste Quadro podem ser substituídas pelas do item 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.

b - Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

c - No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.

**Fonte:** Adaptado da ABNT (2014).

No item 7.4.7 são apresentadas outras recomendações sobre o cobrimento. As relacionadas com esta monografia são:

- Os valores presentes no Quadro 7 podem reduzidos em 5 mm no caso da utilização de concreto com  $f_{ck}$  superior ao recomendado pelo Quadro 5 (pág. 29);
- O  $c_{nom}$  não deve ser inferior ao diâmetro das barras que compõem a armadura ( $\phi_l$ );
- O  $c_{nom}$  também deve ultrapassar pelo menos 20 % do diâmetro máximo do agregado ( $d_{max,agreg}$ ).

De acordo com Bastos (2019) a Brita 1 é o agregado graúdo mais utilizado no concreto.

Além disso, segundo o Autor, o  $d_{max,agreg}$  é igual a 19 mm para essa numeração de brita. Logo, o  $c_{nom}$  deve ser de no mínimo 2.28 cm. Com o intuito de facilitar a execução, considera-se que  $c_{nom} \geq 2.5$  cm, logo, para concretos com brita 1, e tomando  $\phi_l \leq 25$  mm, o  $c_{nom}$  deve satisfazer a Equação (9).

$$c_{nom} = \max(\Delta c + c_{min}, 2.5 \text{ cm}) \quad (9)$$

### 2.2.3 Ebeltez

O índice de esbeltez ( $\lambda$ ) de um pilar advém da geometria e dos vínculos nas extremidades que apresenta (PINTO, 2017), como pode ser observado pela Equação (10), apresentada no item 15.8.2 da norma para cálculo da esbeltez.

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} = \frac{\ell_e}{\sqrt{\left(\frac{I}{A_c}\right)}} \quad (10)$$

Onde:

$\ell_e$  é o comprimento de flambagem;

$i$  é o raio de giração;

$I$  é o momento de inércia na direção considerada;

$A_c$  é a área da seção transversal;

Para pilares com seção retangular ou circular, objetos de estudo neste trabalho, pode-se simplificar e Equação (10), obtendo-se a Equação (11) e (12), respectivamente.

$$\lambda_{\text{retangular}} = \frac{\sqrt{12} \cdot \ell_e}{h} \quad (11)$$

$$\lambda_{\text{circular}} = \frac{4 \cdot \ell_e}{h} \quad (12)$$

Onde:

$h$  é a dimensão do pilar na direção considerada. Em seções circulares é igual ao diâmetro do pilar ( $\phi_p$ );

Segundo Bastos (2017) os pilares podem ser classificados como:

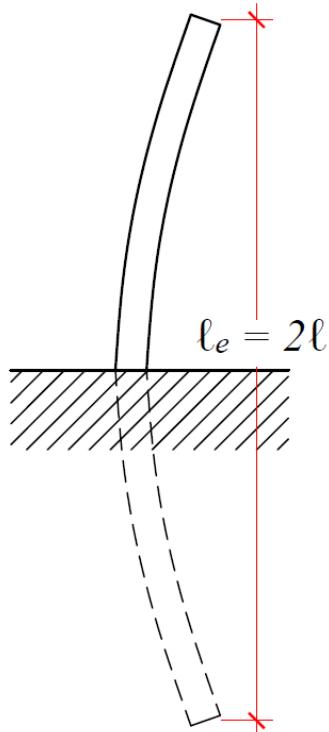
- Curto: se  $\lambda \leq 35$ ;
- Médio: se  $35 < \lambda \leq 90$ ;
- Medianamente esbeltos:  $90 < \lambda \leq 140$ ;
- Esbelto: se  $140 < \lambda \leq 200$ .

Conforme já mencionado, segundo Bastos (2017), os pilares curtos e médios representam a maioria dos pilares das edificações, enquanto os medianamente esbeltos e esbeltos são utilizados com frequência relativamente menor. Salienta-se que não são permitidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014) pilares com esbeltez superior a 200, salvo em elementos comprimidos com força normal inferior a  $0.1 \cdot f_{cd} \cdot A_c$ .

Como expresso pela Equação (10) (pág. 31), para calcular a esbeltez de um pilar, em relação a um eixo, deve-se determinar o  $\ell_e$ . Este varia de acordo com o tipo de estrutura, se essa apresenta nós fixos ou móveis, e de acordo com as vinculações no topo e na base do pilar. Neste estudo considera-se apenas estruturas com nós fixos, portanto, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), em edificações onde os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem globais são desprezíveis.

Em pilares engastados na base e livre no topo, como apresentado na Figura 4, considera-se o  $\ell_e$  igual a  $2\ell$ , onde  $\ell$  é a distância entre eixos dos elementos estruturais (viga ou laje) aos quais o pilar está vinculado (BASTOS, 2017).

**Figura 4 - Comprimento de flambagem em pilares engastados na base e livres no topo**



**Fonte:** Adaptado de Bastos (2017).

Com relação a pilares vinculados em ambas as extremidades, para estruturas de nós fixos, pode-se calcular o  $\ell_e$  pela Equação (13), descrita no item 15.6, onde os parâmetros  $\ell_0$ ,  $\ell$  e  $h$  encontram-se detalhados na Figura 5.

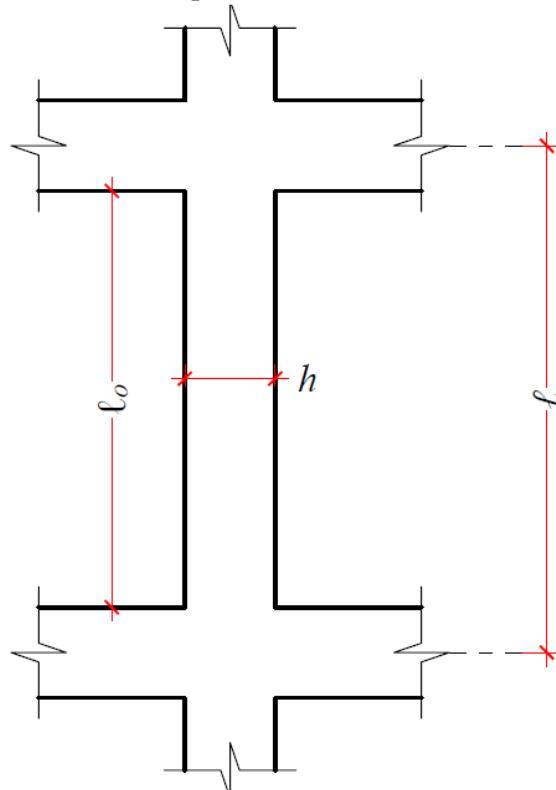
$$\ell_e = \min(\ell_o + h, \ell) \quad (13)$$

Onde:

$\ell_e$  é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar.

$\ell$  é a distância entre os eixos dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar.

**Figura 5 – Cálculo do  $\ell_e$  em pilares vinculados em ambas as extremidades**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

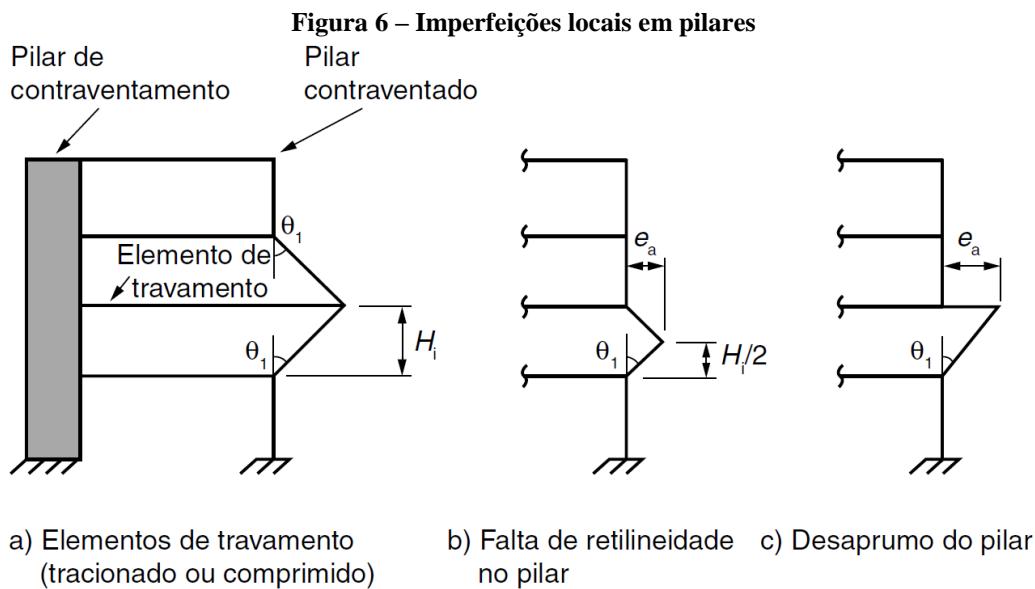
#### 2.2.4 Momentos mínimos

Segundo o item 11.3.3.4 da NBR 6118 (ABNT, 2014):

“na verificação do estado limite último (ELU) das estruturas reticuladas, devem ser consideradas as imperfeições geométricas do eixo dos elementos estruturais [...]. Essas imperfeições podem ser divididas em dois grupos: imperfeições globais e imperfeições locais”

De acordo com esse item, nas imperfeições globais considera-se um desaprumo dos elementos verticais. No presente trabalho realiza-se a verificação isolada de pilares, assim imperfeições globais não são contempladas.

Quanto as imperfeições locais, essas relacionam-se com a falta de retilíneidade e/ou desaprumo do eixo do pilar (ABNT, 2014), como indicado na Figura 6. Conforme o item 11.3.3.4.3 da norma, os efeitos das imperfeições locais são atendidos se for considerado um momento mínimo, dado pela Equação (14).



a) Elementos de travamento (tracionado ou comprimido)      b) Falta de retilíneidade      c) Desaprumo do pilar no pilar

**Fonte:** ABNT (2014).

$$M_{1d,\min} = N_{sd} \cdot (1.5 + 0.03 \cdot h) \quad (14)$$

Onde:

$M_{1d,\min}$  é o momento mínimo de 1ª ordem;

## 2.2.5 Efeitos locais de segunda ordem

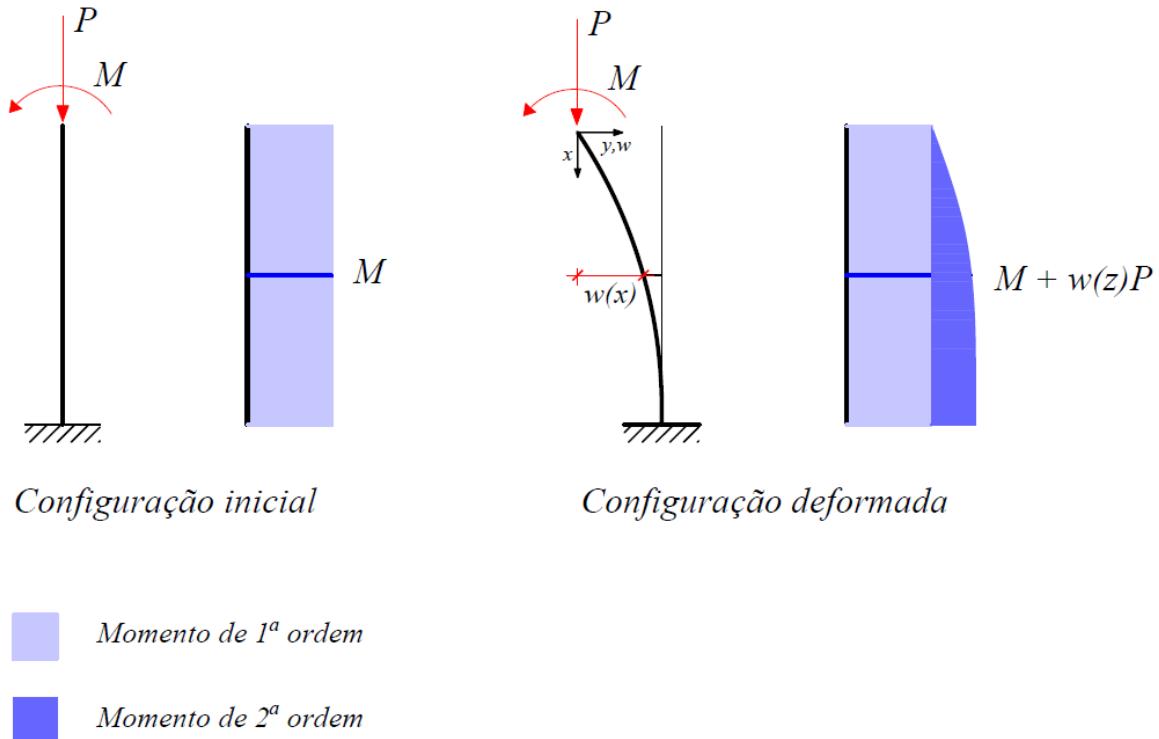
Conforme Carvalho e Pinheiro (2009), como pilares são elementos submetidos a esforços de compressão, estão sujeitos à flambagem, ou seja, aos efeitos de 2ª ordem.

Este fenômeno causa um equilíbrio instável no elemento estrutural, devido a estrutura deformada interferir nos esforços internos, originando esforços de flexão, mesmo em pilares com ações normais centradas, portanto ocorre o acréscimo de momentos adicionais no elemento (CARVALHO E PINHEIRO, 2009; JÚNIOR, 2014).

Os efeitos locais de 2ª ordem devem ser considerados de forma cuidadosa, pois a

ruptura por flambagem é brusca e violenta, mesmo sem acréscimos nas ações aplicadas (BASTOS, 2017). Na Figura 7 detalha-se o acréscimo de momentos, devido aos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem, em pilares em balanço.

**Figura 7 – Momentos de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem em pilares em balanço**



**Fonte:** Adaptado de Júnior (2014).

Conforme o item 15.8.2, da NBR 6118 (ABNT, 2014) os efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem deve ser considerados em pilares, quando o índice de esbeltez, dado pela Equação (11) e (12) (pág. 31), para pilares retangulares e circulares, respectivamente, for maior que o valor-limite  $\lambda_1$ , expresso pela Equação (15). Caso  $\lambda \leq \lambda_1$ , os efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem podem ser desprezados, assim, conclui-se pela Equação (15) que em pilares curtos (com esbeltez  $\lambda \leq 35$ ) os efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem também podem ser desprezados.

$$\lambda_l = \frac{25 + 12.5 \cdot \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \quad \text{com } 35 \leq \lambda_l \leq 90 \quad (15)$$

Onde:

$e_1$  é a excentricidade de 1<sup>a</sup> ordem na direção considerada;

$\alpha_b$  é o parâmetro de instabilidade.

O parâmetro de instabilidade  $\alpha_b$  presente na Equação (15), depende do carregamento e da vinculação presente no pilar. Como restringe-se ao estudo de pilares submetidos à FCO, sem demais solicitações normais, como esforços transversais, e limita-se a análise para pilares biapoiados, pode-se determinar  $\alpha_b$  pela Equação (16), descrita no item 15.8.2 da norma.

$$\alpha_b = \begin{cases} 1, & M_{sd} < M_{1d,\min} \\ 0.4 \leq 0.6 + 0.4 \cdot \frac{M_B}{M_A} \leq 1, & M_{sd} \geq M_{1d,\min} \end{cases} \quad (16)$$

Onde:

$M_A$  e  $M_B$  são os momentos de 1<sup>a</sup> ordem nas extremidades do pilar (os momentos solicitantes característicos). Deve ser adotado para  $M_A$  o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado, e para  $M_B$  o sinal positivo, se tracionar a mesma face que  $M_A$ , e negativo, em caso contrário.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta no item 15.8.3, quatro metodologias distintas para determinação de efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem:

- método geral;
- método do pilar-padrão com curvatura aproximada (PPCA);
- método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada (PPRA);
- método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, 1/r (PPAD).

O método geral consiste na resolução da equação diferencial de equilíbrio, a qual usualmente não apresenta solução exata conhecida, sendo necessário a aplicação de métodos numéricos ou iterativos (SCADELAI, 2004; CARVALHO E PINHEIRO, 2009; JÚNIOR, 2014). Deste modo, o uso de softwares ou algoritmos computacionais são necessários para a utilização desta metodologia (SCADELAI, 2004; CARVALHO E PINHEIRO, 2009).

De acordo com Carvalho e Pinheiro (2009), métodos aproximados baseados no pilar-padrão buscam verificar qual a seção mais solicitada, e baseado em algumas simplificações, definir expressões que possibilitem o cálculo dos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem. Esses, portanto, apresentam maior facilidade no cálculo dos efeitos de segunda ordem em comparação com o método geral, contudo, para sua utilização, deve-se respeitar as restrições normativas referente ao método que será empregado.

A Tabela 2 resume as limitações referentes aos quatro métodos apresentados no item 15.8.3 da norma de concreto armado brasileira.

**Tabela 2 - Métodos para cálculo dos efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem**

Método	Seções analisadas	Disposição da armadura	Limite de esbeltez
Geral	Qualquer	Qualquer	$\lambda \leq 200$
Pilar-padrão com curvatura aproximada	Seção constante	Simétrica	$\lambda \leq 90$
Pilar-padrão com rigidez $\kappa$ aproximada	Seção retangular constante	Simétrica	$\lambda \leq 90$
Pilar-padrão com acoplado a diagramas M, N, 1/r	Qualquer	Qualquer	$\lambda \leq 140$

**Fonte:** Autoria própria (2019).

O método do pilar-padrão com curvatura aproximada e o do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada, são amplamente utilizados para pilares médios, como pode ser observado nos trabalhos de Smaniotto (2005), Scadelai e Pinheiro (2005), Araújo (2010), Bastos (2017), dentre outros.

Leitão (2016) realizou um estudo comparativo a respeito do desempenho entre métodos aproximados para cálculo dos efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem, dentre esses incluiu-se o método do PPCA e o método PPRA. Os resultados teóricos destes métodos foram comparados com resultados experimentais encontrados na literatura. A Autora conclui que o método do PPRA é o menos conservador. Além disso, Leitão (2016) afirma que em pilares com esbeltez acima de 60, e com força normal elevada, este método não representa de forma adequada o comportamento do pilar.

Deste modo, levando em consideração os resultados obtidos por Leitão (2016), e que o método do pilar-padrão com curvatura aproximada pode ser utilizado para qualquer geometria constante, o que possibilita sua aplicação para ambas as seções analisadas, adota-se o método do PPCA para determinação dos efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem.

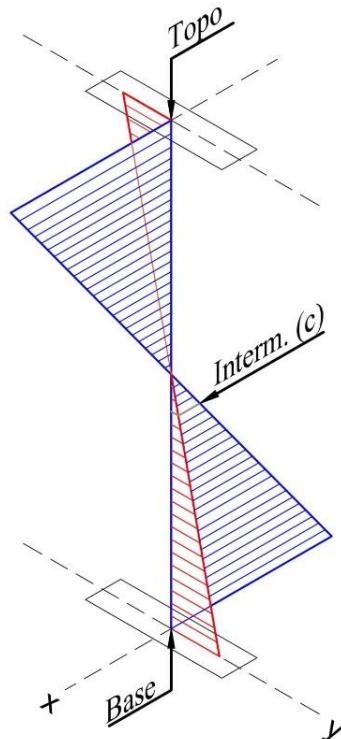
Conforme o item 18.3.3.2, no método do PPCA a não linearidade geométrica é estimada supondo-se a deformação senoidal da barra, já a não linearidade física é estimada por meio de uma expressão que aproxima a curvatura na seção crítica. O momento total máximo ( $M_{d,tot}$ ) no pilar para esse método é dado pela Equação (17).

$$M_{d,tot} = M_{1d,C} + N_{sd} \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (17)$$

Onde:

$M_{1d,C}$  é o momento de cálculo atuante na seção intermediária “c”, como pode ser observado na Figura 8. É dado pela Equação (18);

**Figura 8 – Seções principais de um pilar**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

$$M_{1d,C} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} \quad (18)$$

$1/r$  é a curvatura na seção crítica, dada pela Equação (19);

$$\frac{1}{r} = \min \left( \frac{0.005}{h \cdot (\nu + 0.5)}, \frac{0.005}{h} \right) \quad (19)$$

$M_{1d,A}$  é o valor de cálculo de 1ª ordem do momento  $M_A$  ( $M_{1d,A}$ ). É calculado por meio da Equação (20);

$$M_{1d,A} = \max \left( \gamma_f \cdot \gamma_n \cdot M_{sk}, M_{1d,min} \right) \quad (20)$$

$v$  é a força normal adimensionalizada, obtida pela Equação (21).

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (21)$$

## 2.3 DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS

### 2.3.1 Espaçamento máximo e mínimo

Segundo o item 18.4.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a disposição da armadura longitudinal deve assegurar apropriada resistência ao elemento estrutural. Para isso, em seções poligonais deve haver pelo menos uma barra em cada vértice, quanto a seções circulares recomenda-se o número mínimo de 6 barras distribuídas igualmente ao longo do perímetro (ABNT, 2014).

Também deve-se atentar aos espaçamentos mínimos e máximos normativos, pois segundo Fusco (2013), com o cumprimento destes parâmetros garante-se uma correta solidarização entre a armadura e o concreto do elemento estrutural. Em relação aos espaçamentos mínimo livre ( $e_{\min, livre}$ ), e o espaçamento máximo entre os eixos ( $e_{\max, eixos}$ ), a norma apresenta os valores mínimos descritos pelas Equações (22) e (23), respectivamente.

$$e_{\min, livre} = \max(2 \text{ cm}, \phi_l, 1.2 \cdot d_{\max, agreg}) \quad (22)$$

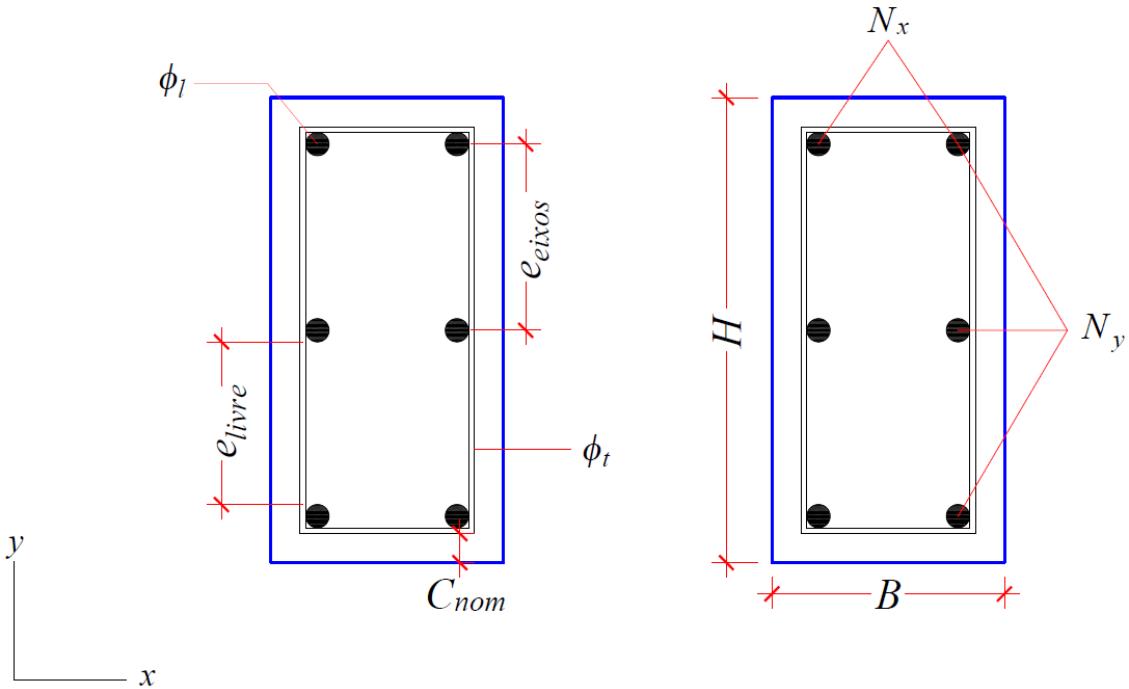
$$e_{\max, eixos} = \min(40 \text{ cm}, 2 \cdot b) \quad (23)$$

Onde:

$b$  é a menor dimensão da seção transversal. Em pilares circulares é igual ao  $\phi_p$ , já em retangulares é igual a base ( $B$ )

Conforme expresso na Figura 9, para pilares com seção transversal retangular, com diâmetro da armadura longitudinal constante, dado estribo ( $\phi_l$ ) e cobrimento nominal ( $C_{nom}$ ), pode-se calcular o espaçamento livre entre a face das barra ( $e_{livre}$ ) e o entre os eixos ( $e_{eixos}$ ) para certa direção (x ou y) pelas Equações (24) e (25), respectivamente.

**Figura 9 – Espaçamento entre eixos e livre**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

$$e_{livre} = \frac{h - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - n \cdot \phi_l}{n - 1} \quad (24)$$

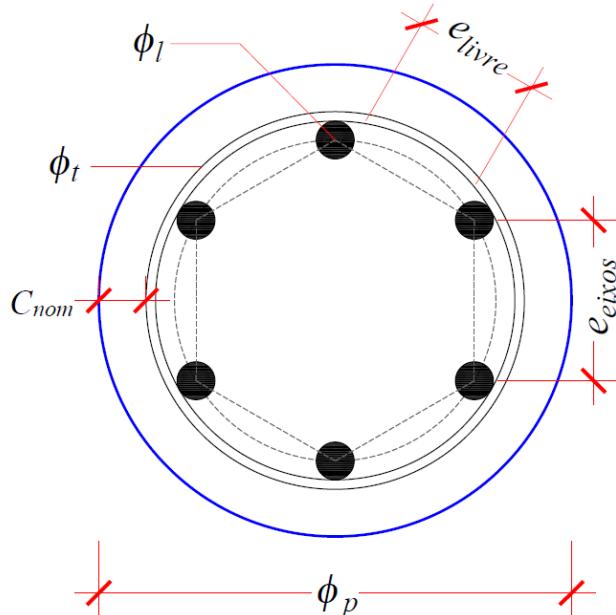
$$e_{eixos} = \frac{h - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l}{n - 1} \quad (25)$$

Onde:

$n$  é o número de barras em dada direção. Pode ser ao longo do eixo x ( $N_x$ ) ou do eixo y ( $N_y$ ).

Quanto aos pilares com geometria circular, o  $e_{eixos}$  das barras é igual ao comprimento da face de um polígono regular, inscrito em um círculo do centro do pilar até o centro das barras, com o número de vértices igual ao de barras, como detalhado na Figura 10, onde pode-se observar que para seis barras ( $N_c = 6$ ) o  $e_{eixos}$  é igual ao lado do hexágono regular.

**Figura 10 – Espaçamento entre eixos de um pilar circular com seis barras**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Portanto, o  $e_{eixos}$  pode ser verificado através da Equação (26), obtida por meio da adaptação da expressão demonstrada por Carvalho (2011) para cálculo do comprimento da face de um polígono regular inscrito. Em relação ao  $e_{livre}$  aplica-se a Equação (27), pois como pode ser verificada pela Figura 10 para determinar o  $e_{livre}$  basta subtrair o diâmetro da barra ( $\phi_l$ ) do espaçoamento entre os eixos.

$$e_{eixos} = \left[ \phi_{pilar} - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (26)$$

$$e_{livre} = e_{eixos} - \phi_l \quad (27)$$

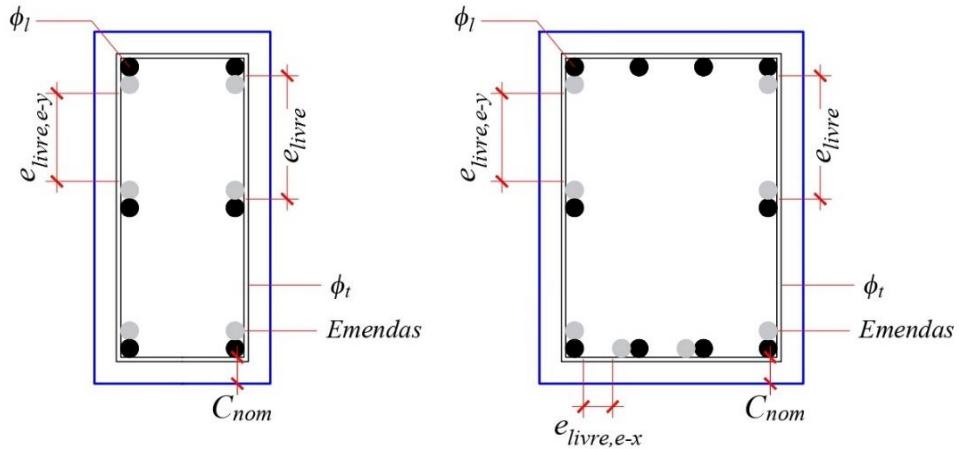
Onde:

$N_c$  é o número total de barras distribuídas na seção (circular).

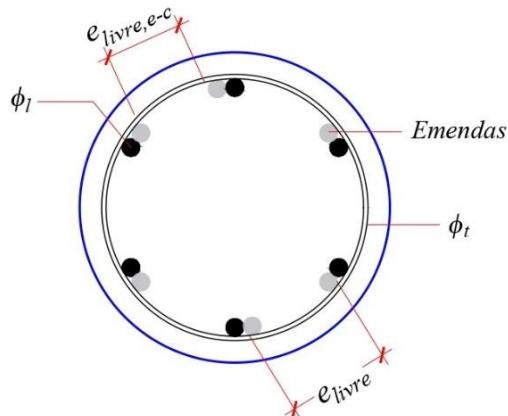
Conforme consta no item 18.4.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), os valores expressos pelas Equações (22) e (23), também devem ser respeitados em regiões de emendas por traspasse das barras. Como indicado na Figura 11, nos locais de emendas, em pilares com geometria circular, pode ocorrer um decréscimo de até  $2\phi_l$ , do espaçoamento livre na seção. Assim, pode-se calcular espaçoamento livre nas emendas em seções circulares ( $e_{livre,e-c}$ ) pela Equação (28).

**Figura 11 – Região com emendas por traspasse em seções retangulares e circulares**

*Seção retangular*



*Seção Circular*



**Fonte:** Autoria própria (2019).

$$e_{livre,e-c} = [\phi_{pilar} - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N_c}\right) - 3 \cdot \phi_l \quad (28)$$

O mesmo ocorre em pilares retangulares, na direção y (ver Figura 11). Já na direção x, de seções retangulares, a redução pode ser de até  $\phi_l$ , se na seção  $N_x > 2$ . Assim, o espaçamento livre nas emendas em retangulares, na direção y ( $e_{livre,e-y}$ ) e na direção x ( $e_{livre,e-x}$ ) são dados Equações (29) e (30), respectivamente.

$$e_{livre,e-c} = [\phi_{pilar} - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N_c}\right) - 3 \cdot \phi_l \quad (29)$$

$$e_{livre,e-x} = \begin{cases} \frac{B - 2 \cdot (c + \phi_t) - N_x \cdot \phi_l}{N_x - 1}, & \text{se } N_x = 2 \\ \frac{B - 2 \cdot (c + \phi_t) - N_x \cdot \phi_l}{N_x - 1} - \phi_l, & \text{se } N_x > 2 \end{cases} \quad (30)$$

Onde:

$B$  é a base do pilar (ver Figura 9, pág. 40);

$H$  é a altura do pilar;

$N_x$  e  $N_y$  são o número de barras ao longo da direção y e x, respectivamente (ver Figura 9, pág. 40).

### 2.3.2 Área máxima e mínima

No item 17.3.5.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), apresenta-se as especificações referentes aos valores mínimos e máximos para a área de aço da armadura longitudinal.

De acordo com esse item, deve-se considerar um valor mínimo para a área de aço com a finalidade de evitar a ruptura frágil das seções transversais. Já a delimitação da área máxima para a armadura, é necessário para garantir as condições de ductilidade e validade dos preceitos que descrevem o funcionamento da união dos elementos aço-concreto, ou seja, nas palavras de Santos (1981), para que se utilize o material “concreto armado”, devidamente conhecido e ensaiado, e não o “aço revestido de concreto”, pouco conhecido.

Para pilares, a armadura longitudinal mínima ( $A_{s,min}$ ) é dada pela Equação (31). Com relação ao valor máximo de armadura, recomenda-se que o pilar apresente uma área de aço inferior a 8% da seção transversal, considerando inclusive as regiões das emendas, portanto a armadura longitudinal máxima ( $A_{s,máx}$ ) pode ser obtida pela Equação (32).

$$A_{s,min} = \max \left( 0.15 \cdot \frac{N_{sd}}{f_{yd}}, \quad 0.004 \cdot A \right) \quad (31)$$

$$A_{s,máx} = 0.04 \cdot A_c \quad (32)$$

### 2.3.3 Bitolas mínimas

O item 18.4.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014) também especifica os diâmetros possíveis

para armadura longitudinal e para armadura transversal de pilares. A armadura longitudinal deve possuir diâmetro ( $\phi_l$ ) superior a 10 mm e inferior a 1/8 da menor dimensão transversal (B em seções retangulares e  $\phi_p$ ), como indicado na Equação (33). Para a armadura transversal, indica-se que o diâmetro ( $\phi_t$ ) deve ser superior a 5 mm e a 1/4 de  $\phi_l$ , tal qual expresso pela Equação (34).

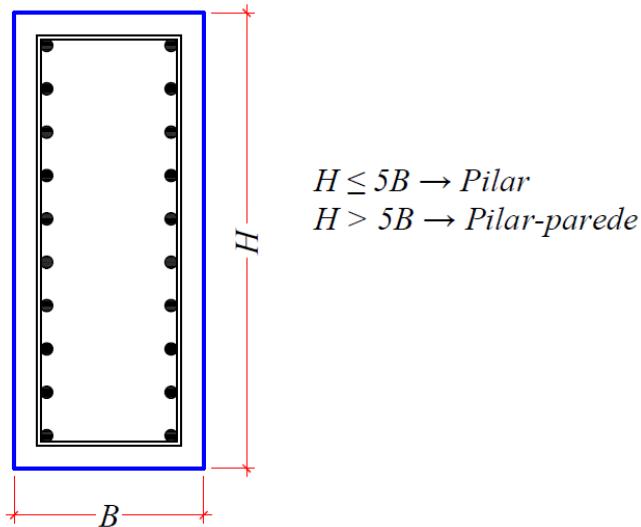
$$10 \text{ mm} \leq \phi_l \leq \frac{b}{8} \quad (33)$$

$$\phi_t = \max\left(5 \text{ mm}, \frac{\phi_l}{4}\right) \quad (34)$$

### 2.3.4 Dimensões mínimas e máximas

Segundo o item 18.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a maior dimensão da seção transversal dos pilares não deve exceder cinco vezes a menor dimensão, caso esta relação não se verifique o objeto de dimensionamento não é um pilar e sim um pilar-parede, os quais não serão tratados no presente trabalho. Assim em pilares retangulares  $H \leq 5B$ , como expresso pela Figura 12.

**Figura 12 – Classificação de pilar e pilar-parede em seções retangulares**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Pilares classificam-se como elementos lineares, portanto, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), o comprimento longitudinal deve exceder no mínimo três vezes a maior dimensão da seção transversal, limitando desta forma a altura, em pilares retangulares, e o  $\phi_p$ ,

em seções circulares.

As dimensões mínimas de pilares são tratadas no item 13.2.3. De forma geral, a seção transversal de pilares deve apresentar dimensões superiores a 19 cm. A norma permite a redução deste valor para até 14 cm, desde que seja utilizado um coeficiente adicional  $\gamma_n$ , conforme o Quadro 7. Destaca-se que em qualquer circunstância, não se permite pilares com área de seção transversal inferior a 360 cm<sup>2</sup>.

**Quadro 7 - Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$  para pilares**

b (cm)	≥19	18	17	16	15	14
$\gamma_n$	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
Onde:						
$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot b$ ;						
b é a menor dimensão da seção transversal (cm)						
Nota: O coeficiente $\gamma_n$ deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento						

**Fonte: ABNT (2014).**

### 2.3.5 Detalhamento dos estribos

Santos (1981), Carvalho e Pinheiro (2009) apresentam as seguintes razões para a utilização da armadura transversal, ou seja, de estribos em pilares:

- Amarrar as barras transversais, garantindo o posicionamento das barras transversais, e conferindo ao conjunto maior rigidez e ductilidade;
- Proteger as barras longitudinais dos efeitos de flambagem;
- Resistir aos esforços de tração oriundos de forças cortantes, momentos torsóres e da mudança de direção dos esforços.

Segundo Santos (1981), para atender estes objetivos, os estribos devem ser fechados, usualmente em torno das barras de canto, apresentar ganchos, e respeitar o espaçamento máximo prescrito pela norma.

Como explicitado anteriormente, no presente trabalho não se considera pilares com solicitações tangenciais, assim pode-se utilizar as recomendações do item 18.4.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014) para armaduras transversais. Para elementos sujeitos à força cortante e/ou à torsão deve-se realizar o dimensionamento da armadura transversal de acordo com o item 17.4 e/ou o item 17.5, respectivamente.

Conforme o item 18.4.3, o espaçamento máximo dos estribos ( $S_{\max,est}$ ) é dado pela Equação (35).

$$S_{\max,est} = \min(20 \text{ cm}, b, 12 \cdot \phi_t) \quad (35)$$

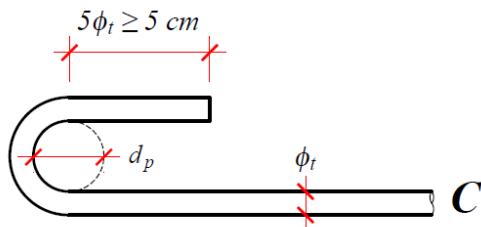
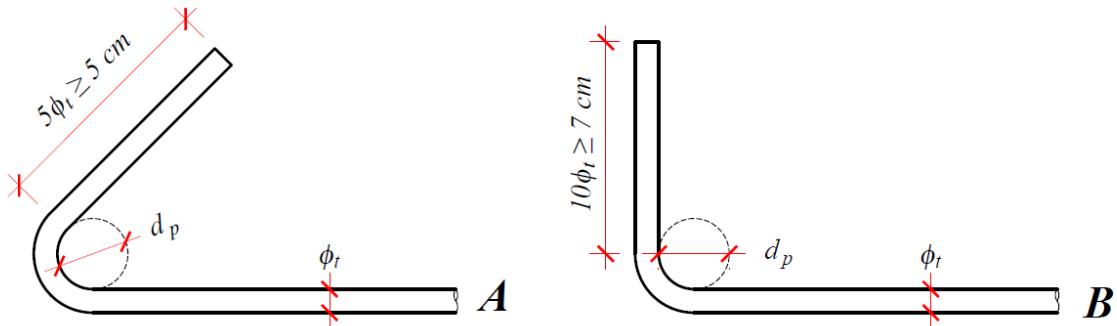
Os ganchos para estribos são abordados pela norma no item 9.4.6. Nele especifica-se o diâmetro do pino de dobramento ( $d_p$ ), que deve respeitar os valores mínimos apresentados no Quadro 8. Além disso, permite-se a utilização de três ganchos distintos, os quais encontram-se detalhados na Figura 13.

**Quadro 8 – Diâmetro dos pinos ( $d_p$ ) de dobramento dos estribos**

Bitola (mm)	Tipo de aço		
	CA-25	CA-50	CA-60
$\leq 10$	$3\phi_t$	$3\phi_t$	$3\phi_t$
$10 < \phi_t < 20$	$4\phi_t$	$5\phi_t$	-
$\geq 20$	$5\phi_t$	$8\phi_t$	-

Fonte: ABNT (2014).

**Figura 13 – Tipos de ganchos para estribos**



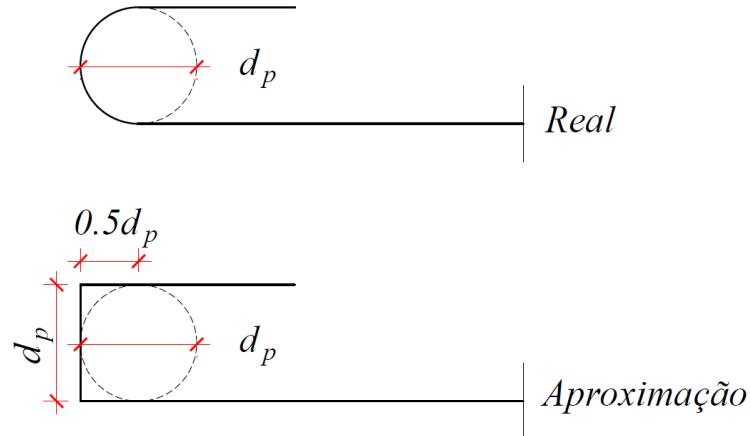
Fonte: Autoria própria (2019).

Neste trabalho adota-se a configuração de ganchos C para as seções retangulares e circulares.

Segundo Fusco (2013), na etapa do projeto não há interesse em determinar de forma

exata o comprimento dos ganchos, pois durante o dobramento ocorre um considerável alongamento plástico, deste modo as dimensões reais são distintas das consideradas no projeto. Assim sendo, utiliza-se nas seções retangulares a simplificação descrita pela Figura 14. Já para as seções circulares calcula-se o comprimento do estribo considerando o  $d_p$ , assim, não se emprega simplificações.

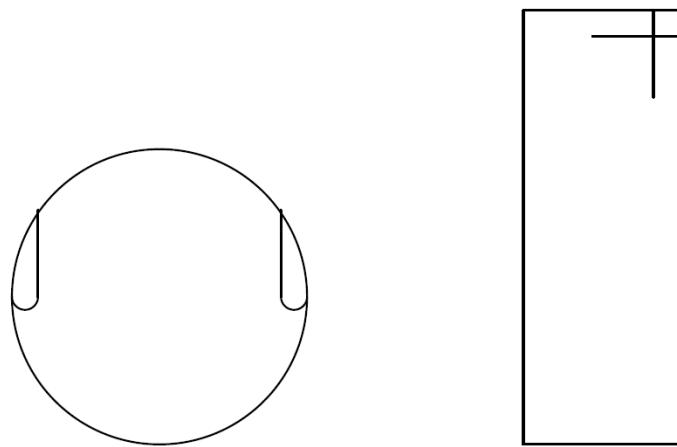
**Figura 14 – Aproximação dos ganchos para seções retangulares**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

A configuração dos estribos para pilares com seções circulares e retangulares, considerando as informações definidas acima, é dada pela Figura 15. Portanto, o comprimento do estribo para seções retangulares ( $C_{st,r}$ ) e para seções retangulares ( $C_{st,c}$ ), é obtido pelas Equações (36) e (37), respectivamente.

**Figura 15 – Configuração dos estribos para cada geometria**



*Circular*

*Retangular*

**Fonte:** Autoria própria (2019).

$$C_{est,r} = [2 \cdot (B + H) - 8 \cdot c_{nom}] + 2 \cdot \max(5 \cdot \phi_t, 5 \text{ cm}) + 3 \cdot \phi_t \quad (36)$$

$$C_{est,c} = \frac{3}{2} \cdot \pi (\phi_{pilar} - 2 \cdot c_{nom}) + 2 \cdot \max(5 \cdot \phi_t, 5 \text{ cm}) + 3 \cdot \pi \cdot \phi_t \quad (37)$$

### 2.3.6 Proteção contra flambagem

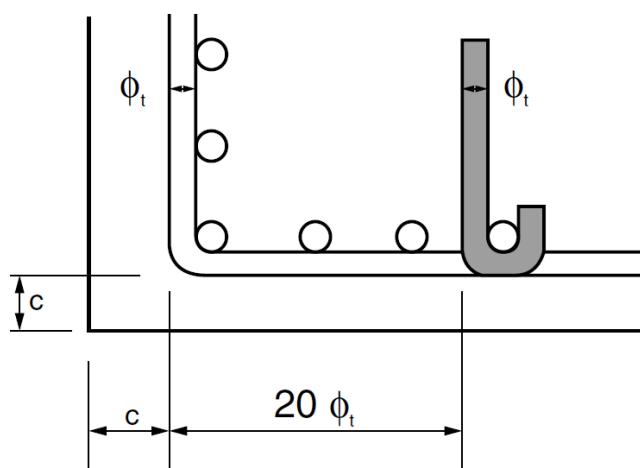
Segundo o item 18.2.4, sempre que houver possibilidade de flambagem das barras da armadura, devem ser tomadas precauções para evitá-la. Como mencionado anteriormente, uma das finalidades dos estribos em pilares é a proteção da flambagem, contudo, de acordo com o item 18.2.4 da norma:

os estribos poligonais garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância de  $20 \phi_t$  do canto, se nesse trecho de comprimento  $20 \phi_t$  não houver mais de duas barras, não contando a de canto. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deve haver estribos suplementares.

Destaca-se que no caso de estribos circulares com concavidade orientada para o interior do concreto o uso de estribos suplementares é dispensado (ABNT, 2014). Assim, em pilares com seção transversal circular não é necessário empregá-los.

A norma apresenta a Figura 16 para exemplificar o critério para utilização de estribos suplementares. Nela o estribo suplementar é constituído por uma barra reta, a qual apresenta ganchos na extremidade, envoltos nas barras.

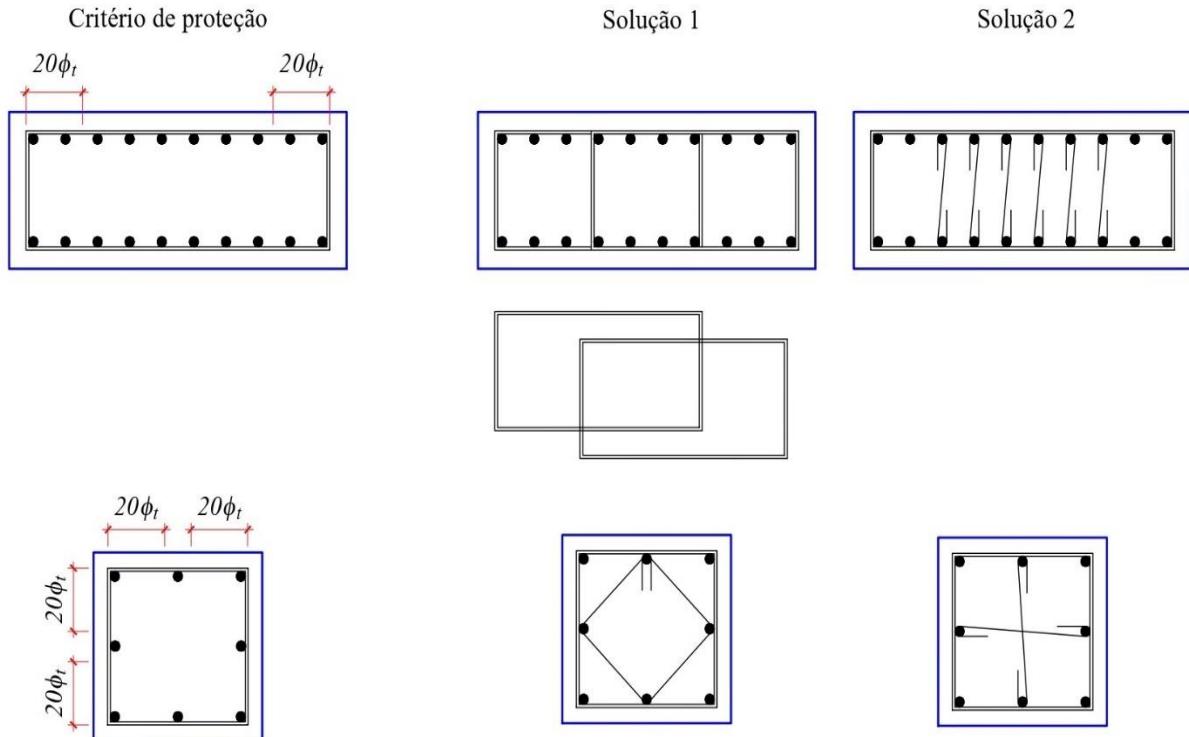
**Figura 16 – Proteção contra flambagem em seções poligonais**



**Fonte: ABNT (2014).**

Além da barra reta de travamento podem ser utilizados outros arranjos de estribos para impedir a flambagem das barras. Na Figura 17 encontram-se detalhadas diversas soluções, sendo estas baseadas nas disposições detalhadas por Santos (1981).

**Figura 17 – Arranjos de estribos para diferentes situações**

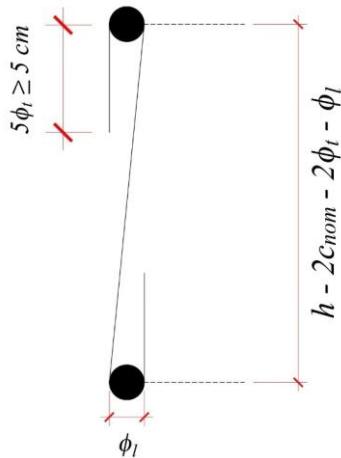


**Fonte:** Autoria própria (2019).

Dentre os diferentes arranjos para estribos suplementares descritos na Figura 17, adota-se no presente trabalho as barras de travamento (solução 2) como estribos suplementares.

Fusco (2013) evidencia a necessidade do contato entre as barras que compõem a armadura longitudinal e dos estribos suplementares, recomendando inclusive que em concretos do grupo II seja utilizado solda para manutenção desse contato metálico, logo o diâmetro de dobramento ( $d_p$ ) das barras retas é igual a  $\phi_l$ . Além disso, adota-se o comprimento do gancho igual ao recomendado para estribos (ver Figura 13, pág. 46). Deste modo, o comprimento dos estribos suplementares ( $C_{est,sup}$ ) é dado pela Equação (38), como pode ser verificado pela Figura 18.

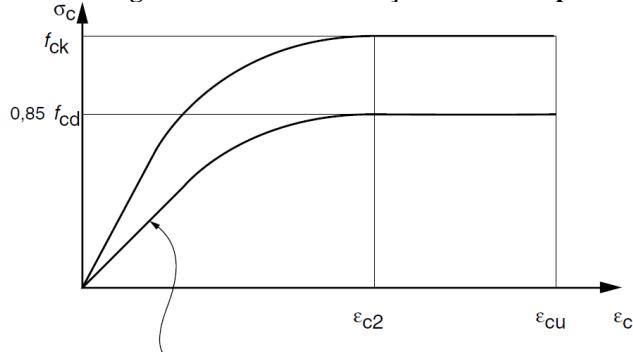
$$C_{est,sup} = \sqrt{(h - 2 \cdot C_{nom} - 2 \cdot \phi_t - \phi_l)^2 + \phi_l^2} + \pi \cdot \phi_l + 2 \cdot \max(5 \cdot \phi_l, 5 \text{ cm}) \quad (38)$$

**Figura 18 – Comprimento das barras de travamento****Fonte:** Autoria própria (2019).

## 2.4 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

### 2.4.1 Relações tensão-deformação

De acordo com o item 8.2.10.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), o comportamento do concreto no ELU pode ser estimado pelo diagrama tensão-deformação expresso pela Figura 19, e pela Equação (39).

**Figura 19 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto**

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \begin{array}{l} \text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa: } n=2 \\ \text{Para } f_{ck} > 50 \text{ MPa: } \\ n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck})/100]^4 \end{array}$$

**Fonte:** ABNT (2014).

$$\sigma_{cd} = \begin{cases} 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], & 0\% \leq \varepsilon_c < 2\% \\ 0,85 \cdot f_{cd}, & 2\% \leq \varepsilon_c \leq 3,5\% \end{cases} \quad (39)$$

Onde:

$\varepsilon_{c2}$  é a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico, dada pela Equação (40);

$$\varepsilon_{c2} = \begin{cases} 2\%, & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2\% + 0.085\% \cdot (f_{ck} - 50)^{0.53}, & f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (40)$$

$\varepsilon_{cu}$  é a deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura, dada pela Equação (41);

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3.5\%, & f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.6\% + 35\% \cdot \left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4, & f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (41)$$

$\varepsilon_c$  é a deformação específica do concreto.

Segundo o item 17.2.2, o diagrama parábola retângulo, expresso na Figura 19 (pág. 50) pode ser substituído pelo retângulo de profundidade  $y = \lambda x$ , onde  $\lambda$  é fornecido pela Equação (42). Além disso, como na FCO a largura da seção, medida paralelamente à LN diminui (ver Figura 25, pág. 56), para utilizar esta simplificação deve-se determinar  $\sigma_{cd}$  por meio da Equação (43), onde o fator  $\alpha_c$  é dado pela Equação (44).

$$\lambda = \begin{cases} 0.8, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400}, & \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (42)$$

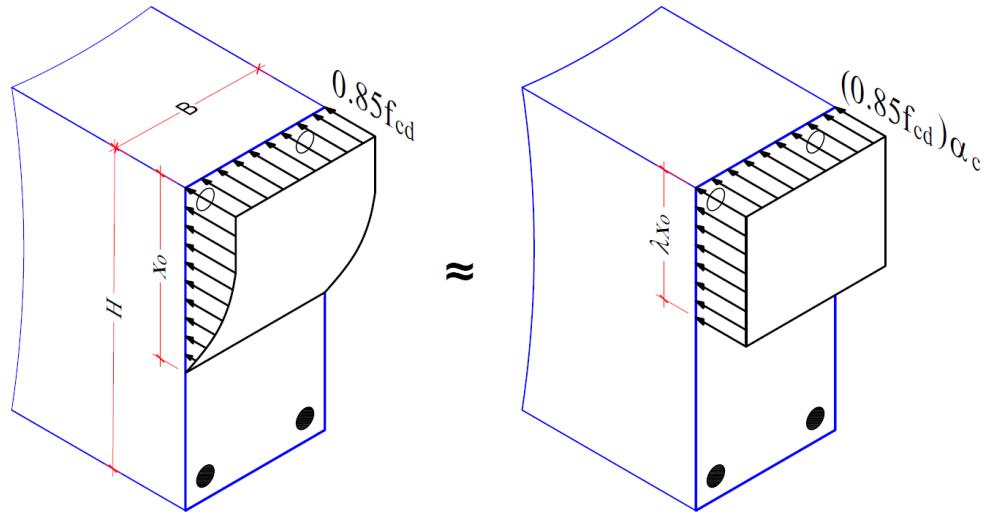
$$\sigma_{cd} = 0.9 \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (43)$$

$$\alpha_c = \begin{cases} 0.85, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0.85 \cdot \left[1 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200}\right], & \text{se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (44)$$

A simplificação descrita acima, a qual pode também se encontrar detalhada na Figura 20, é empregada, por exemplo, no algoritmo de Araújo (2010) para dimensionamento de pilares

com seção simétrica submetidos à FCO. O uso da simplificação facilita o cálculo dos esforços resistentes do concreto, contudo não será utilizada no presente trabalho. Opta-se pelo uso do diagrama da parábola-retângulo para tornar a verificação do ELU precisa, evitando possíveis super/subdimensionamentos que o uso das Equações (42) e (43) poderia acarretar.

**Figura 20 – Simplificação do diagrama da parábola retângulo**

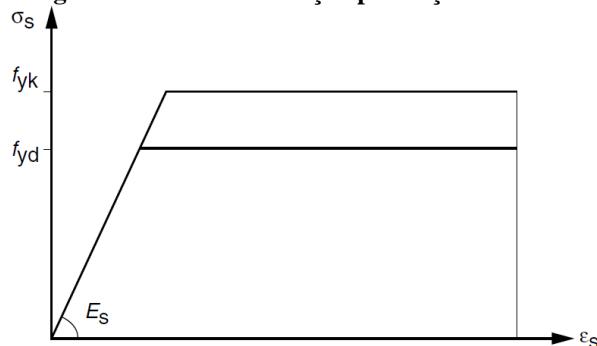


**Fonte:** Autoria própria (2019).

Salienta-se que a resistência do concreto à tração é desprezada neste trabalho.

Já o aço de armaduras passivas, conforme o item 8.3.6, possui o diagrama tensão-deformação descrito pela Figura 21 e pela Equação (45).

**Figura 21 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas**



**Fonte:** ABNT (2014).

$$\sigma_s = \begin{cases} \epsilon_s \cdot E_s, & \epsilon_s < \epsilon_{yd} \\ f_{yd}, & \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (45)$$

Onde:

$\epsilon_s$  é a deformação específica do aço da armadura passiva;

$E_s$  é o módulo de elasticidade do aço, o qual será adotado o valor de 210 GPa, como recomendado pelo item 8.3.5 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

$\varepsilon_{yd}$  é a deformação específica do aço da armadura passiva no início do escoamento.

Para o aço CA-50, considerado neste trabalho, é dada pela Equação (46);

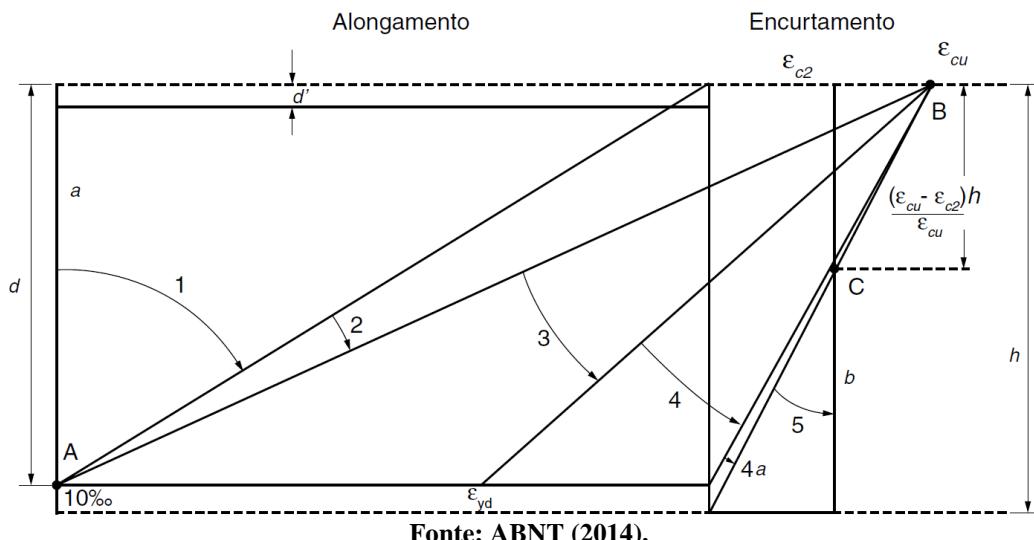
$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{\left(\frac{50}{1.15}\right)}{21000} \approx 2.0704\% \quad (46)$$

#### 2.4.2 Domínios de deformação

No ELU, a seção é avaliada em estado próximo a ruptura, ou seja, os esforços solicitantes estão na iminência de exceder os esforços solicitantes (Silva, 2015). De acordo com Araújo (2010), Carvalho e Pinheiro (2009), o ELU de uma seção transversal à FCO, ocorre quando o aço e/ou concreto alcançam suas deformações específicas últimas.

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009), para obter a resistência de cálculo para uma dada seção é preciso saber em qual domínio se encontra a distribuição das deformações. Considerando a manutenção da seção plana após a deformação, hipótese básica permitida pelo item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014), os domínios de ELU de uma seção transversal são dados pela Figura 22.

**Figura 22 – Domínios de estado-limite de uma seção transversal**



O Quadro 9 detalha cada um dos domínios de deformação, para cada intervalo da profundidade da linha neutra ( $x_0$ ), conforme as descrições da NBR 6118 (ABNT, 2014) e de

Carvalho e Pinheiro (2009).

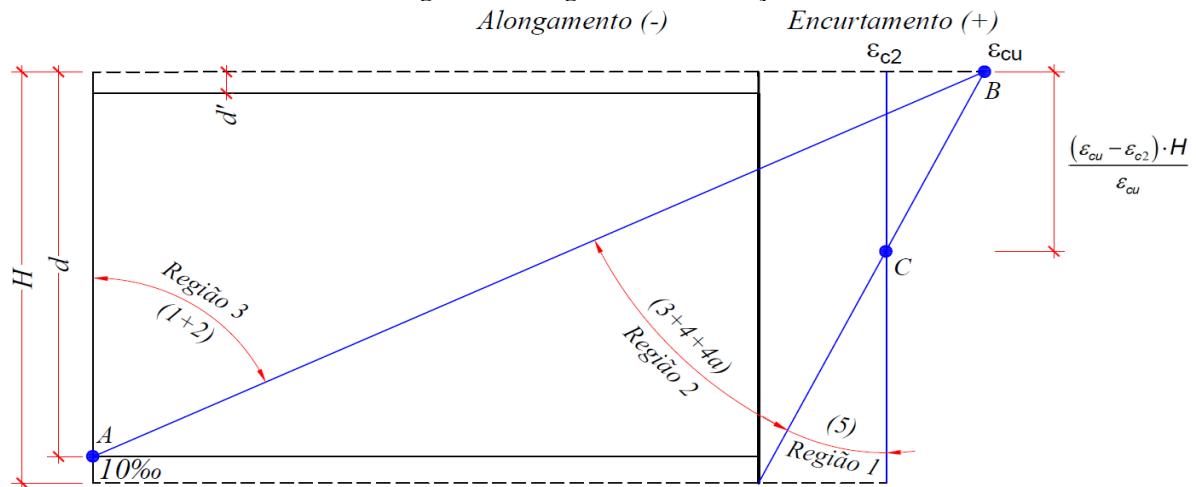
**Quadro 9 - Caracterização dos domínios de deformação**

Domínio	Descrição	Intervalo
Reta A	Tração uniforme.	$x_o \rightarrow -\infty$
1	Tração não uniforme, sem compressão. A linha neutra é externa a seção transversal.	$-\infty < x_o \leq 0$
2	Flexão simples ou composta sem ruptura do concreto à compressão, ou seja, ocorre um mal aproveitamento deste material.	$0 < x_o \leq \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{10\% + \varepsilon_{cu}} \right) \cdot d$
3	Flexão simples ou composta com ruptura do concreto à compressão e com escoamento do aço, desta forma, ambos os materiais são bem aproveitados.	$\left( \frac{\varepsilon_{cu}}{10\% + \varepsilon_{cu}} \right) \cdot d < x_0 \leq \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} \right) \cdot d$
4	Flexão simples ou composta com ruptura do concreto à compressão e aço tracionado sem escoamento. A ruptura neste domínio é frágil, além disso o aço não é bem aproveitado.	$\left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd} + \varepsilon_{cu}} \right) \cdot d < x_o \leq d$
4a	Flexão composta com ruptura do concreto à compressão e com armadura comprimidas. O Aço da armadura menos comprimida é mal aproveitado, pois sua deformação é pequena.	$d < x_o \leq H$
5	Compressão não uniforme, sem tração. Apresenta ruptura frágil, sem deformação e fissuração.	$H < x_o < \infty$
Reta B	Compressão uniforme.	$x_o \rightarrow \infty$

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Segundo Santos (1994) e Araújo (2010), não é necessário considerar todos os seis domínios descritos pela Figura 22, visto que esses podem ser agrupados nas três regiões distintas presentes na Figura 23.

**Figura 23 – Regiões de deformação**



**Fonte:** Adaptado de Santos (1994).

Neste trabalho segue-se a metodologia apresentada por esses Autores, assim, utilizando as informações expostas, e empregando semelhança de triângulos, encontra-se a Equação (47) para o cálculo da deformação.

$$\varepsilon_{si}(d_i, x_o) = \begin{cases} 10\% \cdot \left( \frac{x_o - d_i}{d - x_o} \right), & \text{se } 0 \leq x_0 \leq \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 10\%} \right) \cdot d_1 \\ \varepsilon_{cu} \cdot \left( \frac{x_o - d_i}{x_o} \right), & \text{se } \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 10\%} \right) \cdot d_1 < x_o \leq H_a \\ \varepsilon_{cu} \cdot \varepsilon_{c2} \cdot \left[ \frac{x_o - d_i}{\varepsilon_{cu} \cdot x_o - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) \cdot H_a} \right], & \text{se } H_a < x_o < \infty \end{cases} \quad (47)$$

Onde:

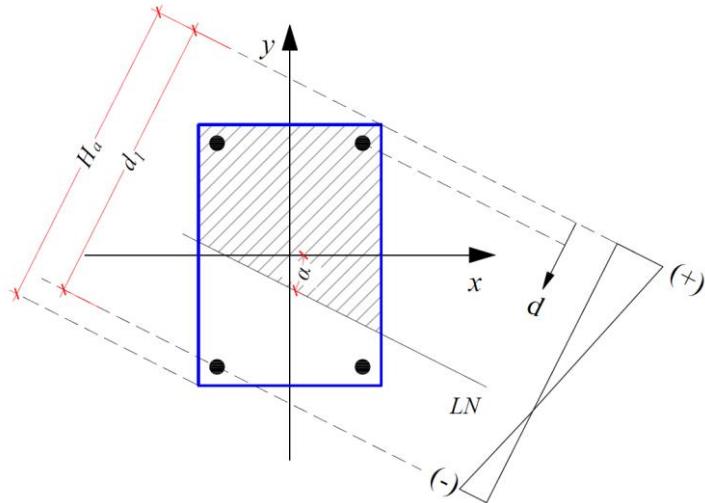
$d_i$  é a distância entre a fibra mais comprimida e o ponto i;

$d_1$  é a distância entre a fibra mais comprimida e a barra mais distante;

$H_a$  é a altura da seção, com relação aos eixos x' e y';

Na Figura 24 encontram-se detalhados os parâmetros da Equação (47), e demais fatores empregados para cálculo dos esforços resistentes.

**Figura 24 – Parâmetros empregados para o cálculo dos esforços resistentes**



**Fonte: Autoria própria (2019).**

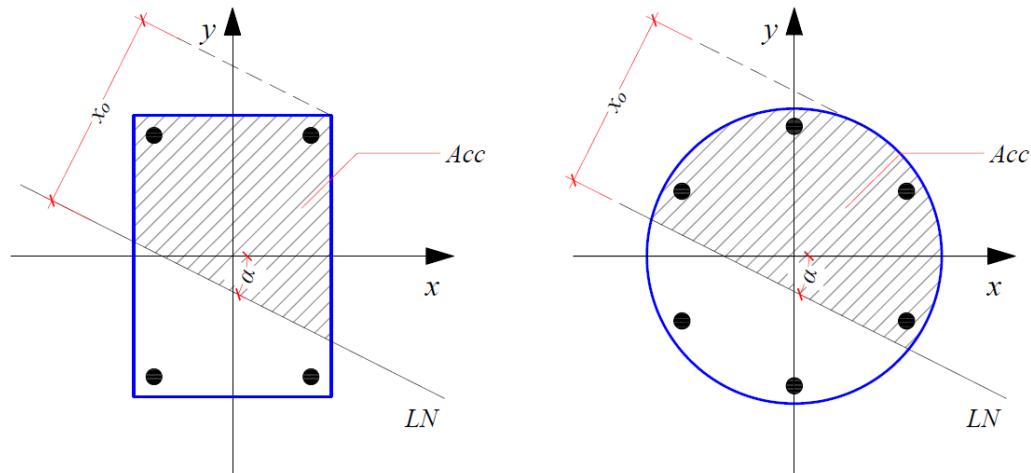
## 2.5 FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Fusco (1981) define solicitação normal como os esforços que originam tensões

perpendiculares ao plano da seção transversal dos elementos estruturais, estando incluídas nesta classificação as forças normais e momentos fletores.

De acordo com Santos (1981) a flexão é chamada oblíqua quando não se conhece antecipadamente a inclinação da linha neutra ( $\alpha$ ), como indicado na Figura 25.

**Figura 25 – Seções transversais sob FCO**

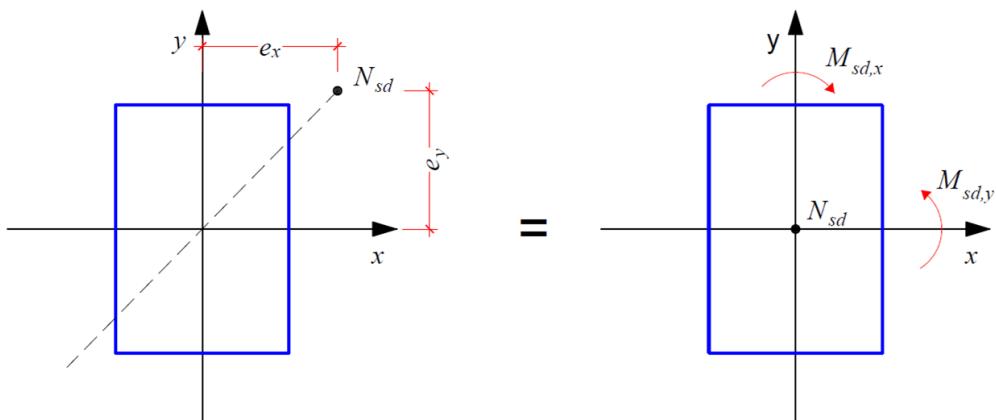


**Fonte:** Autoria própria (2019).

Essa solicitação normal é ocasionada por uma força normal de compressão, que atua fora do eixo de simetria da seção transversal (Santos, 1981; Carvalho e Pinheiro, 2009; Araújo, 2010), o que origina momentos fletores em ambas as direções, conforme a Figura 26. A FCO também ocorre, segundo os Autores, quando:

- Não houver eixo de simetria na seção do pilar (por exemplo, um pilar em “L”);
- A disposição da armadura não for simétrica ao eixo de atuação da força normal.

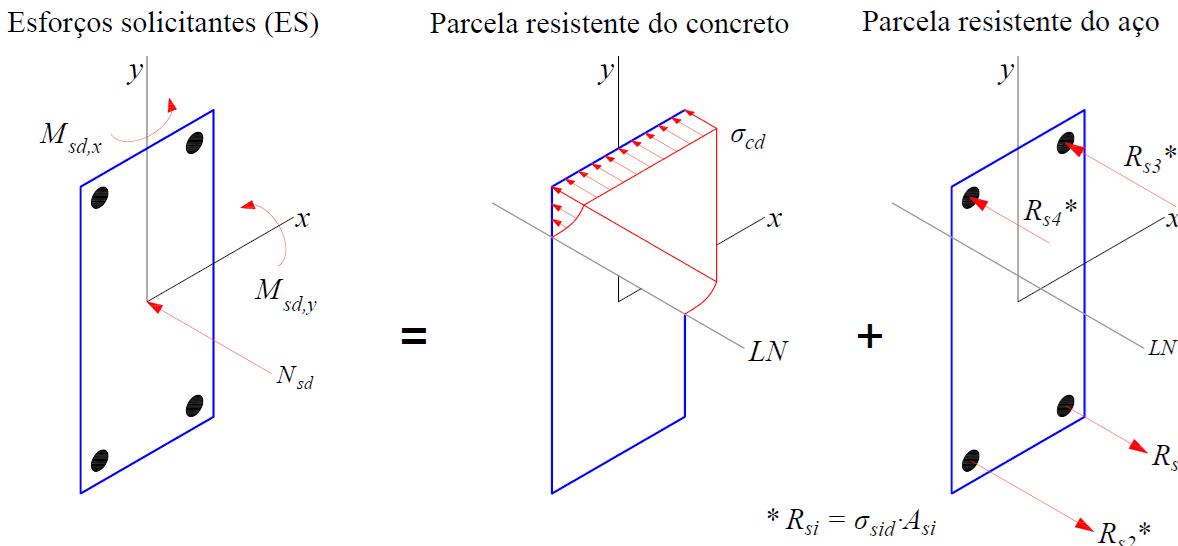
**Figura 26 – Flexão composta oblíqua (seção retangular)**  
**Seção à FCO**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

A solução exata de pilares submetidos à FCO é descrita por Marino (1979), Fusco (1981), Santos (1981), dentre outros, através das condições de equilíbrio. Como exposto pela Figura 27, os esforços resistentes ( $N_{rd}$ ,  $M_{rd,x}$  e  $M_{rd,y}$ ), compostos pela parcela resistente do concreto somada com a do aço, devem se igualar aos esforços solicitantes ( $N_{sd}$ ,  $M_{sd,x}$  e  $M_{sd,y}$ ). Em outras palavras, o somatório de forças normais, e de momentos nas direções x e y devem satisfazer as Equações (48), (49) e (50), respectivamente.

**Figura 27 – Esforços atuantes em uma seção retangular com 4 barras**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

$$N_{sd} = \iint_{Acc} \sigma_{cd} dy dx + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \quad (48)$$

$$M_{sd,y} = \iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot y dy dx + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot y_{si} \quad (49)$$

$$M_{sd,x} = \iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot x dy dx + \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot x_{si} \quad (50)$$

Onde:

$\sigma_{sid}$  é a tensão atuante na barra i;

$A_{si}$  é a área da seção transversal da barra i;

$x_{si}$  e  $y_{si}$  são as coordenadas da barra i com relação aos eixos x e y.

$A_{cc}$  é a região da seção transversal comprimida (ver Figura 25, pág. 56).

Salienta-se que, como descrito por Fusco (1981), as condições de equilíbrio advêm da hipótese básica da manutenção da forma plana da seção transversal, conforme especificado anteriormente, e da consideração de que a deformação das barras aderentes em tração ou compressão serem iguais ao do concreto em seu entorno. Estes pressupostos são permitidos pelo item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

As hipóteses básicas detalhadas acima, permitem que o cálculo dos esforços resistentes (ER) de cada parcela seja efetuado por meio dos diagramas de tensão-deformação apresentados no item 2.4.1 (pág. 50). Devido as tensões do concreto não serem lineares, como pode ser verificado na Figura 19 (pág. 50), faz-se necessário o uso das integrais presentes nas Equações (48) a (50) para calcular os ER desta parcela. Com relação ao aço, utiliza-se a Equação (47) (pág. 55) para verificar a deformação de cada barra e assim poder encontrar a força resistente em cada barra por meio do diagrama tensão deformação do aço (Figura 21, pág. 52), e consequentemente os momentos resistentes ao longos dos eixos x e y.

Deste modo, por meio da descrição realizada acima, evidencia-se a complexidade para verificar as condições de equilíbrio de seções à FCO. Segundo Santos (1994), não se conhece até hoje um procedimento direto e exato para o dimensionamento de elementos lineares à FCO, a não ser por métodos indiretos, através de diagramas de iteração ou por tentativas, mediante processos indiretos, com o AE previamente definido.

Outras metodologias podem ser aplicadas, como o processo aproximado para o dimensionamento à FCO, descrito pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Contudo foca-se nas descritas por Santos (1994) já que essas foram empregadas ao longo do presente trabalho.

### 2.5.1 Diagramas de iteração

Os diagramas de iteração são amplamente utilizados para o dimensionamento e verificação à FCO: são descritos por Fusco (1981), Santos (1981), Araújo (2010), dentre outros. Eles consistem na obtenção dos momentos fletores resistentes para dado arranjo estrutural e esforço normal. O procedimento dessa metodologia pode ser resumido nas seguintes etapas:

1. Para um  $\alpha$  determinado, calcula-se a profundidade da linha neutra ( $x_o$ ), por meio da Equação (48) (pág. 57), através da aplicação de um método numérico. Em outras palavras, para dado  $\alpha$  procura-se o  $x_o$  onde o esforço normal resistente ( $N_{rd}$ ), seja igual ao esforço normal solicitante de cálculo ( $N_{sd}$ ).
2. Em sequência calcula-se os momentos resistentes  $M_{rd,y}$  e  $M_{rd,x}$  pelas Equações (49) e (50) (pág. 57), respectivamente;

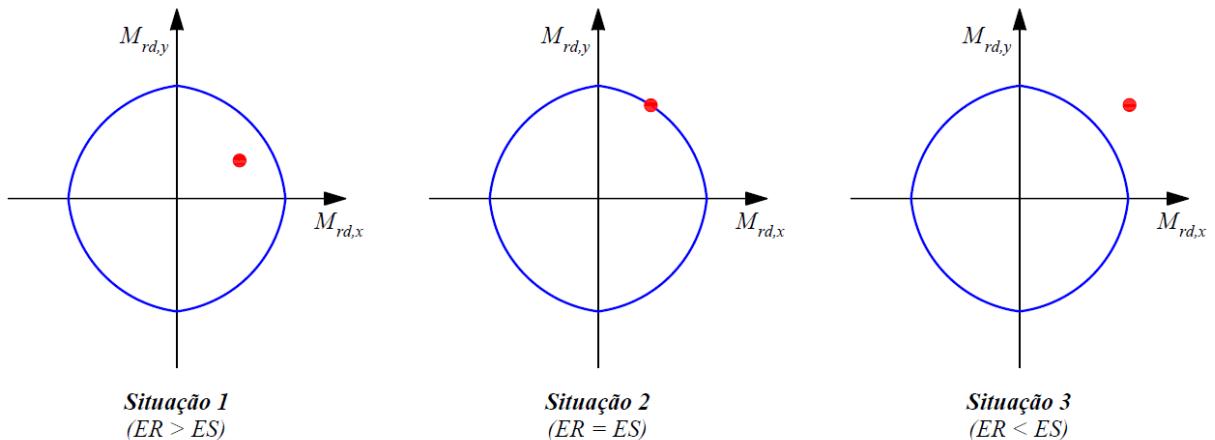
3. Varia-se a  $\alpha$  de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , aplicando novamente os passos acima. No caso de seções e disposição de armadura com dupla simétrica (como retangulares e circulares) pode-se alterar os valores de  $\alpha$  apenas entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , pois nos outros quadrantes o diagrama será simétrico (ARAUJO, 2010; SANTOS, 1981). Desta forma, basta “espelhar” os resultados encontrados nos demais quadrantes.

Traçado o diagrama, e com os esforços resistentes de cálculo determinados, compara-se esses com os esforços solicitantes de cálculo, onde podem ocorrer as seguintes situações:

- Situação 1: Os ER são maiores que os ES. Assim a segurança é garantida, contudo ocorre um superdimensionamento da seção. Este acentua-se conforme o ponto torna-se mais interno ao diagrama;
- Situação 2: Os ER são iguais aos ES. Esta é a situação ideal, pois assegura-se a segurança sem que ocorra desperdício de materiais;
- Situação 3: Os ER são menores que os ES, não satisfazendo a segurança necessária. Nesse caso deve-se alterar o arranjo estrutural.

A Figura 28 ilustra os casos descritos acima para uma seção retangular com armadura simétrica em relação a ambos os eixos.

**Figura 28 – Situações para momentos resistentes**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

O traçado dos diagramas de iteração, dependendo da precisão almejada, e da seção analisada pode se tornar oneroso. Fusco (1981) propõem a linearização dos diagramas de iteração, com o intuito de facilitar a comparação entre os esforços resistentes e os solicitantes, e assim, diminuir o tempo necessário na verificação da seção. Porém, como mencionado pelo próprio Autor, este procedimento pode muitas vezes conduzir a soluções antieconômicas.

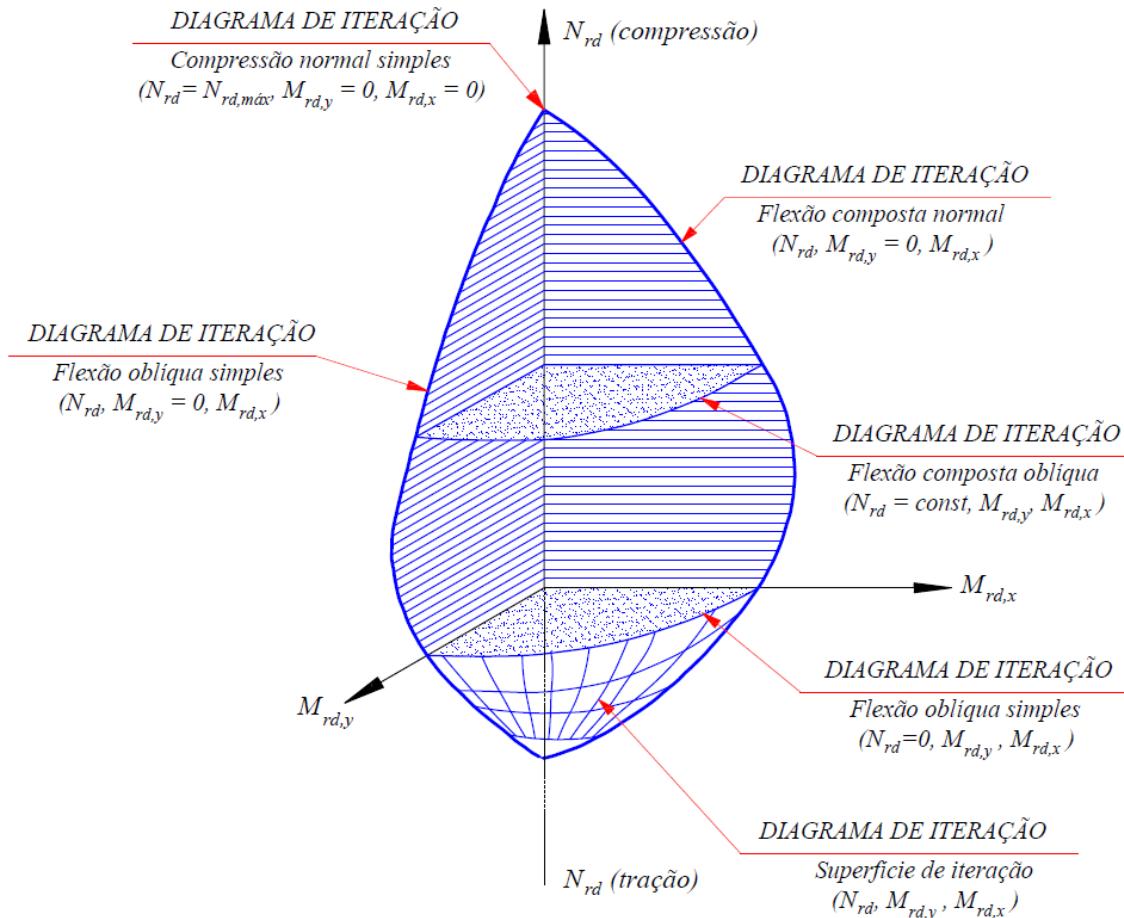
Os métodos clássicos apresentam-se como uma solução para o dimensionamento à

FCO com a aplicação dos diagramas de iteração. Neles são utilizados ábacos, dentre esses citam-se os ábacos de Montoya (1979), Fusco (1981) e Pinheiro *et al* (2009).

Para melhor compreensão da construção dos ábacos torna-se pertinente discorrer sobre a superfície de iteração. Até aqui considerava-se  $N_{sd}$  constante, já para traçar a superfície de iteração varia-se este esforço. Conforme Fusco (1981), definido um determinado arranjo estrutural e  $N_{sd}$  podem ser verificados os esforços resistentes da seção ( $N_{rd}$ ;  $M_{rd,x}$ ;  $M_{rd,y}$ ). Assim cada ponto da superfície de iteração fornece um conjunto de valores ( $N_{rd}$ ;  $M_{rd,x}$ ;  $M_{rd,y}$ ) que levam o AE ao estado limite último (Santos, 1981).

A Figura 29 apresenta a superfície de iteração de uma seção retangular com armadura simétrica em ambas as direções. Destaca-se os casos particulares da FCO: quando ocorre a força normal máxima ( $N_{rd,máx}$ ), tem-se a seção submetida a compressão centrada; se algum dos momentos resistentes de cálculo seja nulo a seção é solicitada à FCN; por fim, se  $N_{rd}$  é nulo tem-se o pilar submetido à flexão oblíqua simples.

**Figura 29 – Superfície de iteração**



**Fonte:** Adaptado de Fusco (1981).

Devido à dificuldade intrínseca às figuras espaciais, como o da superfície de iteração,

a tendência é procurar representações planas (SANTOS, 1981). Consequentemente os ábacos surgem com a finalidade de facilitar o dimensionamento e verificação de pilares à FCO. Para aumentar a aplicabilidade destes são utilizados coeficientes adimensionais  $v$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\omega$  - expressos pelas Equações (21) (pág. 39), (51), (52) e (53), respectivamente.

$$\mu_y = \frac{M_{sd,y}}{A \cdot h_y \cdot f_{cd}} \quad (51)$$

$$\mu_x = \frac{M_{sd,x}}{A \cdot h_x \cdot f_{cd}} \quad (52)$$

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A \cdot f_{cd}} \quad (53)$$

Onde:

$\mu_x$  é o momento em x adimensionalizado;

$h_y$  é o comprimento do pilar ao longo do eixo y;

$\mu_y$  é o momento em y adimensionalizado;

$h_x$  é o comprimento do pilar ao longo do eixo x;

$\omega$  é a área de aço adimensionalizada;

$A_s$  é a área total de aço na seção transversal;

Fixado o parâmetro  $\omega$  e variando-se o  $v$ , obtêm-se as “curvas de níveis” da “superfície de iteração adimensionalizada”. Caso o coeficiente alterado for o  $\omega$  altera-se a superfície de iteração em questão.

O uso de algoritmo ou software computacional facilita e agiliza o uso dos diagramas de iteração para a verificação/dimensionamento de seções à FCO, além de apresentar os aspectos positivos mencionados anteriormente.

Smaniotto (2005) desenvolveu o software “PDOP”, desenvolvido na linguagem Visual Basic 6.0. Este dimensiona e otimiza pilares de seção retangular submetidos a FCO, com esbeltez menor ou igual a 90. O Autor baseia-se nos procedimentos descritos por Santos (1994). Para o dimensionamento cumprem-se as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2003).

A otimização realizada pelo “PDOP” é discreta, assim, ao finalizar a otimização, é

apresentado uma tabela com as melhores possibilidades de AE, onde esses ficam organizados em ordem crescente de custo. Smaniotto (2005) descreve as sub-rotinas utilizadas para tornar o processo de construção da tabela o mais rápido possível.

Lyra et al (2010) apresentam o applet “Verificação de seções quaisquer de concreto armado sob flexão composta oblíqua”, programado com a linguagem Java. O recurso possibilita o traçado e verificação de qualquer seção poligonal cheia ou vazada. O applet restringe-se aos concretos do grupo I, ou seja, até 50 MPa.

Júnior (2014) utilizou os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) para disponibilizar no programa “PCalc” a possibilidade de uso de concretos do grupo I e II. No software pode-se dimensionar pilares com seção retangular e circular, ambas podem ser cheias ou vazadas. Como feito no “PDOP”, desenvolvido por Smaniotto (2005), parte-se dos esforços de projeto. No “PDOP” fica a critério do usuário determinar dentre os métodos apresentados pelo item 15.8.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), qual será utilizado para análise dos efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem, desta forma há maior liberdade para escolha da geometria, além de possibilitar a análise de pilares com esbeltez  $\lambda > 90$ .

Silva (2015) também emprega os procedimentos descritos por Santos (1994) para a concepção do “OblqCalco”. O programa computacional apresenta aspectos semelhantes ao trabalho apresentado por Lyra et al. (2010), ambos partem dos esforços de cálculo e possuem as mesmas possibilidades de seções. Assim como Júnior (2010) pode-se utilizar concretos do grupo II, contudo, além desta característica, no “OblqCalco” do concreto armado é permitido o uso de concreto protendido.

O Quadro 10 resume os principais aspectos descritos acima e expõe alguns critérios adicionais, como os métodos utilizados por cada autor para determinar os esforços provenientes da parcela resistente do concreto.

**Quadro 10 – Resumo dos trabalhos referentes ao uso de diagramas de iteração para pilares à FCO**

<b>Autor</b>	<b>Seções analisadas</b>	<b>Efeitos de segunda ordem</b>	<b>Parcela resistida pelo concreto</b>	<b>Concreto analisado</b>	<b>Dados de entrada</b>	<b>Ano da norma</b>	<b>Programa</b>
Smaniotto (2005)	Retangular	Método do pilar-padrão com rigidez $\kappa$ aproximada	Processo de integração por trapézios (Santos, 1994)	Armado - Grupo I	Esforços de projeto	2003	PDOP
Lyra et al (2010)	Qualquer seção cheia ou vazada poligonal	Não calcula os efeitos	Integração numérica	Armado - Grupo I	Esforços de cálculo	2007	Verificação de seções quaisquer de concreto armado sob flexão composta oblíqua
Júnior (2014)	Retangular e circular (cheia e vazada)	Permite a escolha de todos os métodos do item 15.8.3	Integração numérica com discretização (utiliza a simplificação do diagrama parábola retângulo)	Armado - Grupos I e II	Esforços de projeto	2014	PCalc
Silva (2015)	Qualquer seção cheia ou vazada poligonal	Não calcula os efeitos, mas apresenta o diagrama M, N e 1/r	Desenvolvimentos das integrais	Armado e protendido - Grupos I e II	Esforços de cálculo	2014	OblqCalco

**Fonte: Autoria própria (2019).**

Para o desenvolvimento do programa computacional proposto empregou-se um processo indireto, baseado no algoritmo de Araújo (2010), enquanto a comparação dos resultados do “PFOC” deu-se através do uso de diagramas de iteração, por meio de softwares computacionais e em ábacos consolidados.

Adota-se os diagramas de iteração para validação das sub-rotinas de verificação à FCO, pois como pode ser constatado ao longo deste capítulo, esta metodologia encontra-se consolidada em softwares de diversos autores e nos métodos manuais, com a aplicação dos ábacos.

Para o algoritmo de referente as seções retangulares, utilizou-se para validação dos resultados os ábacos de Pinheiro *et al* (2009), e o software “OblqCalco”, desenvolvido por Silva (2015), respectivamente. Conforme já descrito, os métodos manuais apresentam resultados já validados e são amplamente utilizados, logo, torna-se relevante comparar os resultados obtidos neste trabalho com os apresentados nestes métodos. Em relação ao programa computacional, escolhe-se o “OblqCalco” devido a esse a possibilitar a análise de concretos com  $f_{ck} \leq 90$  MPa, o que permite a validação do “PFOC” para ambos os grupos de concreto.

Quanto a sub-rotina para verificação de pilares circulares à FCO, manteve-se o uso do *software* de Silva (2015). Optou-se pelo “OblqCalco” ao invés do programa elaborado por Júnior (2014) devido ao “PCalc” empregar a simplificação do diagrama da parábola-retângulo (ver Quadro 10, pág. 63), o que poderia acarretar em diferenças entre os resultados obtidos, além disso, objetiva-se avaliar a confiabilidade da sub-rotina desenvolvida e não comparar resultados entre as diferentes metodologias.

Salienta-se que o “OblqCalco” não analisa seções circulares em si, entretanto, conforme Silva (2015), por meio da aproximação de curvas por vários segmentos de retas, pode-se modelar seções não poligonais no *software*.

Dependendo da precisão almejada, tipo de seção, número de seções a serem verificadas, o uso de diagramas de iteração pode apresentar inconveniências, apresentando-se custoso do ponto de vista do tempo de processamento. Para minimizar este aspecto pode-se realizar a linearização entre pontos do diagrama, como recomendado por Fusco (1981) e realizado por Smaniotto (2005), contudo isso diminui a precisão dos resultados encontrados.

Como na otimização de pilares à FCO é necessário a verificação de diversos AE, o uso de diagramas de iteração exibe as dificuldades relatadas. Portanto, torna-se interessante aplicar um algoritmo que solucione os aspectos descritos. O uso de processos indiretos apresenta-se como uma alternativa, já que neles não é necessário obter a resistência para cada  $\alpha$ , diminuindo assim o número de operações e consequentemente o tempo de processamento.

Além disso, a comparação entre os diagramas de iteração e outros métodos é válida, pois possibilita a verificação de pontos positivos e negativos de ambos, e assim realizar o aprimoramento dos métodos de dimensionamento e verificação de pilares submetidos à FCO.

### 2.5.2 Processos indiretos

Os processos indiretos buscam obter a solução para as Equações (48), (49) e (50) (pág. 57) através da aplicação de um algoritmo. Pode-se empregar duas metodologias distintas:

1. Utilizar métodos numéricos para a resolução de sistemas não lineares. Burden *et al* (2015), por exemplo, apresentam o método de Newton, o de Quasi-Newton, técnicas de declive máximo e os métodos de homotopia e continuação, para a resolução destes sistemas.
2. Combinar métodos numéricos para a solução de equações de uma variável;

Com relação a primeira metodologia cita-se Medeiros (2004). O Autor aplica o método de Newton-Raphson tridimensional, para a verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à FCO, por meio do programa computacional “nFOCCA”.

Quanto a segunda metodologia, apresenta-se o procedimento descrito por Araújo (2010). O algoritmo é válido para seções com dois eixos de simetria e armadura alocadas de forma simétrica a estes eixos, assim pode ser empregado para ambas as seções analisadas no presente trabalho. Esse possui a finalidade de encontrar a  $A_s$ ,  $x_0$  e  $\alpha$  que satisfazem as Equações (48), (49) e (50) (pág. 57), para uma dada seção, disposição de armadura e esforços solicitantes.

Araújo (2010) faz uso da simplificação do diagrama da parábola-retângulo, logo, conforme o item 2.4.1 (pág. 50)  $\sigma_{cd}$  é constante. Logo, considerando esse fato, e que, o Autor considera que as barras que compõem a armadura longitudinal sejam iguais, pode-se reescrever as Equações (48), (49) e (50), obtendo-se as Equações (54), (55) e (56), respectivamente.

$$N_{sd} = \sigma_{cd} \cdot A_{cc(s)} + \frac{A_s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{sid} \quad (54)$$

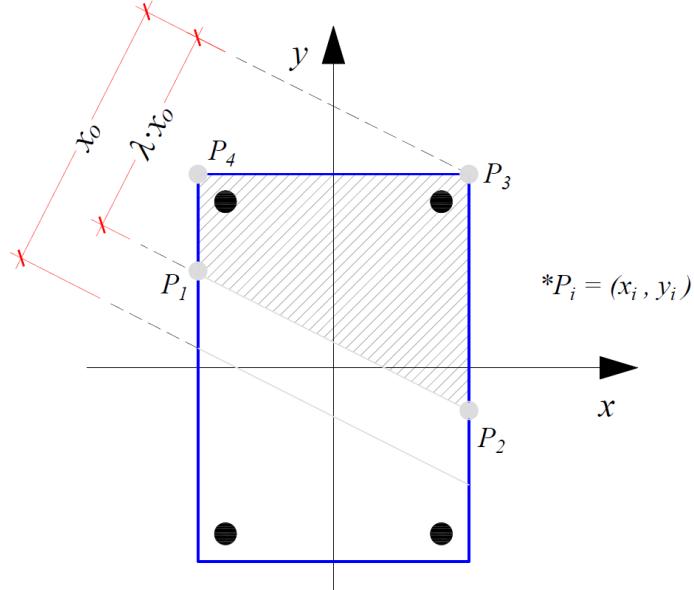
$$M_{sd,y} = \sigma_{cd} \cdot S_y + \frac{A_s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{sid} \cdot y_{si} \quad (55)$$

$$M_{sd,x} = \sigma_{cd} \cdot S_x + \frac{A_s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{sid} \cdot x_{si} \quad (56)$$

Onde:

$A_{cc(s)}$  é a área de concreto comprimida considerando a simplificação do diagrama, conforme indicado na Figura 30;

**Figura 30 – Área de concreto comprimida considerando a simplificação do diagrama parábola-retângulo**



**Fonte:** Adaptado de Araújo (2010).

$S_x$  é o momento estático de área ao longo do eixo x de  $A_{cc}$ ;

$S_y$  é o momento estático de área ao longo do eixo y de  $A_{cc}$ .

Como pode ser observado nas equações acima, devido a simplificação, o cálculo dos esforços resistentes do concreto tornam-se mais simples: basta calcular  $\sigma_{cd}$ , a qual o Autor considera igual a  $0,80 \cdot f_{cd}$ , e multiplicar pela área de concreto comprimida e pelos momentos estáticos para determinar a força e momentos resistentes, respectivamente. Para o cálculo de  $A_{cc}$ ,  $S_x$  e  $S_y$ , Araújo (2010) apresenta as Equações (57), (58) e (59), as quais, são obtidas por meio da aplicação do teorema de Green (Araújo, 2010).

Enfatiza-se que ao utilizar as Equações (57) a (59), deve-se seguir os vértices de  $A_{cc}$  no sentido anti-horário, repetindo o último ponto.

$$A_{cc} = \frac{1}{2} \cdot \sum \Delta y_i \cdot (2 \cdot x_i + \Delta x_i) \quad (57)$$

$$S_x = \frac{1}{6} \cdot \sum \Delta y_i \cdot (3 \cdot x_i \cdot x_{i+1} + \Delta x_i^2) \quad (58)$$

$$S_y = -\frac{1}{6} \cdot \sum \Delta x_i \cdot (3 \cdot y_i \cdot y_{i+1} + \Delta y_i^2) \quad (59)$$

Onde:

$x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas, com relação aos eixos x e y, dos vértices que formam a região do concreto comprimido.

Quanto a parcela de ER advindos do aço, o Algoritmo de Araújo (2010) segue os procedimentos explicitados no início do presente item, logo, aplica-se as Equações (47) (pág. 55) e (45) (pág. 52), para cálculo da deformação e tensão de cada barra, respectivamente, para assim obter a força e os momentos resultantes dessa parcela.

Destaca-se que o algoritmo é anterior a NBR 6118 (ABNT, 2014), de modo que não atende todos os seus critérios: como mencionado anteriormente, Araújo (2010) adota  $\sigma_{cd}$  igual a  $0,80 \cdot f_{cd}$ , contudo, este valor diverge da Equação (43) (pág. 51). Porém, mesmo o algoritmo apresentando divergências com a norma, pode-se adaptá-lo para satisfazer os critérios normativos atuais, além disso, ele possui a vantagem de poder ser facilmente implementado computacionalmente.

Portanto, ponderando os aspectos mencionados, empregou-se a metodologia de Araújo (2010) como base para realizar a verificação dos AE no “PFOC” para ambas as geometrias. Salienta-se que as alterações efetuadas no algoritmo podem ser verificadas no item 4.2.4.2 (pág. 110). O processo apresentado por Araújo (2010) consiste nos seguintes passos:

1. Adota-se um valor inicial para a área de aço ( $A_{so}$ ). Recomenda-se utilizar a área de aço obtida no dimensionamento à compressão centrada, dada pela Equação (60).

$$A_{so} = \frac{N_{sd} - 0,8 \cdot A \cdot f_{cd}}{\sigma_{sd2\%}} \quad (60)$$

Onde:

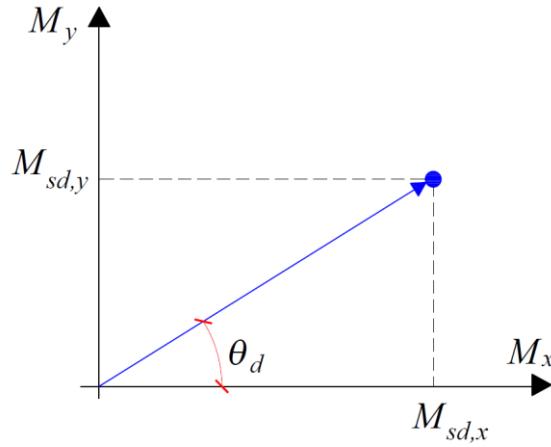
$\sigma_{sd2\%}$  é a tensão aço para uma deformação de 2%.

2. Escolhe-se um valor inicial de inclinação da linha neutra ( $\alpha_0$ ). Este valor pode ser adotado arbitrariamente no intervalo  $[-\pi/2, 0]$ , porém segundo o Autor é conveniente utilizar o valor dado pela Equação (61). Para isso primeiramente determina-se o valor da inclinação do vetor momento solicitante ( $\theta_d$ ), que como

descrito pela Figura 31, é definido pela Equação (62);

$$\alpha_o = \theta_d - \frac{\pi}{2} \quad (61)$$

**Figura 31 – Inclinação do vetor momento solicitante**



**Fonte:** Adaptado de Araújo (2010).

$$\theta_d = \cos^{-1} \left( \frac{M_{sd,x}}{\sqrt{M_{sd,x}^2 + M_{sd,y}^2}} \right) \quad (62)$$

3. Calcula-se  $x_0$ , por meio da Equação (54) (pág. 65). Para isso utiliza-se um método numérico para determinar qual é  $x_0$  para que  $N_{sd} = N_{rd}$ . Araújo (2010) sugere o uso do método da bissecção.
4. Determina-se os momentos resistentes (lado direito das Equações (55) e (56), pág. 65).
5. Obtém-se o valor da inclinação do vetor momento resistente ( $\theta_r$ ), por meio da Equação (63). Em sequência emprega-se a Equação (64), para estabelecer o próximo valor de inclinação da linha neutra ( $\alpha_{i+1}$ ).

$$\theta_r = \frac{M_{rd,x}}{\sqrt{M_{rd,x}^2 + M_{rd,y}^2}} \quad (63)$$

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} se \ \theta_r \geq \theta_d, & \left( \alpha_i + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left( \frac{\theta_d}{\theta_r} \right) - \frac{\pi}{2} \\ se \ \theta_r < \theta_d, & \left( \frac{\pi/2 - \theta_d}{\pi/2 - \theta_r} \right) \cdot \alpha_i \end{cases} \quad (64)$$

6. Aplica-se iterativamente os passos 3, 4 e 5, até que o módulo da diferença entre os ângulos  $\theta_d$  e  $\theta_r$  seja menor que a tolerância estipulada;
7. Encontrada o valor de  $\alpha$ , deve verificar a área de aço que iguale os momentos resistentes aos solicitantes. Para isso deve-se encontrar o intervalo  $[A_{so}, A_{s1}]$  que contenha a solução, repetindo os passos 3 e 4. Com o intervalo encontrado faz-se uso de um método numérico para encontrar a área de aço necessária, Araújo (2010) sugere o método da Bissecção.

## 2.6 MÉTODO DE BRENT

Na adaptação do algoritmo proposto por Araújo (2010) utilizou-se o método de Brent (1973) para determinação dos zeros das funções, por meio da função *Brentq*, presente no módulo de otimização da biblioteca *Scipy*.

Conforme o próprio Autor, o algoritmo baseia-se naquele desenvolvido por Wijngaarden e Dekker, na década de 1960, além disso, Brent (1973) afirma que seu procedimento garante a convergência, se no intervalo  $[a, b]$  for garantida a presença de raiz, ou seja  $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ .

De acordo com Press *et al* (1994), o método de Brent combina a procura da raiz com o método da bissecção, e interpolação quadrática inversa para que o algoritmo converja na raiz procurada.

A interpolação quadrática inversa emprega três pontos para ajustar uma função quadrática inversa, cujo valor em  $y=0$  é tomado como a próxima estimativa de raiz para  $x$  (PRESS *et al*, 1992). Para realizar a interpolação emprega-se a Equação (65), tomando  $y=0$ , logo, obtém-se a Equação (66), com os parâmetros detalhados nas Equações (67) a (69).

$$x = \frac{\frac{[y - f(a)] \cdot [y - f(b)] \cdot c}{[f(c) - f(a)] \cdot [f(c) - f(b)]} + \frac{[y - f(b)] \cdot [y - f(c)] \cdot a}{[f(a) - f(b)] \cdot [f(a) - f(c)]} + \dots}{\frac{[y - f(c)] \cdot [y - f(a)] \cdot b}{[f(b) - f(c)] \cdot [f(b) - f(a)]}} \quad (65)$$

$$x = b + \frac{P}{Q} \quad (66)$$

$$R = \frac{f(b)}{f(c)}, \quad S = \frac{f(b)}{f(a)}, \quad T = \frac{f(a)}{f(c)} \quad (67)$$

$$P = S [T \cdot (R - T) \cdot (c - b) - (1 - R) \cdot (b - a)] \quad (68)$$

$$Q = (T - 1) \cdot (R - 1) \cdot (S - 1) \quad (69)$$

Segundo Press *et al* (1992), o método quadrático funciona especialmente bem quando a função apresenta um comportamento “suave”, contudo, podem ocorrer falhas como estimativas ruins ou falha na máquina quando Q tende a zero. Para isso o Algoritmo de Brent executa um passo de bissecção, caso a correção P/Q não fique dentro dos limites, ou quando os limites não estão convergindo com rapidez suficiente. Assim, o método de Brent combina a segurança da bissecção com a velocidade de um método de ordem superior quando apropriado (PRESS *et al*, 1992).

O algoritmo original é apresentado por Brent (1973) em ALGOL 60, Já Press *et al* (1992) expõem o código adaptado para a linguagem de programação FORTRAN 77, o qual pode ser verificado no Anexo A.

### 3 ESFORÇOS RESISTENTES DO CONCRETO

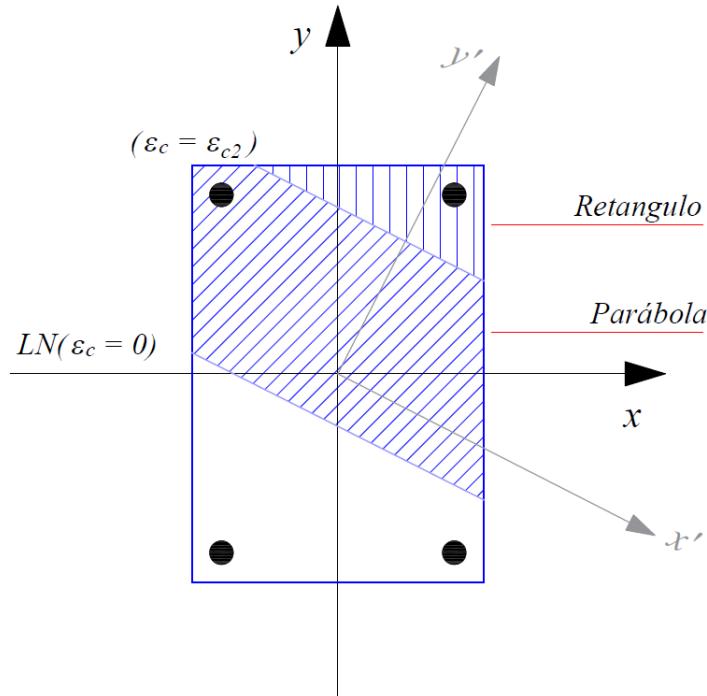
Conforme exposto no item 2.4.1 (pág. 50), a tensão do concreto à compressão é composta de duas partes distintas: a parcela parabólica ( $\sigma_{cd,p}$ ) e a retangular ( $\sigma_{cd,r}$ ), dadas pelas Equações (65) e (66), respectivamente.

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (70)$$

$$\sigma_{cd,r} = 0.85 \cdot f_{cd} \quad (71)$$

Na Figura 32 encontra-se exemplificada a divisão da  $A_{cc}$  nas áreas referentes à parcela parabólica ( $A_{cc,p}$ ) e a retangular ( $A_{cc,r}$ ), para um pilar com geometria retangular.

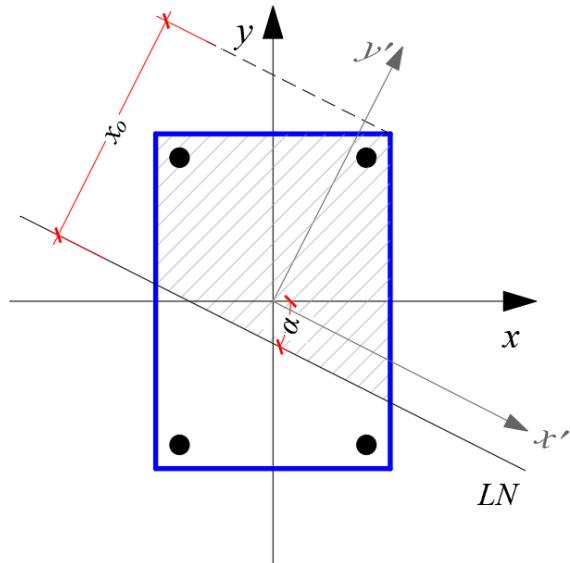
**Figura 32 – Tensões no concreto ( $\sigma_{cd,p}$  e  $\sigma_{cd,r}$ )**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

As Equações (70) e (71) relacionam a tensão com a deformação, contudo para efetuar o cálculo das tensões resultantes do concreto, para ambas as parcelas, torna-se necessário relacionar a tensão com o eixo de coordenadas *y'* (caso a linha neutra esteja inclinada), como destacado pela Figura 33. Para obter esta relação, utiliza-se a metodologia apresentada por Silva (2015).

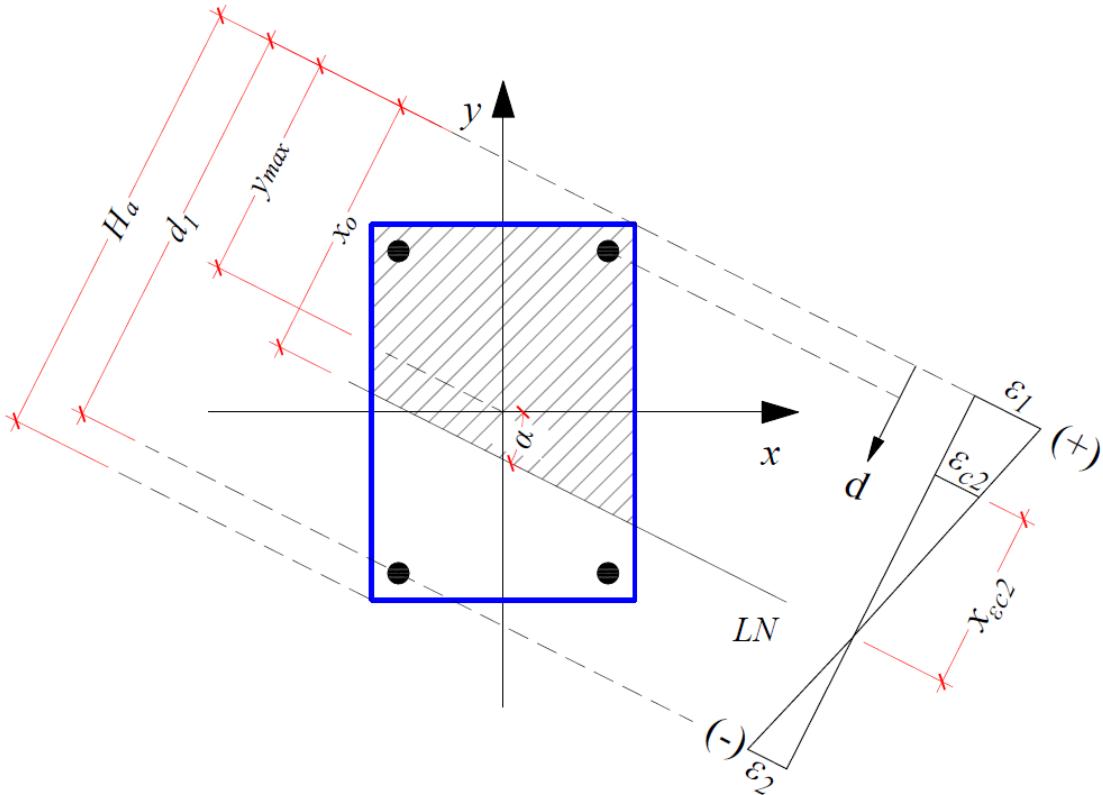
**Figura 33 – Sistemas de coordenadas para  $\alpha \neq 0$**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Dado  $x_0$  e  $\alpha$ , pode-se obter a deformação de qualquer fibra da seção, por meio da Equação (47) (pág. 55), exposta no item anterior. Desta forma, para o cálculo da deformação  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  basta calcular  $\varepsilon_{si}$  para  $d_i = 0$  e para  $d_i = d_1$ , respectivamente, como pode ser verificado na Figura 24.

**Figura 34 – Parâmetros empregados para o cálculo dos esforços resistentes**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Determinada as deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  encontra-se a altura, com relação a LN, onde a tensão é igual a  $\varepsilon_{c2}$  ( $x_{\varepsilon c2}$ ), pela Equação (72).

$$x_{\varepsilon c2} = \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right) \cdot \varepsilon_{c2} \quad (72)$$

Silva (2015) demonstra que com estes parâmetros, e utilizando semelhança de triângulos, obtém-se a Equação (73), a qual relaciona o eixo  $y'$  com a deformação. Assim, a relação entre a tensão e o eixo  $y'$  é dada pela Equação (74), desenvolvida por meio da substituição da Equação (73) na Equação (70) (pág. 71).

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} = \frac{y' - (y_{\max} - x_o)}{x_{\varepsilon c2}} \quad (73)$$

Onde:

$y_{\max}$  é a distância, com relação ao eixo  $y'$ , da fibra mais comprimida ao centro.

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y' - (y_{\max} - x_o)}{x_{\varepsilon c2}} \right)^n \right] \quad (74)$$

Com o objetivo de facilitar o processo de cálculo dos esforços resistentes do concreto realiza-se a manipulação da Equação (74), apresentada por Silva (2015), através do uso de constantes ( $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ ). Portanto, por meio do desenvolvimento descrito pelas Equações (75), a (77) encontra-se a Equação (78), a qual foi empregada para o cálculo da força e momentos (referentes ao eixo  $x'$  e  $y'$ ) advindos de  $\sigma_{cd,p}$ .

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( k_1 - \frac{y'}{x_{\varepsilon c2}} \right)^n \right], \quad k_1 = 1 + \frac{(y_{\max} - x_o)}{x_{\varepsilon c2}} \quad (75)$$

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( k_1 - \frac{y'}{x_{\varepsilon c2}} \right)^n \right] = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{k_1 \cdot x_{\varepsilon c2} - y'}{x_{\varepsilon c2}} \right)^n \right] \quad (76)$$

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{x_{\varepsilon c2}^n} \cdot (k_1 \cdot x_{\varepsilon c2} - y')^n \right] \quad (77)$$

$$\sigma_{cd,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right] \quad (78)$$

Onde  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são dados por:

$$k_1 = 1 + \frac{(y_{\max} - x_o)}{x_{ec2}}, \quad k_2 = k_1 \cdot x_{ec2}, \quad k_3 = \frac{1}{x_{ec2}^n} \quad (79)$$

### 3.1 PARCELA RETANGULAR

Na determinação dos esforços resistentes advindos de  $\sigma_{cd,r}$ , ou seja, do trecho onde  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_{c2}$ , tem-se a tensão constante, deste modo, de forma análoga ao descrito no item 2.5.2 (ver pág. 65), pode-se reescrever as integrais presentes nas Equações (48), (49) e (50) (pág. 65), encontrando-se as Equações (80), (81) e (82), respectivamente.

$$\iint_{Acc} \sigma_{cd} dy dx = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \iint_{Acc} dy dx = (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot A \quad (80)$$

$$\iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot x dy dx = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \iint_{Acc} x dy dx = (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot S_x \quad (81)$$

$$\iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot y dy dx = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \iint_{Acc} y dy dx = (0.85 \cdot f_{cd}) \cdot S_y \quad (82)$$

Logo, conforme as Equações acima, no trecho retangular a força e momentos resistentes são iguais a área e os momentos estáticos multiplicados por  $0.85 \cdot f_{cd}$ , respectivamente.

#### 3.1.1 Seção retangular

Para a seção retangular aplicou-se as Equações (83), (84) e (85), apresentadas por Santos (1994) para cálculo da área ( $A$ ) e momentos estáticos ao longo do eixo x ( $S_x$ ) e do eixo y ( $S_y$ ) de um polígono, respectivamente.

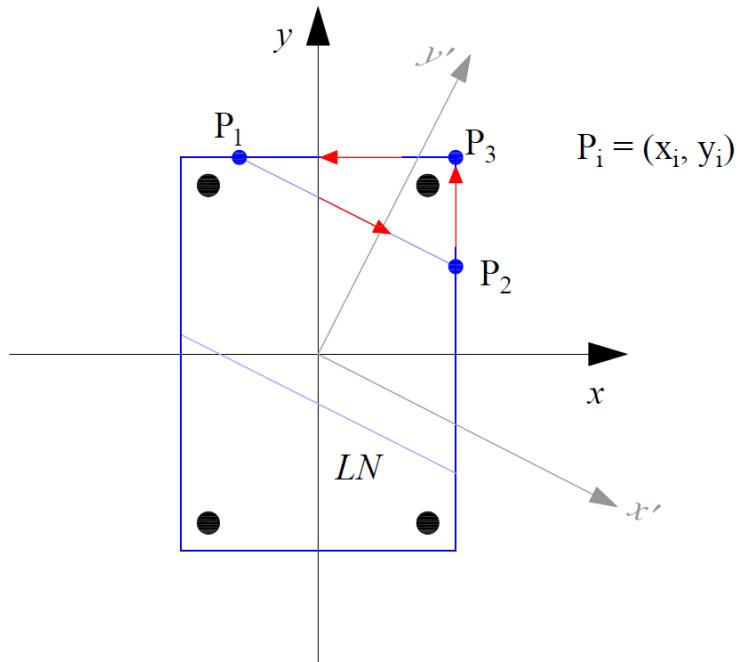
$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \quad (83)$$

$$S_x = \frac{1}{6} \cdot \sum [(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \cdot (y_i + y_{i+1})] \quad (84)$$

$$S_y = \frac{1}{6} \cdot \sum [(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \cdot (x_i + x_{i+1})] \quad (85)$$

Destaca-se que ao utilizar as Equações (83), (84) e (85) emprega-se o mesmo procedimento descritos para as Equações (57) a (59), portanto, deve-se percorrer os vértices do polígono no sentido anti-horário, repetindo o primeiro ponto, como indicado pela Figura 35. Além disso, salienta-se que  $S_x$  e  $S_y$  são dados com relação aos eixos x e y.

**Figura 35 - Cálculo dos esforços contribuintes da parcela retangular (seção retangular)**



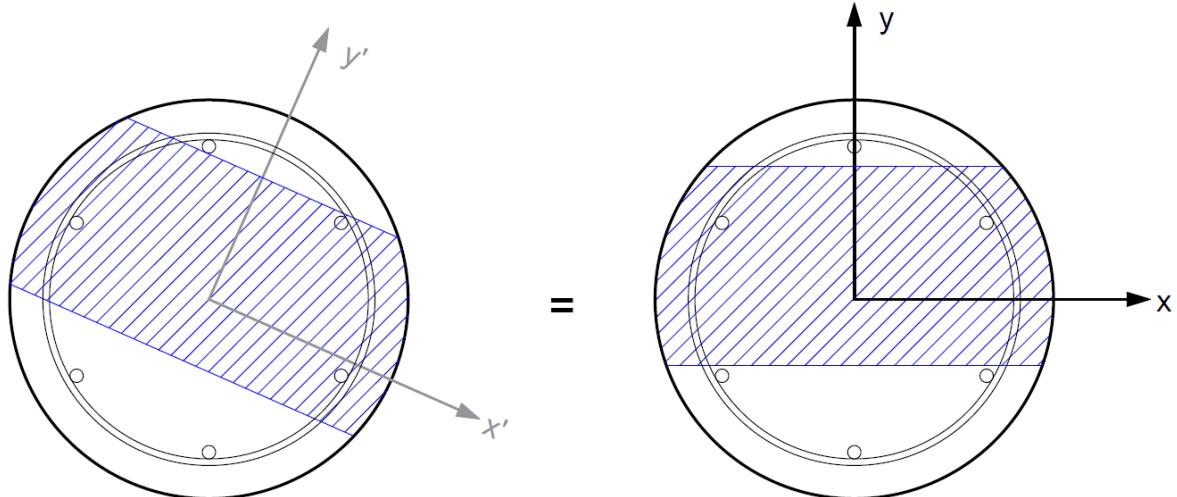
**Fonte:** Autoria própria (2019).

### 3.1.2 Seção circular

Pilares com geometria circular, diferente daqueles com seção retangular, possuem a facilidade de apresentarem a mesma  $A_{cc}$  para um dado  $x_0$ , independente do  $\alpha$  analisado, como descrito pela Figura 36, logo, o único parâmetro para estas seções que varia entre os eixos  $x'/y'$  e  $x/y$  é o  $d_1$  (ver Figura 24, pág. 55), sendo necessário calculá-lo quando  $\alpha \neq 0^\circ$ . Deste modo, como os demais parâmetros são iguais para ambos os eixos de coordenadas, pode-se calcular

os esforços resistentes com relação aos eixos  $x'/y'$ , para ambas as parcelas, considerando  $\alpha = 0^\circ$ , desde que  $d_1$  seja devidamente encontrado para o  $\alpha$  em questão, simplificando assim a obtenção dos esforços resistentes para esta seção.

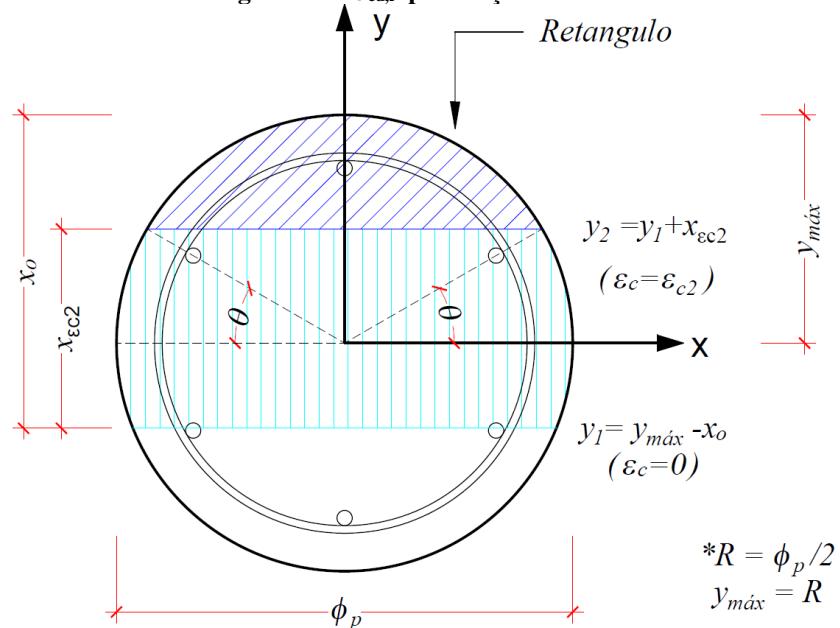
**Figura 36 – Características da seção circular**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Para a parcela retangular, devido as propriedades descritas acima, e a simetria radial apresentada pela seção circular, torna-se necessário calcular apenas  $A$  e  $S_{y'}$ , pois, conforme expresso na Figura 37, independentemente do local onde a reta  $y_2$  intercepta a seção, e de  $\alpha$ , devido a simetria tem-se  $S_{x'} = 0$ .

**Figura 37 –  $\sigma_{cd,r}$  para seção circular**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Deste modo, efetua-se o desenvolvimento das integrais expressas nas Equações (80) e (81) (pág. 74), resultando nas Equações (86) e (87), para cálculo da área e de  $S_y'$ , respectivamente. A dedução destas encontram-se detalhadas no Apêndice A.

$$A = R^2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(c_1) \right) - R \cdot (y_2) \cdot \cos(\arcsin(c_1)) \quad (86)$$

$$S_{y'} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos(\arcsin(c_1)) \cdot (R^2 - (y_2)^2) \quad (87)$$

Onde:

$R$  é o raio da seção, ou seja, é igual a  $\phi_p/2$ ;

$y_2$  é a reta, em relação ao eixo x, onde  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$  (ver Figura 37, pág. 76);

$c_1$  é igual ao seno do ângulo formado entre o eixo x e  $y_2$ , dado pela Equação (88).

$$c_1 = \frac{y_2}{R} = \frac{y_{\max} - x_o + x_{ec2}}{R} = 1 - \frac{x_o - x_{ec2}}{R} \quad (88)$$

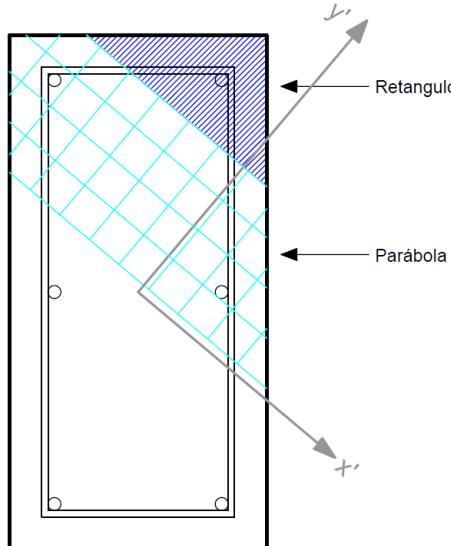
### 3.2 PARCELA PARABÓLICA

Devido à não-linearidade das tensões não se pode empregar as equações detalhadas acima para o cálculo dos esforços resistente da parcela parabólica ( $\sigma_{cd,p}$ ), sendo necessário o desenvolvimento das integrais para ambas as seções. Santos (1994) descreve três processos para resolver esse problema:

1. Processo das malhas;
2. Processo de integração por trapézios;
3. Processo da poligonal;

Conforme Santos (1994), na primeira metodologia realiza-se a discretização da seção em um grande número de malhas, de forma que se possa considerar a tensão constante em cada malha, variando apenas entre estas, como destacado pela Figura 38.

**Figura 38 – Exemplo de discretização utilizando o processo das malhas**



Fonte: Autoria própria (2019).

O processo das malhas possui grande aceitação (Santos, 1994), todavia, segundo Santos (1994), esse processo exige um grande número de malhas para exibir precisão adequada, o que pode tornar onerosa a aplicação desta metodologia.

A segunda metodologia é empregada por Santos (1994). De acordo com Smaniotto (2005), o processo de integração por trapézios é baseado na aplicação de uma integral de linha ao longo do contorno da seção. Destaca-se que o contorno deve ser composto por uma poligonal (SANTOS 1994; SMANIOTTO, 2005).

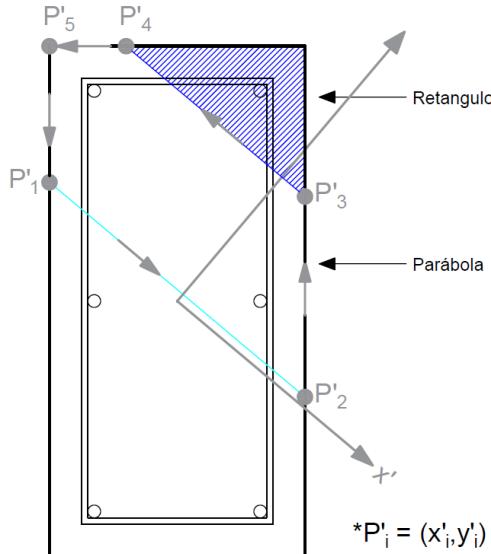
Santos (1994) realizou mais de mil testes numéricos para diversas seções poligonais (retangulares, trapezoidal, hexagonal, dentre outras), constatando que há limitações para esta metodologia quando é utilizada a integração analítica: há precisão nos resultados até  $N_d$  igual a  $0.8 \cdot N_{d,\text{máx}}$ , valores onde a normal é superior a 80% de  $N_{d,\text{máx}}$  proporcionam resultados inconsistentes.

Para elucidar este problema o Autor emprega a integração numérica, obtendo precisões melhores em comparação com a solução por via analítica (resultados válidos para até  $N_d$  igual a  $0.99 \cdot N_{d,\text{máx}}$ ), entretanto, o tempo de processamento utilizando a integração numérica é cerca de 4 vezes maior em comparação com a integração analítica (SANTOS, 1994).

Já o processo da poligonal utiliza o teorema de Green, dado pela Equação (89), para transformar as integrais (duplas) dos esforços resistentes em integrais de linha, as quais devem ser empregadas ao longo de todo o contorno da seção, em sentido anti-horário, como expresso na Figura 39.

$$\oint_c P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA \quad (89)$$

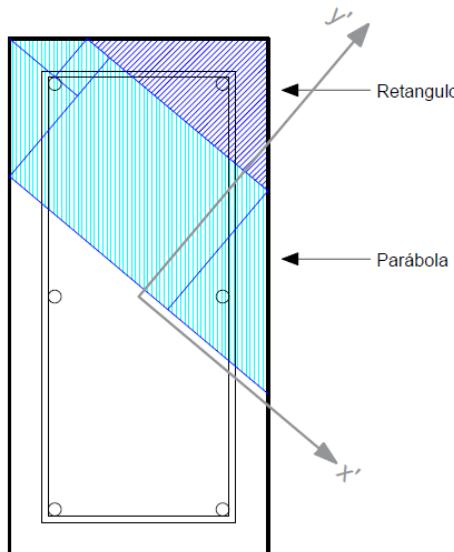
**Figura 39 – Aplicação do Teorema de Green**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Além das metodologias apresentadas, pode-se incluir uma quarta metodologia: o desenvolvimento das integrais presentes nas Equações (48) a (50). Esse procedimento consiste em dividir a área da parcela parabólica em várias áreas distintas, onde seja viável aplicar as integrais com relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ , como exemplificado pela Figura 40.

**Figura 40 – Exemplo de divisão de áreas para aplicação das integrais**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Definida as áreas de integração, utiliza-se métodos numéricos para obter o resultado

das integrais ou aplica-se equações, encontradas previamente, que advém da solução analítica das integrais. Essa é a metodologia utilizada por Silva (2015) para cálculo dos esforços resistentes do concreto de uma seção composta por um polígono qualquer.

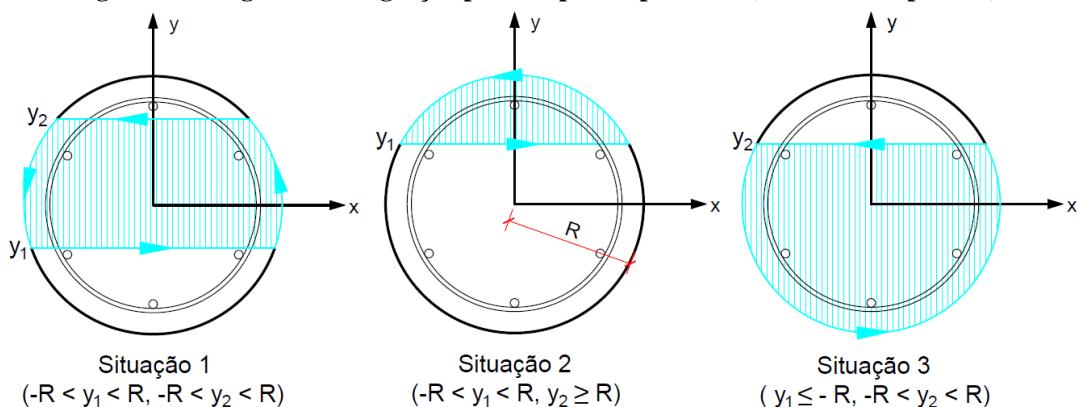
Para ambas as seções, retangulares e circulares, escolheu-se a terceira metodologia para cálculo dos esforços resistentes do concreto advindos de  $\sigma_{cd,p}$ . Optou-se pela aplicação do teorema de Green devido a esse configurar-se como solução analítica dos esforços resistentes, não ocorrendo os problemas de precisão descritos no processo das malhas.

Com relação ao processo de integração por trapézios, esse é válido somente em seções poligonais, assim, não se pode empregá-lo em seções circulares. Além disso, conforme mencionado, essa metodologia apresenta limitações para forças normais elevadas.

A quarta metodologia, assim como no processo da poligonal, também expõe a solução analítica dos esforços resistentes, contudo, possui o empecilho adicional de ser necessário efetuar a divisão das áreas para que o cálculo dos esforços possa ser realizado. Em seções retangulares, essa divisão varia conforme o  $x_0$  e o  $\alpha$  (ver Figura 40, pág. 79), deste modo, a implementação computacional da solução adotada apresenta maior praticidade, em comparação com essa metodologia.

Para seções circulares, a princípio, a utilização da quarta metodologia parece promissora, visto que, conforme a Figura 41, podem ocorrer três regiões distintas de integração para  $\sigma_{cd,p}$ , se fossem empregadas coordenadas polares para efetuar a integração.

**Figura 41 – Regiões de integração possível para a parábola (coordenadas polares)**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Contudo, não é possível aplicá-las, pois, como exposto na Equação (90), ao realizar a mudança de coordenadas e calcular a primeira integral, obtém-se uma função não contínua no intervalo  $[0, 2\pi]$ , assim sendo, não é possível calcular os esforços resultantes com estas coordenadas de forma analítica, ou numérica. Logo, seria necessário utilizar coordenadas

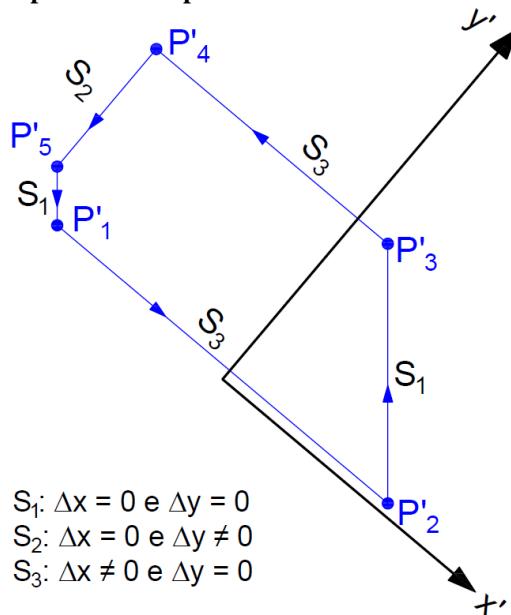
cartesianas, o que, aumentaria as regiões de integração possíveis, ocasionando o mesmo problema relatado para as seções retangulares. Portanto, justifica-se o descarte da quarta metodologia apresentada para cálculo dos esforços resistentes nas seções circulares.

$$\begin{aligned}
 F_{r,p} = & 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^n \right] dr d\theta = \\
 & 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{k_3}{n+1} \cdot \frac{(k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1}}{\sin(\theta)} \right]_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} d\theta
 \end{aligned} \tag{90}$$

### 3.2.1 Seção retangular

Ao aplicar o teorema de Green, em seções retangulares, para cálculo dos esforços resistentes advindos da parcela parabólica, podem ocorrer três situações distintas, conforme a Figura 42. Deste modo, há cerca de três equações diversas para cada tipo de esforço, totalizando cerca de nove equações para esta geometria. Isto ocorre, pois, dependendo do caso, a parametrização empregada na integração é alterada.

**Figura 42 – Situações possíveis ao aplicar o teorema de Green em seções retangulares**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

As nove equações obtidas para cálculo dos esforços resistentes podem ser verificadas no Quadro 11. Destaca-se que a demonstração destas, com a dedução das funções  $P(x', y')$  e  $Q(x', y')$ , parametrizações e desenvolvimento das integrais, podem ser vistas no Apêndice B.

Quadro 11 - Equações utilizadas para determinação dos esforços resistentes do concreto em seções retangulares

(continua)

Esforço resultante	Situação	Função	Intervalo
$F_{r,p}$	<sup>1</sup> $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$F_{r,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t \right) - \frac{k_3}{a \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \cdot (k_2 - a \cdot t - b)^{n+2} \right]$	$x_i \leq t \leq x_{i+1}$
	<sup>2</sup> $(\Delta x' = 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$F_{r,p}(t) = 0$	
	<sup>3</sup> $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' = 0)$	$F_{r,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ (c) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right]$	
$M_{ry,p}$	<sup>1</sup> $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$M_{ry,p}(v) = -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{a} \left[ \frac{1}{6} \cdot v^3 - \frac{k_3}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \cdot (k_2 - v)^{n+2} \cdot (v \cdot (n+1) + 2 \cdot k_2) \right]$	$y_i \leq v \leq y_{i+1}$
	<sup>2</sup> $(\Delta x' = 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$M_{ry,p}(t) = 0$	$x_i \leq t \leq x_{i+1}$
	<sup>3</sup> $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' = 0)$	$M_{ry,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1} \cdot (n \cdot c + k_2 + c)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right]$	

Fonte: Autoria própria (2019).

Quadro 11 – Equações utilizadas para determinação dos esforços resistentes do concreto em seções retangulares

(conclusão)

Esforço resultante	Situação	Função	Intervalo
$M_{rx,p}$	1 $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$M_{rx,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot a \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot t^2 \right) - \frac{k_3}{a^2 \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 5 \cdot n + 6)} \cdot (-a \cdot t - b + k_2)^{n+2} \dots \right]$ $\left( a \cdot t \cdot (n+2) - b + k_2 \right)$	$x_i \leq t \leq x_{i+1}$
	2 $(\Delta x' = 0 \text{ e } \Delta y' \neq 0)$	$M_{rx,p}(t) = 0$	
	3 $(\Delta x' \neq 0 \text{ e } \Delta y' = 0)$	$M_{rx,p}(t) = -0.425 \cdot f_{cd} \cdot t^2 \cdot \left[ c + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right]$	

Fonte: Autoria própria (2019).

Onde as constantes a, b e c são dadas pela Equação (91).

$$a = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{x'_{i+1} - x'_i}, \quad b = -a \cdot x'_i + y'_i, \quad c = y_i \quad (91)$$

O procedimento ao aplicar as equações do quadro acima é análogo ao da parcela retangular: deve-se percorrer a poligonal no sentido anti-horário, aplicando as Equações presentes no Quadro 11, conforme a situação em que a reta se encontra, repetindo o último ponto.

Salienta-se que, diferentemente das Equações (83) a (85), ao calcular os ER da parcela parabólica obtém-se estes com relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ , logo, deve-se rotacionar os momentos encontrados, para assim efetuar a soma com os momentos resistentes da parcela retangular e obter os momentos resistentes totais originados pelo concreto ( $M_{rx,c}$  e  $M_{ry,c}$ ), conforme expresso nas Equações (92). Enquanto que para determinar a força resistente total ( $F_{r,c}$ ), basta somar os valores encontrados para ambas as parcelas, como explicitado pela Equação (94).

$$M_{rx,c} = [M_{rx',p} \cdot \cos(|\alpha|) + M_{ry',p} \cdot \sin(|\alpha|)] + M_{rx,r} \quad (92)$$

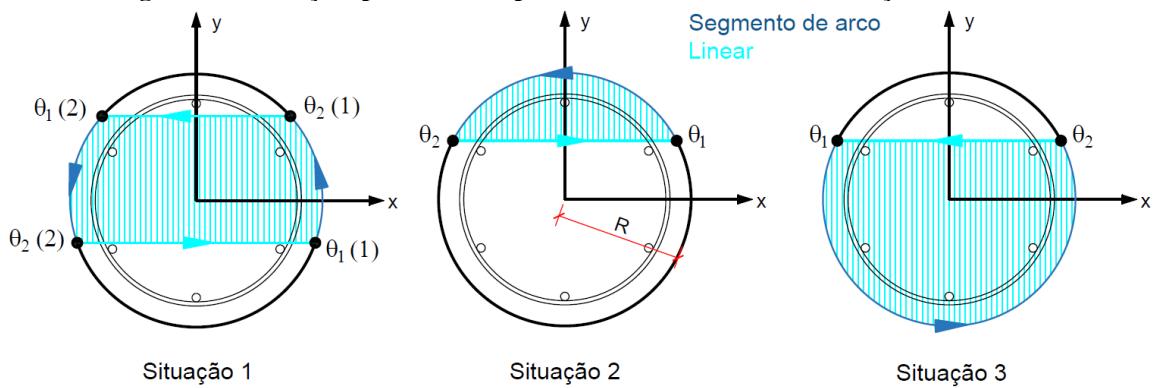
$$M_{ry,c} = [-M_{rx',p} \cdot \sin(|\alpha|) + M_{ry',p} \cdot \cos(|\alpha|)] + M_{ry,r} \quad (93)$$

$$F_{r,c} = F_{r,r} + F_{r,p} \quad (94)$$

### 3.2.2 Seção circular

Para seções com geometria circular, conforme descrito pela Figura 43, podem ocorrer dois trechos distintos ao aplicar o teorema de Green independente das três situações que a região se encontra: o linear e o segmento de arco.

**Figura 43 - Situações possíveis ao aplicar o teorema de Green em seções circulares**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Como em seções circulares pode-se efetuar o cálculo dos esforços resistentes, de ambas as parcelas, considerando  $\alpha = 0^\circ$ , desde que o fator  $d_1$  esteja devidamente calculado, para determinar o valor da integral de linha do trecho linear para  $F_{r,p}$  e  $M_{ry',p}$  basta aplicar as Equações presentes no Quadro 11 referentes a situação 3. Evidencia-se que, de forma análoga a parcela retangular, tem-se  $M_{rx',p}$  nulo.

Quanto ao segmento de arco torna-se necessário efetuar o desenvolvimento das integrais para cálculo de  $F_{r,p}$  e de  $M_{ry',p}$ . Dessemelhante as equações descritas até aqui, para estes trechos não há uma solução analítica para concretos do grupo II, sendo necessário o uso de integração numérica. A fim de utilizar as mesmas Equações, escolheu-se utilizar a integração numérica para ambos os grupos

Os Quadros 12 e 13 apresentam as Equações e os intervalos, respectivamente, para cálculo dos ER para cada uma das três situações possíveis. As demonstrações destas podem ser conferidas no Apêndice A.

**Quadro 12 - Equações utilizadas para determinação dos esforços resistentes do concreto em seções circulares**

Esforço resultante	Trecho	Função
$F_{r,p}$	Linear	$F_{r,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ (c) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right]$
	Segmento de arco	$F_{r,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ r^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{4} \cdot [\sin(2 \cdot \theta_1) - \sin(2 \cdot \theta_2)] \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \dots \right. \\ \left. \left( \frac{k_3 \cdot r}{n+1} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} d\theta \right\}$
$M_{ry,p}$	Linear	$M_{ry,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1} \cdot (n \cdot c + k_2 + c)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right]$
	Segmento de arco	$M_{ry,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \frac{r^3}{2} \cdot \left[ \frac{3}{4} \cdot [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] + \frac{1}{12} \cdot [\cos(3\theta_2) - \cos(3\theta_1)] \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \dots \\ 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{k_3 \cdot r}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta$

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Quadro 13 - Intervalos de aplicação das Equações para seções circulares**

Trecho	Situação	Intervalo ( $t, \theta_1$ e $\theta_2$ )
Linear	1	$-\sqrt{R^2 - y_1^2} \leq t \leq \sqrt{R^2 - y_1^2}$ (Reta $y_1$ ) $-\sqrt{R^2 - y_2^2} \leq t \leq \sqrt{R^2 - y_2^2}$ (Reta $y_2$ )
	2	$-\sqrt{R^2 - y_1^2} \leq t \leq \sqrt{R^2 - y_1^2}$
	3	$-\sqrt{R^2 - y_2^2} \leq t \leq \sqrt{R^2 - y_2^2}$
Segmento de arco	1	$\arcsin\left(\frac{y_1}{R}\right) \leq \theta \leq \arcsin\left(\frac{y_2}{R}\right)$ ( $y_1$ para $y_2$ ) $\pi - \arcsin\left(\frac{y_2}{R}\right) \leq \theta \leq \pi - \arcsin\left(\frac{y_1}{R}\right)$ ( $y_2$ para $y_1$ )
	2	$\pi - \arcsin\left(\frac{y_1}{R}\right) \leq \theta \leq \arcsin\left(\frac{y_1}{R}\right)$
	3	$\arcsin\left(\frac{y_2}{R}\right) \leq \theta \leq -\left(\pi + \arcsin\left(\frac{y_1}{R}\right)\right)$

**Fonte:** Autoria própria (2019).

De forma distinta da geometria retangular, na seção circular ambas as parcelas são calculadas em relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ , assim realiza-se primeiramente a soma dos momentos e depois efetua-se sua rotação, como expresso nas Equações (95) e (96). O cálculo de  $F_{r,c}$  é análogo ao da seção retangular, logo, utiliza-se a Equação (94) (pág. 84).

$$M_{rx,c} = (M_{rx',p} + M_{rx',r}) \cdot \cos(|\alpha|) + (M_{ry',p} + M_{ry',r}) \cdot \sin(|\alpha|) \quad (95)$$

$$M_{ry,c} = -(M_{rx',p} + M_{rx',r}) \cdot \sin(|\alpha|) + (M_{ry',p} + M_{ry',r}) \cdot \cos(|\alpha|) \quad (96)$$

## 4 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentam-se os materiais e os métodos empregados no desenvolvimento do algoritmo “PFOC” para a verificação e análise da solução econômica de seções retangulares e circulares submetidas à FCO. Portanto, o texto adiante tem o objetivo de esclarecer todos os procedimentos que foram necessários para a elaboração do software proposto.

### 4.1 MATERIAIS

A linguagem utilizada na elaboração do “PFOC” foi o *Python 3.7*, com auxílio da IDE *Pycharm*. Escolheu-se essa linguagem de programação devido aos seguintes critérios:

- Ter suporte à programação orientada a objeto, o que segundo Silva (2015), facilita o entendimento e futura adaptação do código;
- Ser linguagem multiplataforma, assim o “PFOC” pode ser executado em Windows, Mac e Linux.
- Apresentar uma sintaxe de fácil compreensão e utilização;
- É recomendada para aplicações de engenharia, como explicitado por Fangohr (2004) e por Oliphant (2007).

O “PFOC” é *open-source*, seu código fonte encontra-se disponibilizado na página de internet <https://github.com/DanielDgrossmann/PFOC>.

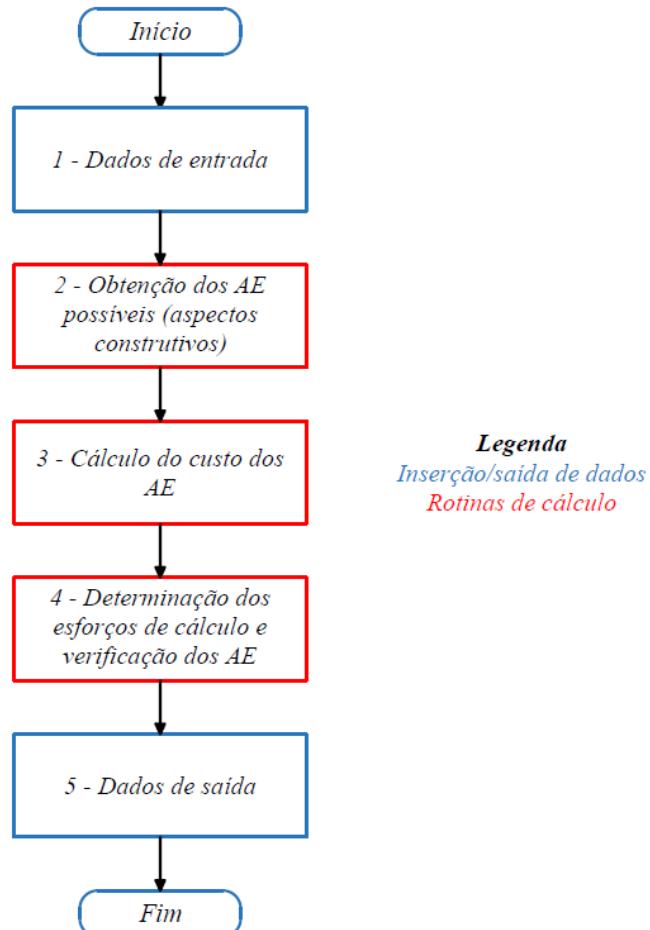
### 4.2 MÉTODOS

Dado a geometria, critérios de projeto, e os parâmetros de otimização definidos pelo usuário - além da disposição da armadura, pode-se escolher os demais parâmetros que irão compor a análise da solução mais econômica, ou seja, pode-se adotar se será otimizado, ou se será fixado, a seção transversal e o  $f_{ck}$  - o “PFOC” delimita os AE possíveis, ou seja, aqueles que satisfazem as recomendações construtivas da NBR 6118 (ABNT, 2014), e em sequência obtém qual destes apresenta maior vantagem econômica, do ponto de vista do custo dos materiais. Salienta-se que para dado AE seja considerado a solução mais econômica, esse deve

satisfazer a verificação do ELU à FCO para todas as situações de cálculo analisadas.

O software computacional é composto por cinco etapas principais, como pode ser observado na Figura 44. Onde são empregadas três sub-rotinas de cálculo independentes, destacadas em vermelho na Figura 44.

**Figura 44 – Fluxograma das etapas principais do “PFOC”**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

#### 4.2.1 Etapa 1 – Dados de entrada

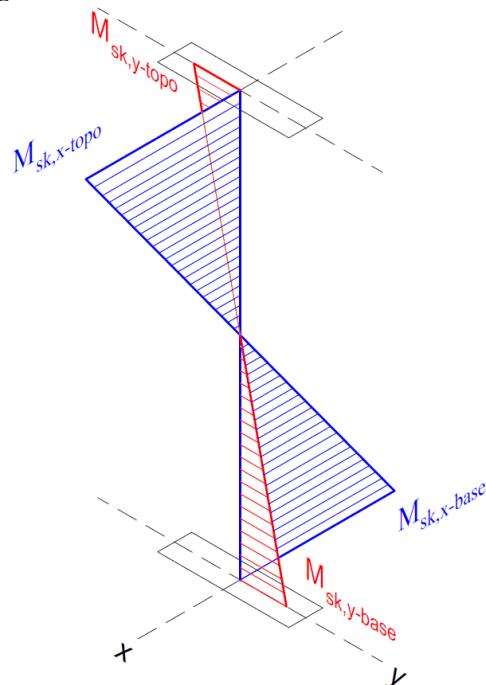
Na primeira etapa define-se os critérios necessários para a verificação e otimização dos pilares submetidos à FCO, sendo estes: geometria da seção transversal, esforços de projeto, critérios de projeto, parâmetros que serão otimizados e os custos de materiais.

Primeiramente define-se a geometria que será considerada para efetuar a verificação da solução com maior vantagem econômica. Pode-se optar pela geometria circular ou retangular.

Em sequência, estipula-se os esforços atuantes de projeto, ou seja o esforço normal

solicitante característico ( $N_{sk}$ ), e os momentos solicitantes característicos atuantes no topo e na base, como explicitado na Figura 45. Conforme mencionado anteriormente, não foram considerados no presente trabalho a análise de esforços transversais, como torção ou cisalhamento.

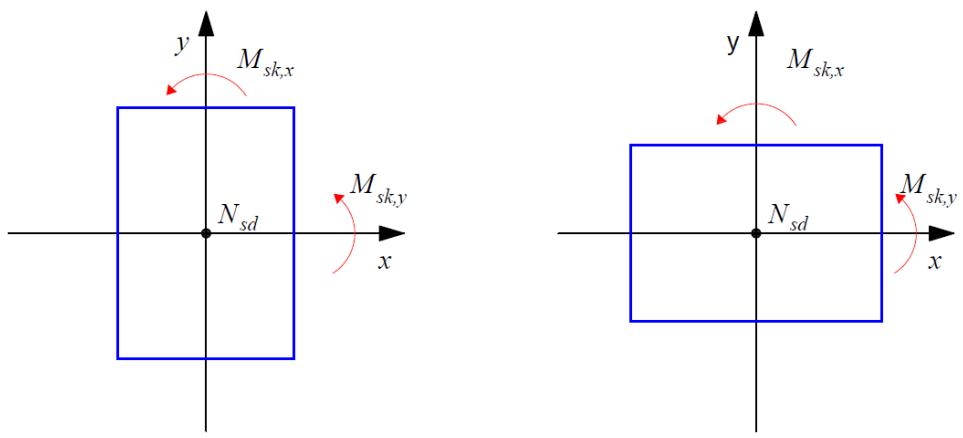
**Figura 45 – Momentos característicos atuantes**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Salienta-se que a inserção dos esforços para pilares retangulares deve seguir a disposição da menor dimensão na direção x e a maior na direção y, como detalhado pela Figura 46.

**Figura 46 – Inserção correta e incorreta dos esforços em pilares retangulares**

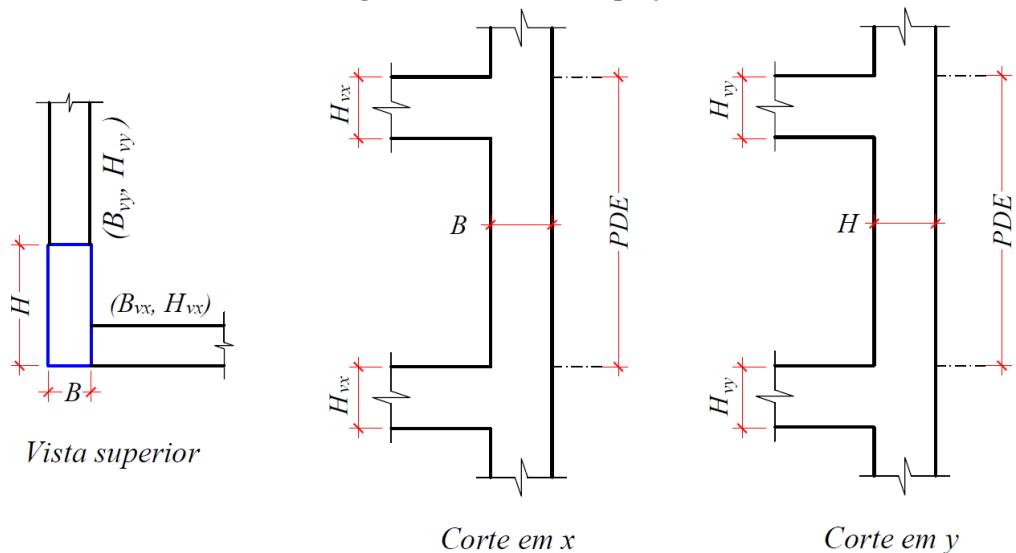


**Fonte:** Autoria própria (2019).

Além dos esforços, outras critérios de projeto devem ser estipulados: pé direito estrutural (PDE); a altura das vigas (ou caso não exista, das lajes) na direção x e y; classe de agressividade ambiental (CAA) e o  $\Delta C$  (ver item 2.2.2, pág. 28).

A Figura 47 apresenta os parâmetros referentes a geometria dos elementos estruturais, sendo esses necessários para o cálculo das propriedades dos pilares, além de delimitarem os arranjos estruturais possíveis. Demais fatores relacionam-se com a qualidade do concreto, indicando valores mínimos de  $f_{ck}$  e cobrimento.

**Figura 47 – Critérios de projeto**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

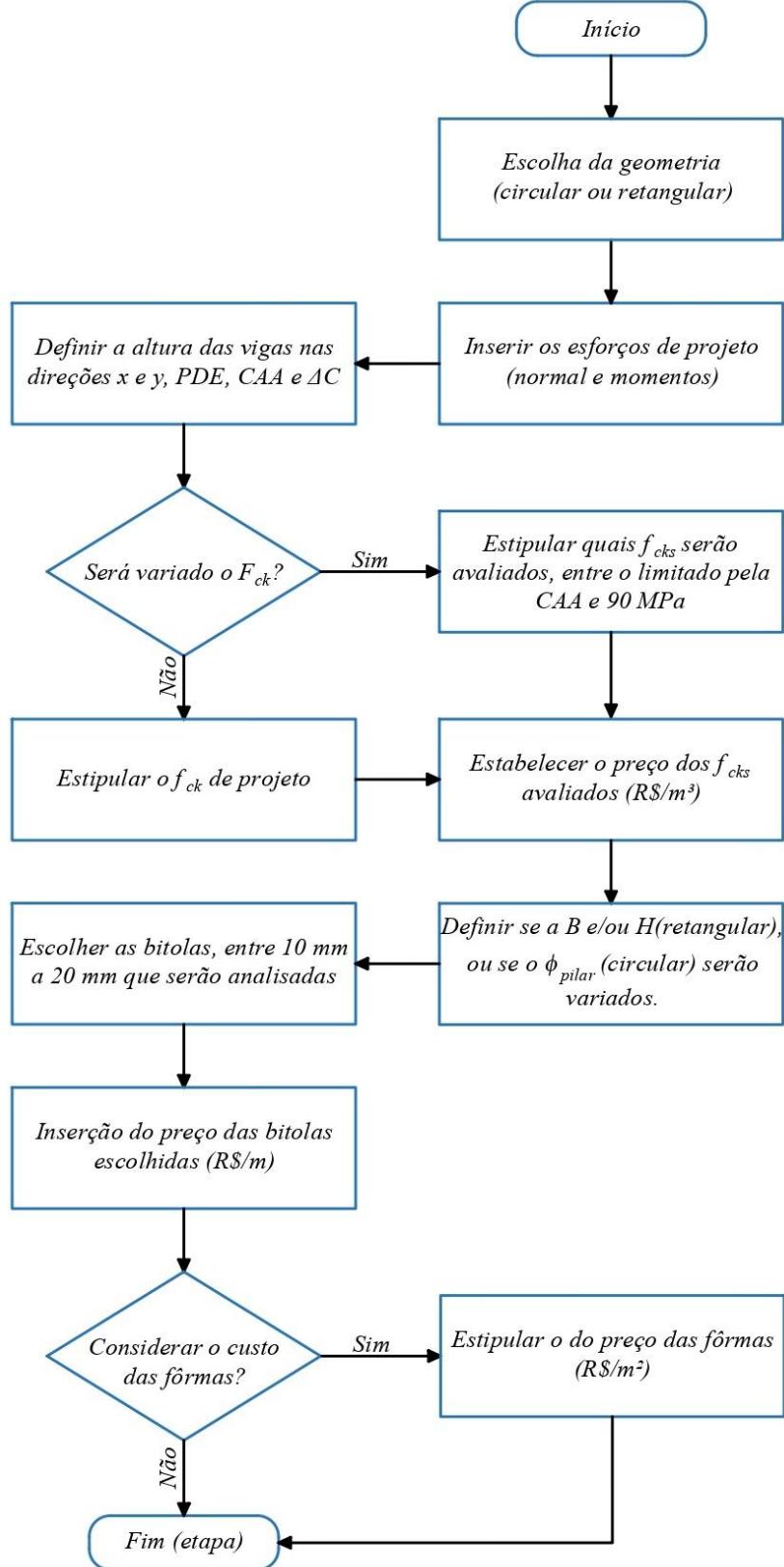
A possibilidade de escolha das variáveis que compõem a otimização é válida, pois como justificado por Clímaco (2016) e Soares (1997), podem ocorrer restrições, ocasionadas pelo projeto arquitetônico, que tornam necessário definir a seção transversal. O  $f_{ck}$  também pode ser limitado, pois usualmente adota-se o mesmo para todos os elementos estruturais. Em casos como esses, onde há imposições de parâmetros, fixam-se os necessários, e utilizam-se otimização aqueles possíveis, além da disposição da armadura.

Demarcado os parâmetros fixos, escolhe-se as faixas dos materiais que serão empregados na otimização e o custo destas. Os preços dos materiais podem ser inseridos pelo usuário. O software permite a utilização de concretos do grupo II, ou seja, podem ser considerados concretos com  $f_{ck}$  de até 90 Mpa. Em relação ao aço pode-se optar para a armadura longitudinal as bitolas descritas pela NBR 7480 “Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado”, entre 10 mm a 20 mm, o estribo e ganchos necessários são determinados automaticamente pelo software. O custo das fôrmas é opcional, ficando a critério do usuário.

Na Figura 48 encontra-se detalhado o fluxograma desta etapa, resumindo as

informações detalhadas acima.

**Figura 48 – Fluxograma da etapa 1 (dados de entrada)**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

#### 4.2.2 Etapa 2 – Obtenção dos AE possíveis

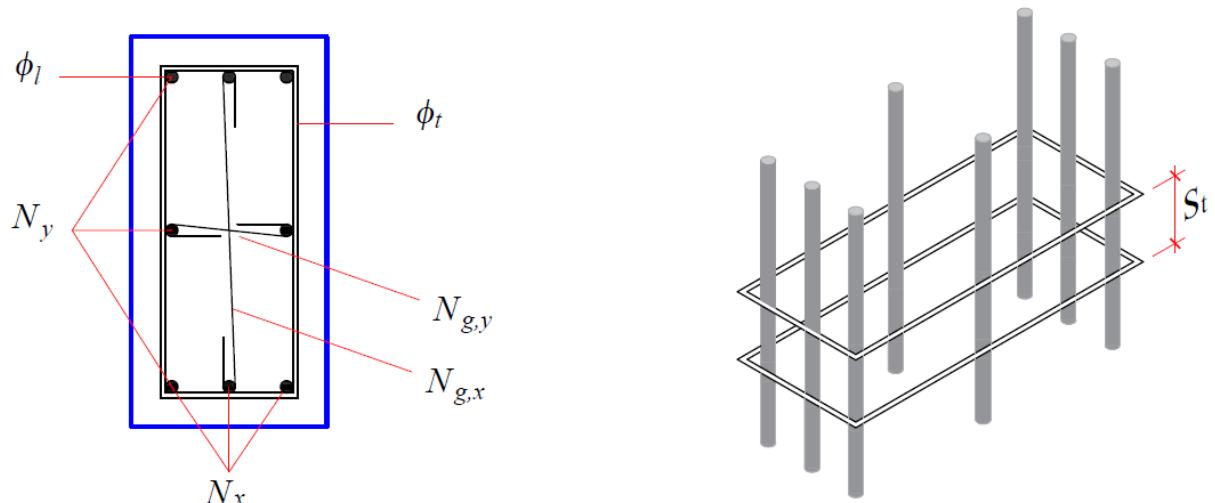
Na etapa 2 determina-se os AE que satisfazem os aspectos construtivos e limitações recomendadas pela NBR 6118 (ABNT, 2014) descritos no item 2.3 (pág. 39). Assim, salienta-se que nesta etapa não se verifica o ELU, a conferência deste ocorre na Etapa 4 (ver item 4.2.4, pág. 104).

Para pilares com geometria retangular a seção transversal é composta por outros dois parâmetros, a base ( $B$ ) e a altura ( $H$ ), considera-se a configuração apresentada pelas Figura 46 (pág. 90), assim  $B \leq H$ . já pilares circulares a seção transversal depende apenas de um fator, o diâmetro ( $\phi_p$ ).

O  $f_{ck}$  não interfere nos demais parâmetros do AE, isto é, indiferente do valor adotado para esse, as possibilidades de seção transversal e disposição de armadura são as mesmas.

A disposição da armadura apresenta diferentes especificações conforme a geometria utilizada. As Figuras 49 e 50 detalham os pormenores dos diferentes parâmetros que compõem os AE em cada geometria. Além da geometria a seção transversal impacta diretamente nos valores dos diferentes fatores que compõem a disposição da armadura.

**Figura 49 – Parâmetros que compõem a disposição da armadura em seções retangulares**



*Nº de barras em x/y ( $N_x$  e  $N_y$ );*

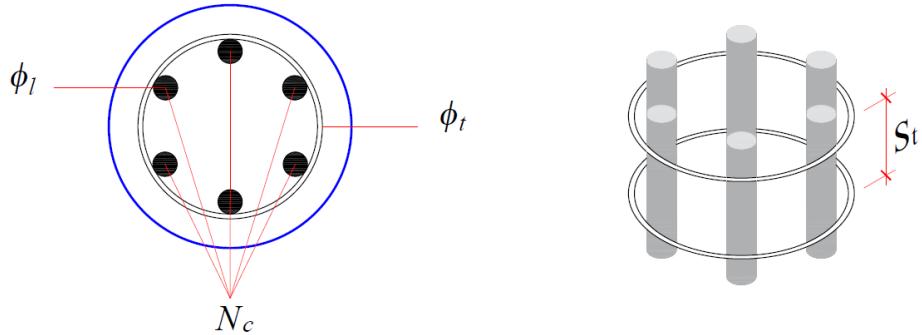
*Nº de ganchos ao longo de x/y ( $N_{g,x}$  e  $N_{g,y}$ );*

*Diâmetro da armadura longitudinal e transversal ( $\phi_l$  e  $\phi_t$ );*

*Espaçamento dos estribos ( $S_t$ ).*

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Figura 50 - Parâmetros que compõem a disposição da armadura em seções circulares**



*Nº total de barras ( $N_c$ );*

*Diâmetro da armadura longitudinal e transversal ( $\phi_l$  e  $\phi_t$ )*

*Espaçamento dos estribos ( $S_t$ )*

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Destaca-se que, antes de delimitar os AE possíveis, determina-se o  $C_{nom}$  a ser empregado. Para isso utiliza-se dos procedimentos descritos no item 2.2.2 (pág. 28). Obtido o cobrimento, encontra-se os AE através da seguinte ordem de análise dos parâmetros:

- Seção transversal;
- Disposição da armadura;
- $f_{ck}$ .

#### 4.2.2.1 Seção transversal

A seção transversal de um pilar deve respeitar as dimensões mínimas recomendadas pela NBR 6118 (ABNT, 2014), explicitadas no item 2.3.4 (pág. 44) do presente trabalho. Logo, a menor dimensão que pode ser empregada em pilares é de 14 cm, além disso o pilar deve garantir uma área de seção transversal igual ou superior a  $360 \text{ cm}^2$ .

Pilares circulares apresentam apenas um parâmetro de seção transversal, o  $\phi_p$ , assim a dimensão mínima para o diâmetro do pilar é de 22 cm, pois com diâmetros menores não é satisfeita a área mínima de seção transversal. Quanto a dimensão máxima adota-se o valor de 50 cm. O Quadro 14 discrimina os  $\phi_p$  considerados inicialmente, caso esse não seja fixado.

**Quadro 14 –  $\phi_p$  considerados inicialmente**

$\phi_p$ (cm)												
22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	45	50

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Como em pilares retangulares a seção transversal é composta de duas variáveis ( $B$  e  $H$ ) pode-se utilizar a dimensão mínima recomendada. Com relação ao maior valor para base, adota-se 40 cm, para que assim o pilar não apresente interferências excessivas na arquitetura do edifício. O Quadro 15 apresenta as bases consideradas na otimização, caso esse parâmetro não seja estipulado.

**Quadro 15 – Dimensões de base consideradas**

Base (cm)														
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	30	35	40

**Fonte:** Autoria própria (2019).

A altura deve assegurar que a área seja maior que  $360 \text{ cm}^2$ , além disso, como  $H \geq B$ , encontra-se a altura mínima ( $H_{\min}$ ) pela Equação (97). Nesta monografia não se analisa pilares-parede, portanto, a altura máxima ( $H_{\max}$ ) é dada pela Equação (98).

$$H_{\min} = \min \left( \frac{\frac{360}{B}}{B} \right) \quad (97)$$

$$H_{\max} = 5 \cdot B \quad (98)$$

A combinação dos valores inteiros no intervalo  $[H_{\min}; H_{\max}]$  para cada base presente no Quadro 15 origina as seções transversais possíveis. Consideram-se valores múltiplos para as alturas, com o intuito de facilitar a execução, obtendo-se assim cerca de 276 seções transversais consideradas inicialmente, para seções retangulares, as quais encontram-se presentes no Apêndice C.

Caso o usuário fixe a base, as seções consideradas são compostas pela base escolhida, e pelas alturas disponíveis para ela no Apêndice C. O mesmo vale se ao invés da base seja adotado um valor para altura, porém neste caso utiliza-se as bases possíveis presentes. Também pode ser fixada a dimensão da base e da altura, desde que estejam presentes no Apêndice C. Se nenhum parâmetro for estipulado, todas as 276 seções são avaliadas.

Dada as seções transversais consideradas inicialmente, verifica-se se estas satisfazem os critérios da esbeltez, de elementos lineares e das áreas máximas e mínimas. As seções que não atendem estes critérios são descartadas.

São analisados pilares com esbeltez  $\lambda \leq 90$ , portanto deve-se verificar a esbeltez nas direções x e y pela Equação (11) e (12) (pág. 31), para seções retangulares e circulares,

respectivamente.

Pilares são elementos lineares, portanto, como descrito no item 2.3.4 (pág. 44), apenas seções que atendam a Equação (99) podem ser consideradas.

$$\frac{PDE}{D_{máx}} \geq 3 \quad (99)$$

Onde:

$D_{máx}$  é a maior dimensão da seção transversal (H em pilares retangulares, e  $\phi_p$  em circulares)

Por fim, as seções que irão compor os AE devem respeitar a área mínima e máxima de armaduras recomendadas pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

$$\max \left( 0.004 \cdot A_c, \quad 0.15 \cdot \frac{N_d}{f_{yd}} \right) \leq 0.04 \cdot A_c \quad (100)$$

Caso nenhuma seção transversal satisfaça as Equações (99) e (100) o programa é encerrado, não sendo executadas as rotinas descritas abaixo.

#### 4.2.2.2 Disposição da armadura longitudinal

Verificada as seções transversais que compõem os AE para a geometria escolhida, determina-se a disposição da armadura para cada seção transversal possível.

As bitolas consideradas ( $\phi_l$ ) são aquelas escolhidas na etapa anterior, e que satisfazem a Equação (33) (pág. 44). Em sequência obtém-se o diâmetro das barras da armadura transversal ( $\phi_t$ ) e o seu espaçamento ( $S_t$ ), que é considerado igual ao espaçamento máximo permitido ( $S_{max,est}$ ), para cada seção com dado  $\phi_l$ , pela Equações (34) (pág. 44) e (35) (pág. 46), respectivamente.

Cada seção com determinados  $\phi_l$ ,  $\phi_t$  e  $S_t$  pode dispor de diferentes números e configurações de barras. Para seções retangulares detalha-se a disposição das barras da armadura longitudinal, pelo  $N_x$  e  $N_y$ , já em seções transversais circulares descreve-se a configuração da armadura longitudinal pelo  $N_c$  (ver Figuras 49 e 50, págs. 93 e 93). Esses

valores devem garantir os espaçamentos máximo e mínimos, além das áreas mínimas e máximas aprofundados nos itens 2.3.1 (pag. 39) e 2.3.2 (pág. 43), respectivamente.

Os números mínimos de barras -  $N_{x,\min}$  e  $N_{y,\min}$ , para seções retangulares e  $N_{c,\min}$  para circulares - devem satisfazer o  $e_{\max,eixos}$ , apontado pela NBR 6118 (ABNT, 2014), e as recomendações mínimas de seções poligonais e circulares expostas no item 2.3.1 (pág. 39). Portanto, manipulando as Equações (25) e (26) (pág. 40 e 41), encontram-se as Equações (101), (102) e (103), para obter  $N_{x,\min}$ ,  $N_{y,\min}$  e  $N_{c,\min}$ , respectivamente.

$$N_{x,\min} = \max \left( 2, \frac{B - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l}{e_{\max,eixos}} + 1 \right) \quad (101)$$

$$N_{y,\min} = \max \left( 2, \frac{H - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l}{e_{\max,eixos}} + 1 \right) \quad (102)$$

$$N_{c,\min} = \max \left( 6, \frac{\pi}{\sin^{-1} \left( \frac{e_{eixos,max}}{\phi_{pilar} - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l} \right)} \right) \quad (103)$$

Quanto aos números máximos de barras ( $N_{x,\max}$  e  $N_{y,\max}$  para pilares retangulares e  $N_{c,\max}$  para circulares), deve ser atendido o espaçamento mínimo livre entre as faces das barras ( $e_{\min,livre}$ ), conforme descrito no item 2.3.1 (pág. 39). Desta forma, através da manipulação das Equações (28) a (30) (pág. 42 e 43) obtém-se as Equações (104), (105) e (106) para cálculo do  $N_{x,\max}$ ,  $N_{y,\max}$  e  $N_{c,\max}$ , respectivamente.

$$N_{x,\max} = \frac{B - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) + e_{\min,livre} + \phi_l}{e_{\min,livre} + 2 \cdot \phi_l} \quad (104)$$

$$N_{y,\max} = \frac{H - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) + 2 \cdot \phi_l + e_{\min,livre}}{e_{\min,livre} + 3 \cdot \phi_l} \quad (105)$$

$$N_{c,\max} = \frac{\pi}{\sin^{-1} \left( \frac{e_{livre,min} + 3 \cdot \phi_l}{\phi_{pilar} - 2 \cdot (c_{nom} + \phi_t) - \phi_l} \right)} \quad (106)$$

Calculado os valores máximos e mínimos, o número de barras possível, segundo os critérios de espaçamentos, em seções retangulares, na direção x é dado pelos números inteiros no intervalo  $[N_{x,\min}; N_{x,\max}]$ , e na direção y pelos números inteiros no intervalo  $[N_{y,\min}; N_{y,\max}]$ , para um dado  $\phi_l$ . O raciocínio é o mesmo para pilares circulares.

Contudo, além dos espaçamentos recomendados pela norma, a disposição da armadura deve atender os critérios de área mínima e máxima, especificados no item 2.3.2. Assim deve-se verificar para cada combinação de seção transversal e disposição de armadura, se a área deste arranjo satisfaz estas recomendações, caso não satisfaça, descarta-se a combinação analisada.

#### 4.2.2.3 $f_{ck}$

Os  $f_{cks}$  avaliados são aqueles escolhidos pelo usuário que satisfazem os valores mínimos indicados no Quadro 5 (pág. 29), de acordo com a CAA informada na Etapa 1.

Conforme apontado anteriormente, a resistência característica à compressão não interfere nos demais parâmetros descritos, assim os diferentes  $f_{cks}$  apresentam as mesmas combinações de seções transversais e disposição da armadura. Logo é necessário calcular as diferentes combinações destes dois fatores e essas serão respectivas a todos os  $f_{cks}$  considerados.

Os AE determinados são armazenados em uma tabela, com todos os parâmetros referentes ao AE, que podem ser verificados na Tabela 3.

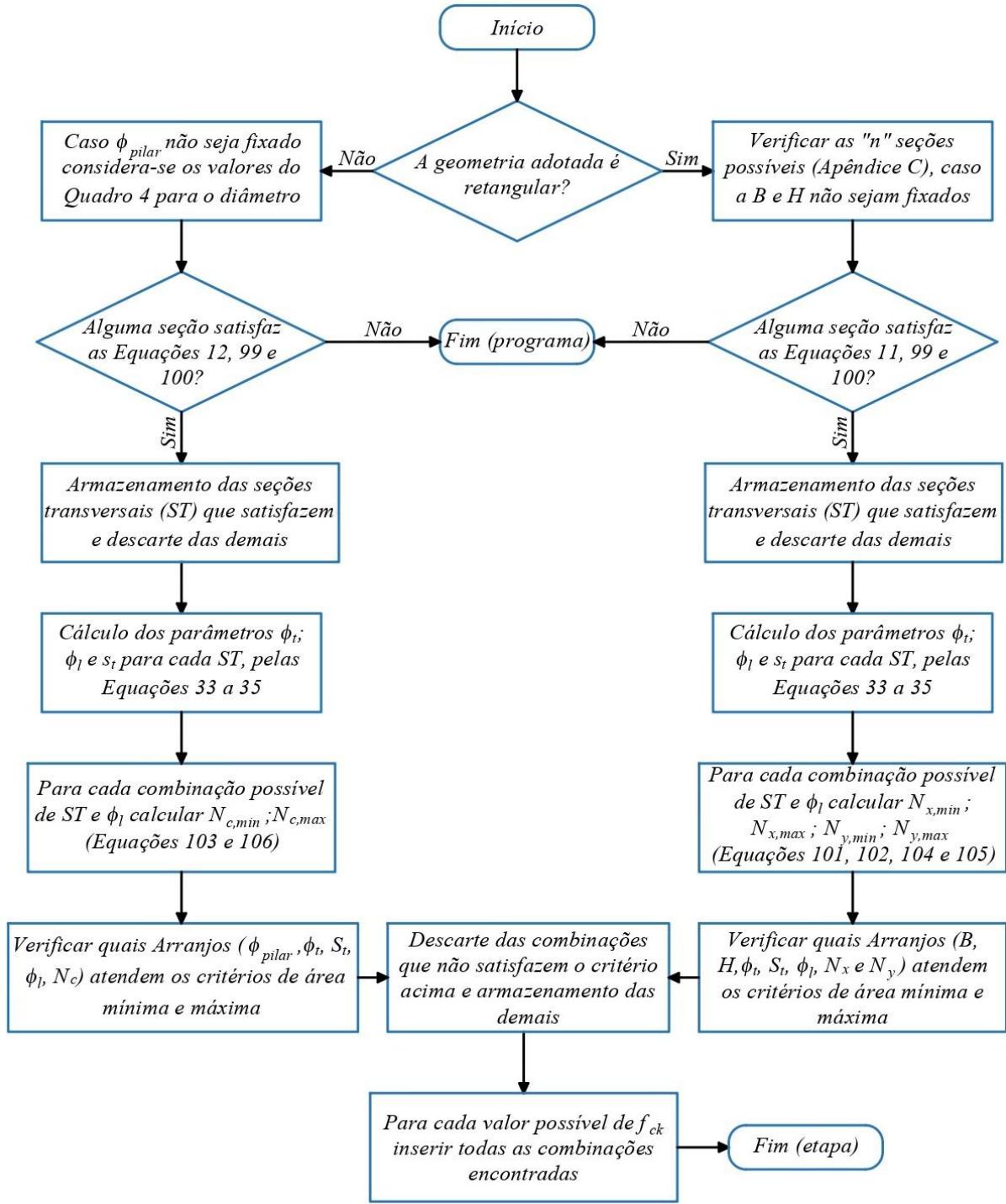
**Tabela 3 – Resumo dos parâmetros que compõem cada AE nas diferentes seções**

<b>Parâmetro</b>	<b>Divisão dos parâmetros para cada seção</b>	
	<b>Seção Retangular</b>	<b>Seção circular</b>
Seção transversal	B H	$\phi_{pilar}$
$f_{ck}$	---	---
Disposição armadura	$\phi_l$ $\phi_t$ $S_t$ $N_x \text{ e } N_y$ $N_{g,x} \text{ e } N_{g,y}$	$\phi_l$ $\phi_t$ $S_t$ $N_c$

**Fonte: Autoria própria (2019).**

A Figura 51 apresenta um fluxograma simplificado da Etapa 2, resumindo os procedimentos descritos.

**Figura 51 – Fluxograma simplificado da Etapa 2**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

#### 4.2.3 Etapa 3 – Cálculo do custo dos AE

Nesta etapa calcula-se o custo total ( $C_{total}$ ) por metro de seção (R\$/m) de cada AE armazenado. Salienta-se que no presente estudo não são considerados custos oriundos da execução, além disso despreza-se o comprimento das emendas no custo total.

Conforme a Equação (107), o  $C_{total}$ , para ambas as seções, é composto pela soma das

parcelas do concreto ( $C_{concreto}$ ), armadura longitudinal e transversal ( $C_{armaduras}$ ) e fôrmas ( $C_{fôrmas}$ ).

$$C_{total} = C_{concreto} + C_{armaduras} + C_{fôrmas} \quad (107)$$

O cálculo de cada parcela é efetuado separadamente. A parcela do concreto é determinada pela Equação (108), já a parcela referente as armaduras é determinada por meio da Equação (109), por último, a Equação (111) é empregada para o cálculo dos custos advindos das fôrmas.

$$C_{concreto} = \begin{cases} (B \cdot H) \cdot C_{u,conc}, & \text{se retangular} \\ \left(\frac{\pi}{4} \cdot \phi_p^2\right) \cdot C_{u,conc}, & \text{se circular} \end{cases} \quad (108)$$

Onde:

$C_{u,conc}$  é o custo unitário do concreto (em R\$/m<sup>3</sup>).

$$C_{armaduras} = \begin{cases} N_{AL} \cdot C_{u,arm-L} + (N_{est} \cdot C_{est,r}) \cdot C_{u,arm-T} + \dots & \text{se retangular} \\ N_{est} \cdot (N_{g,x} \cdot C_{est,sup-x} + N_{g,y} \cdot C_{est,sup-y}) \cdot C_{u,arm-T}, & \text{se retangular} \\ N_{AL} \cdot C_{u,arm-L} + (N_{est} \cdot C_{est,c}) \cdot C_{u,arm-T}, & \text{se circular} \end{cases} \quad (109)$$

Onde:

$N_{AL}$  é o número de barras da armadura longitudinal. Para seções circulares é igual a  $N_c$  (ver Figura 50, pág. 93), quanto as seções retangulares, é dado por  $2 \cdot (N_x + N_y) - 4$ , como pode ser verificado na Figura 49 (pág. 93);

$C_{u,arm-L}$  é o custo unitário (em R\$/m) de  $\phi_l$ ;

$N_{est}$  é o número de estribos, dado pelo número inteiro mais próximo do valor obtido pela Equação (110);

$$N_{est} = \frac{1}{S_t[m]} + 1 \quad (110)$$

$C_{est,r}$  é o comprimento do estribo para seções retangulares. Conforme detalhado no item 2.3.5, é calculado por meio da Equação (36) (pág. 48);

$C_{u,arm-T}$  é o custo unitário (em R\$/m) de  $\phi_t$ ;

$N_{g,x}$  e  $N_{g,y}$  são os números de estribos suplementares na direção x e na y, respectivamente, como indicado na Figura 49 (pág. 93).  $N_{g,x}$  e  $N_{g,y}$  são determinados pelo critério presente na Figura 16 (pág. 48);

$C_{est,sup-x}$  e  $C_{est,sup-y}$  são o comprimento dos estribos suplementares na direção x e na y, respectivamente. Para o cálculo de  $C_{est,sup-x}$  utiliza-se a Equação (38) (pág. 49), adotando  $h = B$ . Para o cálculo  $C_{est,sup-y}$  considera-se  $h = H$ ;

$C_{est,c}$  é o comprimento do estribo para seções circulares. Para cálculo deste utiliza-se a Equação (37) (pág. 48), apresentada no item 2.3.5;

$C_{u,arm-T}$  é o custo unitário (R\$/m) de  $\phi_t$ .

$$C_{fôrmas} = \begin{cases} 2 \cdot C_{u,f-R} \cdot (B + H), & \text{se retangular} \\ C_{u,f-C} \cdot (\pi \cdot \phi_{pilar}), & \text{se circular} \end{cases} \quad (111)$$

Onde:

$C_{u,f-R}$  é o custo unitário das fôrmas retangulares (em R\$/m<sup>2</sup>), fornecido pela Tabela 6 (pág. 103);

$C_{u,f-C}$  é o custo unitário das fôrmas circulares (em R\$/m<sup>2</sup>), dado pela Tabela 8 (pág. 104).

Os custos unitários utilizados no presente trabalho foram retirados da base de dados da TCPO (Tabela de composições e preços para orçamentos), para a região de Curitiba, no mês de setembro de 2019.

Na Tabela 4 encontram-se detalhadas os custos unitários para as bitolas da armadura transversal (AT) e para a armadura longitudinal (AL). Salienta-se que na base de dados da TCPO o custo unitário é fornecido em “R\$/kg”, deste modo, utiliza-se os pesos lineares indicados pela NBR 7480 (ABNT, 2008) para realizar a conversão destes para “R\$/m”. Enfatiza-se que os valores presentes na Tabela 4 desprezam o custo de arame, que seria necessário para a montagem das armaduras.

**Tabela 4 – Custos unitários das armaduras ( $C_{u,arm-L}$  e  $C_{u,arm-T}$ )**

Uso	Aço	$\phi$ (mm)	Massa (kg/m)	Custo (R\$/kg)	Custo (R\$/m)
AT	CA-60	5	0,154	3,76	0,58
	CA-50	6,3	0,245	5,04	1,23
AL	CA-50	10	0,617	3,93	2,42
		12,5	0,963	4,44	4,28
		16	1,578	4,41	6,96
		20	2,466	4,41	10,88

Fonte: TCPO (2019).

Com relação ao concreto, adota-se que esse seja dosado em central. Além disso, utiliza-se todos os concretos disponíveis na base de dados, com  $f_{ck} \geq 20$  MPa, pois conforme o Quadro 5 (pág. 29), esta configura-se na resistência mínima a ser utilizada em estruturas de concreto armado. Os custos unitários para os concretos avaliados podem ser verificados na Tabela 5.

**Tabela 5 – Custos unitários para concretos**

Concreto	Custo (R\$/m <sup>3</sup> )
C20	249,04
C25	271,45
C30	283,90
C35	308,81
C40	326,24
C45	356,12
C50	498,08
C75	684,85

Fonte: TCPO (2019).

As fôrmas são compostas por diversos materiais: chapas compensadas, sarrafos, pregos, dentre outros. Por isso, para cálculo dos custos unitários, em ambas as seções, considera-se todos os materiais, juntamente com os consumos explicitados na TCPO.

Para seções retangulares adota-se fôrmas compostas por compensados plastificados, já que de acordo com Maranhão (2000), o uso deste tipo de fôrmas contribui para um bom acabamento do concreto, além de permitir, segundo Boin (1993) *apud* Maranhão (2000), até 40 reaproveitamentos. Logo, considerando os materiais necessários para a fabricação, montagem e desmontagem das fôrmas, e que sejam realizados até cinco reaproveitamentos, encontra-se  $C_{u,f-R}$  igual a 38,33 R\$/m<sup>2</sup>, conforme apresentado na Tabela 6.

**Tabela 6 – Materiais para fabricação, montagem e desmontagem das fôrmas de pilares retangulares**

Etapa	Material	Total (R\$/m <sup>2</sup> )
Fabricação	Chapa de madeira compensada plastificada 1,10 x 2,20 m # 12 mm	30,87
	Pontalete de cedro 7,5 x 7,5 cm	104,84
	Sarrafo 1" x 3"	33,78
Montagem	Prego com cabeça 17 x 21, 48 mm Ø = 3,0 mm	2,23
	Desmoldante de formas de madeira para concreto	0,16
Desmontagem	Prego com cabeça 17 x 21, 48 mm Ø = 3,0 mm	3,82
	---	---
Total fabricação · 0,2 + Total montagem + Total Desmontagem		38,33

**Fonte:** TCPO (2019).

Para pilares circulares podem ser utilizadas diferentes tipos de fôrmas, a SINAPI<sup>1</sup> (2018) cita três diferentes tipos de fôrmas para elementos com esta seção: fôrmas de madeira, de papelão, e metálicas. Dentre essas a TCPO apresenta composições apenas para as duas primeiras fôrmas, assim descarta-se o uso de fôrmas metálicas. As duas fôrmas restantes apresentam diferentes características construtivas, como pode ser verificado na Tabela 7, porém, devido a diferença de custo entre a fôrma de papelão e a de madeira, estabelecendo cinco reaproveitamentos, ser considerável, opta-se pelo uso da fôrma de madeira.

**Tabela 7 – Características das fôrmas de papelão e de madeira**

Fôrma	Vantagens	Desvantagens
Papelão	É inteiriça e de fácil manuseio	A desfôrma é feita por meio do corte do papelão
Madeira	Pode ser reutilizada	Exige grande tempo e precisão na fabricação da fôrma

**Fonte:** SINAPI (2018).

A Tabela 8 explicita os materiais empregados para fabricação, montagem e desmontagem de fôrmas de madeira para pilares circulares. Assim como nos pilares com geometria retangular, estipulam-se cinco reaproveitamentos, logo, obtém-se o C<sub>u,f-C</sub> igual a 41,29 R\$/m<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> SINAPI - Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil.

**Tabela 8 – Materiais para fabricação, montagem e desmontagem das fôrmas de pilares circulares**

Etapa	Material	Total (R\$/m <sup>2</sup> )
Fabricação	Sarrafo 1" x 2"	87,04
	Sarrafo 1" x 4"	39,24
	Tábula de cedrinho 2,3 x 30 cm	59,47
	Prego com cabeça 17 x 21, 48 mm Ø = 3,0 mm	2,23
Montagem	Desmoldante de formas de madeira para concreto	0,82
	Prego com cabeça 17 x 21, 62,1 mm Ø = 3,0 mm	2,87
Desmontagem	---	---
Total fabricação · 0,2 + Total montagem + Total Desmontagem		41,29

Fonte: TCPO (2019).

Após efetuar o cálculo do custo de cada AE, armazena-se as informações referentes a cada um desses. Destaca-se que os AE são organizados de modo que os custos estejam em ordem decrescente, logo, as tabelas possuem o número de linhas iguais ao número de arranjos estruturais (NAE), já o número de colunas varia conforme a geometria escolhida.

No Apêndice C podem ser verificadas as tabelas finais desta etapa para uma seção retangular, 19 cm x 19 cm, e para uma circular, com diâmetro igual a 22 cm, considerando todos as bitolas e os  $f_{cks}$  presentes nas Tabelas 5 e 6, respectivamente. Para exportar as tabelas do *Python* para o *Excel* empregou-se a biblioteca *Pandas*.

#### 4.2.4 Etapa 4 – Determinação dos esforços de cálculo e verificação dos AE

Com os AE organizados em ordem crescente de custo percorre-se a tabela, no sentido indicado pela Figura 52, obtendo-se os esforços de cálculo do  $AE_i$  e efetuando a verificação deste à FCO.

**Figura 52 – Sentido da análise dos AE na etapa 4**

<b>fck</b>	<b>b</b>	<b>h</b>	<b>...</b>	<b>R\$/m</b>
<b>1</b>	25	19	19	... 52,13
<b>2</b>	30	19	19	... 52,58
<b>3</b>	35	19	19	... 53,48
<b>4</b>	25	19	19	... 53,52
<b>5</b>	30	19	19	... 53,99
<b>...</b>	:	:	:	...
<b>NAE</b>	75	19	19	... 54,26



Fonte: Autoria própria (2019).

Para que dado  $AE_i$  satisfaça o ELU, a Equação (112) deve ser válida para todas as situações de cálculo (S.C) daquele arranjo, caso isto não ocorra, o AE não satisfaz os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) para seções à FCO, logo, descarta-se a configuração analisada e repete-se os procedimentos de obtenção dos esforços de cálculo e verificação para o  $AE_{i+1}$ . Caso nenhum AE satisfaça a Equação (112) o código é finalizado, exibindo a mensagem “não há solução possível”.

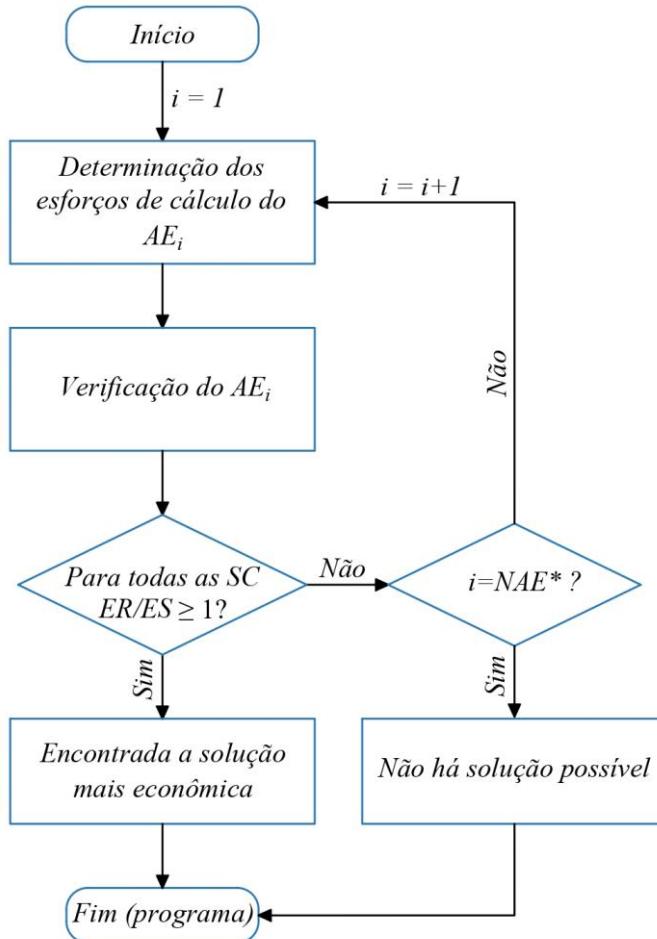
$$\frac{ER}{ES} \geq 1 \quad (112)$$

Como no algoritmo de Araújo (2010) (ver item 2.5.2, pág. 65) determina-se primeiramente o  $x_o$ , para que com dado  $\alpha$ ,  $N_{rd} = N_{sd}$  e em sequência calcula-se os momentos resistentes para dado AE, pode-se reescrever a Equação (112), obtendo-se a Equação (113).

$$\frac{\sqrt{M_{rd,x}^2 + M_{rd,y}^2}}{\sqrt{M_{sd,x}^2 + M_{sd,y}^2}} \geq 1 \quad (113)$$

A Figura 53 apresenta o fluxograma geral da etapa 4 do “PFOC”. A seguir, explicita-se os procedimentos empregados nas sub-rotinas de determinação dos esforços de cálculo e na verificação dos AE.

**Figura 53 – Fluxograma geral da etapa 4**



\*NAE = Número (total) de arranjos estruturais

**Fonte:** Autoria própria (2019).

#### 4.2.4.1 Esforços de cálculo

Estabelecidos os AE preliminares, analisa-se as situações de cálculo (S.C) que devem ser avaliadas para dado AE. Para isso, a partir dos critérios de projeto e dos esforços solicitantes característicos inseridos pelo usuário na Etapa 1, majoram-se os esforços, além de avaliar as imperfeições geométricas e efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) apresenta diversas possibilidades para a obtenção das duas últimas. Conforme descrito no item 2.2.5 (pág. 34), utilizou-se o MPPCA para análise dos efeitos locais de 2<sup>a</sup> ordem. Quanto as imperfeições geométricas locais, como pode verificado no item 2.2.4 (pág. 33), a norma apresenta diferentes metodologias para estimá-las, dentre essas, empregou-se o momento mínimo de 1<sup>a</sup> ordem.

De acordo com Smaniotto (2005), ao dimensionar o pilar, o projetista pode considerar

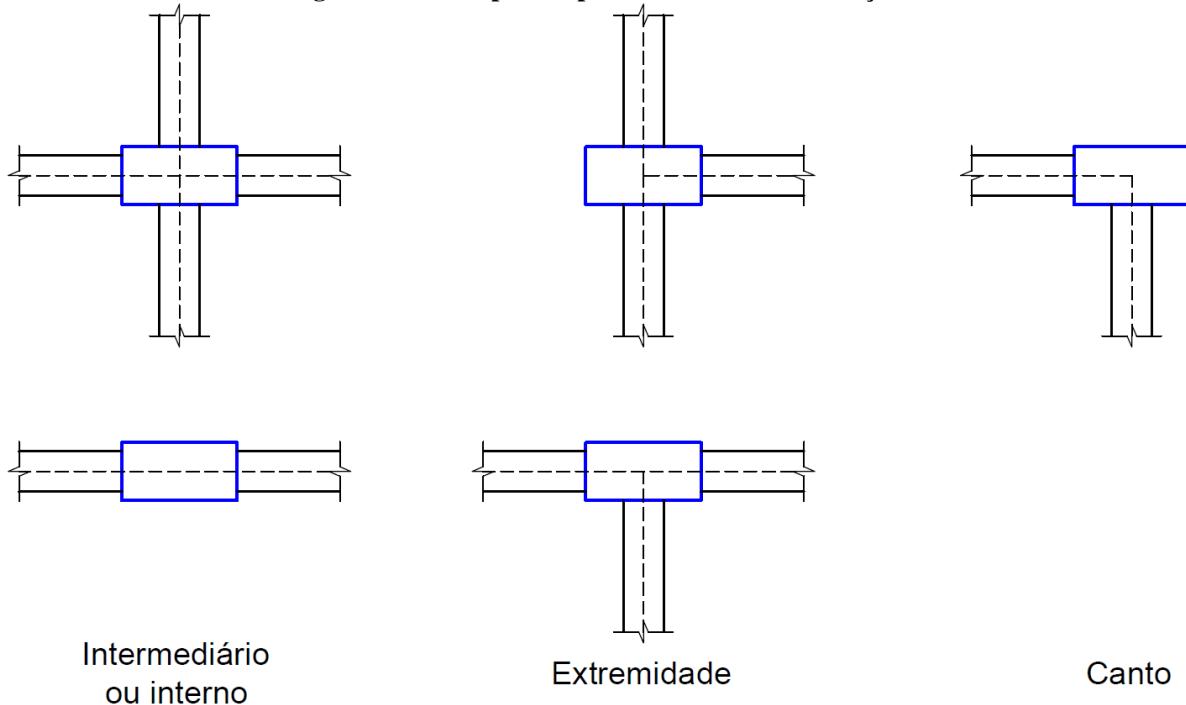
os momentos mínimos de duas maneiras: atuando simultaneamente, ou de forma isolada em cada direção. Atualmente, com a atualização da norma em 2014, incluiu-se uma terceira forma para avaliação dos momentos mínimos em seções retangulares: as envoltórias mínimas.

Neste trabalho, aplicou-se a metodologia de Bastos (2017) para momentos mínimos. Nela o Autor divide os pilares em três grupos básicos:

1. intermediário/interno – Pilares submetidos a compressão centrada, ou seja,  $M_{sk,x}$  e  $M_{sk,y}$  são nulos;
2. Extremidade – Elementos submetidos a FCN, assim  $M_{sk,x}$  ou  $M_{sk,y}$  é nulo;
3. Pilares de canto – Pilares onde na situação de projeto há momento em ambas as direções

A Figura 54 exemplifica pilares de cada uma das categorias descritas.

**Figura 54 – Exemplos de pilares em cada classificação**



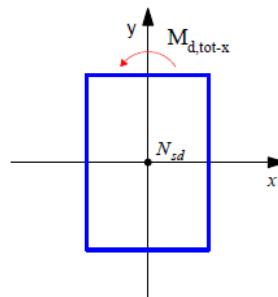
**Fonte: Autoria própria (2019).**

Para pilares internos e de extremidades Bastos (2017) considera os momentos mínimos nos eixos x e y separadamente, já para pilares de canto, esses são avaliados em conjunto. Assim, aqueles podem apresentar até duas situações de cálculo (S.C) para análise na verificação do ELU, enquanto estes podem possuir até 4 S.C, conforme descrito pela Figura 55.

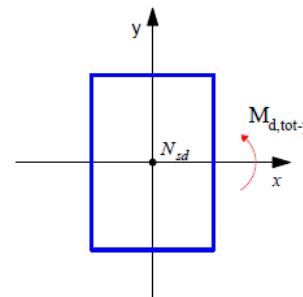
Salienta-se que caso os efeitos de 2ª ordem sejam desprezados em torno do eixo x ou y, tem-se para esse eixo  $M_{d,tot} = M_{1d,A}$ , como pode ser observado na Equação (17) (pág. 38).

**Figura 55 – S.C para os diferentes tipos de pilares**

**Pilares internos e de extremidade**

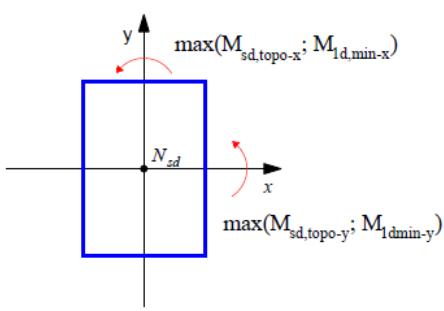


*1<sup>a</sup> S.C (intermediária)*

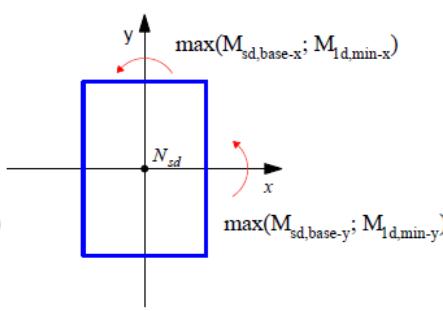


*2<sup>a</sup> S.C (intermediária)*

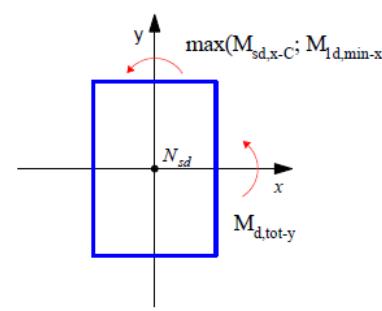
**Pilares de canto**



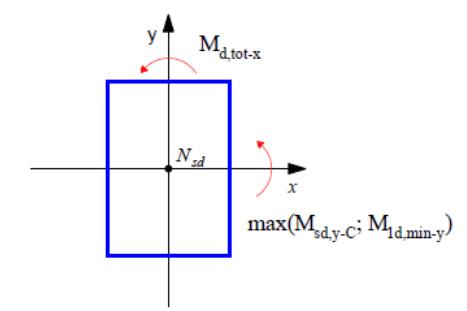
*1<sup>a</sup> S.C (topo)*



*2<sup>a</sup> S.C (base)*



*3<sup>a</sup> S.C (intermediária)*

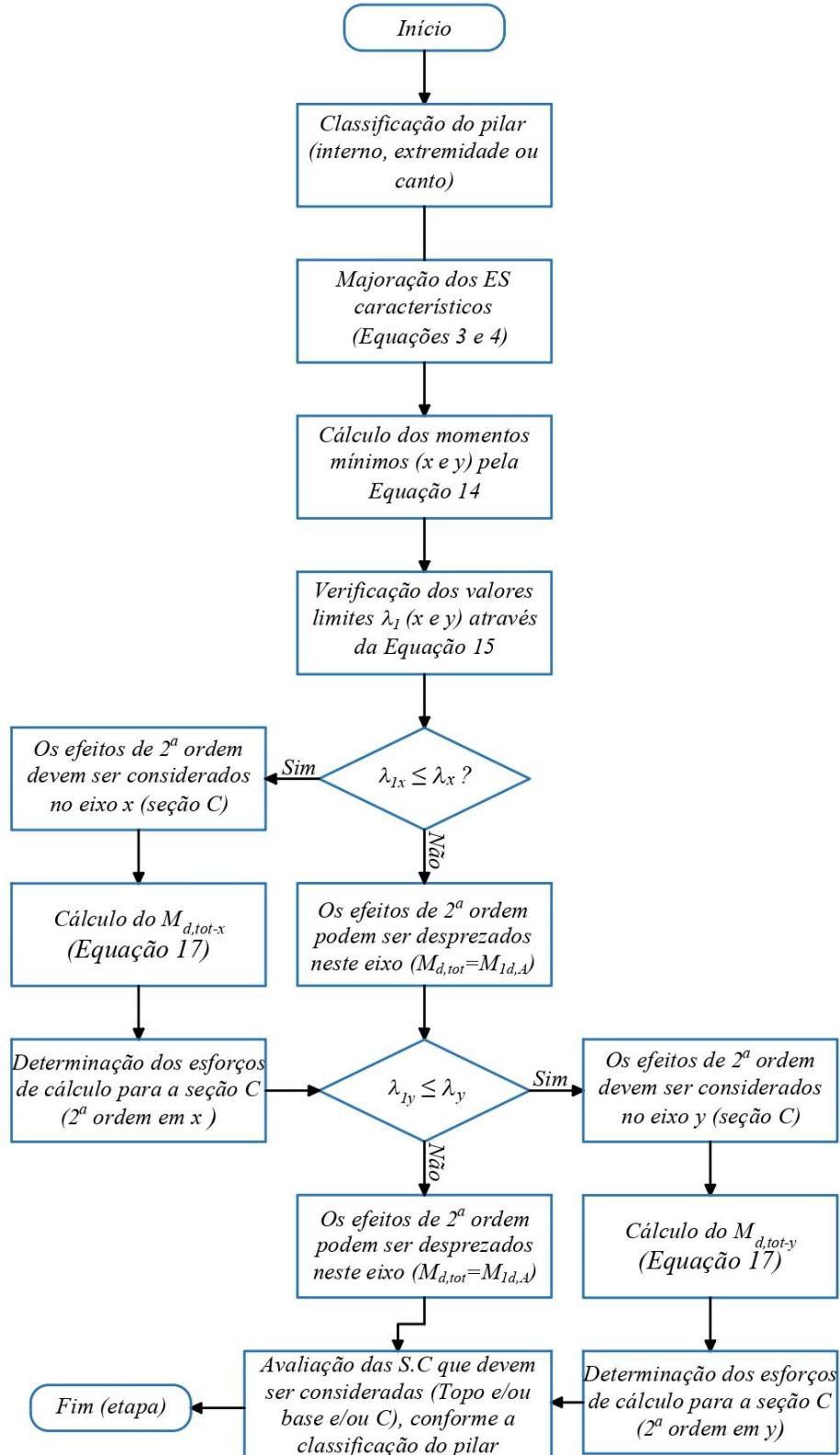


*4<sup>a</sup> S.C (intermediária)*

**Fonte: Autoria própria (2019).**

A Figura 56 apresenta o fluxograma da sub-rotina utilizada para determinação dos esforços de cálculo.

**Figura 56 – Fluxograma Etapa 4 (sub-rotina dos esforços de cálculo)**



Fonte: Autoria própria (2019).

#### 4.2.4.2 Verificação dos AE

A verificação de determinado AE consiste em averiguar a validade da Equação (113) (pág. 105) para as S.C do AE analisado. Para tal fim, conforme justificado no item 2.5.2 (pág. 65), adaptou-se o algoritmo de Araújo (2010). Essas consistem em três alterações principais:

1. Cálculo dos esforços resistentes do concreto;
2. Número de incógnitas;
3. Método numérico empregado para cálculo do zero de funções.

Com relação ao primeiro item, Araújo (2010) faz uso da simplificação do diagrama da parábola-retângulo, permitida pelo item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014) (ver item 2.4.1, pág. 50). Na sub-rotina desenvolvida no presente trabalho emprega-se o diagrama da parábola retângulo, com a finalidade de evitar possíveis erros que a simplificação do diagrama poderia agregar no “PFOC”.

O cálculo dos esforços resistentes do concreto segue os procedimentos descritos no capítulo 3 (pág. 71). Logo, de forma resumida, primeiramente encontra-se a região de cada parcela, retangular e circular, (ver Figuras 32 e 37, presentes nas páginas 72 e 77, respectivamente). Obtidas as áreas de concreto comprimidas para ambas as parcelas empregase as equações, respectivas a geometria analisada, detalhadas no item 3.1 (pág. 74) e no item 3.2 (pág. 77), para determinação dos esforços resultantes da parcela retangular e parabólica, respectivamente. Com os esforços provenientes de cada parcela calculados, realiza-se a conversão destes para os eixos x e y, conforme expresso pelas Equações (92) e (93) (pág. 84), para seções retangulares, e as Equações (95) e (96) (pág. 87), para pilares circulares, determinando-se assim os esforços resistentes totais do concreto ( $F_{r,c}$ ,  $M_{rx,c}$ ,  $M_{ry,c}$ ).

Quanto ao segundo item, refere-se ao fato de que no procedimento descrito por Araújo (2010) almeja-se dimensionar dada seção à FCO, portanto, a área de aço ( $A_s$ ), assim como  $x_o$  e  $\alpha$ , são desconhecidos. Enquanto na sub-rotina do “PFOC” objetiva-se efetuar a verificação de dada seção submetida a FCO, dessa forma,  $A_s$  é conhecida. Como na verificação há apenas duas incógnitas ( $x_o$  e  $\alpha$ ) são aplicados dois *loops* simultâneos, diferentemente do algoritmo de Araújo (2010), composto por três *loops*.

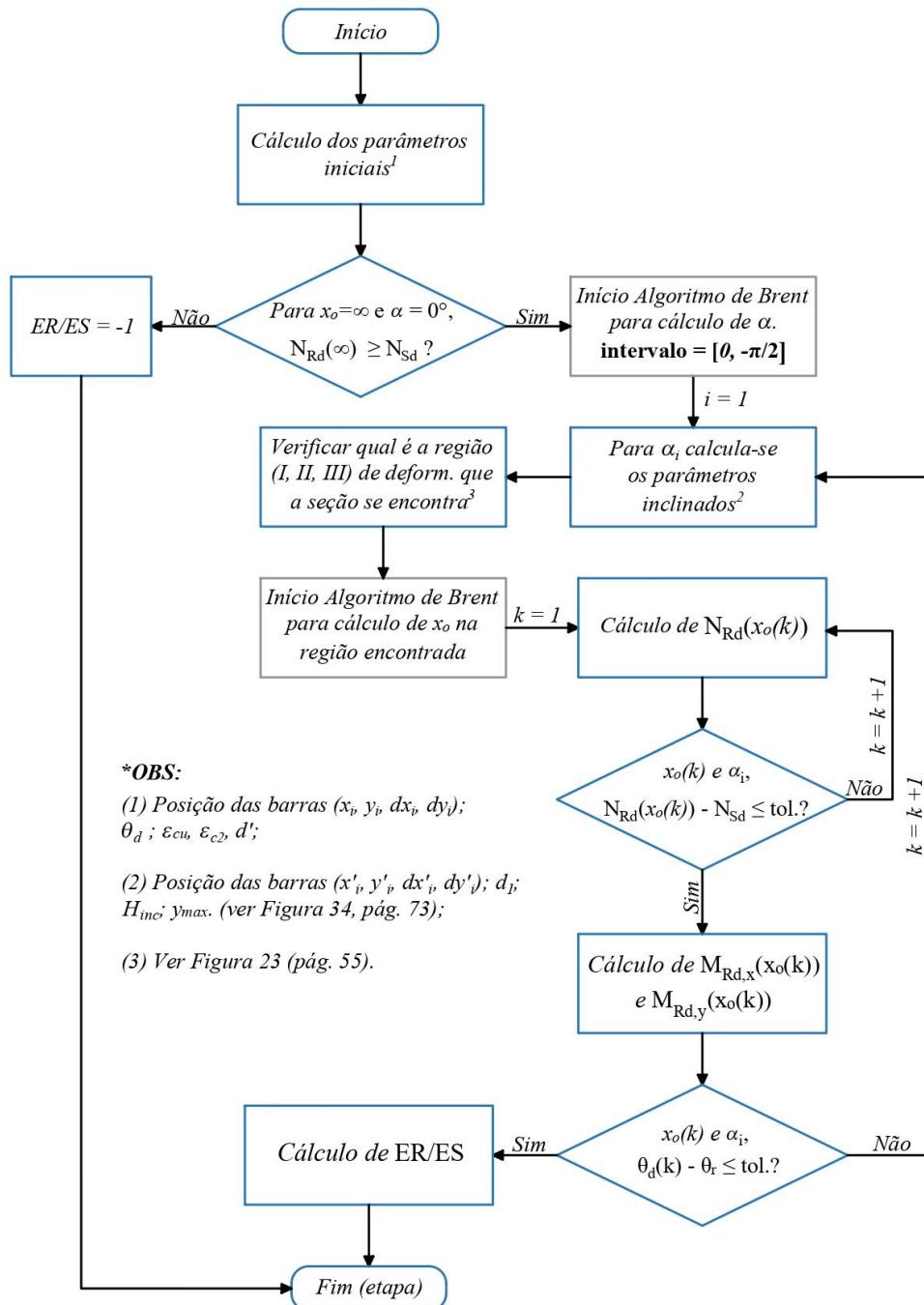
Como destacado no terceiro item, os métodos numéricos empregados por Araújo (2010) e no “PFOC” são distintos. Araújo (2010) recomenda o método da bissecção para os *loops* para cálculo de  $A_{so}$  e de  $x_o$ , já para o cálculo de  $\alpha$ , o Autor apresenta um critério iterativo próprio (ver item 2.5.2, pág. 65). Conforme descrito no item 2.6 (pág. 69), no programa computacional elaborado emprega-se o método de Brent para obtenção dos zeros de raízes em

ambos os *loops*.

Com esse método objetiva-se diminuir o tempo de processamento da sub-rotina desenvolvida, e mesmo assim, garantir a convergência da solução, conforme afirmado por Brent (1973). A tolerância (tol.) estipulada ao aplicar o método é de  $10^{-6}$ .

Salvo as três mudanças descritas acima, a sub-rotina implementada utiliza os mesmos procedimentos descritos por Araújo (2010). A Figura 57 apresenta o fluxograma simplificado da sub-rotina de verificação à FCO.

**Figura 57 – Fluxograma Etapa 5 (verificação à FCO)**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

#### 4.2.5 Etapa 5 – Dados de saída

Ao finalizar a Etapa 4 o “PFOC” apresenta a solução com maior vantagem econômica, dado os critérios de projeto e os custos fornecidos. Caso não nenhuma solução satisfaça a verificação das S.C à FCO o algoritmo computacional exibe a mensagem “Sem soluções possíveis”.

Além da solução, o código exibe um relatório, expondo as S.C para o AE ótimo, as verificações referentes a essas, e algumas informações adicionais. Destaca-se que o relatório pode ser impresso, de acordo com a necessidade do usuário.

No Apêndice D encontra-se descrito um exemplo de aplicação do “PFOC”, onde explicita-se os dados de entrada, o relatório gerado ao final do algoritmo e o funcionamento geral do algoritmo.

## 5 DISCUSSÕES E RESULTADOS

Para apurar o desempenho do “PFOC” realizou-se comparações com resultados encontrados na literatura. Essas contemplaram pontos distintos: as sub-rotinas de verificação à FCO para seções retangulares e circulares, e o algoritmo implementado por completo.

Nos itens 5.1, e 5.2 analisam-se as sub-rotinas de verificação de seções retangulares, e circulares submetidas à FCO, respectivamente. Com a avaliação das sub-rotinas objetiva-se conferir a confiabilidade da metodologia proposta para a verificação de seções, e armaduras, simétricas à FCO. Para isso, foram efetuadas comparações entre essas e ábacos/programas disponíveis na literatura.

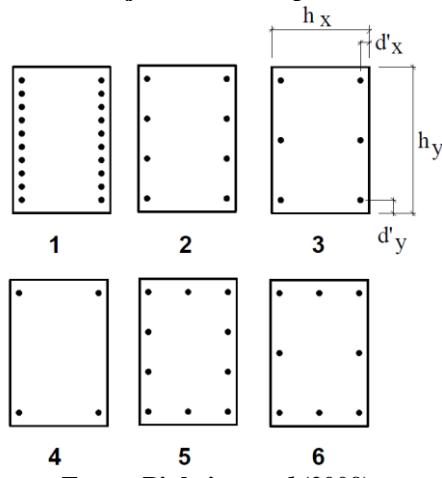
O exame do “PFOC” em sua totalidade é descrito no item 5.3, nele confronta-se o algoritmo computacional com o programa computacional “POtimo”, que realiza a otimização contínua de pilares à FCO. Com isso procura-se aferir as diferenças apresentadas por ambas as metodologias de otimização, a discreta, utilizada na presente monografia, e a contínua, e ponderar se essas são significativas.

### 5.1 SUB-ROTINA DE VERIFICAÇÃO À FCO DE SEÇÕES RETANGULARES

A validação da sub-rotina de verificação das seções retangulares deu-se de duas maneiras: para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa foram utilizado os ábacos de Pinheiro *et al* (2009), quanto aos do grupo II, empregou-se o programa computacional “OblqCalco”, desenvolvido por Silva (2015).

#### 5.1.1 Concretos do grupo I

Pinheiro *et al* (2009) apresentam seis arranjos distintos para dimensionamento, que podem ser verificados na Figura 58. A variação das propriedades geométricas destes arranjos origina os 46 ábacos desenvolvidos pelos Autores.

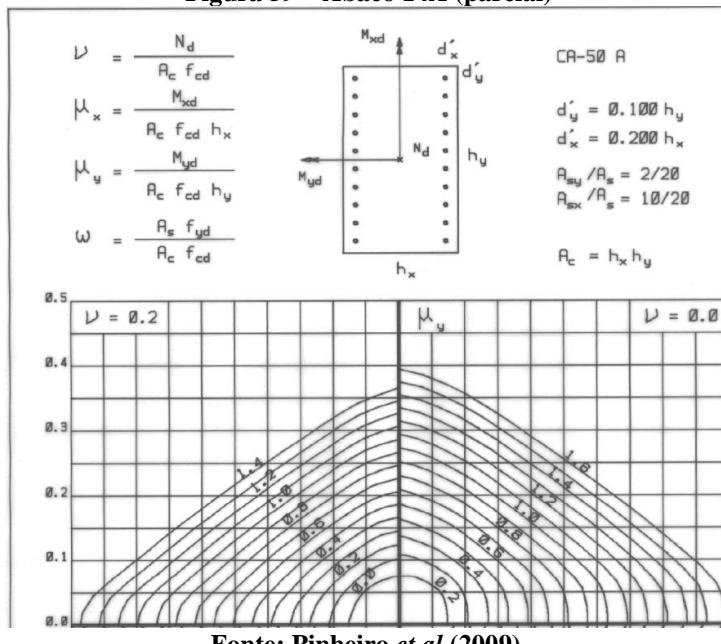
**Figura 58 – Arranjos das barras possíveis nos ábacos**

Fonte: Pinheiro *et al* (2009).

Dentre os 46 ábacos disponíveis, optou-se por seis destes, um para cada arranjo indicado na Figura 58, para comparação com a sub-rotina do “PFOC”: os ábacos 14 (arranjo 1), 15 (arranjo 2), 16 (arranjo 3), 17 (arranjo 4), 43 (arranjo 5) e 44 (arranjo 6).

Para cada um dos ábacos, foram realizadas quatro verificações distintas, estipulando diferentes valores para  $\nu$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ , obtendo-se assim o valor do coeficiente adimensional  $\omega$ , conforme exemplificado pela Figura 59 (pág. 116). Deste modo, no total, efetuou-se um total de 24 comparações para concretos do grupo I.

Com os quatros parâmetros determinou-se os esforços de cálculo ( $N_{sd}$ ,  $M_{sd,x}$ ,  $M_{sd,y}$ ) e a área de aço pelas Equações (21) (pág. 39), (51) a (53) (pág. 61), respectivamente. As equações também podem ser observadas também na Figura 59, que apresenta parcialmente o ábaco 14A.

**Figura 59 – Ábaco 14A (parcial)**

Os esforços de cálculos e a área de aço, de cada uma das 24 comparações, foram inseridos na sub-rotina do “PFOC”, retornando a razão ER/ES, detalhada pela Equação (113) (pág. 105). As Figuras 60 e 61 exemplificam o procedimento descrito, nelas expõem-se os dados de entrada e de saída referentes ao teste N = 9, respectivamente.

**Figura 60 – Dados de entrada na sub-rotina (N = 9, grupo I)**

```

▶ if __name__ == '__main__':
    fck1 = 3.0 # kN/cm2
    E = 21000 # kN/cm2
    altura1 = 40 # cm
    base1 = 20 # cm
    c11 = 2.5 # cm

    nx1 = 2
    ny1 = 10

    fi_t1 = 5 # mm
    fi_l1 = 20 # mm

    Nd1 = 0.6 * base1 * altura1 * fck1 / 1.4 # kN
    Mdx1 = 0.2 * base1 ** 2 * altura1 * fck1 / 1.4 # kNm
    Mdy1 = 0.148 * base1 * altura1 ** 2 * fck1 / 1.4 # kNm
    w = 1.0

    Aso1 = w * altura1 * base1 / (50/1.15) * (fck1/1.4) # cm2

    razao1 = verificacao(fck1, base1, altura1, c11, nx1,
                          ny1, fi_t1, fi_l1, Nd1, Mdx1,
                          Mdy1, Aso1, relatorio=True)

```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Figura 61 – Dados de saída da sub-rotina (N = 9, grupo I)**

- Parâmetros principais:

```

alfa = -64.97°
x = 20.36 cm
d1 = 29.73 cm
Ha = 35.04 cm
ymax = 17.52 cm
Aso = 39.43 cm2

```

- Verificação em si:

ER/ES = 0.9954. Verifica!

Process finished with exit code 0

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Com o intuito de verificar a confiabilidade do sub-rotina, foram considerados diferentes solicitações normais: FCN ( $N = 3$ ,  $N = 4$ ,  $N = 19$ ), flexão simples ( $N = 7$ ), flexão oblíqua ( $N = 2$ ,  $N = 21$ ) e FCO (demais comparações).

A Tabela 9 apresenta os resultados obtidos. Salienta-se que, quanto mais próximo de 1 a razão ER/ES se encontra, maior a concordância com os ábacos de Pinheiro *et al* (2009).

**Tabela 9 – Resultado das comparações entre a sub-rotina e os ábacos de Pinheiro *et al* (2009)**

N	Dados do pilar			Ábaco				"PFOC"	Variação	
	B (cm)	H (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	ábaco	v	μ <sub>x</sub>	μ <sub>y</sub>	φ		
1	20	40	20	16A	0,2	0,100	0,300	1,0	1,0089	0,89%
2	20	40	20	16A	0,0	0,200	0,205	1,0	1,0047	0,47%
3	20	40	20	16A	0,4	0,000	0,395	1,1	1,0007	0,07%
4	20	40	20	16B	0,8	0,246	0,000	0,8	1,0013	0,13%
5	20	40	25	17B	1,4	0,200	0,194	1,5	0,9990	0,10%
6	20	40	25	17B	1,0	0,050	0,118	0,5	1,0060	0,60%
7	20	40	25	17A	0,0	0,000	0,240	0,6	1,0127	1,27%
8	20	40	25	17A	0,6	0,150	0,150	0,6	0,9907	0,93%
9	20	40	30	14A	0,6	0,200	0,148	1,0	0,9954	0,46%
10	20	40	30	14A	0,4	0,368	0,100	1,3	0,9893	1,07%
11	20	40	30	14A	0,2	0,100	0,300	1,3	1,0029	0,29%
12	20	40	30	14B	1,2	0,250	0,220	1,9	0,9934	0,66%
13	20	40	35	15B	1,0	0,200	0,309	1,8	1,0034	0,34%
14	20	40	35	15A	0,2	0,100	0,097	0,3	1,0083	0,83%
15	20	40	35	15A	0,0	0,100	0,095	0,4	1,0164	1,64%
16	20	40	35	15A	0,0	0,000	0,238	0,7	1,0001	0,01%
17	20	20	40	43A	0,6	0,100	0,200	0,6	0,9899	1,01%
18	20	20	40	43A	0,2	0,150	0,310	1,0	0,9979	0,21%
19	20	20	40	43B	0,8	0,289	0,000	0,9	1,0134	1,34%
20	20	20	40	43A	1,2	0,150	0,250	1,3	0,9966	0,34%
21	20	20	45	44A	0,0	0,070	0,050	0,2	1,0147	1,47%
22	20	20	45	44A	0,4	0,150	0,200	0,7	0,9941	0,59%
23	20	20	45	44B	1,2	0,100	0,145	0,9	0,9932	0,68%
24	20	20	45	44B	1,4	0,250	0,297	1,9	0,9959	0,41%

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Como pode ser observado na Tabela 9, a variação entre a sub-rotina e os ábacos analisados, para todos os testes, ficaram abaixo de 2,0%. Além disso, como podem ocorrer pequenas diferenças em soluções determinadas graficamente, devido a leitura cometida, julga-se os resultados obtidos para a sub-rotina, nos concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa dentro do esperado.

### 5.1.2 Concretos do grupo II

Para concretos de classes C55 até C90 os resultados da sub-rotina foram comparados com os do software “OblqCalco”. Nele empregou-se a seguinte metodologia:

1. Definir o  $f_{ck}$  da seção analisada;
2. Descrever a geometria considerada;
3. Detalhar a posição e área das barras que compõem armadura longitudinal;
4. Escolher o  $N_{sd}$ ;
5. Para dado  $\alpha$ , verificar os ER, inserindo-os no “PFOC” para determinar a razão ER/ES.

Foram executadas 16 verificações entre o programa computacional e a sub-rotina elaborada, dois para cada valor de  $f_{ck}$  acima de 55 MPa múltiplo de cinco. De maneira análoga a validação anterior, considerou-se diferentes solicitações normais. As Figuras 62 a 64 detalham os dados introduzidos na primeira verificação ( $N = 1$ ).

**Figura 62 – Inserção das propriedades dos materiais**

$f_{ck}$ (MPa)	55	$f_{yk}$ (MPa)	500	$f_{pyd}$ (MPa)	1460
$\gamma_c$	1,4	$\gamma_s$	1,15	$f_{ptd}$ (MPa)	1626
$E_s$ (GPa)	210	$E_p$ (GPa)	200	$\epsilon_{su}$ (1/1000)	10
$\epsilon_{p,u}$ (1/1000)	35	$\eta_1$	1,2		

Ok      Cancelar

Fonte: Autoria própria (2019).

**Figura 63 – Definição da geometria e descrição das barras**

Número de pontos:	4	Número Barras	4		
X (cm)	Y (cm)	x (cm)	y (cm)	As (cm²)	
1	-10	-20	-6,5	-16,5	0,7854
2	10	-20	6,5	-16,5	0,7854
3	10	20	6,5	16,5	0,7854
4	-10	20	-6,5	16,5	0,7854

Fonte: Autoria própria (2019).

**Figura 64 – Obtenção dos ER para o  $\alpha$  escolhido**

Nd (kN)	500	M <sub>xx</sub> (kN.cm)	10240
		M <sub>yy</sub> (kN.cm)	0

**Calcular**

Lembrar: Compressão positiva; Tração negativa.

N<sub>max</sub> (kN) 2808,0199

N<sub>min</sub> (kN) -136,5913

Status: Ociooso

**Salvar Resultados...**

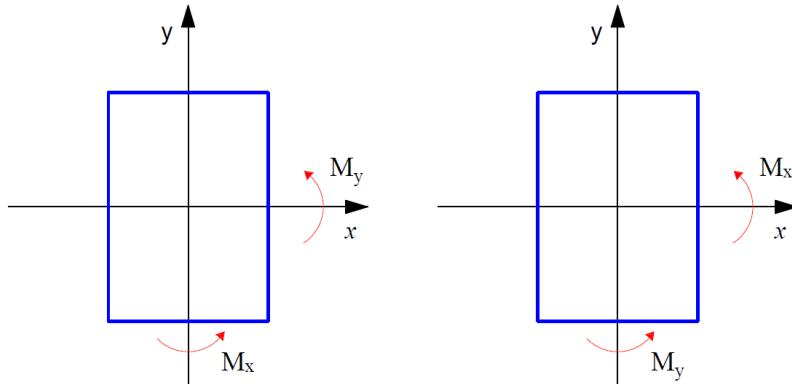
```

Angulo=72; Eps1=3,1252; Eps2=-4,6658; x/d=0,46672; força=500; Mxx = 5649,5; Myy =
3859,9
Angulo=75; Eps1=3,1252; Eps2=-4,8271; x/d=0,45936; força=500; Mxx = 4926,4; Myy =
4099,6
Angulo=78; Eps1=3,1252; Eps2=-5,07; x/d=0,44806; força=500; Mxx = 4070,9; Myy = 4356,5
Angulo=81; Eps1=3,1252; Eps2=-5,4671; x/d=0,42991; força=500; Mxx = 3163,2; Myy =
4564,8
Angulo=84; Eps1=3,1252; Eps2=-6,0987; x/d=0,40326; força=500; Mxx = 2211,3; Myy =
4708,4
Angulo=87; Eps1=3,1252; Eps2=-7,0543; x/d=0,36843; força=500; Mxx = 1150,2; Myy =
4820,9
Angulo=90; Eps1=3,1252; Eps2=-8,5414; x/d=0,3247; força=500; Mxx = -5,0589E-10; Myy =
4881,6

```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Destaca-se que as convenções utilizadas por Silva (2015) são opostas ao do presente trabalho: o Autor adota a notação de momento em torno do eixo, diferentemente da especificada no item 2.1 (pág. 22), onde define-se momento com relação ao longo do eixo, conforme descrito pela Figura 65.

**Figura 65 – Diferença entre as convenções consideradas**

**Presente Trabalho**

**Silva (2015)**

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Determinado os esforços resistentes para a inclinação da linha neutra escolhida, implementou-se esses na sub-rotina, obtendo-se a razão ER/ES. As Figuras 66 e 67 ilustram os

procedimentos empregados para a primeira verificação ( $N = 1$ ).

**Figura 66 – Dados de entrada na sub-rotina ( $N = 1$ , grupo II)**

```

▶ if __name__ == '__main__':
    fck1 = 5.5 # kN/cm²
    E = 21000 # kN/cm²
    altura1 = 40 # cm
    base1 = 20 # cm
    c11 = 2.5 # cm

    nx1 = 2
    ny1 = 2

    fi_t1 = 5 # mm
    fi_l1 = 10 # mm

    Nd1 = 500 # kN
    Mdx1 = 0 # kNm
    Mdy1 = 10274 # kNm

    Aso1 = (2*(nx1 + ny1) - 4) ** 2 * pi # cm²

    razao1 = verificacao(fck1, base1, altura1, c11, nx1,
                          ny1, fi_t1, fi_l1, Nd1, Mdx1,
                          Mdy1, Aso1, relatorio=True)

```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Figura 67 - Dados de saída da sub-rotina ( $N = 1$ , grupo II)**

- Parâmetros principais:

```

alfa = 0.00°
x = 10.08 cm
d1 = 36.50 cm
Ha = 40.00 cm
ymax = 20.00 cm
Aso = 3.14 cm²

```

- Verificação em si:

```
ER/ES = 1.0000. Verifica!
```

```
Process finished with exit code 0
```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Na Tabela 10 descreve-se os resultados da comparação realizada entre a sub-rotina e o programa computacional.

**Tabela 10 – Resultado das comparações entre a sub-rotina para seção retangular e o “OblqCalco”**

N	Dados do pilar			OblqCalco							"PFOC"	Variação	
	B (cm)	H (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>x</sub>	N <sub>y</sub>	α (°)	N <sub>sd</sub>	M <sub>sd,x</sub>	M <sub>sd,y</sub>	d'	Ø (mm)	ER/ES	
1	20	40	55	2	2	0	500,0	0,0	10274,0	3,5	10	1,0000	0,00%
2	20	20				-90	800,0	5439,2	0,0	4,0	20	1,0000	0,00%
3	30	30	60	2	3	-24	0,0	2834,0	3800,5	3,6	12,5	1,0000	0,00%
4	20	50				-69	2000,0	6581,9	13395,0	3,8	16	1,0000	0,00%
5	14	30	65	3	3	-48	1500,0	541,7	2630,9	3,5	10	1,0000	0,00%
6	14	70				-87	3000,0	3456,6	4828,0	3,5	10	1,0000	0,00%
7	14	50	70	2	4	-45	300,0	1230,4	21280,0	3,6	20	1,0000	0,00%
8	19	50				-90	5000,0	582,4	0,0	3,8	20	1,0000	0,00%
9	20	60	75	2	2	-55	1000,0	3931,2	27192,0	3,5	16	1,0000	0,00%
10	25	30				-1	0,0	130,6	4362,9	4,0	16	1,0005	0,05%
11	15	30	80	2	3	-60	2500,0	10,1	20,6	3,6	12,5	0,9995	0,05%
12	15	50				-89	1250,0	6048,2	1116,5	3,8	12,5	1,0000	0,00%
13	21	21	85	3	3	0	0,0	0,0	2345,7	4,0	10	1,0000	0,00%
14	21	42				-25	100,0	2256,7	19341,0	4,0	20	1,0000	0,00%
15	25	25	90	2	4	-90	0,0	6822,9	0,0	3,6	16	1,0000	0,00%
16	25	40				-66	4000,0	7496,5	8059,2	3,8	16	1,0000	0,00%

**Fonte:** Autoria própria (2019).

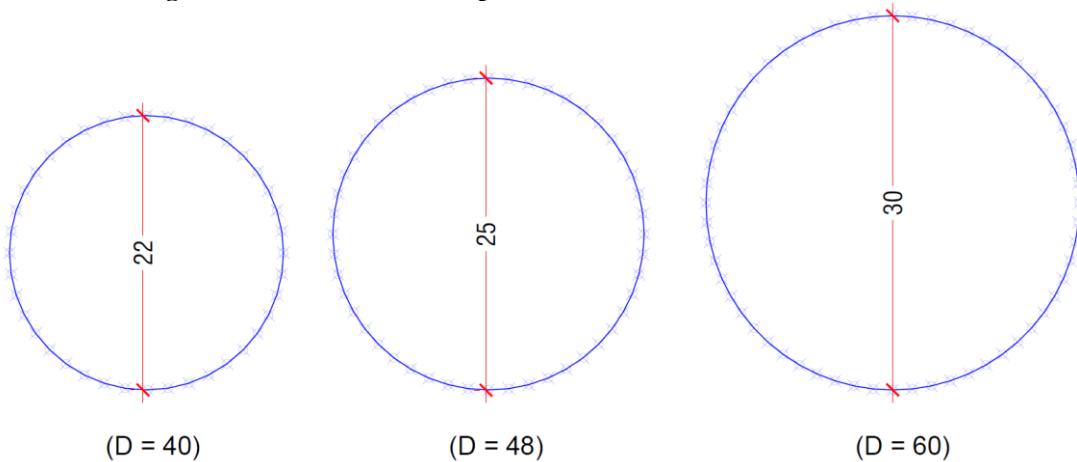
Conforme pode ser observado na Tabela 10, a diferença encontrada nos resultados ficou abaixo de 0,1% em todos os testes executados, portanto, considera-se satisfatório o desempenho da sub-rotina de verificação de seções retangulares submetidas FCO, para concretos do grupo II.

## 5.2 SUB-ROTINA DE VERIFICAÇÃO À FCO DE SEÇÕES CIRCULARES

O exame da sub-rotina referente a seção circular, para concretos de ambos os grupos, foi realizado com o programa “OblqCalco”. Conforme justificado anteriormente, o *software* não analisa seções circulares em si, contudo, conforme Silva (2015), por meio da aproximação de curvas por vários segmentos de retas pode-se modelar seções não poligonais no mesmo. Deste modo, aproxima-se as seções circulares por polígonos inscritos com elevado número de lados.

A Figura 68 apresenta o número de lados (D) dos polígonos inscritos para os diâmetros considerados.

**Figura 68 – Número de lados para os diferentes diâmetros considerados**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

Com o  $D$  definido para cada um dos diâmetros, determinou-se as coordenadas dos polígonos inscritos, para inseri-las no “OblqCalco”. Os demais procedimentos utilizados para comparação do programa com a sub-rotina foram análogos aos descritos no item anterior.

Foram efetuadas um total de oito verificações diferentes. Os esforços solicitantes estipulados nas verificações seguem a mesma lógica descrita no item 5.1 (pág. 113). Quanto aos diâmetros, optou-se pelos valores de 22 cm, 25 cm e 30 cm, conforme expresso na Figura 68. Com relação aos  $f_{cks}$ , considerou-se os valores múltiplos de dez, entre 20 e 90 MPa.

As Figuras 69 e 70 detalham os dados de entrada e de saída da sub-rotina para o teste  $N = 8$ .

**Figura 69 –Dados de entrada na sub-rotina ( $N = 8$ )**

```
if __name__ == '__main__':
    fck1 = 9.0 # kN/cm2
    fi_pilar1 = 30 # cm

    c11 = 2.5 # cm

    Nc1 = 6

    fi_t1 = 5 # mm
    fi_l1 = 20 # mm

    Nd1 = 2500 # kN
    Mdx1 = 185.07 # kNm
    Mdy1 = 10813 # kNm

    As01 = (fi_l1/20) ** 2 * pi * Nc1 # kNm
    razao1 = verificacao(fck1, fi_pilar1, c11, Nc1, fi_t1,
```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Figura 70 – Dados de saída da sub-rotina (N = 8)**

1 - Parâmetros principais:

Variáveis:

alfa = -1.00°

x = 26.8965 cm

d1 = 24.6207 cm

Ha = 30.00 cm

ymax = 15.00 cm

2 - Verificação em si:

MR/MS = 1.0038. Verifica!

Fonte: Autoria própria (2019).

Os resultados das comparações entre a sub-rotina e o programa computacional “OblqCalco” podem ser visualizados na Tabela 11.

**Tabela 11 - Resultado das comparações entre a sub-rotina para seção circular e o “OblqCalco”**

N	Pilar		“OblqCalco”							"PFOC"	Variação	
	φ <sub>p</sub> (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	D	N <sub>c</sub>	α (°)	N <sub>sk</sub>	M <sub>sd,x</sub>	M <sub>sd,y</sub>	d'	Ø (mm)		
1	20			6	-38	500,0	611,2	809,1	3,50	10	1,0253	2,53%
2	22	30	40	8	0	1000,0	0,0	3765,5	4,00	20	1,0242	2,42%
3		40		10	-57	0,0	2797,8	1828,5	3,63	12,5	1,0015	0,15%
4		50		6	-44	1250,0	3291,4	3419,2	3,80	16	1,0379	3,79%
5	25	60	48	12	-90	1500,0	0,0	3924,9	3,50	10	1,0152	1,52%
6		70		6	-15	750,0	1514,6	5307,4	3,63	12,5	1,0306	3,06%
7	30	80	60	8	-45	2000,0	6063,2	6063,2	3,50	10	1,0082	0,82%
8		90		6	-1	2500,0	185,1	10813,0	4,00	20	1,0038	0,38%

Fonte: Autoria própria (2019).

Ao confrontar os resultados da Tabela 11 com aqueles apresentados nas Tabelas 9 e 10 (págs. 105 e 109, respectivamente), nota-se que a variação dos resultados da primeira foi maior comparados com as demais. Afere-se que isso ocorre devido a seção transversal ter sido estimada por um polígono, pois como indicado na Tabela 11, ao aumentar *D* para 60, a diferença entre a sub-rotina e o “OblqCalco” diminuiu consideravelmente, em comparação com os demais diâmetros.

Outro fator que corrobora os valores encontrados é que ao compará-los, verifica-se que o algoritmo apresentou ER/ES > 1 para todos os testes realizados, o que é coerente, dado que, ao empregar um polígono inscrito como estimativa, adota-se uma área de concreto ligeiramente inferior, diminuindo a capacidade resistente real da seção.

Logo, ponderando sobre o descrito, e que a variação ficou menor que 5%, considera-se os resultados dentro do esperado.

### 5.3 “PFOC”

Com a finalidade de avaliar as diferenças entre a otimização contínua e a discreta, desenvolveu-se dois exemplos, uma para cada seção, onde comparou-se os resultados do “PFOC” com o programa computacional “POtimo”, desenvolvido por Souza (2017). Esse emprega o método dos pontos interiores para realizar a otimização de pilares à FCO. Salienta-se que no *software* não são consideradas bitolas comerciais, e que o custo da armadura transversal é desprezado.

Nos exemplos foram utilizados os custos unitários presentes no item 4.2.3 (pág. 99). O “POtimo” fixa o preço do aço em apenas um valor, assim estipulou-se a média dos valores detalhados para a armadura longitudinal na Tabela 4 (pág. 102), conforme expresso na Equação (114).

$$\left( \frac{3.93 + 4.44 + 2 \cdot 4.41}{4} \right) = 4.30 \text{ R\$/kg} \quad (114)$$

Já para o concreto, no programa computacional deve-se definir o custo de todas as classes de concreto entre 20 MPa a 90 MPa múltiplas de cinco. Contudo, como pode ser verificado na Tabela 5 (pág. 102), nem todas as faixas de  $f_{ck}$  são consideradas no presente trabalho. Para contornar este empecilho foi estabelecido nas resistências desprezadas valores exagerados de custo unitário, para que assim, indiretamente essas não fossem avaliadas.

A Figura 71 expõem os custos dos materiais empregados para as seções retangulares. Destaca-se que para pilares circulares o custo difere apenas nas fôrmas, de 38.33 R\$/m<sup>2</sup> para 41.29 R\$/m.

**Figura 71 – Custos inseridos no “POtimo” para seções retangulares**

Preços dos Materiais					
249.04	CONCRETO C20 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	356.12	CONCRETO C45 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C70 [R\\$/m <sup>3</sup> ]
271.45	CONCRETO C25 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	498.08	CONCRETO C50 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	684.85	CONCRETO C75 [R\\$/m <sup>3</sup> ]
283.9	CONCRETO C30 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C55 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C80 [R\\$/m <sup>3</sup> ]
308.81	CONCRETO C35 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C60 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C85 [R\\$/m <sup>3</sup> ]
326.24	CONCRETO C40 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C65 [R\\$/m <sup>3</sup> ]	3000	CONCRETO C90 [R\\$/m <sup>3</sup> ]
4.30	AÇO [R\\$/kg]	38.33	FORMA [R\\$/m <sup>2</sup> ]		

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Com relação aos critérios de projeto, considerou-se pilares com CAA 1 ( $\Delta c = 10 \text{ mm}$ ),

PDE igual a 3,00 m e vigas, em ambas as direções, com 40 cm de altura.

Em cada um dos exemplos foram verificadas três situações distintas: na primeira, a seção transversal e o  $f_{ck}$  são fixos, portanto, é otimizada apenas a disposição da armadura; na segunda situação apenas o  $f_{ck}$  é fixado; por fim, na terceira todos os parâmetros são otimizados.

### 5.3.1 Exemplo 1 – Seção circular

Neste item avalia-se um pilar com geometria circular submetido à FCO, com os esforços, resistência característica à compressão e distância entre o eixo da armadura de compressão e a face mais próxima do elemento ( $d'$ ) descritos na Tabela 12.

<b>Tabela 12 – Dados do exemplo 1</b>					
<b>Ø</b> <b>(cm)</b>	<b><math>N_{sk}</math></b> <b>(kN)</b>	<b><math>M_{sk,y}</math></b> <b>(kNm)</b>	<b><math>M_{sk,x}</math></b> <b>(kNm)</b>	<b><math>f_{ck}</math></b> <b>(MPa)</b>	<b><math>d'</math></b> <b>(cm)</b>
25	600	10000	5000	20	4,13

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Salienta-se que, diferentemente do “PFOC”, no programa computacional elaborado por Souza (2017) o  $d'$  é estimado. Para CAA 1 o software sugere adotar  $d' = 4.13$  cm, deste modo, considerou-se esse valor no cálculo dos testes.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos pelo “POtimo”, e pelo algoritmo computacional desenvolvido nesta monografia.

<b>Tabela 13 – Resultados obtidos com o Exemplo 1</b>							
<b>Programa</b>	<b>Situação</b>	<b><math>\phi_p</math> (cm)</b>	<b><math>\phi_l</math> (mm)</b>	<b><math>N_c</math></b>	<b><math>A_s</math> (cm<sup>2</sup>)</b>	<b><math>f_{ck}</math> (MPa)</b>	<b>Custo (R\$/m)</b>
"POtimo"	1	25,00	---	6	15,72	20	97,71
	2	31,89	---	6	4,71	20	77,15
	3	23,86	---	6	4,71	45	62,79
"PFOC"	1	25,00	20	6	18,85	20	113,73
	2	30,00	10	10	7,85	20	87,64
	3	25,00	10	6	4,71	45	70,12

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Conforme expresso na Tabela 13, com exceção da situação 3, as áreas de aço determinadas pelo algoritmo computacional, foram maiores em comparação ao software de Souza (2017). Também se observa que, a disposição das barras calculadas por ambos os

programas foi a mesma, exceto na situação 2, onde houve um acréscimo de quatro barras pelo algoritmo computacional implementado.

Quanto a seção transversal, ocorreram pequenas variações do diâmetro do pilar nas situações 2 e 3, conforme era esperado, já que o “PFOC” considera apenas valores múltiplos de 5 cm para  $\phi_p \geq 25$  cm.

Destaca-se que ao otimizar todos os parâmetros, ambos os programas indicaram o mesmo  $f_{ck}$  e área de aço, assim, como pode ser visualizado na Tabela 13, na situação 3 ocorreu a menor variação de resultados entre as metodologias. Entretanto, o fato de as áreas de aço serem iguais, indica que ambos os softwares computaram que a  $A_{s,min}$  para aquela seção,  $6\phi 10 = 4.71 \text{ cm}^2$ , satisfaria os esforços solicitantes, deste modo, caso esses fossem superiores, as áreas de aço encontradas poderiam ser distintas.

Como detalhado na Tabela 13 (pág. 124) em todos os testes o “PFOC” apresentou custos superiores em relação ao “POtimo”. Para melhor análise das divergências entre os programas, com relação ao aspecto econômico, detalha-se na

Tabela 14 as diferenças dos custos obtidos. Nela apresenta-se a diferença total, isto é, o acréscimo de custo do programa computacional desenvolvido, em relação aos resultados do software de Souza (2017). A Tabela 14 também fragmenta a diferença de custo nas componentes: armadura transversal, longitudinal, concreto e fôrmas, explicitando o custo de cada uma destas, e a porcentagem das mesmas com relação a diferença total.

**Tabela 14 – Diferenças dos custos entre os resultados**

<b>Situação</b>	<b>Diferença total</b>		<b>Diferenças parciais (componentes)</b>											
	<b>(%)</b>	<b>(R\$/m)</b>	<b>Arm. Trans.</b>	<b>(%)</b>	<b>(R\$/m)</b>	<b>Arm. Long.</b>	<b>(%)</b>	<b>(R\$/m)</b>	<b>Concreto</b>	<b>(%)</b>	<b>(R\$/m)</b>	<b>Fôrmas</b>	<b>(%)</b>	<b>(R\$/m)</b>
1	16,4%	16,02	23,7%	3,79	76,3%	12,22	0,0%	0,00	0,0%	0,0%	0,00	0,0%	0,0%	0,00
2	13,6%	10,49	65,8%	6,91	79,1%	8,30	-21,1%	-2,29	-23,2%	-2,45				
3	11,7%	7,33	77,5%	5,68	-18,8%	-1,38	21,3%	1,56	20,2%	1,48				

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Conforme a Tabela 14, a diferença total de custo variou entre 16.4%, na situação 1, e 11.7%, na situação 3. Em todas as situações, as armaduras, transversal e longitudinal, somadas representam acima de 58% da diferença total, o que demonstra a influência ocasionada pelas bitolas comerciais, pois além de interferirem nos AE possíveis, essas modificam a verificação da seção à FCO, pois, os parâmetros utilizados nessa, como  $d'$ ,  $d_1$  e  $A_s$ , estão diretamente relacionados ao  $\phi_l$  considerado.

Destaca-se que, como detalhado pela Tabela 14, na situação 3 há um decréscimo do custo da armadura longitudinal, contudo, como pode ser observado na Tabela 13 (pág. 124), a área de aço dadas pelo “PFOC” e pelo “POtimo” são iguais. Isso ocorre devido ao custo considerado no programa computacional ser uma média dos custos das barras, como demonstra a Equação (114) (pág. 123), logo o valor utilizado é diferente do real, o que justifica a ligeira variação do custo da armadura longitudinal.

Pela Tabela 14 (pág. 125) também constata-se que, ao aumentar os parâmetros considerados na otimização, a diferença de custo entre as soluções decaiu, onde na situação 3, chegou no valor mínimo de 7,33 R\$/m, advindo principalmente da armadura transversal, a qual é desprezada no “POtimo”. Deste modo, como expresso na Tabela 15, caso o custo da armadura transversal fosse computado pelo programa, a convergência dos custos das soluções seria acentuada.

**Tabela 15 – Diferença total de custo caso o “POtimo” considerasse o custo dos estribos**

Situação	Diferença Total (%)	(R\$)
1	12,1%	12,23
2	4,3%	3,58
3	2,4%	1,65

**Fonte:** Autoria própria (2019).

### 5.3.2 Exemplo 2 – Seção retangular

Neste exemplo analisa-se um pilar retangular à FCO, submetido aos esforços, e com os critérios de projeto, apresentados na Tabela 15. De forma análoga ao exemplo anterior, considera-se o  $d'$  sugerido pelo “POtimo”.

**Tabela 16 – Esforços solicitantes característicos e critérios de projeto no Exemplo 2**

B (cm)	H (cm)	$N_{sk}$ (kN)	$M_{sk,y}$ (kNm)	$M_{sk,x}$ (kNm)	$f_{ck}$ (MPa)	$d'$ (cm)
30	60	1107,14	221,43	8303	20	4,13

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Os resultados obtidos para esse pilar, com o programa computacional e com o “PFOC” podem ser vistos na Tabela 17.

**Tabela 17 – Resultados obtidos com o Exemplo 2**

<b>Programa</b>	<b>Situação</b>	<b>B (cm)</b>	<b>H (cm)</b>	<b>φl (mm)</b>	<b>N<sub>x</sub></b>	<b>N<sub>y</sub></b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>f<sub>ck</sub> (MPa)</b>	<b>Custo (R\$/m)</b>
"POtimo"	1	30,00	60,00	---	2	3	44,26	20	263,24
	2	40,93	71,18	---	6	3	11,65	20	197,82
	3	31,75	58,96	---	2	3	7,49	45	161,47
"PFOC"	1	30,00	60,00	20	4	6	50,27	20	299,21
	2	35,00	85,00	16	2	3	12,06	20	217,38
	3	30,00	65,00	10	4	3	7,85	45	177,83

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Como pode ser verificado na Tabela 17, neste exemplo ocorreram variações significativas entre as soluções apontadas pelo "PFOC" e o "POtimo".

As seções transversais indicadas por ambos, para as situações 2 e 3, apresentaram variações consideráveis, pois diferentemente do exemplo anterior, as dimensões calculadas para a seção transversal pelo "PFOC" não são necessariamente o múltiplo de cinco mais próximo dos valores do software de Souza (2017): na situação 2, por exemplo, a altura da seção ótima do primeiro é 85 cm, e não 70 cm.

Quanto ao custo da seção, observa-se que as soluções do "PFOC" são mais onerosas para as três situações em comparação ao "POtimo". Conforme descrito pela Tabela 18, a diferença de custo entre os programas é ocasionada em sua maioria pelo acréscimo de custo advindo das armaduras transversais e longitudinais.

**Tabela 18 - Diferenças dos custos entre os resultados**

<b>Situação</b>	<b>Diferença total (%)</b>	<b>Arm. Trans. (R\$)</b>	<b>Arm. Long. (R\$)</b>	<b>Concreto (R\$)</b>	<b>Fôrmas (R\$)</b>
1	13,7%	35,97	31,4%	11,29	68,6% 24,68 0,00% 0,00 0,00% 0,00
2	9,9%	19,56	48,7%	9,52	12,45% 2,44 7,84% 1,53 30,92% 6,05
3	10,1%	16,36	69,3%	11,34	-6,62% -1,08 16,98% 2,78 20,10% 3,29

**Fonte:** Autoria própria (2019).

O aumento de custo devido a armadura transversal ocorre devido as limitações já mencionadas do "POtimo". Quanto a ampliação referente a armadura longitudinal, esta é causada pela área de aço dada pelo "PFOC" ser maior em todas as situações, principalmente na primeira situação, onde a diferença foi de 6.01 cm<sup>2</sup>, resultando em um custo adicional de 24.68 R\$/m na seção.

Salienta-se que, assim como no Exemplo 1, na última situação houve um ligeiro

decréscimo do custo da armadura longitudinal, ocasionado pela mesma justificativa descrita no exemplo anterior.

O acréscimo da área de aço do “PFOC” aponta a influência que a consideração das bitolas comerciais pode ocasionar na otimização, pois interferem na própria otimização, limitando os parâmetros possíveis na disposição da armadura, modificando inclusive a verificação da seção à FCO.

Outro aspecto que pode ter afetado parcialmente a variação da área de aço entre os programas é a metodologia empregada para obtenção dos esforços de cálculo: Souza (2017) utiliza as envoltórias mínimas descritas pela NBR 6118 (ABNT, 2014), enquanto no “PFOC” aplica-se o procedimento de Bastos (2017), o qual para pilares à FCO, considera os momentos mínimos em ambas as direções.

Presume-se que esta questão impacte especialmente nos casos onde a seção é fixa (situação 1), pois, de forma análoga ao Exemplo 1, a diferença total de custo, tende a diminuir de acordo com o aumento do número de parâmetros otimizados: de 13.7%, na situação 1, a 10.1%, na situação 3, indicando maior proximidade das soluções, e consequentemente, dos esforços solicitantes de cálculo empregados na otimização.

Assim como no Exemplo 1, o comportamento descrito tenderia a se intensificar caso o “POtimo” não desprezasse o custo dos estribos, como expresso na Tabela 19.

**Tabela 19 – Diferenças totais caso o “POtimo” considerasse o custo da armadura transversal**

<b>Situação</b>	<b>Exemplo 1</b>		<b>Exemplo 2</b>	
	<b>(%)</b>	<b>(R\$)</b>	<b>(%)</b>	<b>(R\$)</b>
1	12,1%	12,23	9,0%	24,68
2	4,3%	3,58	4,8%	10,04
3	2,4%	1,65	2,9%	5,02

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Entretanto, mesmo os custos, e as áreas de aço, convergindo conforme prossegue-se as situações, destaca-se que a disposição das barras do “PFOC” e do “POtimo” divergiram em todas as situações, como detalhado na Tabela 17 (pág. 127). Além disso, conforme mencionado anteriormente, as diferenças entre as seções transversais nas situações 2 e 3 são consideráveis, assim constata-se que as diferenças exibidas entre as metodologias não podem ser desconsideradas, sendo relevantes.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo computacional, denominado “PFOC”, para otimização de pilares circulares e retangulares, com armadura simétrica, esbeltez  $\lambda \leq 90$ , e ausentes de esforços transversais, submetidos à FCO.

O algoritmo implementado realiza a otimização discreta de pilares, isto é, o AE apresentado, é executável: consideram-se bitolas comerciais, dimensões de seção transversal que facilitam a execução, e permite-se a análise de concretos com  $f_{ck}$  de até 90 MPa. Ademais, a solução obtida pelo programa satisfaz os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) para pilares, como: áreas de aço, dimensões e espaçamentos máximos e mínimos, estribos suplementares e a definição de elementos lineares.

De maneira geral, o programa opera por meio de cinco etapas:

- Etapa 1 - O usuário define os custos dos materiais, esforços solicitantes característicos, e demais critérios de projeto;
- Etapa 2 - Delimita-se os arranjos estruturais a serem analisados, calculando as combinações de seção transversal, disposição de armadura e  $f_{ck}$ , dentro do intervalo definido, que atendem os critérios normativos da NBR 6118 (ABNT, 2014);
- Etapa 3 – Determina-se o custo de cada AE encontrado, no presente trabalho considerou-se os custos indicados pela TCPO para a região de Curitiba no mês de setembro de 2019. Ao finalizar o cálculo, estrutura-se os AE em uma tabela organizada em ordem crescente de custo;
- Etapa 4 – Percorre-se a tabela, no sentido do menor para o maior custo, obtendo-se os esforços de cálculo e efetuando a verificação do ELU, o primeiro arranjo que satisfazê-lo é a solução com maior vantagem econômica. Na determinação dos esforços de cálculo, as imperfeições locais são avaliadas pelo momento mínimo, quanto aos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem, utiliza-se o MPPCA para ambas as seções;
- Etapa 5 – Detalha-se, caso exista, a solução mais econômica, além de apresentar os procedimentos empregados na definição dos esforços de cálculo.

Para verificação das seções à FCO, propôs-se uma nova metodologia, baseada no algoritmo de Araújo (2010). Nela considera-se a não linearidade das tensões de compressão do concreto, por meio do diagrama da parábola-retângulo, deste modo, optou-se por utilizar o

teorema de Green para deduzir equações aplicáveis no contorno, de ambas as seções, a fim de obter os esforços resistentes do concreto.

Com o intuito de averiguar a confiabilidade do procedimento apresentado, comparou-se os resultados das sub-rotinas implementadas para a verificação à FCO com os ábacos de Pinheiro *et al* (2009) e o *software* “OblqCalco”, desenvolvido por Silva (2015). Obteve-se variações entre estes e as sub-rotinas menores que 4% em todos os testes realizados, logo, avaliou-se como satisfatórios os resultados alcançados, e assim, a metodologia proposta sendo válida.

Através de exemplos, procurou-se aferir as diferenças entre a otimização discreta e contínua, assim, nos Exemplos 1 e 2 confrontou-se as soluções calculadas pelo “PFOC” com as do programa “POtimo”, de Souza (2017), para uma seção circular e retangular submetidas à FCO, respectivamente. Obteve-se um custo no software desenvolvido entre 16.4% a 9.9% superior. Todavia, constatou-se, também, que essas diferenças, de custo e área de aço, entre as metodologias tendem a diminuir conforme o número de parâmetros considerados na otimização aumenta.

Entretanto, verificou-se que a disposição da armadura dada pelos programas no Exemplo 2 divergiu, mesmo com a redução de custo observada, além disso, a seção transversal indicada por ambos foi notavelmente distinta: em torno de 14 cm de diferença para a altura na situação 2 do Exemplo 2. Deste modo, ponderando as informações detalhadas, e que as diferenças máximas de custo são superiores a 15%, conclui-se que as metodologias apresentam discordâncias significativas, portanto, não devem ser desprezadas.

## 6.2 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Através do apresentado, verificou-se pontos que podem ser abordados futuramente, com o objetivo de melhorar o funcionamento do algoritmo computacional desenvolvido, bem como tornar sua aplicabilidade mais ampla.

Para melhor interação com o usuário, e evitar possíveis erros de inserção de dados, sugere-se o desenvolvimento de uma interface gráfica para o programa. Outro aspecto a ser aprimorado no “PFOC” é o seu relatório, recomenda-se que contenha maior grau de detalhes, de forma que, explice equações, apresente os itens normativos utilizados para determinação dos esforços de cálculo, e que forneça o detalhamento gráfico completo da seção, calculando

inclusive as emendas. Para que o relatório atenda esses critérios pode-se alterá-lo para que seja gerado em PDF e não no *prompt* do IDE utilizado.

Em pilares de edifícios altos e/ou de fachada, o efeito do vento pode ser relevante. Assim, uma modificação interessante seria a inclusão da análise de esforços transversais no “PFOC”, como cisalhamento e torção, através da implementação dos requisitos dos itens 17.4 e 17.5 da NBR 6118 (ABNT, 2014), respectivamente.

Propõem-se para tralhados futuros, a consideração de diferentes bitolas de armadura transversal para o mesmo AE, em seções retangulares. Conforme detalhado no item 2.3.6 (pág. 48), o  $\phi_t$  impacta diretamente no número de ganchos, portanto, a alteração do diâmetro do estribo pode ocasionar redução de custos da seção. Indica-se que, para arranjos estruturais com  $N_{gx}$  ou  $N_{gy}$  diferente de zero, sejam avaliadas duas bitolas distintas: 5 mm e 6.3 mm.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) permite a utilização de vários métodos distintos para o cálculo de imperfeições localizadas, incluindo envoltórias mínimas para pilares retangulares. No presente trabalho adotou-se os procedimentos de Bastos (2017), os quais para pilares à FCO podem manifestar, em certas situações, esforços de cálculo conservadores. Deste modo, sugere-se um estudo das diferentes metodologias apresentadas pela norma, incluindo as envoltórias mínimas de primeira e segunda ordem, para que assim, dentre as possibilidades normativas, verifique-se qual destas proporciona maior economia em projetos de pilares.

Dependendo dos esforços solicitantes o procedimento utilizado para otimização pode tornar-se oneroso, levando algumas horas para ser completado. Assim, podem ser desenvolvidas rotinas para diminuir o tempo de processamento do algoritmo, como verificações intermediárias. Também recomenda-se avaliar a viabilidade do uso de métodos teóricos de otimização discreta.

Por fim, há diversos tópicos que podem ser implementados no “PFOC” com o objetivo de melhorar sua aplicabilidade: pilares-parede, pilares esbeltos e medianamente esbeltos, e geometrias não simétricas, como a em “L”.

## REFERÊNCIAS

- ARAUJO, J. M. de. **Curso de concreto armado.** 3. ed. Rio Grande do Sul: Dunas, 2010. 340 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7480:** Aço destinado para estruturas de concreto armado – Especificação. Rio de Janeiro, 2008.
- BASTOS, E. A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos.** Tese (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- BASTOS, P. S. **Fundamentos do concreto armado.** Notas de aula – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019.
- BASTOS, P. S. **Pilares de concreto armado.** Notas de aula – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.
- BENINCÁ, M. E. **Comparação entre modelos de análise estrutural de edifícios em concreto armado:** estudo de caso. 196 f. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
- BRENT, R. P. **Algorithms for minimization without derivatives.** 1 ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973.
- BURDEN, R. L. et al. **Análise numérica.** 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 896 p.
- CAMPOS, J. C de. **Elementos de fundações em concreto.** São Paulo: Oficina de textos, 2015.
- CARVALHO, R. C; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado.** Volume 2. 1 ed. São Paulo: PINI, 2009.
- CARVALHO, S. P de. **Área e o perímetro de um círculo.** 1º Colóquio da Região Sudeste – Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.
- CLÍMACO, J. C. T. de. **Estruturas de concreto armado:** fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação. 3 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016. 439 p.
- FANGOHRS, H. A. comparison of C, MATLAB, and Python as teaching languages in engineering. **International Conference on Computational Science.** Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. P. 1210-1217.
- FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto:** solicitações normais. 1. ed. Rio de Janeiro: Guanabara dois S.A. 1981. 462 p.
- FUSCO, P. B. **Técnica de armar as estruturas de concreto.** 2. ed. São Paulo: PINI, 2013.

JÚNIOR, S. D. C. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado.** Monografia (especialização) – Escola politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Leitão, E. M. M. **Estudo Comparativo de Métodos Aproximados para Análise do Efeito de Segunda Ordem em Pilares Eobelos de Concreto Armado sob Flexão Composta Reta.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

LEONHARDT, F; MÖNNING, E. **Construções de concreto:** Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2008. 334 p.

LYRA, P. H. C. de. et al. Desenvolvimento de uma ferramenta didática para o estudo da flexão composta oblíqua em seções quaisquer de concreto armado. **IBRACON**, São Paulo, v. 3, n.2, p. 205 – 218, 2010.

MARANHÃO, G. M. **Fôrmas para concreto: subsídio para a otimização do projeto segundo a NBR 7190/97.** 226 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

MARINO, M. A. **Seções transversais de concreto armado sujeitas a solicitações normais.** Curitiba: COPEL, 1979.

MEDEIROS, G. A. **Programa para análise e dimensionamento da área de armadura das seções de concreto armado submetidas a flexão oblíqua composta.** 62 f. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Divisa de Engenharia de Infra-estrutura Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

MONTOYA, P. J. **Hormigon Armado:** ábacos para el cálculo de secciones en el estado último de agotamiento. Barcelona, 1979.

OLIPHANT, T. E. Python for scientific computing. **Computing in Science & Engineering**, v. 9, n. 3, p. 10-20, 2007.

PINHEIRO, L. M. et al. **Estruturas de concreto:** ábacos para flexão oblíqua. São Carlos, 2009.

PINTO, V. S. **Dimensionamento de pilares de concreto com seção transversal retangular usando envoltórias de momentos.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

SANTOS, L. M. dos. **Cálculo de concreto armado segundo a NB-1/78 e o CEB.** 1 ed. V. 2. São Paulo: LMS, 1981.

SCADELAI, M. A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003.** 136 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC USP), São Carlos, 2004.

SCADELAI, M. A; PINHEIRO, L. M. **Estruturas de concreto – capítulo 16.** Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC USP), São Carlos, 2005.

SILVA, L. M. **Programa computacional para análise e verificação de seções de concreto armado e pretendido com flexão oblíqua composta.** 192 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

SMANIOTTO, A. **Dimensionamento e detalhamento automático de pilares retangulares submetidos à flexão composta oblíqua.** 242 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

SOARES, R. De C. **Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão – aplicação a pavimentos.** 209 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1997.

SOUZA, P. M. dos S. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado de acordo com a NBR 6118:2014.** 191 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017

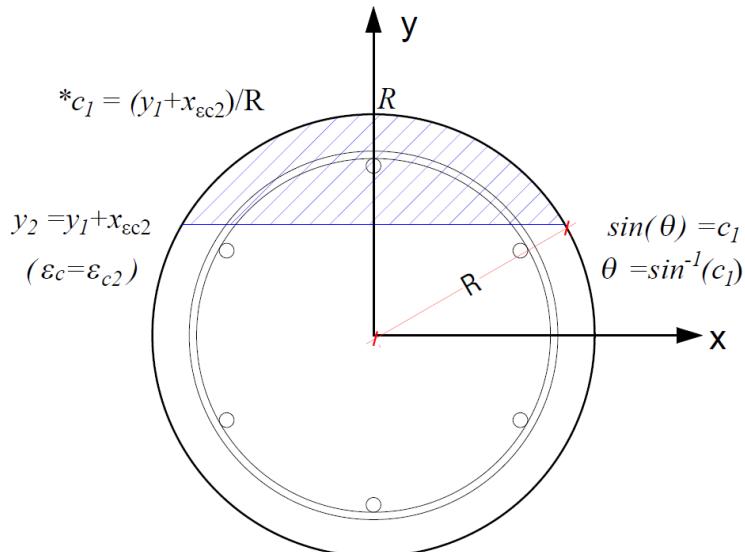
WEISSTEIN, E. W. **Brent's Method.** Mathword – A Wolfram Web Resource. Disponível em:< <http://mathworld.wolfram.com/BrentsMethod.html>>

**APÊNDICE A - Equações para pilares circulares**

## PARCELA RETANGULAR

Na parcela retangular, para a seção circular, tem-se uma região simples de integração, como exposto na Figura 37. Deste modo, o uso do teorema de Green não é necessário. Para facilitar o desenvolvimento das Equações utilizou-se coordenadas polares, portanto ocorre a região de integração descrita na Figura 72. Assim, as deduções das Equações (86) e (87), são dadas pelas Equações (115) e (116), respectivamente.

**Figura 72 – Região de integração da parcela retangular em seções circulares**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

- **Área ( $A_{cc,r}$ )**

$$\begin{aligned}
 \iint_A dA &= 2 \cdot \int_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{y_1+x_{ec2}}{\sin(\theta)}}^R r \, dr \, d\theta = 2 \cdot \int_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \left( R^2 + \frac{(y_1 + x_{ec2})^2}{\sin^2(\theta)} \right) d\theta = \\
 R^2 \cdot \theta - \cot(\theta) \cdot (y_1 + x_{ec2})^2 \Big|_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} &= R^2 \cdot \theta - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot (y_1 + x_{ec2})^2 \Big|_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 R^2 \cdot \theta - \frac{\cos(\theta)}{\left(\frac{y_1 + x_{ec2}}{R}\right)} \cdot (y_1 + x_{ec2})^2 \Big|_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} &= R^2 \cdot \theta - R \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{(y_1 + x_{ec2})^2}{(y_1 + x_{ec2})} \Big|_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 R^2 \cdot \theta - R \cdot \cos(\theta) \cdot (y_1 + x_{ec2}) \Big|_{\arcsin(c_1)}^{\frac{\pi}{2}} &= R^2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(c_1) \right) - R \cdot (y_1 + x_{ec2}) \cdot \cos(\arcsin(c_1))
 \end{aligned} \tag{115}$$

- **Momento estático de área ao longo do eixo y ( $S_y$ )**

$$\begin{aligned}
 \iint_A y \, dA &= 2 \cdot \int_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\theta = \\
 \frac{2}{3} \cdot \int_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} &\left( R^3 \cdot \sin(\theta) + \frac{(y_1 + x_{ec2})^3}{\sin(\theta)^2} \right) d\theta = \frac{2}{3} \cdot \left[ -R^3 \cdot \cos(\theta) + \frac{(y_1 + x_{ec2})^3}{\tan(\theta)} \right]_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} = \\
 \frac{2}{3} \cdot \left[ -R^3 \cdot \cos(\theta) + \frac{(y_1 + x_{ec2})^3}{\left( \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right)} \right]_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} &= \frac{2}{3} \cdot \left[ -R^3 \cdot \cos(\theta) + \frac{\cos(\theta) \cdot (y_1 + x_{ec2})^3}{\left( \frac{y_1 + x_{ec2}}{R} \right)} \right]_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} = \\
 \frac{2}{3} \cdot \left[ R \cdot \cos(\theta) \cdot (-R^2 + (y_1 + x_{ec2})^2) \right]_{\arcsin(c_1)}^{\pi/2} &= \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos(\arcsin(c_1)) \cdot (R^2 - (y_1 + x_{ec2})^2)
 \end{aligned} \tag{116}$$

### PARCELA PARABÓLICA

Conforme expresso na Figura 43 (pág. 85) ocorrem duas integrais distintas: ao longo da reta e do segmento circular.

Para o trecho linear ocorre a situação 3 ( $\Delta x \neq 0$  e  $\Delta y = 0$ ) descritas para as geometrias retangulares. Deste modo, a dedução das equações, referentes a esta situação, para cálculo de  $F_{r,p}$  e  $M_{ry,p}$  podem ser verificadas no Apêndice B.

A seguir apresenta-se o desenvolvimento das Equações presentes no Quadro 12 (pág. 86) do segmento circular. Expõem-se os esforços resistentes na seguinte ordem: força ( $F_{r,p}$ ) e momento ao longo do eixo y ( $M_{ry,p}$ ). Para cada um destes esforços explicitamente o cálculo das funções  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$ , em sequência apresenta-se a parametrização adotada, e por fim demonstra-se a equação, para cálculo dos esforços.

#### **Força ( $F_{r,p}$ )**

- Cálculo de  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = -\sigma_{cd,p} = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right], \quad Q(x', y') = 0 \tag{117}$$

$$\begin{aligned} P(x', y') &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right] dy' = \\ &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int 1 dy' - k_3 \cdot \int (k_2 - y')^n dy' \right] \end{aligned} \quad (118)$$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] \quad (119)$$

## 1. Parametrização

$$x = r \cdot \cos(\theta), \quad y = r \cdot \sin(\theta) \quad (120)$$

## 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned} F_{r,p} &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ y + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y)^{n+1}}{n+1} \right] dx = \\ &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ y + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y(\theta))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot \frac{\partial x(\theta)}{\partial \theta} d\theta = \\ &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ r \cdot \sin(\theta) + \frac{k_3}{n+1} \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \right] \cdot (-r \cdot \sin(\theta)) d\theta = \\ &= 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ r^2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2(\theta) d\theta + \left( \frac{k_3 \cdot r}{n+1} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} d\theta \right] = \\ &\quad \left. \begin{aligned} &0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ \begin{aligned} &r^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{4} \cdot [\sin(2 \cdot \theta_1) - \sin(2 \cdot \theta_2)] \right] + \dots \\ &\left( \frac{k_3 \cdot r}{n+1} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} d\theta \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (121) \end{aligned}$$

$$F_{r,p} = 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ \begin{aligned} &r^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{4} \cdot [\sin(2 \cdot \theta_1) - \sin(2 \cdot \theta_2)] \right] + \dots \\ &\left( \frac{k_3 \cdot r}{n+1} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

## Momento resistente ao longo do eixo y ( $M_{ry,p}$ )

- Cálculo de  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = -y' \cdot \sigma_{cd,p} = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot y' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right], \quad Q(x', y') = 0 \quad (123)$$

$$\begin{aligned} P(x', y') &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int y' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right] dy = \\ &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int y' dy - k_3 \cdot \int (k_2 - y')^n dy \right] = \\ &= -0.85 \cdot f_{cd} \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \end{aligned} \quad (124)$$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \quad (125)$$

### 1. Parametrização

Vide Equação (120).

### 3. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned}
M_{ry,p} = & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot y^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y)^{n+1} \cdot (n \cdot y + k_2 + y)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dx = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{1}{2} \cdot y(\theta)^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y(\theta))^{n+1} \cdot (n \cdot y(\theta) + k_2 + y(\theta))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \cdot \frac{\partial x(\theta)}{\partial \theta} = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{1}{2} \cdot (r \cdot \sin(\theta))^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \cdot (-r \cdot \sin(\theta)) d\theta = \\
& 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ \frac{r^3}{2} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^3(\theta) d\theta + \left( \frac{k_3 \cdot r}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta \right\} = \\
& 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left\{ \frac{r^3}{2} \cdot \left[ -\frac{3}{4} \cdot \cos(\theta) + \frac{1}{12} \cdot \cos(3 \cdot \theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \left( \frac{k_3 \cdot r}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta \right\} = \\
& 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \frac{r^3}{2} \cdot \left\{ \frac{3}{4} \cdot [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] + \frac{1}{12} \cdot [\cos(3\theta_2) - \cos(3\theta_1)] \right\} + \dots \\
& 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{k_3 \cdot r}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned}
M_{ry,p} = & 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \frac{r^3}{2} \cdot \left\{ \frac{3}{4} \cdot [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)] + \frac{1}{12} \cdot [\cos(3\theta_2) - \cos(3\theta_1)] \right\} + \dots \\
& 0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left( \frac{k_3 \cdot r}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k_2 - r \cdot \sin(\theta))^{n+1} \cdot (k_2 + (n+1) \cdot r \cdot \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{127}$$

**APÊNDICE B - Equações para pilares retangulares**

A seguir detalha-se o desenvolvimento das equações presentes no Quadro 11 (pág. 82). Apresentam-se os esforços resistentes na seguinte ordem: força ( $F_{r,p}$ ), momento ao longo do eixo y ( $M_{ry,p}$ ) e momento ao longo do eixo x ( $M_{rx,p}$ ). Para cada um destes esforços explicitamente o cálculo das funções  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$ , em sequência, para cada um dos casos (ver Figura 42, pág. 81), apresenta-se a parametrização adotada, e por fim demonstra-se a equação, para cálculo dos esforços, respectiva a cada caso.

### Força ( $F_{r,p}$ )

- Cálculo de  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int [1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n] dy' = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int 1 dy' - k_3 \cdot \int (k_2 - y')^n dy' \right] \quad (128)$$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right], \quad Q(x', y') = 0 \quad (129)$$

- Cálculo dos esforços situação 1 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

#### 1. Parametrização

$$x'(t) = t, \quad y'(t) = a \cdot t + b \quad (130)$$

Onde a, b e t são dados por:

$$a = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{x'_{i+1} - x'_i}, \quad b = -a \cdot x'_i + y'_i, \quad x'_{i+1} \leq t \leq x'_i \quad (131)$$

#### 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned}
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_C \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] dx = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ y'(t) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ (a \cdot t + b) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - (a \cdot t + b))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot 1 dt = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t \right) - \frac{k_3}{a \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \cdot (k_2 - a \cdot t - b)^{n+2} \right]
\end{aligned} \tag{132}$$

$$F_{r,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t \right) - \frac{k_3}{a \cdot (n+1) \cdot (n+2)} \cdot (k_2 - a \cdot t - b)^{n+2} \right] \tag{133}$$

- Cálculo dos esforços situação 2 -  $\Delta x' = 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

### 1. Parametrização

$$x'(t) = c, \quad y'(t) = t \tag{134}$$

Onde  $c$  e  $t$  são dados por:

$$c = x'_i, \quad y'_{i+1} \leq t \leq y'_i \tag{135}$$

### 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned}
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_C \left[ y + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] dx \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ y'(t) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \\
& -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ (t) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - (t))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot 0 dt = 0
\end{aligned} \tag{136}$$

$$F_{r,p}(t) = 0 \tag{137}$$

- Cálculo dos esforços situação 3 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' = 0$

### 1. Parametrização

$$x'(t) = t, \quad y'(t) = c \quad (138)$$

Onde t e c são dados por:

$$c = y'_{i+1}, \quad x'_{i+1} \leq t \leq x'_i \quad (139)$$

### 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned} & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_c^{x'_i} \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] dx = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ y'(t) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \end{aligned} \quad (140)$$

$$-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ (c) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right] dt =$$

$$-0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ (c) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$F_{r,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ (c) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right] \quad (141)$$

### Momento resistente ao longo de y ( $M_{ry,p}$ )

- Cálculo de  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = -y' \cdot \sigma_{cd,p} = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot y' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right], \quad Q(x', y') = 0 \quad (142)$$

$$\begin{aligned} P(x', y') &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int y' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right] dy = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int y' dy - k_3 \cdot \int (k_2 - y')^n dy \right] = \end{aligned} \quad (143)$$

$$-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right]$$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \quad (144)$$

- Cálculo dos esforços situação 1 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

### 1. Parametrização

$$v = a \cdot t + b, \quad dt = \frac{dv}{a} \quad (145)$$

Onde a, b, v é dado por:

$$\frac{y'_{i+1} - y'_i}{x'_{i+1} - x'_i}, \quad b = -a \cdot x'_i + y'_i, \quad y'_{i+1} \leq v \leq y'_i \quad (146)$$

### 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned} & -0.85 \cdot f_{cd} \int_C \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dx = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot y'(t)^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1} \cdot (n \cdot y'(t) + k_2 + y'(t))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot (a \cdot t + b)^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - (a \cdot t + b))^{n+1} \cdot (n \cdot (a \cdot t + b) + k_2 + (a \cdot t + b))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dt = \\ & -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{a} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - v)^{n+1} \cdot (k_2 + v \cdot (n+1))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dv = \\ & -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{a} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \int v^2 dv + \left( \frac{k_3}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right) \cdot \int (k_2 - v)^{n+1} \cdot (k_2 + v \cdot (n+1)) dv \right] = \\ & -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{a} \left[ \frac{1}{6} \cdot v^3 - \frac{k_3}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \cdot (k_2 - v)^{n+2} \cdot (v \cdot (n+1) + 2 \cdot k_2) \right] \end{aligned} \quad (147)$$

$$M_{ry,p}(v) = -\frac{0.85 \cdot f_{cd}}{a} \left[ \frac{1}{6} \cdot v^3 - \frac{k_3}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \cdot (k_2 - v)^{n+2} \cdot (v \cdot (n+1) + 2 \cdot k_2) \right] \quad (148)$$

- Cálculo dos esforços situação 2 -  $\Delta x' = 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

## 1. Parametrização

Vide Equações (134) e (135).

## 2. Desenvolvimento das integrais

Vide  $F_{r,p}$ , logo:

$$M_{ry,p}(t) = 0 \quad (149)$$

- Cálculo dos esforços situação 3 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' = 0$

## 1. Parametrização

Vide Equações (138) e (139).

## 3. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned} & -0.85 \cdot f_{cd} \int_c^f \left[ \frac{1}{2} \cdot y'^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1} \cdot (n \cdot y' + k_2 + y')}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dx = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot y'(t)^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1} \cdot (n \cdot y'(t) + k_2 + y'(t))}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int \left[ \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1} \cdot (n \cdot c + k_2 + c)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] dt = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1} \cdot (n \cdot c + k_2 + c)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \end{aligned} \quad (150)$$

$$M_{ry,c}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot t \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1} \cdot (n \cdot c + k_2 + c)}{n^2 + 3 \cdot n + 2} \right] \quad (151)$$

## Momento resistente ao longo de x ( $M_{rx,p}$ )

- Cálculo de  $P(x', y')$  e de  $Q(x', y')$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x' \cdot \sigma_{cd,p} = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot x' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right], \quad Q(x', y') = 0 \quad (152)$$

$$\begin{aligned}
P(x', y') &= -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int x' \cdot \left[ 1 - k_3 \cdot (k_2 - y')^n \right] dy = \\
&-0.85 \cdot f_{cd} \cdot x' \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{153}$$

$$P(x', y') = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot x' \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] \tag{154}$$

- Cálculo dos esforços situação 1 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

## 1. Parametrização

Vide Equações (130) e (131).

## 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned}
&-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_C x' \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] dx = \\
&-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int x'(t) \cdot y'(t) \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{t} \right) dt + \frac{k_3}{n+1} \cdot \int x'(t) \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1} \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt \right] = \\
&-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \int t \cdot (a \cdot t + b) dt + \frac{k_3}{n+1} \cdot \int t \cdot (k_2 - a \cdot t - b)^{n+1} dt \right] = \\
&-0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot a \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot t^2 \right) - \dots \right. \\
&\left. \frac{k_3}{a^2 \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 5 \cdot n + 6)} \cdot (-a \cdot t - b + k_2)^{n+2} \cdot (a \cdot t \cdot (n+2) - b - k_2) \right]
\end{aligned} \tag{155}$$

$$M_{rx,p}(t) = -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot a \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot t^2 \right) - \dots \right. \\
\left. \frac{k_3}{a^2 \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 5 \cdot n + 6)} \cdot (-a \cdot t - b + k_2)^{n+2} \cdot \dots \right. \\
\left. (a \cdot t \cdot (n+2) - b - k_2) \right] \tag{156}$$

- Cálculo dos esforços situação 2 -  $\Delta x' = 0$  e  $\Delta y' \neq 0$

## 1. Parametrização

Vide Equações (134) e (135).

## 2. Desenvolvimento das integrais

Vide  $F_{r,p}$ , logo:

$$M_{rx,p}(t) = 0 \quad (157)$$

- Cálculo dos esforços situação 3 -  $\Delta x' \neq 0$  e  $\Delta y' = 0$

### 1. Parametrização

Vide Equações (138) e (139).

## 2. Desenvolvimento das integrais

$$\begin{aligned} & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int_C x' \cdot \left[ y' + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y')^{n+1}}{n+1} \right] dx = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int x'(t) \cdot \left[ y'(t) + \frac{k_3 \cdot (k_2 - y'(t))^{n+1}}{n+1} \right] \cdot \left( \frac{\partial x'(t)}{\partial t} \right) dt = \\ & -0.85 \cdot f_{cd} \cdot \int t \cdot \left[ c + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right] dt = \\ & -0.425 \cdot f_{cd} \cdot t^2 \cdot \left[ c + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right] \end{aligned} \quad (158)$$

$$M_{rx,p}(t) = -0.425 \cdot f_{cd} \cdot t^2 \cdot \left[ c + \frac{k_3 \cdot (k_2 - c)^{n+1}}{n+1} \right] \quad (159)$$

**APÊNDICE C - Tabelas e Quadros adicionais**

**Tabela 20 – Seções transversais consideradas inicialmente em pilares retangulares**

(continua)

B (cm)	Altura (cm)																	
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14																		
15	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	-	-	-	-	-	-	-
16	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	-	-	-	-	-	-
17	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	-	-	-	-	-
18	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	-	-	-	-
19	19	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	-	-
20	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	-
21	21	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	-
22	22	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
23	23	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
24	24	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
25	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
30	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
35	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
																		135
																		140
																		145
																		150
																		155
																		160
																		165

Fonte: Autoria própria (2019).

**Tabela 20 – Seções transversais consideradas inicialmente em pilares retangulares**

(conclusão)

B (cm)	Altura (cm)							
	35	160	165	170	175	-	-	-
40	170	175	180	185	190	195	200	

Fonte: Autoria própria (2019).

**Tabela 21 – Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção retangular com  $B = 19\text{ cm}$  e  $H = 19\text{ cm}$**   
**(continua)**

fck	B	H	Øt	St	Øl	Nx	<th>Ngx</th> <th>Ngy</th> <th>Cnom</th> <th>As</th> <th>R\$/m</th>	Ngx	Ngy	Cnom	As	R\$/m
25	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	49,16
30	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	49,61
35	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	50,51
40	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	51,13
45	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	52,21
25	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	54,00
25	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	54,00
30	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	54,45
30	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	54,45
35	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	55,35
35	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	55,35
40	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	55,97
40	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	55,97
25	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	56,54
30	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	56,99
45	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	57,05
45	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	57,05
50	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	57,34
35	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	57,88
40	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	58,51
25	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	58,84
30	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	59,29
45	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	59,59
35	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	60,19
40	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	60,81
45	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	61,89
50	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	62,18
50	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	62,18
75	19	19	5	12	10	2	2	0	0	2,5	3,14	64,08
50	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	64,72
50	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	67,02
25	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	67,13
30	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	67,58
35	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	68,48
75	19	19	5	12	10	3	2	0	0	2,5	4,71	68,92
75	19	19	5	12	10	2	3	0	0	2,5	4,71	68,92
40	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	69,11
45	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	70,19
75	19	19	5	15	12,5	2	2	0	0	2,5	4,91	71,46
75	19	19	5	12	10	3	3	0	0	2,5	6,28	73,76
50	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	75,32

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Tabela 21 – Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção retangular com B = 19 cm e H = 19 cm  
(conclusão)**

fck	B	H	Øt	St	Øl	Nx	Ny	Ngx	Ngy	Cnom	As	R\$/m
75	19	19	5	19	16	2	2	0	0	2,5	8,04	82,06
25	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	82,81
30	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	83,26
35	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	84,16
40	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	84,79
45	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	85,87
50	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	91,00
75	19	19	5	19	20	2	2	0	0	2,5	12,57	97,74

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Tabela 22 - Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção circular fixando  $\phi_p = 22$  cm  
(continua)**

fck	Øpilar	Øt	St	Øl	Nc	Cnom	As	$\lambda_x$	$\lambda_y$	R\$/m
25	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	54,84
30	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	55,31
35	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	56,26
40	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	56,92
25	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	57,26
30	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	57,73
45	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	58,05
35	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	58,68
40	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	59,34
25	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	59,68
30	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	60,15
45	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	60,47
35	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	61,1
40	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	61,76
45	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	62,89
50	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	63,45
50	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	65,87
25	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	65,91
30	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	66,38
35	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	67,33
40	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	67,99
50	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	68,29
45	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	69,13
25	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	70,19
75	22	5	12	10	6	2,5	4,71	50,91	50,91	70,55
30	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	70,66
35	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	71,61
40	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	72,27
75	22	5	12	10	7	2,5	5,5	50,91	50,91	72,97
45	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	73,41

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**Tabela 22 - Tabela gerada ao final da Etapa 3 para seção circular fixando  $\phi_p = 22$  cm  
(conclusão)**

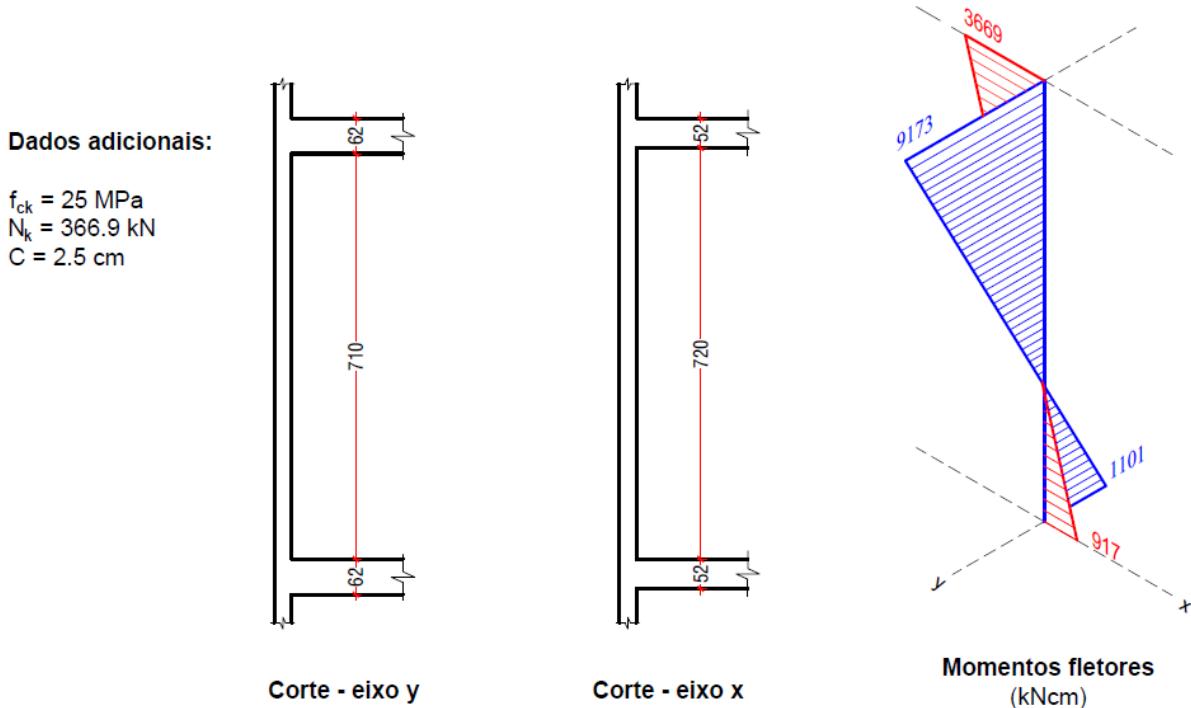
fck	Øpilar	Øt	St	Øl	Nc	Cnom	As	$\lambda_x$	$\lambda_y$	R\$/m
50	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	74,53
75	22	5	12	10	8	2,5	6,28	50,91	50,91	75,39
50	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	78,81
75	22	5	15	12,5	6	2,5	7,36	50,91	50,91	81,62
25	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	81,82
30	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	82,29
35	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	83,24
40	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	83,9
45	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	85,04
75	22	5	15	12,5	7	2,5	8,59	50,91	50,91	85,9
50	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	90,43
75	22	5	19,2	16	6	2,5	12,06	50,91	50,91	97,53

**Fonte:** Autoria própria (2019).

**APÊNDICE D - Exemplo de utilização do “PFOC”**

Para desenvolvimento deste exemplo considera-se um pilar com as características detalhadas pela Figura 73. Salienta-se que o  $f_{ck}$  é considerado fixo (25 MPa).

**Figura 73 – Esforços solicitantes e critérios de projeto considerados no exemplo**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

O “PFOC” é composto de sete arquivos *Python* e de uma planilha de *Excel*, conforme exposto pela Figura 74.

**Figura 74 – Arquivos que compõem o “PFOC”**

- Dados de entrada
- Esforcos\_concreto\_circular
- Esforcos\_concreto\_retangular
- Esforcos\_de\_calculo **Pode ser usado a parte**
- numero\_ganchos
- Principal\_final **Realiza a otimização**
- Verificacao\_FCO\_circular
- Verificacao\_FCO\_retangular **Pode ser usado a parte**

**Fonte:** Autoria própria (2019).

O código computacional pode ser utilizado em sua totalidade, com o intuito de realizar a otimização de pilares, para isso deve-se inserir os dados de entrada no arquivo “Dados de entrada.xlsx” e executar o arquivo “Principal\_final.py”, preenchendo corretamente as informações solicitadas por este.

Além da otimização, pode-se empregar o “PFOC” para executar a verificação à FCO

de seções circulares/retangulares e para obter os esforços de cálculo separadamente, como destacado pela Figura 74. Para tal fim, basta executar o arquivo referente ao processo desejado e editar as informações do mesmo descritas na Figura 75.

**Figura 75 – Informações editáveis em cada arquivo**

#### Verificacao\_FCO\_retangular.py

```
if __name__ == '__main__':
    fck1 = 5.5 # kN/cm2
    E = 21000 # kN/cm2
    altura1 = 40 # cm
    base1 = 20 # cm
    c11 = 2.5 # cm

    nx1 = 2
    ny1 = 2

    fi_t1 = 5 # mm
    fi_l1 = 10 # mm

    Nd1 = 500 # kN
    Mdx1 = 0 # kNm
    Mdy1 = 10274 # kNm

    Aso1 = (2*(nx1 + ny1) - 4) * \
           (fi_l1/20) ** 2 * pi # cm2

    razao1 = verificacao(fck1, base1, altura1,
                          c11, nx1, ny1, fi_t1,
                          fi_l1, Nd1, Mdx1,
                          Mdy1, Aso1, relatorio=True)
```

#### Esforços\_de\_calculo.py

```
if __name__ == '__main__':
    B = 30 # cm
    H = 40 # cm
    PDE1 = 772 # cm
    viga_x = 62 # cm
    viga_y = 52 # cm

    fck1 = 2.5 # kN/cm2

    nk1 = 366.9 # kN
    mky_base = -917 # kNm
    mky_topo = 3669 # kNm
    mkx_base = -1101 # kNm
    mkx_topo = 9173 # kNm

    esforcos_de_calculo(B, H, PDE1, viga_x,
                         viga_y, fck1, nk1,
                         mky_topo, mky_base,
                         mkx_topo, mkx_base,
                         relatorio=True)
```

#### Verificacao\_FCO\_circular.py

```
if __name__ == '__main__':
    fck1 = 2 # kN/cm2
    fi_pilar1 = 22 # cm
    c11 = 2.5 # cm

    Nc1 = 6
    fi_t1 = 5 # mm
    fi_l1 = 10 # mm

    Nd1 = 500 # kN
    Mdx1 = 611.2 # kNm
    Mdy1 = 809.1 # kNm

    Aso1 = (fi_l1/20) ** 2 * pi * Nc1 # cm2

    razao1 = verificacao(fck1, fi_pilar1,
                          c11, Nc1, fi_t1,
                          fi_l1, Nd1, Mdx1,
                          Mdy1, Aso1,
                          relatorio=True)
```

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Conforme explicitado pela Figura 76, empregou-se os custos dos materiais presentes no item 4.2.3 (pág. 99). Os esforços solicitantes e os critérios de projeto podem ser verificados na Figura 77.

**Figura 76 – Inserção do custo dos materiais e parâmetros otimizados**

DADOS DOS MATERIAIS						
Geometria Retangular	Armadura longitudinal				Concreto	
	Ø (mm)	Considerar?	Custo (R\$/kg)	Massa (kg/m)		
	10	Sim	3,93	0,617	2,42	
	12,5	Sim	4,44	0,963	4,28	
	16	Sim	4,41	1,578	6,96	
Geometria Retangular	Ø (mm)	Considerar?	Custo (R\$/kg)	Massa (kg/m)	Concreto	
	20	Sim	4,41	2,466	10,88	
	Armadura transversal					
	Ø (mm)	Custo (R\$/kg)	Massa (kg/m)	R\$/m		
	5	3,76	0,154	0,58		
Geometria Retangular	6,3	5,04	0,245	1,23	Concreto	
	Custo fórmulas (R\$/m <sup>2</sup> )					
	Retangular		Circular			
	38,33		41,29			

Fonte: Autoria própria (2019).

**Figura 77 – Inserção dos critérios e esforços de projeto**

CRITÉRIOS DE PROJETO			
Esforços característicos		Critérios de projeto	
N <sub>sk</sub>	366,90 kN	PDE	772 cm
M <sub>sk,x-topo</sub>	3669,00 kNm	Viga em x (ou laje)	52 cm
M <sub>sk,x-base</sub>	-917,00 kNm	Viga em y (ou laje)	62 cm
M <sub>sk,y-topo</sub>	9173,00 kNm	Δc	5 mm
M <sub>sk,y-base</sub>	-1101,00 kNm	CAA	2

Fonte: Autoria própria (2019).

Com os dados devidamente introduzidos, foi salvo o arquivo “Dados de entrada.xlsx” e executado o script “Principal\_final.py”. Destaca-se que nesse exemplo o único parâmetro fixado é o f<sub>ck</sub>, os demais são considerados na otimização. A Figura 78 apresenta os dados de entrada expostos pelo “PFOC”.

**Figura 78 - Dados dos materiais e escolha da geometria (2)**

**1 DADOS DE ENTRADA**

**1.1 Dados iniciais**

Qual o nome do pilar? *Apêndice D - exemplo*

**1.2 Esforços de projeto**

$N_{sk} = 366.90 \text{ kN}$

$M_{sk,x-topo} = 3669.00 \text{ kNm}$

$M_{sk,x-base} = -917.00 \text{ kNm}$

$M_{sk,y-topo} = 9173.00 \text{ kNm}$

$M_{sk,y-base} = -1101.00 \text{ kNm}$

**1.3 Critérios de projeto**

$PDE = 772 \text{ cm}$

Viga em x/Laje em x = 52 cm

Viga em y/Laje em y = 62 cm

$\Delta c = 5 \text{ mm}$

$CAA = 2$

**1.4 Faixas de materiais**

Aço

	$\emptyset \text{ (mm)}$	R\$/m
0	5.0	0.09
1	6.3	0.30
2	10.0	2.42
3	12.5	4.28
4	16.0	6.96
5	20.0	10.88

Concreto

	$f_{ck} \text{ (MPa)}$	R\$/m <sup>3</sup>
0	20	249.04
1	25	271.45
2	30	283.90
3	35	308.81
4	40	326.24
5	45	356.12
6	50	498.08
7	75	684.85

Formas

Retangular: 38.33 R\$/m<sup>2</sup>

Circular: 42.29 R\$/m<sup>2</sup>

**1.5 Parâmetros da seção transversal**

Geometria escolhida: retangular

Deseja fixar a base [S/N]? *n*

Deseja fixar a altura [S/N]? *n*

**Fonte:** Autoria própria (2019).

Nas Figuras 79 e 80 encontra-se especificado o relatório elaborado pelo “PFOC” após a finalização do algoritmo.

**Figura 79 – Relatório gerado ao finalizar a execução do “PFOC” (1)**

**2 RELATÓRIOS**

**2.1 AE possíveis**

Há 19620 soluções possíveis (a serem verificadas).

**2.2 Número de soluções verificadas**

208

**2.3 Solução mais econômica**

1 - Resistencia e dados da seção

- $f_{ck} = 25.0 \text{ MPa}$
- $\text{base} = 35.0 \text{ cm}$
- Altura = 45.0 cm
- $C = 2.5 \text{ cm};$

2 - Dados da armadura

**2.1 - Armadura longitudinal**

- $\phi_l = 16.0 \text{ mm}$
- $N_x = 2$
- $N_y = 2$
- $A_{so} = 8.04 \text{ cm}^2$

**2.2 - Transversal**

- $S_t = 19.20 \text{ cm}$
- $\phi_t = 5.0 \text{ mm}$
- Comp. estribo = 151.50 cm
- $N_{gx} = 0$
- $N_{gy} = 0$

3 - Custo total (Concreto + Aço + fôrmas)

- Custo = 75.87 R\$/m

**2.4 Esforços de cálculo**

1 - Classificação do pilar: Canto;

2 - Esforços de cálculo:

- $M_{sk,x-topo} = 5136.60 \text{ kNm} - M_{sk,x-base} = -1283.80 \text{ kNm};$
- $M_{sk,y-topo} = 12842.20 \text{ kNm} - M_{sk,y-base} = -1541.40 \text{ kNm};$

3 - Esforço normal de cálculo: 513.66 kN;

4 - Excentricidades de projeto (características):

- $e_{1x} = 10.00 \text{ cm} - e_{1y} = 25.00 \text{ cm};$

**Fonte: Autoria própria (2019).**

**Figura 80 - Relatório gerado ao finalizar a execução do “PFOC” (2)**

- 5 - Comprimentos de flambagem:  $l_{ex} = 755.00$  cm -  $l_{ey} = 755.00$  cm;  
 6 - Esbeltez:  $\lambda_x = 74.73$  -  $\lambda_y = 58.12$ ;  
 7 - Momentos mínimos: 1309.83 kNm - 1463.93 kNm;  
 8 - Esbeltez limite:  $\lambda_{1x} = 57.14$  -  $\lambda_{1y} = 57.87$ ;  
 8 - Efeitos de segunda ordem no eixo x: Devem ser considerados -  $M_{dx,tot} = 5467.13$  kNm;  
 9 - Efeitos de segunda ordem no eixo y: Devem ser considerados -  $M_{dy,tot} = 7166.24$  kNm;

10 - Tabela com situações de cálculo:

	$M_{dx}$ (kNm)	$M_{dy}$ (kNm)
0	5136.60	12842.20
1	5467.13	7088.76

**2.5 Verificação da seção à FCO - S.C 0**

- Parâmetros principais:

$\alpha = -37.84^\circ$

$x = 23.41$  cm

$d_1 = 51.68$  cm

$H_a = 57.01$  cm

$y_{max} = 28.50$  cm

$A_{so} = 8.04 \text{ cm}^2$

- Verificação em si:

$ER/ES = 1.0051$ . Verifica!

**2.6 Verificação da seção à FCO - S.C 1**

- Parâmetros principais:

$\alpha = -53.14^\circ$

$x = 23.13$  cm

$d_1 = 49.68$  cm

$H_a = 55.00$  cm

$y_{max} = 27.50$  cm

$A_{so} = 8.04 \text{ cm}^2$

- Verificação em si:

$ER/ES = 1.3987$ . Verifica!

**2.6 Dados gerais****2.6.1 Tempo de execução**

Tempo total de execução = 23.97 segundos.

**2.6.2 Data de execução**

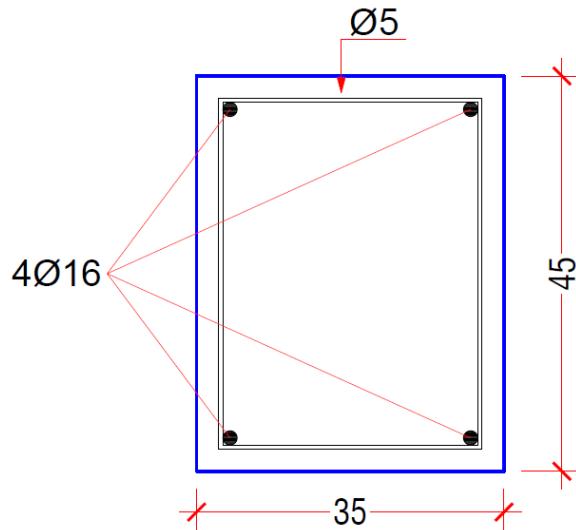
9/11/2019 - 11:8

Process finished with exit code 0

**Fonte: Autoria própria (2019).**

Deste modo, como pode ser verificado nas Figuras 79 e 81, a solução com maior vantagem econômica para o pilar considerado é dada pela Figura 81.

**Figura 81 – Solução ótima**



**Fonte:** Autoria própria (2019).

**ANEXO A - ALGORITMO de Brent adaptado para FORTRAN 77**

**Figura 82 – Algoritmo de Brent em FORTRAN 77**

(continua)

```

FUNCTION zbrent(func,x1,x2,tol)
INTEGER ITMAX
REAL zbrent,tol,x1,x2,func,EPS
EXTERNAL func
PARAMETER (ITMAX=100,EPS=3.e-8)
Using Brent's method, find the root of a function func known to lie between x1 and x2.
The root, returned as zbrent, will be refined until its accuracy is tol.
Parameters: Maximum allowed number of iterations, and machine floating-point precision.
INTEGER iter
REAL a,b,c,d,e,fa,fb,fc,p,q,r,
*      s,tol1,xm
a=x1
b=x2
fa=func(a)
fb=func(b)
if((fa.gt.0..and.fb.gt.0.).or.(fa.lt.0..and.fb.lt.0.))
*      pause 'root must be bracketed for zbrent'
c=b
fc=fb
do 11 iter=1,ITMAX
  if((fb.gt.0..and.fc.gt.0.).or.(fb.lt.0..and.fc.lt.0.))then
    c=a                         Rename a, b, c and adjust bounding interval d.
    fc=fa
    d=b-a
    e=d
  endif
  if(abs(fc).lt.abs(fb)) then
    a=b
    b=c
    c=a
    fa=fb
    fb=fc
    fc=fa
  endif
  tol1=2.*EPS*abs(b)+0.5*tol      Convergence check.
  xm=.5*(c-b)
  if(abs(xm).le.tol1 .or. fb.eq.0.)then
    zbrent=b
    return
  endif
  if(abs(e).ge.tol1 .and. abs(fa).gt.abs(fb)) then
    s=fb/fa                      Attempt inverse quadratic interpolation.
    if(a.eq.c) then
      p=2.*xm*s
      q=1.-s
    else
      q=fa/fc
      r=fb/fc
      p=s*(2.*xm*q*(q-r)-(b-a)*(r-1.))
      q=(q-1.)*(r-1.)*(s-1.)
    endif
  endif
end

```

**Fonte:** Press *et al* (1992).

**Figura 82 – Algoritmo de Brent em FORTRAN 77**

(conclusão)

```

        endif
        if(p.gt.0.) q=-q           Check whether in bounds.
        p=abs(p)
        if(2.*p .lt. min(3.*xm*q-abs(tol1*q) ,abs(e*q))) then
            e=d                   Accept interpolation.
            d=p/q
        else
            d=xm                 Interpolation failed, use bisection.
            e=d
        endif
        else                      Bounds decreasing too slowly, use bisection.
            d=xm
            e=d
        endif
        a=b                      Move last best guess to a.
        fa=fb
        if(abs(d) .gt. tol1) then Evaluate new trial root.
            b=b+d
        else
            b=b+sign(tol1,xm)
        endif
        fb=func(b)
    enddo !!
    pause 'zbrent exceeding maximum iterations'
    zbrent=b
    return
END

```

Fonte: Press *et al* (1992).