

**SANDER DAVID CARDOSO JÚNIOR**

**Sistema computacional para análise não linear  
de pilares de concreto armado**

**São Paulo**

**2014**

**SANDER DAVID CARDOSO JÚNIOR**

**Sistema computacional para análise não linear  
de pilares de concreto armado**

Monografia apresentada ao programa de  
educação continuada da Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de especialista em  
Gestão de Projetos de Sistemas  
Estruturais

Orientador: Prof. Alio Ernesto Kimura

**São Paulo**

**2014**

## AGRADECIMENTOS

Ao meu filho João Pedro, por existir na minha vida e a quem dedico não só este trabalho, mas todas as conquistas de minha vida.

A Daniela Spila, pelo carinho, afeto e parceria, me ajudando a encarar e superar meus desafios pessoais e profissionais.

Aos meus pais e irmãos Bruno, Mishely e Alicia, pelo amor incondicional, carinho, companheirismo e amizade que só existem em uma família.

Ao meu orientador e amigo Alio Kimura, por toda ajuda e atenção concedida no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Ricardo França pelos conhecimentos passados nas disciplinas cursadas ao longo da especialização, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos engenheiros e amigos Fabio Prado, Godart Sepeda, Januário Pellegrino Neto, Matheus Marquesi, Miguel Pimenta, Paulo Miana, Richard Cuevas e Tiago José dos Santos, os quais colaboraram de forma direta ou indireta no desenvolvimento do sistema PCalc.

Por fim ao programa de educação continuada da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (PECE/USP), ao Instituto Mauá de tecnologia (IMT) e as empresas EGT engenharia e TQS informática.

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar critérios e conceitos adotados no desenvolvimento de um aplicativo que resolve numericamente o problema da flexão composta oblíqua e explora todos os métodos que a norma ABNT NBR 6118 dispõe para avaliação dos efeitos locais de segunda ordem em pilares. O mesmo também está apto a realizar análise de pilares com resistência característica à compressão do concreto superior a 50 MPa, sendo que, neste caso, foram adotadas as formulações incorporadas na revisão da norma ABNT NBR 6118:2014. Tal aplicativo, denominado de P-Calc, foi desenvolvido em linguagem Java e está disponibilizado na página da internet [www.pcalc.com.br](http://www.pcalc.com.br).

Palavra-Chave: pilares de concreto armado; flexão composta oblíqua; não linearidade física e geométrica.

## ABSTRACT

The main goal of this study is to show criteria and concepts used in developing of a software for numerical solution to the biaxial bending and axial load problem and examine all methods included in Brazilian Code ABNT NBR-6118 (Design of concrete structures - Procedure) for solving the nonlinear conditions in columns. The software is also able to perform column analysis with concrete characteristic compressive strength greater than 50 MPa adopting, in this case, the formulation incorporated in the revision of ABNT NBR 6118:2014. This software, named P-Calc, uses Java language and is available in website [www.pcalc.com.br](http://www.pcalc.com.br).

**Keywords:** reinforced concrete columns; biaxial bending and axial load; physical and geometric nonlinearity.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA.....</b>	<b>5</b>
2.1	Hipóteses Básicas .....	5
2.2	Diagramas tensão-deformação dos materiais .....	6
2.3	Esgotamento da capacidade resistente da seção .....	7
2.4	Teoria básica.....	8
2.5	Verificação da capacidade resistente da seção .....	11
2.6	Método de solução.....	12
2.7	Relação momento – curvatura ( $M-\varphi$ ) .....	15
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS LOCAIS DE 2ª ORDEM EM PILARES.....</b>	<b>16</b>
3.1	Equação diferencial de equilíbrio para pilares .....	16
3.1.1	Solução da equação diferencial de equilíbrio para pilares .....	18
3.1.2	Processo iterativo de aproximações sucessivas.....	19
3.1.3	Pilar padrão .....	20
3.2	Rigidez $EI$ para pilares de concreto armado .....	22
3.3	Critérios da ABNT NBR 6118 para o projeto de pilares.....	23
3.3.1	Imperfeições geométricas locais .....	23
3.3.2	Momento mínimo.....	24
3.3.3	Índice de esbeltez ( $\lambda$ ) .....	26
3.3.4	Coeficiente $\alpha_b$ .....	27
3.3.5	Relações momento-curvatura.....	28
3.3.6	Efeitos locais de 2ª ordem .....	30
<b>4</b>	<b>SISTEMA COMPUTACIONAL PCALC .....</b>	<b>34</b>
4.1	Entrada de dados.....	35
4.1.1	Entrada de dados: Geometria .....	35
4.1.2	Entrada de dados: Materiais .....	36
4.1.3	Entrada de dados: Armação .....	36
4.1.4	Entrada de dados: Esforços .....	37
4.2	Saída de resultados: Esforços de 1ª e 2ª ordem .....	38
4.3	Saída de resultados: Verificação da seção transversal.....	39
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO DO SISTEMA PCALC .....</b>	<b>41</b>
5.1	Seção retangular .....	41

5.1.1	Verificação da capacidade resistente - flexão simples .....	41
5.1.2	Diagrama de interação 1: Flexão composta oblíqua (FCO) .....	43
5.1.3	Diagrama de interação 2: Flexão composta oblíqua (FCO) .....	44
5.1.4	Diagrama $N, M, 1/r$ .....	45
5.2	Análise de um pilar com o sistema PCalc .....	46
5.2.1	Pilar padrão com curvatura aproximada .....	47
5.2.2	Pilar padrão com rigidez $\kappa$ aproximada .....	47
5.2.3	Pilar padrão acoplado a diagramas $N, M, 1/r$ .....	48
5.2.4	Método Geral .....	49
5.2.5	Resumo e comparação dos resultados (Exemplo 5.2) .....	50
5.3	Outras seções transversais .....	51
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>54</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo de pilares de concreto armado envolve uma formulação teórica relativamente complexa, entre os quais destacam-se: análise não-linear de estruturas, estabilidade global, dimensionamento de seções de concreto armado.

Na etapa de análise estrutural, cujo objetivo é descobrir a resposta da estrutura perante as ações que lhe foram aplicadas, obtém-se os esforços solicitantes preponderantes ao longo de um pilar que, usualmente, são momentos fletores ( $M_x$  e  $M_y$ ) e esforço normal de compressão ( $N$ ), caracterizando assim numa flexão composta oblíqua, conforme indicado na Figura 1.1.

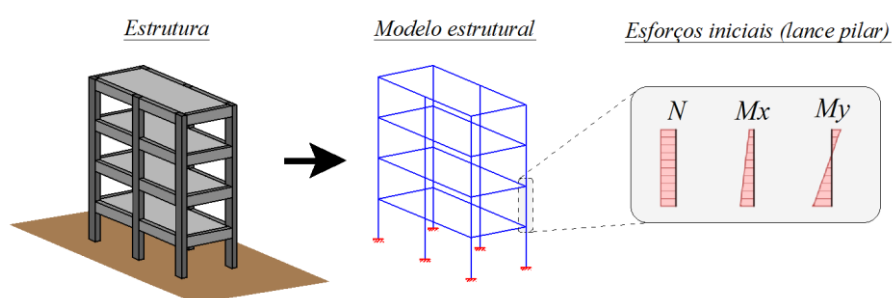


Figura 1.1: Esforços atuantes em um lance de pilar (Flexão composta oblíqua)

Em muitos casos, o problema recai em uma análise não linear geométrica, pois as ações provocam um deslocamento horizontal dos nós da estrutura, que por sua vez provocam esforços adicionais à mesma, conforme o esquema da Figura 1.2. Dentro do contexto do modelo global, estes esforços são denominados de efeitos globais de 2ª ordem.

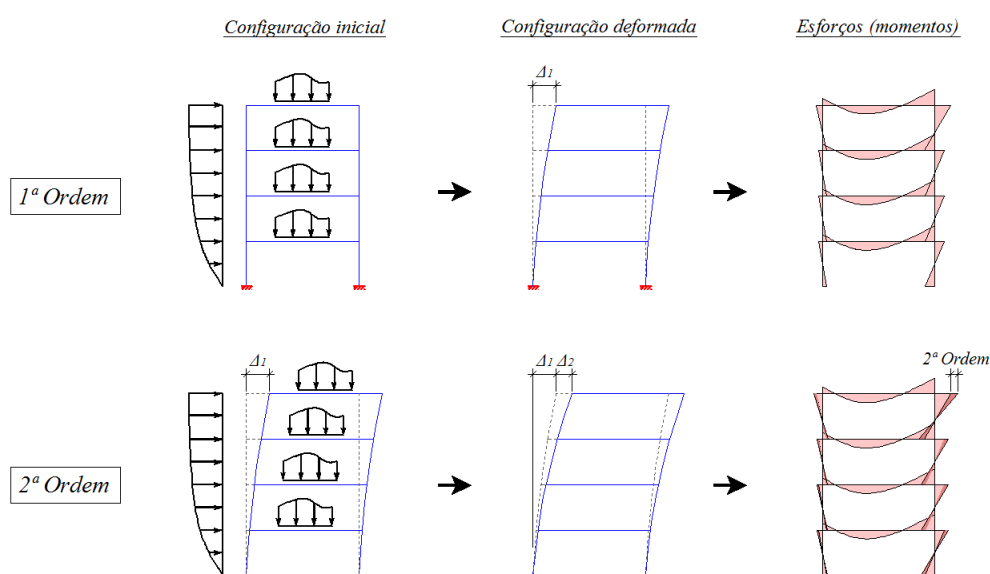


Figura 1.2: Efeitos globais de 2ª ordem



Além dos efeitos de 2ª ordem globais, em um lance isolado de pilar (modelo local), os eixos das barras não se mantêm retilíneos, originando assim os efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços ao longo do mesmo, conforme o esquema da Figura 1.3.

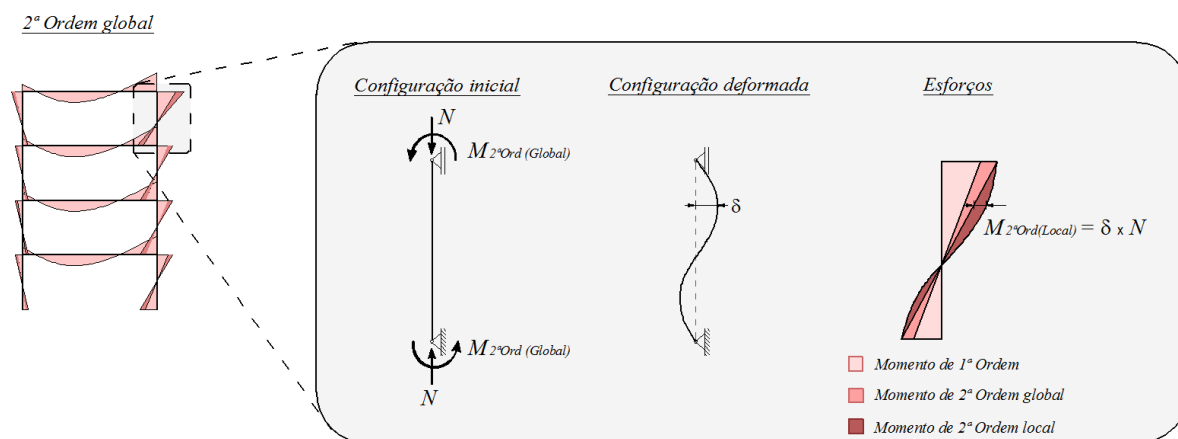


Figura 1.3: Efeitos locais de 2ª ordem

Além da não linearidade geométrica, outro aspecto que contribui de forma significativa para o comportamento não linear da estrutura é a não linearidade física dos materiais envolvidos. Esse comportamento se deve ao fato dos materiais não apresentarem um comportamento elástico perfeito, além de outros fatores, como por exemplo, o efeito de fissuração e da fluência do concreto.

Este efeito pode ser tratado de diferentes formas, desde processos aproximados até metodologias mais complexas. Por exemplo, o que se faz hoje para o cálculo do modelo global de um edifício de concreto armado é considerar o problema de forma aproximada, reduzindo a rigidez à flexão da estrutura ( $EI_{sec}$ ), adotando por exemplo  $0,8E_cI_c$  para os pilares e  $0,4E_cI_c$  para as vigas.

No ponto de vista local, a não linearidade física deve ser considerada de forma mais refinada, através de aproximação para curvatura do lance de pilar ou até mesmo a construção da relação momento curvatura para cada seção.

Em resumo, em uma análise não linear local de um lance de pilar, procura-se a resposta de duas questões: qual a rigidez EI deve ser considerada? Como se deformará o pilar à medida que o carregamento é aplicado?

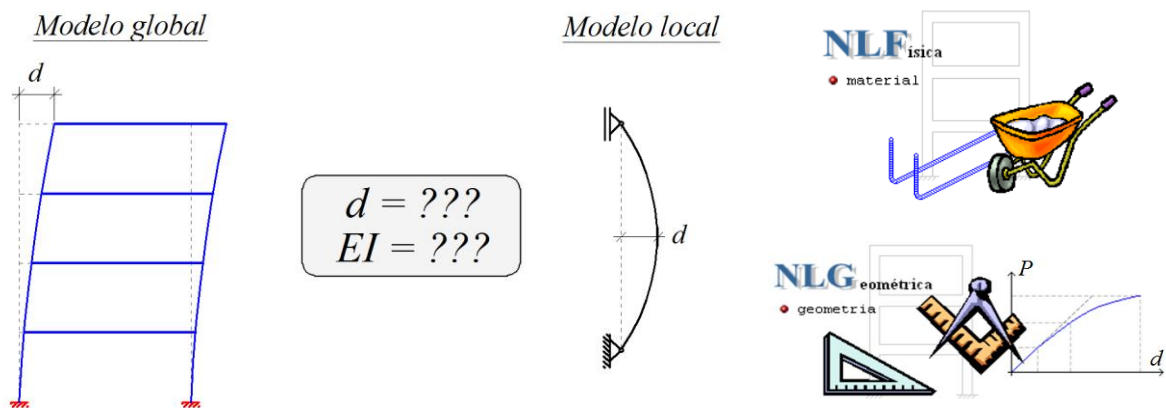


Figura 1.4: Não linearidade física e geométrica

Após a fase de análise estrutural, com as devidas solicitações calculadas, passa-se ao dimensionamento do lance de pilar, efetuando a verificação quanto ao estado limite último de algumas seções críticas ao longo do mesmo. Normalmente são avaliadas as seções do topo, da base e uma seção que fica entre o topo e a base de cada lance. Este dimensionamento ou verificação deve ser feito de modo que a segurança seja garantida pela seguinte expressão:

$$S_d \leq R_d \quad 1.1$$

Onde as solicitações de cálculo ( $S_d$ ) devem ser inferiores às resistências de cálculo ( $R_d$ ). Como normalmente as solicitações ( $S_d$ ), a seção transversal e os materiais ( $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ ) são conhecidos, a verificação desta condição recai no cálculo de uma armadura necessária, cuja solução pode ser bastante trabalhosa. Na prática, há duas formas de se fazer isso de forma produtiva: por meio do uso de ábacos ou por meio de softwares.

O dimensionamento de seções de concreto de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua se faz por meio de ábacos de interação. Encontram-se disponíveis na literatura diversos ábacos de diferentes autores. Nestes ábacos, conhecidos os valores de força normal adimensional ( $v$ ) e os momentos fletores adimensionais ( $\mu_x$  e  $\mu_y$ ), pode-se extrair o valor da taxa geométrica de armadura ( $\omega$ ), e assim, obter a área de armadura necessária da seção transversal.

A Figura 1.5 apresenta um ábaco retirado de Montoya (1973) para o dimensionamento de seções retangulares submetidas a flexão composta oblíqua com armadura simétrica.

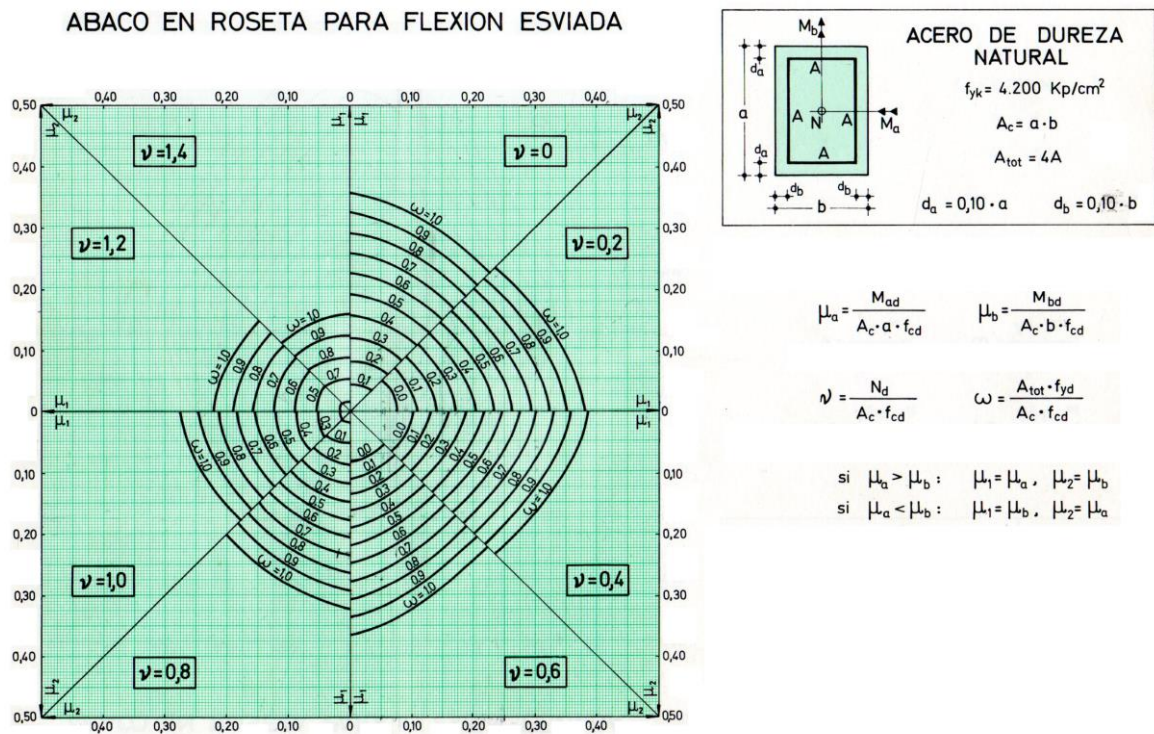


Figura 1.5: Ábaco flexão composta oblíqua (Montoya, 1973)

Atualmente, a resolução por meio do computador é a mais comum, e fornece resultados com grande precisão e rapidez. Porém, a maioria dos programas computacionais faz a verificação quanto ao estado limite último de seções com a armadura previamente estabelecida. Assim, o dimensionamento acaba sendo realizado por meio uma análise iterativa, onde a armação é determinada por sucessivas verificações.

No contexto atual, o projeto de pilares de concreto armado se trata de um problema de grande complexidade. Em alguns processos, além do dimensionamento na flexão composta oblíqua, é necessária uma análise não linear que depende do resultado obtido no dimensionamento.

O presente trabalho apresenta critérios e metodologias utilizadas no desenvolvimento de um aplicativo que resolve numericamente o problema da flexão composta oblíqua e explora todos os métodos que a norma ABNT NBR 6118 dispõe para avaliação dos efeitos locais de segunda ordem em pilares.

## 2 SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Flexão composta oblíqua é uma solicitação composta por um esforço normal agindo fora dos eixos de simetria da seção transversal. O momento fletor causado pela excentricidade do esforço normal pode ser decomposto em duas direções perpendiculares e coincidentes com os eixos de simetria da seção.

Em geral, para estes casos a linha neutra não é perpendicular ao plano de ação do momento fletor. Assim, tanto a orientação da linha neutra ( $\alpha$ ), quanto sua profundidade ( $x_{LN}$ ), são incógnitas do problema. A Figura 2.1 apresenta uma seção de concreto armado submetida à flexão composta oblíqua.

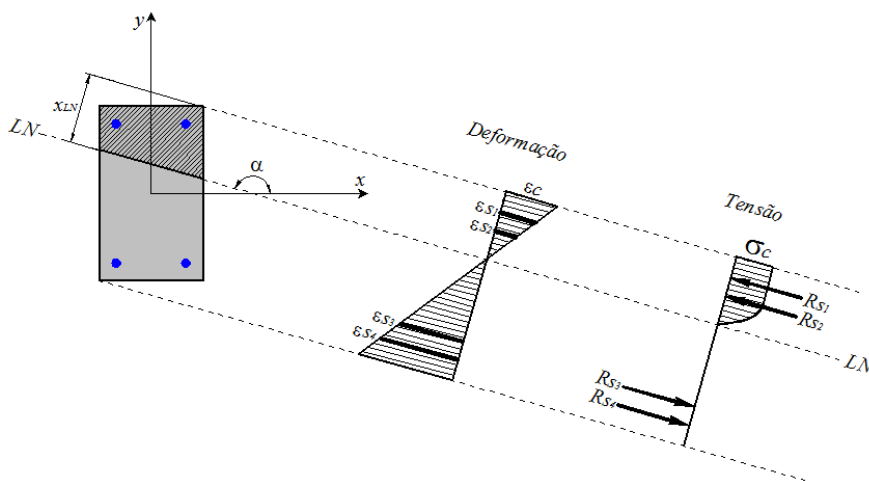


Figura 2.1: Seção de concreto armado submetida à flexão composta oblíqua

### 2.1 Hipóteses Básicas

Podem ser admitidas algumas hipóteses básicas para análise e dimensionamento de pilares de concreto armado:

- A seção permanece plana após a deformação, resultando em uma distribuição linear das deformações;
- Admite-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, com isso, as armaduras vão estar sujeitas a mesma deformação do concreto que as envolve;
- As tensões de tração no concreto são desprezadas.

## 2.2 Diagramas tensão-deformação dos materiais

### a) Concreto à compressão

Conforme a norma ABNT NBR 6118, para análises no estado limite último pode ser empregado para o concreto submetido a compressão um diagrama tensão-deformação idealizado mostrado na Figura 2.2.

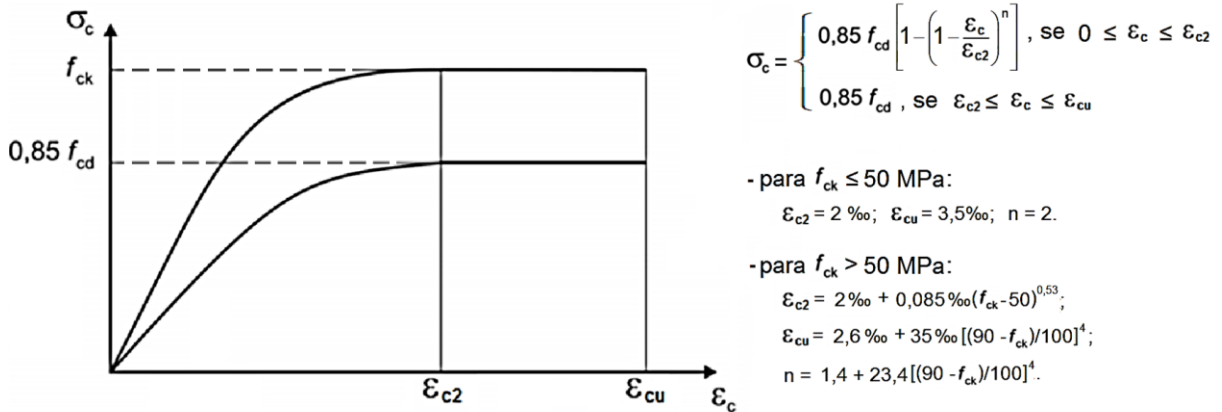


Figura 2.2: Diagrama parábola-retângulo para concreto à compressão

O fator 0,85 procura levar em conta a redução da resistência do concreto sob carga de longa duração, efeito Rüschi. Já a resistência de cálculo  $f_{cd}$  é obtida dividindo a resistência característica  $f_{ck}$  pelo coeficiente de minoração da resistência do concreto,  $\gamma_c = 1,4$ .

Simplificadamente, o diagrama parábola-retângulo pode ser substituído por um diagrama retangular de profundidade  $y = \lambda x$ , conforme Figura 2.3.

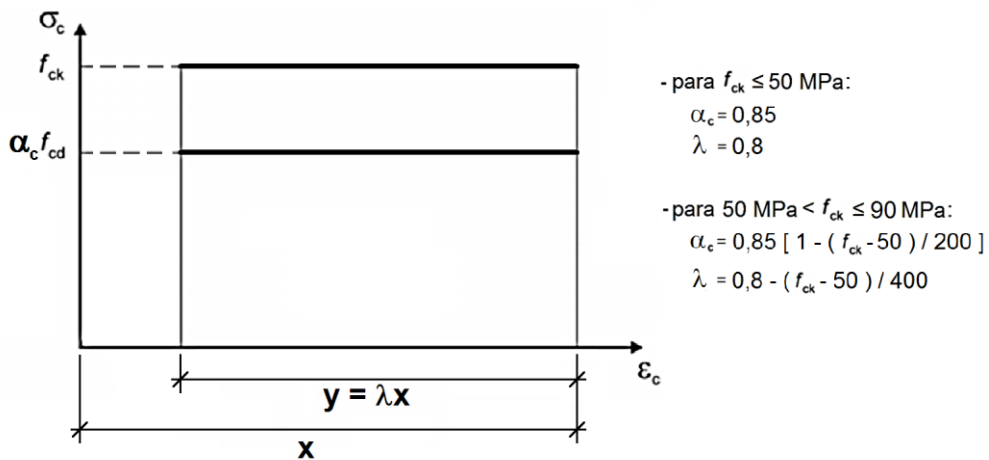


Figura 2.3: Diagrama retangular simplificado para concreto à compressão

Quando se utiliza o diagrama retangular simplificado e a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, diminuir a partir desta para a borda comprimida, o valor de  $\alpha_c f_{cd}$  deve ser multiplicado por 0,9.

Segundo a ABNT NBR 6118, as diferenças de resultados obtidos com esses dois diagramas são pequenas e aceitáveis, sem necessidade de coeficiente de correção adicional.

## b) Aço

Conforme a ABNT NBR 6118, para o cálculo nos estados-limite de serviço e último pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 2.4 para os aços com ou sem patamar de escoamento. Este diagrama pode ser aplicado para tração e compressão.

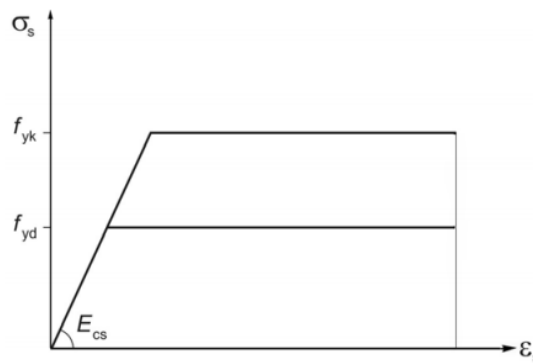


Figura 2.4: Diagrama tensão-deformação para aços (ABNT NBR-6118)

A resistência de cálculo  $f_{yd}$  é obtida dividindo a resistência característica  $f_{yk}$  pelo coeficiente de minoração da resistência do aço,  $\gamma_s=1,15$ .

## 2.3 Esgotamento da capacidade resistente da seção

De acordo com a ABNT NBR 6118, a condição de estado limite último de uma seção transversal de concreto armado é caracterizada quando a distribuição das deformações é dada por uma reta que passa necessariamente por um dos pontos A, B ou C da Figura 2.5, podendo a ruptura ocorrer tanto pelo esmagamento do concreto, quanto pela deformação plástica excessiva da armadura.

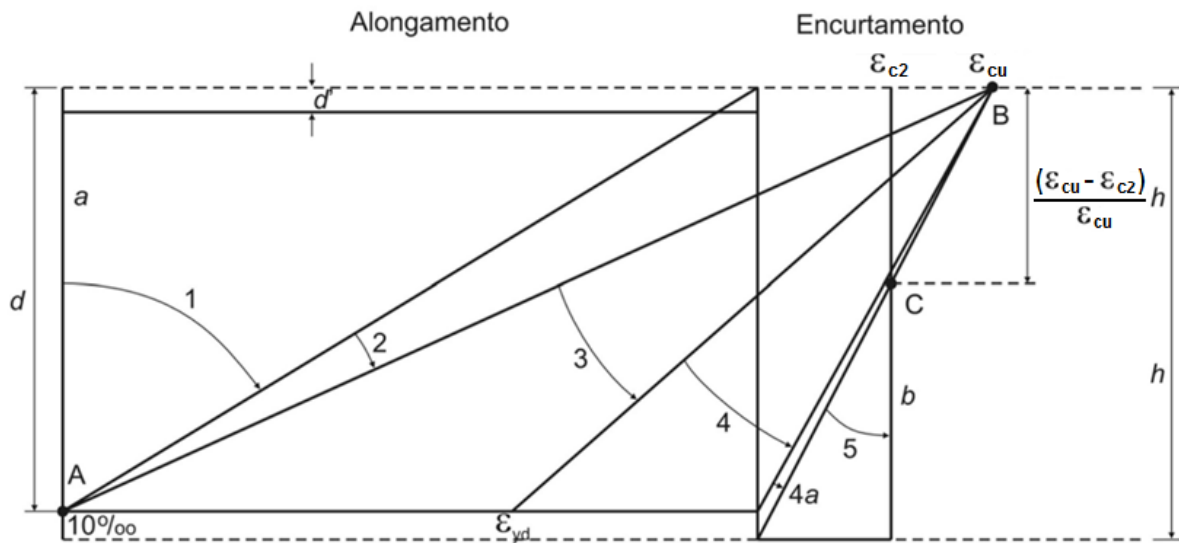


Figura 2.5: Domínios de estado limite último de uma seção transversal (ABNT NBR 6118)

## 2.4 Teoria básica

Dada uma seção de concreto armado arbitrária com a origem de um sistema de coordenadas cartesiano, situado no centro geométrico dessa seção, como na Figura 2.6:

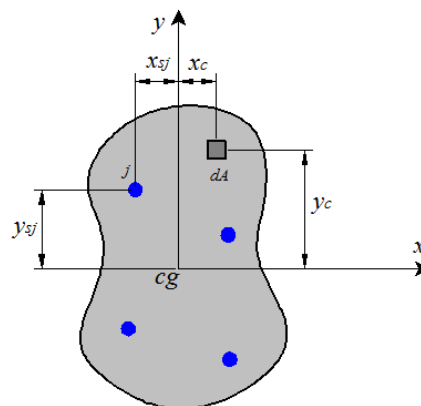


Figura 2.6: Seção arbitrária de concreto armado

Genericamente, para uma seção de concreto armado com  $m$  barras de aço, as equações de equilíbrio de uma seção submetida à flexão composta oblíqua são dadas pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3.

$$N = \int_{A_c} \sigma_c dA + \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} \quad 2.1$$

$$M_x = \int_{A_c} \sigma_c y_c dA + \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} y_{sj} \quad 2.2$$

$$M_y = -\int_{A_c} \sigma_c x_c dA - \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} x_{sj} \quad 2.3$$

onde:  $\sigma_c$  é a tensão de compressão no nível do centroide da área  $dA$ ;  
 $\sigma_{sj}$  é a tensão no aço no nível do centroide da barra  $j$ ;  
 $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas no nível do centroide da área  $dA$ ;  
 $x_{sj}$  e  $y_{sj}$  são as coordenadas no nível do centroide da barra  $j$ ;  
 $A_c$  é a área de concreto da seção resistindo a tensões de compressão;  
 $A_{sj}$  é a área de aço da barra  $j$ .

Para fins de integração numérica, a seção pode ser discretizada em elementos de área  $A_{ci}$ , conforme a Figura 2.7. Deve ser considerada a seção efetiva de concreto, descontando-se da seção bruta a correspondente área de aço. Pela dificuldade de discretizar a seção efetiva de concreto, como alternativa, pode-se descontar da tensão do aço  $\sigma_{sj}$  o valor correspondente a tensão no concreto,  $\sigma_{cj}$ . Assim, as equações anteriores podem ser escritas na forma de somatório,

$$N = \sum_{i=1}^n \sigma_{ci} A_{ci} + \sum_{j=1}^m (\sigma_{sj} - \sigma_{cj}) A_{sj} \quad 2.4$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \sigma_{ci} A_{ci} y_{ci} + \sum_{j=1}^m (\sigma_{sj} - \sigma_{cj}) A_{sj} y_{sj} \quad 2.5$$

$$M_y = -\sum_{i=1}^n \sigma_{ci} A_{ci} x_{ci} - \sum_{j=1}^m (\sigma_{sj} - \sigma_{cj}) A_{sj} x_{sj} \quad 2.6$$

com:  $i = 1, 2, \dots n$  elementos de concreto em compressão;  
 $j = 1, 2, \dots m$  barras de aço.



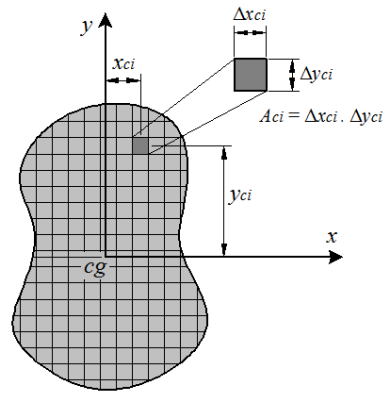


Figura 2.7: Discretização da seção de concreto

As tensões nos elementos de concreto,  $\sigma_{ci}$ , e nas barras de aço,  $\sigma_{sj}$ , são determinadas a partir de suas deformações, com a utilização dos diagramas tensão-deformação dos materiais. Para determinar estas deformações, é conveniente fazer uma rotação do sistema de coordenadas  $x$  e  $y$  para um sistema  $x'$  e  $y'$ , de modo que o eixo  $x'$  seja paralelo à linha neutra (Figura 2.8).

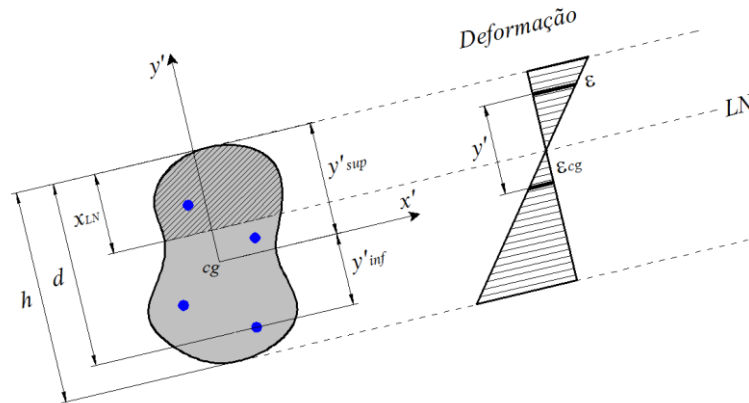


Figura 2.8: Seção com sistema de coordenadas  $x'$  -  $y'$

Admitindo a hipótese de que a seção permanece plana após a deformação, a deformação de qualquer elemento, aço ou concreto, pode ser calculada em função de sua ordenada  $y'$  por:

$$\varepsilon = \varepsilon_{cg} - \varphi y' \quad 2.7$$

Sendo:

$\varphi$ , é a rotação relativa por unidade de comprimento ou curvatura;

$\varepsilon_{cg}$ , é a deformação no nível do centroide da seção.

Para determinar  $\varphi$  e  $\varepsilon_{cg}$ , deve-se conhecer ao menos a deformação em outro ponto da seção. Lembrando que, para existir a condição de estado limite último, a distribuição das deformações passa necessariamente por um dos pontos A, B ou C da Figura 2.1. Assim, os valores de  $\varphi$  e  $\varepsilon_{cg}$  podem ser obtidos em função da profundidade da linha neutra  $x_{LN}$ :

- Para  $x_{LN} \leq \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+10\text{‰}}\right)d$ :

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_{LN}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{cg} = \varepsilon_{cu} + \varphi y'_{\text{sup}} \quad 2.8$$

- Para  $\left(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+10\text{‰}}\right)d < x_{LN} \leq h$ :

$$\varphi = \frac{10\text{‰}}{(d - x_{LN})} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{cg} = 10\text{‰} + \varphi y'_{\text{inf}} \quad 2.9$$

- Para  $h < x_{LN}$ :

$$\varphi = \frac{2\text{‰}}{(x_{LN} - \frac{3}{7}h)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{cg} = 10\text{‰} + \varphi \left( y'_{\text{sup}} - \frac{3}{7}h \right) \quad 2.10$$

Combinando a equação 2.7 com as relações constitutivas dos materiais, figuras 2.2 e 2.3, ficam definidos os valores de tensões para as equações de equilíbrio 2.4 a 2.6.

## 2.5 Verificação da capacidade resistente da seção

Considerando um valor fixo de esforço normal ( $N$ ), para um determinado ângulo de orientação da linha neutra ( $\alpha$ ), existe uma distribuição de deformações que leva a seção transversal ao esgotamento de sua capacidade resistente. Assim, o problema passa a ser encontrar uma profundidade de linha neutra ( $x_{LN}$ ) que resulta nesta condição de deformação e ao mesmo tempo satisfaça a equação de equilíbrio 2.4. Ou seja, resume-se em encontrar a raiz da seguinte equação:

$$f(x_{LN}) = N - \sum_{i=1}^n \sigma_{ci} A_{ci} - \sum_{j=1}^m \sigma_{sj} A_{sj} = 0 \quad 2.11$$

A raiz da equação 2.11 pode ser encontrada iterativamente através de algum método numérico. Neste trabalho foi utilizado o processo da bissecante, descrito no próximo item.

Determinada a profundidade da linha neutra ( $x_{Ln}$ ), pode-se calcular os momentos resistentes  $M_{R,x}$  e  $M_{R,y}$  a partir das equações 2.5 e 2.6. Estes são os pares de momentos que levam a seção à ruptura, para um ângulo de orientação da linha neutra  $\alpha$  e um esforço normal  $N_{sd}$ .

Para cada ângulo  $\alpha$ , têm-se um par de momentos que leva a seção à ruptura. Variando este ângulo entre 0 e 360° têm-se uma infinidade de pares de momentos resistentes. O conjunto destes pares forma uma curva que é conhecida como o diagrama de interação força normal – momento fletor (Figura 2.9).

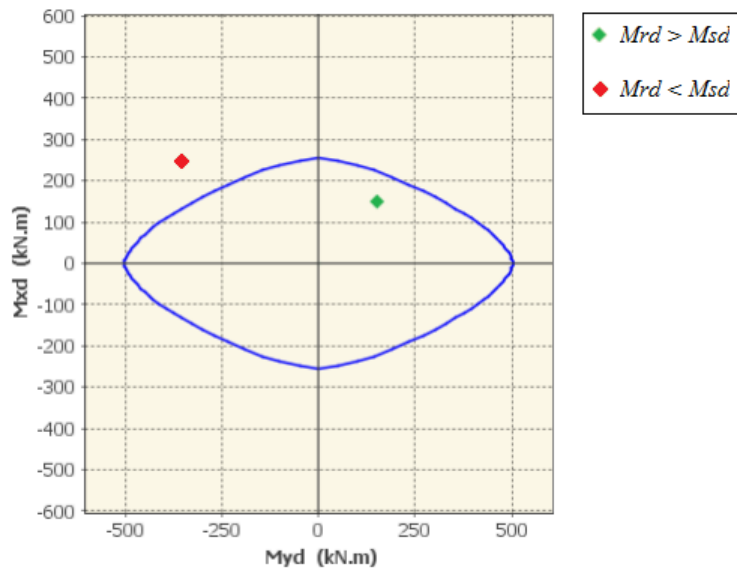


Figura 2.9: Diagrama de interação esforço normal – momento fletor

Uma vez obtido o diagrama de interação, a verificação quanto à segurança é imediata. Se um ponto, representado pelos pares de momentos solicitantes, cair dentro do diagrama, a segurança estará garantida, pois os esforços solicitantes são inferiores aos esforços resistentes. Analogamente, se o ponto cair fora do diagrama, a segurança não estará garantida.

Observe que, para que a segurança esteja garantida, esta verificação deve ser feita considerando os esforços solicitantes de cálculo ( $N_{sd}$ ,  $M_{sd,x}$  e  $M_{sd,y}$ ), assim como as resistências dos materiais também devem ser consideradas por valores de cálculo ( $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ ).

## 2.6 Método de solução

Geralmente, o valor de  $x_{LN}$  que satisfaz a equação 2.11 não pode ser encontrado de maneira explícita, devendo ser encontrado por meio de algum processo iterativo. Neste trabalho foi utilizado o algoritmo iterativo da bissecante, descrito nos passos a seguir:

### 1º Passo

A solução procurada situa-se no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , que abrange todos os domínios de ruptura (Figura 2.5). Entretanto, é impossível trabalhar numericamente com este intervalo. Para contornar esse problema escolhe-se inicialmente um intervalo finito, por exemplo,  $x_{min} = -d$  e  $x_{max} = 2d$ . Sendo  $d$  a altura útil da seção, ou seja, é a distância entre a fibra de concreto mais comprimida e a barra de aço mais tracionada, medida perpendicularmente a linha neutra.

Por meio da equação 2.11, avalia-se o valor  $f(x_{min})$ . Se esse valor for menor do que zero, significa que a raiz da equação encontra-se antes do intervalo inicialmente definido. Adotam-se novos valores para estes limites, por exemplo,  $x_{max} = x_{min}$  e  $x_{min} = 10x_{min}$ . Caso  $f(x_{min})$  continuar menor do que zero, repete-se o procedimento.

De maneira semelhante, pode-se avaliar o limite  $x_{max}$ . Se o valor  $f(x_{max})$  for maior que zero, significa que a raiz da equação encontra-se depois do intervalo inicialmente definido. Adotam-se novos valores para estes limites, por exemplo,  $x_{min} = x_{max}$  e  $x_{max} = 10x_{max}$ . Caso  $f(x_{max})$  continuar maior do que zero, repete-se o procedimento.

### 2º Passo

Definido o intervalo  $(x_{min}, x_{max})$ , pode-se adotar como primeira aproximação o valor  $x_i$ , tomado como a interseção entre a reta que passa pelos pontos extremos do intervalo com o eixo das abscissas, ou seja,

$$x_i = \frac{x_{min} \cdot f(x_{max}) - x_{max} \cdot f(x_{min})}{f(x_{max}) - f(x_{min})} \quad 2.12$$

Em seguida, calcula-se o valor de  $f_i = f(x_i)$ , avaliando se esse valor é raiz desta equação. Entretanto, por se tratar de um método numérico, deve-se adotar algum critério de convergência. Este critério pode ser uma tolerância residual na função, isto é,  $|f(x_i)| < \text{tolerância}$ .

Se a convergência não for alcançada, deve-se reduzir o intervalo de solução. Para isto, caso o valor de  $f_i$  for maior do que zero, adota-se  $x_{min} = x_i$  e  $f(x_{min}) = f_i$ . Caso  $f_i$  for menor do que zero, adota-se  $x_{max} = x_i$  e  $f(x_{max}) = f_i$ . Com este novo intervalo, pode-se fazer uma nova iteração, voltando ao início do 2º passo até que se atinja a convergência.

### 3º Passo

Encontrada a posição da linha neutra  $x_{LN} = x_i$ , calcula-se o par de momentos resistentes  $M_{Rd,x}$  e  $M_{Rd,y}$ , dados a partir das equações 2.5 e 2.6. Estes, correspondem aos momentos

resistentes para um determinado ângulo de orientação da linha neutra  $\alpha$ . Para determinar o diagrama de interação, deve-se repetir todo processo variando este ângulo  $\alpha$  entre 0 e 360°, em um número de pontos  $n$ .

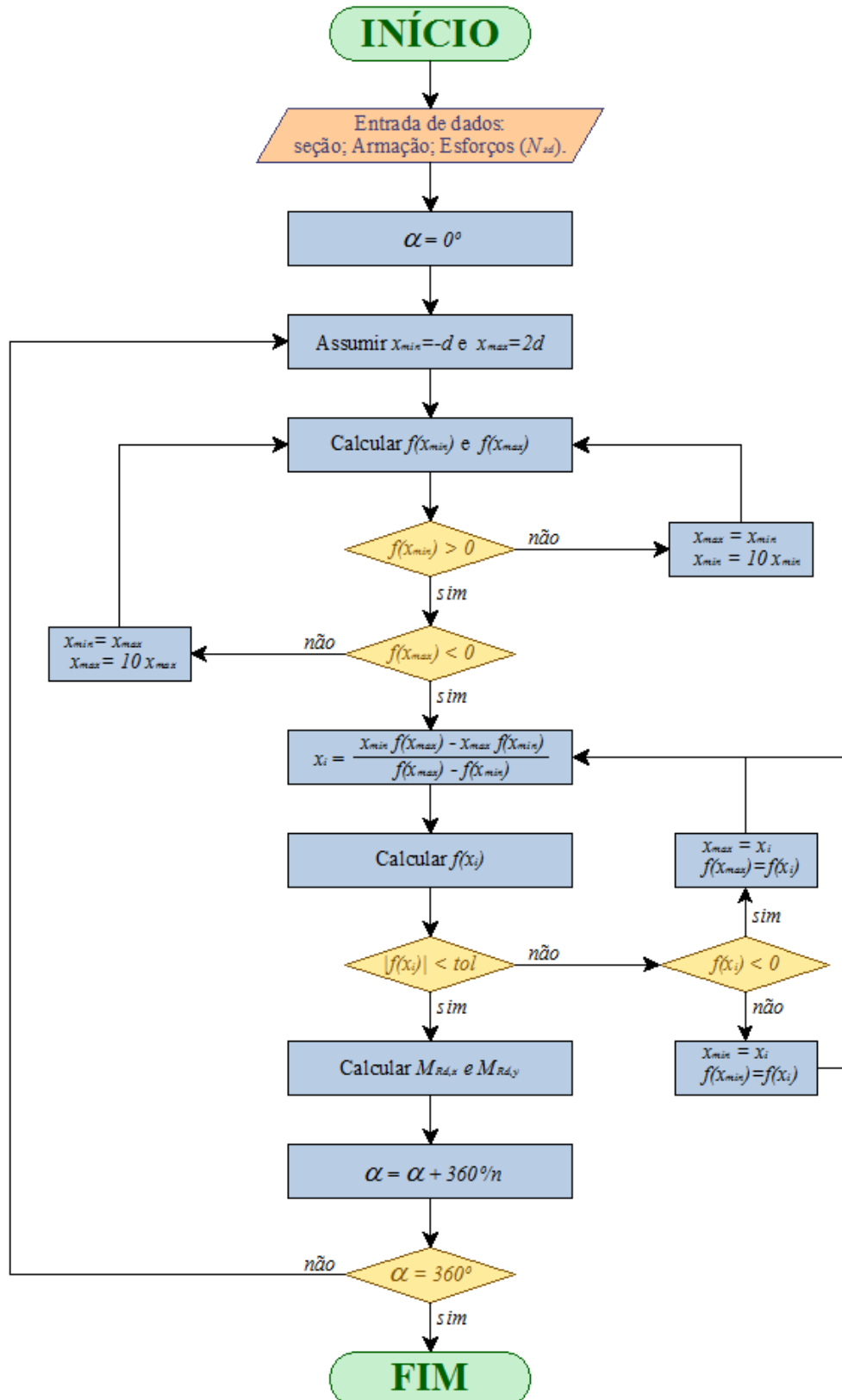


Figura 2.10: Fluxograma para o cálculo do diagrama de interação

## 2.7 Relação momento – curvatura ( $M-\varphi$ )

No item anterior foi apresentada uma rotina de cálculo para determinar pares de valores de  $\varphi$  e  $\varepsilon_{cg}$ , correspondentes a momentos que levam a seção à ruptura ( $M_{rd}$ ). Quando esta relação é definida para diferentes níveis de solicitação, pontos que não necessariamente caracterizam uma condição de estado limite último, obtém-se então o diagrama momento-curvatura ( $M-\varphi$ ). A Figura 2.11 apresenta um exemplo deste diagrama.

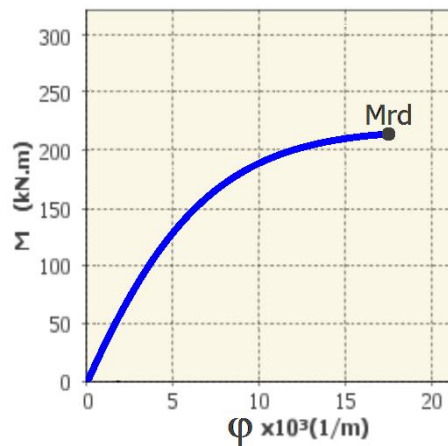


Figura 2.11: Relação momento curvatura ( $M-\varphi$ )

Normalmente esta relação é expressada considerando momentos na direção de um dos eixos principais de inércia ( $M_x-\varphi_x$  ou  $M_y-\varphi_y$ ). No caso de seções em que os eixos principais coincidirem com os eixos  $x$  e  $y$ , pode-se obter estas relações fixando o ângulo de orientação da linha neutra em  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 90^\circ$ .

A relação momento-curvatura pode ser obtida escrevendo os parâmetros  $\varphi$  e  $\varepsilon_{cg}$  não mais pelas equações 2.08 a 2.10, mas em função de  $\varepsilon_{c,sup}$ :

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{c,sup}}{x_{LN}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{cg} = \varepsilon_{c,sup} + \varphi y'_{sup} \quad 2.13$$

O valor da posição da linha neutra ( $x_{LN}$ ) pode novamente ser encontrado numericamente através da equação 2.11. Determinado valor de  $x_{LN}$ , obtêm-se de forma direta o par  $\varphi$  (2.13) e  $M$  (equações 2.5 e 2.6).

O diagrama  $M-\varphi$  é obtido variando o valor de  $\varepsilon_{c,sup}$  entre  $\varepsilon_{c,sup,min}$  e  $\varepsilon_{c,sup,max}$ . O valor mínimo corresponde a seção submetida somente ao esforço axial, sendo nulo para flexão simples. Já o valor máximo corresponde à condição de estado limite último obtida de acordo com o item anterior, podendo valer no máximo  $\varepsilon_{cu}$ .

### 3 CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS LOCAIS DE 2ª ORDEM EM PILARES

Considere o pilar indicado na Figura 3.1, submetido a uma força normal  $P$  e a um momento fletor  $M$ . A ação do momento gera no pilar um deslocamento  $w(x)$ . Em uma análise do pilar em sua configuração deformada, observa-se o surgimento de momentos adicionais, iguais a força  $P$  multiplicada pelo deslocamento  $w(x)$ . Estes momentos são denominados de momentos de 2ª ordem.

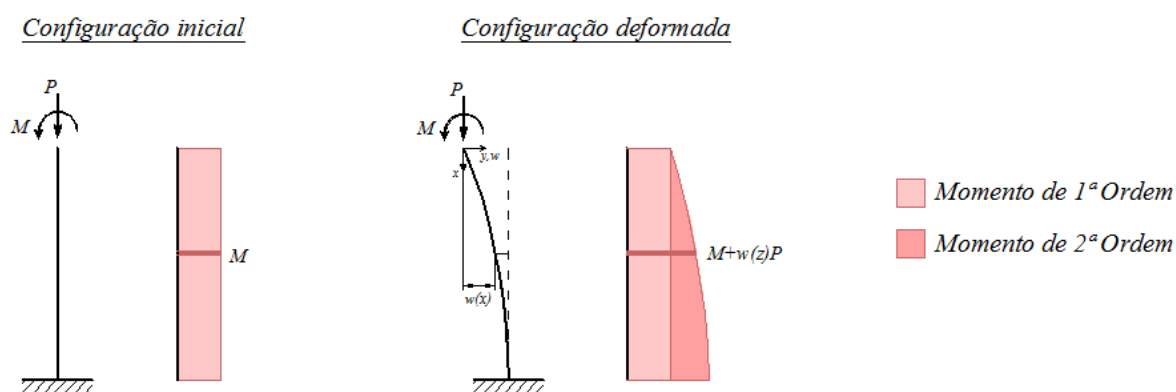


Figura 3.1: Momentos de 1ª e 2ª Ordem para pilar em balanço

Uma vez que o equilíbrio deve ser obtido na configuração deformada do pilar, o problema recai em uma análise não linear, comumente denominada como análise não linear geométrica.

Além disso, há a não linearidade física, que é consequência dos materiais não apresentarem um comportamento elástico perfeito, como pode ser observado nos gráficos das figuras 2.2 e 2.4. Ainda, outros fatores influenciam no comportamento não linear do concreto, como por exemplo, o efeito da fissuração e da fluência.

No decorrer deste capítulo será apresentado uma revisão de alguns conceitos sobre estas não linearidades. Posteriormente serão apresentados critérios que a norma ABNT NBR 6118 prescreve sobre projetos de pilares de concreto armado, juntamente com uma metodologia para a consideração dos efeitos locais de segunda ordem.

#### 3.1 Equação diferencial de equilíbrio para pilares

Considere uma barra em sua configuração deformada, indicada na Figura 3.1. Esta barra está submetida aos esforços de extremidade indicados e não possui carregamento externo

atuando ao longo do seu comprimento. Para obter as equações diferenciais de equilíbrio, retira-se da barra um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$ . Este elemento encontra-se em equilíbrio sob a ação dos esforços em suas faces, como mostra a Figura 3.2.

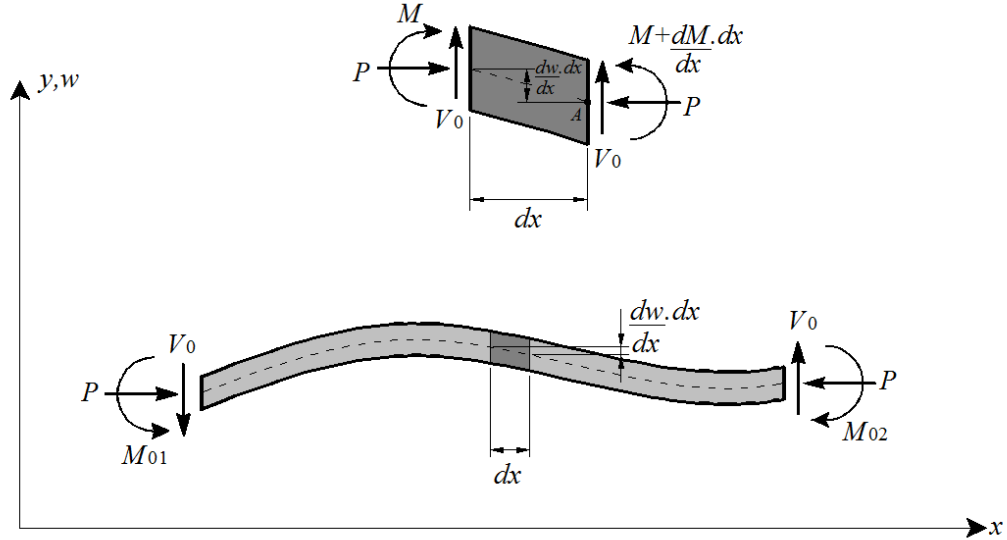


Figura 3.2: Equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal

Fazendo o equilíbrio de momentos em torno do ponto A, tem-se

$$-M + \left( M + \frac{dM}{dx} dx \right) - P \frac{dw}{dx} dx - V dx = 0 \quad 3.1$$

Eliminando os termos comuns na equação 3.1, chega-se a

$$\frac{dM}{dx} - P \frac{dw}{dx} - V = 0 \quad 3.2$$

Diferenciando a equação anterior em relação a  $x$  e lembrando que o esforço cortante  $V$  é constante para este caso de carregamento, tem-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2M}{dx^2} - P \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad 3.3$$

Esta equação é válida para qualquer material, elástico ou não. Entretanto, para materiais elásticos lineares e estando no regime de pequenas deformações, a relação entre momento fletor e a curvatura pode ser escrita como,

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2w}{dx^2} \cong -\frac{M}{EI} \quad 3.4$$



Substituindo a relação dada na equação anterior na equação 3.3 e multiplicando ambos os lados da equação por menos um, chega-se na equação diferencial de equilíbrio do pilar:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad 3.5$$

Esta equação é válida para um pilar com material de comportamento elástico linear e rigidez à flexão constante ao longo da altura. Apesar do concreto armado não apresentar um comportamento elástico linear, existem maneiras de contornar este problema de modo que a equação diferencial permaneça válida. Este assunto será discutido no item 3.2.

Assim, a consideração da não linearidade geométrica resume-se na solução desta equação diferencial de equilíbrio. No próximo subitem, é apresentada a solução analítica desta equação para algumas condições de contorno. Ainda, pode-se resolver esta equação de forma numérica ou simplificada. Estes processos estão descritos respectivamente nos subitens 3.1.2 e 3.1.3.

### 3.1.1 Solução da equação diferencial de equilíbrio para pilares

A diferencial de equilíbrio 3.5 é homogênea e de quarta ordem, considerando a rigidez EI constante ao longo da barra, sua solução pode ser dada por

$$w(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_3 + C_4 \quad 3.6$$

As constantes  $C_1$  a  $C_4$  são obtidas aplicando condições de contorno ao problema. Estas condições podem ser geométricas (deslocamentos ou rotações prescritos), mecânicas (esforços prescritos) ou mistas. Seguem alguns exemplos de condições de contorno:

#### a) Extremidade simplesmente apoiada:

Para a extremidade simplesmente apoiada, têm-se condições de contorno mistas: uma condição geométrica, que é deslocamento nulo; e uma mecânica, que é o momento fletor igual ao momento externo  $M_0$ . Ou seja,

$$w = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI} \quad 3.7$$

**b) Extremidade engastada:**

Para a extremidade engastada, têm-se duas condições de contorno geométricas: deslocamento e rotação nulos. Ou seja,

$$w = 0 \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad 3.8$$

**c) Extremidade livre:**

Para a extremidade livre, têm-se duas condições de contorno mecânicas: o momento fletor igual ao momento externo  $M_0$ ; e o esforço cortante igual a força transversal  $V_0$ . Ou seja,

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI} \quad V_0 = \frac{dM}{dx} + P \frac{dw}{dx} \quad 3.9$$

**3.1.2 Processo iterativo de aproximações sucessivas**

A ideia deste processo nada mais é do que substituir um problema não linear por um conjunto de aproximações lineares sucessivas. Para isto, considera-se inicialmente o pilar em sua configuração inicial, indeformada. A partir dos momentos de 1ª ordem  $M_0(x)$ , pode-se calcular o deslocamento ao longo do pilar  $w_1(x)$  por meio da integração da equação 3.4. Ou seja,

$$w_1(x) = \iint \frac{M_0(x)}{EI} dx \quad 3.10$$

Esta integral pode ser resolvida de forma analítica ou numérica. Para este trabalho, o problema foi resolvido por integração numérica, através da regra do trapézio.

A partir desta primeira aproximação dos deslocamentos no pilar, pode-se calcular os momentos da configuração deformada, resultando

$$M_1(x) = M_0(x) + P w_1(x) \quad 3.11$$

Se os esforços se alteram, consequentemente se alteram os deslocamentos, que por sua vez alteram novamente os esforços. Ou seja, os deslocamentos dependem dos esforços e os esforços dependem dos deslocamentos. Para contornar este problema, devem-se fazer iterações sucessivas até que o deslocamento  $w_i(x)$  não sofra alterações significativas, quando comparado com o deslocamento da iteração anterior  $w_{i-1}(x)$ . O deslocamento e o esforço de cada iteração são dados, respectivamente, pelas equações 2.12 e 2.13.

$$w_i(x) = \iint \frac{M_{i-1}(x)}{EI} dx \quad 3.12$$

$$M_i(x) = M_0(x) + P w_i(x) \quad 3.13$$

Se o problema for convergente, a diferença entre os deslocamentos  $w_i(x)$  e  $w_{i-1}(x)$  tende a zero. Por esse motivo, esta diferença pode ser utilizada como parâmetros de controle do processo iterativo, estabelecendo uma tolerância nesta diferença como critério de convergência.

Se mesmo após um grande número de iterações o processo não convergir, pode estar caracterizada uma instabilidade estrutural.

### 3.1.3 Pilar padrão

O processo pilar padrão assume a hipótese que a configuração deformada de um pilar, submetido à flexo-compressão, pode ser representada por uma curva senóide, conforme mostra a Figura 3.3 e a equação 3.14.

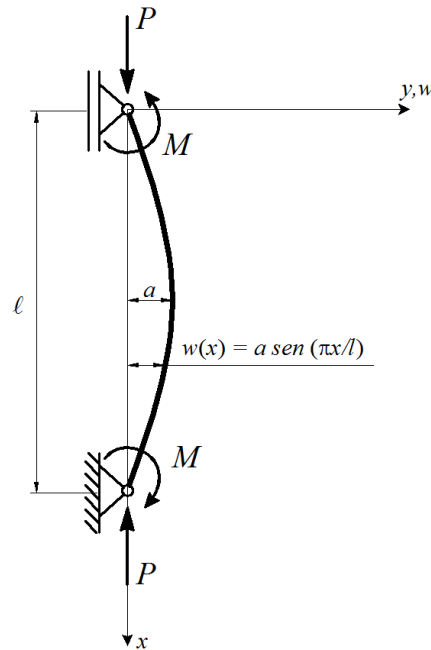


Figura 3.3: Curva senóide para configuração deformada do pilar

$$w(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad 3.14$$

Para pequenas deformações, a curvatura pode ser representada aproximadamente por  $1/r \cong d^2w/dx^2$ . Assim, diferenciando duas vezes a equação anterior em relação a  $x$ , chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2w}{dx^2} = -a \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{\ell} \right) \quad 3.15$$

O deslocamento máximo da equação 3.14 é igual a  $a$  e ocorre quando  $x$  é igual a  $0,5\ell$ . Substituindo este valor de abscissa na equação anterior, pode-se obter o valor deste deslocamento em função da curvatura do pilar.

$$a \cong - \left( \frac{\ell}{\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \quad 3.16$$

O momento máximo de segunda ordem é dado pela multiplicação entre o deslocamento  $a$  e força normal  $P$ . Assim, o momento total atuante no pilar pode ser escrito em valor absoluto, como a soma dos momentos de primeira e segunda ordem. Resultando,

$$M_{tot} = M + P \left( \frac{\ell}{\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \quad 3.17$$

Esta equação é válida para o caso de pilar biapoado com momento fletor constante. Porém, ela pode ser adaptada para outros casos de vinculação nos extremos do pilar, bem como para outras formas do diagrama de momentos fletores.

Para considerar as condições de vinculação nas extremidades, pode-se alterar na equação 3.17 o comprimento do pilar  $\ell$  para um comprimento equivalente  $\ell_e$ . Sendo que para o caso de pilar biapoado o valor de  $\ell_e$  seria exatamente igual  $\ell$ . Já para o caso de pilar em balanço, o valor de  $\ell_e$  seria igual a  $2\ell$ .

Para outras formas de diagramas de momentos fletores, o momento máximo total não acontecerá necessariamente na metade da altura do pilar. Para contornar este problema, pode-se substituir na equação 3.17 o valor do momento  $M$  por um valor de momento equivalente  $\alpha_b M_a$ , de modo que a solução permaneça válida.

Com estas modificações na equação 3.17 e considerando  $\pi^2 \cong 10$ , tem-se

$$M_{tot} = \alpha_b M_a + P \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \quad 3.18$$

No subitem 3.3.4, será apresentado os valores que a norma ABNT NBR 6118 adota para o coeficiente  $\alpha_b$  e para o momento  $M_d$ , de acordo com as condições de vinculação e carregamento.

### 3.2 Rigidez $EI$ para pilares de concreto armado

Conhecida a suposta armadura da seção e o esforço normal atuante do pilar, o principal efeito da não linearidade física pode ser considerado através da relação momento-curvatura. A partir desta relação, pode-se determinar o valor de rigidez à flexão  $EI$  correspondente ao momento fletor  $M_s$ . Este processo está ilustrado na Figura 3.4.

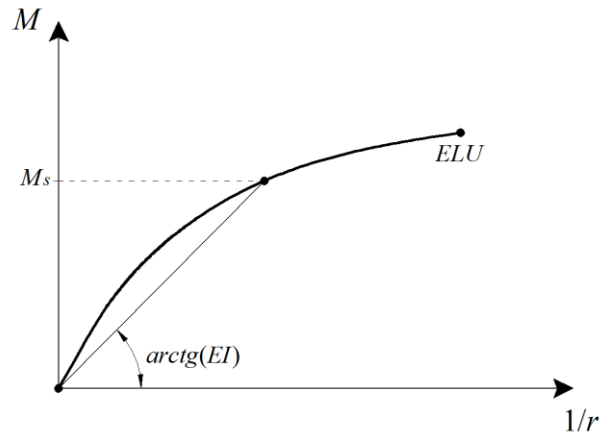


Figura 3.4: Rigidez  $EI$  na relação momento-curvatura

Assim, para cada valor de momento  $M_s$  tem-se um valor de rigidez  $EI$  correspondente. Ou seja, para um pilar em que o momento fletor varia ao longo de seu comprimento, sua rigidez também será variável. Isto inviabiliza uma solução analítica do problema, uma vez que para solução da equação diferencial de equilíbrio a rigidez foi considerada como constante (equação 3.6).

Em casos em que há atuação de momentos fletores concomitantes em ambas direções, a correta avaliação da rigidez  $EI$  não pode ser feita de forma desacoplada, isto é, não levando em conta que os esforços em uma direção influenciam a definição da rigidez na outra direção.

Para um momento solicitante  $M_s$ , com componentes nas direções  $x$  e  $y$ , resulta em uma configuração deformada com curvaturas  $1/r_x$  e  $1/r_y$ , Figura 3.5.

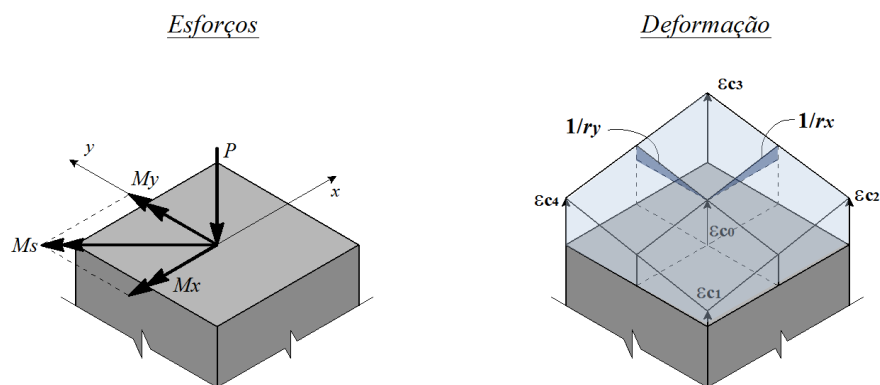


Figura 3.5: Curvaturas  $1/r_x$  e  $1/r_y$

Rigorosamente falando, a solução correta só é viável com a utilização de processos numéricos apropriados, que consideram a variação da rigidez  $EI$  em função da ação dos momentos concomitantes nas duas direções. Isto torna a solução do problema extremamente complexa.

Entretanto, do ponto de vista prático, existem simplificações que permitem representar a rigidez à flexão por um valor constante,  $EI_{sec}$ , obtido pela linearização da curva. Assim, a equação 3.6 permanece válida e o problema pode ser resolvido de forma desacoplada.

Existem diversos métodos que tratam a não linearidade física maneira aproximada. Em geral, estes métodos propõem aproximações para o valor de rigidez  $EI$  ou para o valor de curvatura  $1/r$ .

### 3.3 Critérios da ABNT NBR 6118 para o projeto de pilares

Nos próximos subitens são apresentados alguns critérios que a ABNT NBR 6118 adota para projeto de pilares.

#### 3.3.1 Imperfeições geométricas locais

O efeito do desaprumo ou da falta de retilineidade do eixo do pilar devem ser considerados, como mostram as Figura 3.6 a e b, respectivamente.

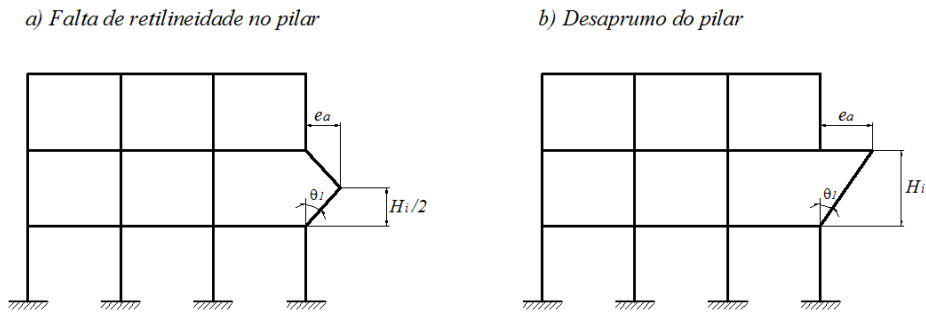


Figura 3.6: Imperfeições geométricas locais

Sendo o valor  $\theta_1$  igual a:

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H_i}}, \text{ com } \theta_1 \geq \frac{1}{300} \quad 3.19$$

O efeito dessa imperfeição geométrica não é simples de ser considerado, uma vez que é difícil definir a sua direção e o seu sentido crítico de atuação. Como alternativa, a ABNT NBR 6118 permite, em estruturas reticuladas, que o efeito das imperfeições geométricas locais seja substituído pela consideração de um momento mínimo, descrito no próximo subitem.

### 3.3.2 Momento mínimo

O momento mínimo de 1ª ordem a ser considerado é dado por:

$$M_{1d,min} = N_d (0,015 + 0,03h) \quad 3.20$$

Para pilares de seção retangular, pode-se definir o momento mínimo correspondente a cada uma das direções, tomando para o valor de  $h$  a altura da seção na direção analisada. Sendo  $M_{1d,min,xx}$  e  $M_{1d,min,yy}$ , respectivamente os momentos mínimos nas direções  $x$  e  $y$ . A Figura 3.7 ilustra estes momentos.

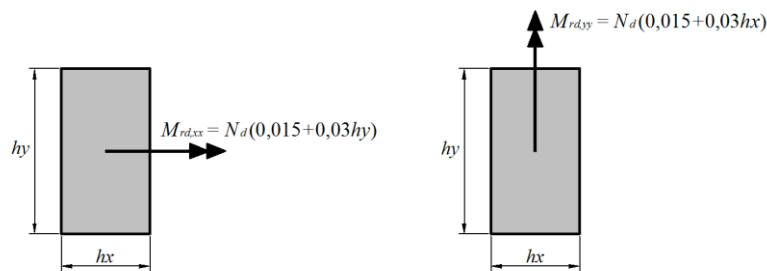


Figura 3.7: Momentos mínimos  $M_{1d,min,xx}$  e  $M_{1d,min,yy}$

Porém, os momentos mínimos não devem ser aplicados simultaneamente nas duas direções. Como alternativa, pode-se definir uma envoltória mínima de 1ª ordem, tomada a favor da segurança pela seguinte expressão:

$$\left( \frac{M_{1d,min,x}}{M_{1d,min,xx}} \right)^2 + \left( \frac{M_{1d,min,y}}{M_{1d,min,yy}} \right)^2 = 1 \quad 3.21$$

Sendo:

$M_{1d,min,xx}$  e  $M_{1d,min,yy}$  as componentes mínimas na flexão composta normal;

$M_{1d,min,x}$  e  $M_{1d,min,y}$  as componentes mínimas na flexão composta oblíqua;

Desta forma, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima de 1ª ordem. Uma ilustração desta verificação é apresentada na Figura 3.8.

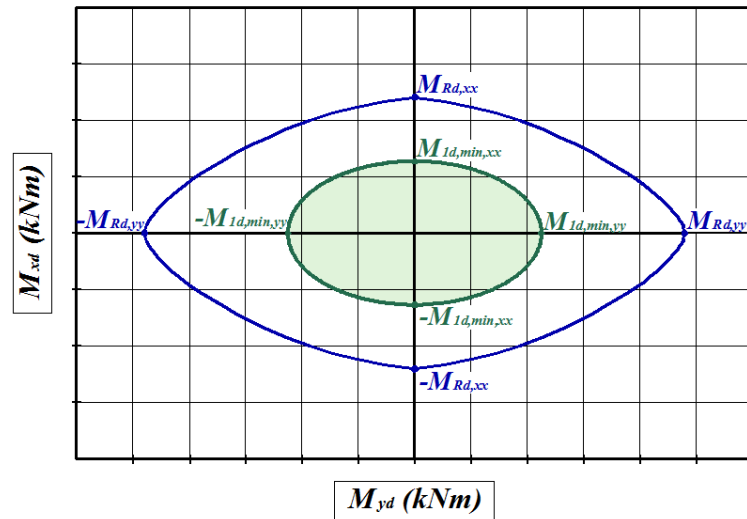


Figura 3.8: Envoltória mínima de 1ª ordem

(— Envoltória Resistente; — Envoltória Mínima)

Ainda, quando houver a necessidade de calcular os efeitos locais de 2ª ordem em alguma das direções do pilar, a verificação do momento mínimo deve considerar uma envoltória mínima com 2ª ordem. Onde os momentos totais  $M_{d,tot,min,xx}$  e  $M_{d,tot,min,yy}$  são calculados, respectivamente, a partir dos momentos mínimos de 1ª ordem  $M_{1d,min,xx}$  e  $M_{1d,min,yy}$ .

A ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho faz somente a verificação quanto ao momento mínimo.



### 3.3.3 Índice de esbeltez ( $\lambda$ )

O índice de esbeltez  $\lambda$  é um parâmetro que indica o quanto o pilar é esbelto, e por consequência, o quanto é influenciado pelos efeitos locais de segunda ordem. Este parâmetro é dado pela razão entre o comprimento equivalente e o raio de giração, segundo a direção considerada:

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i}, \quad \text{com } i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \quad 3.22$$

$I_c$  e  $A_c$  são, respectivamente, a inércia e a área da seção bruta de concreto. Já  $\ell_e$  é o comprimento equivalente do pilar, que no caso de pilar em balanço o valor de  $\ell_e$  é igual a  $2\ell$ . Para pilares biapoiados deve ser determinado conforme ilustra a Figura 3.9.

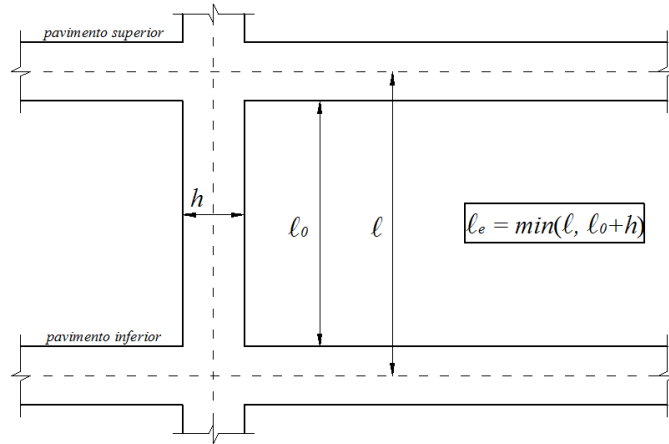


Figura 3.9: Determinação do comprimento equivalente  $\ell_e$

Sendo:

$\ell_0$  é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais que vinculam o pilar;

$h$  é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo;

$\ell$  é a distância entre os eixos dos elementos estruturais que vinculam o pilar.

Quanto mais esbelto for o pilar, mais refinado deve ser o seu cálculo, pois os efeitos locais de segunda ordem são mais significativos e a tendência de perda de estabilidade é maior. Por estes motivos, os métodos de cálculos de pilares são empregados de acordo com seu índice de esbeltez.

Os pilares devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 ( $\lambda \leq 200$ ). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que  $0,10f_{cd} A_c$ , o índice de esbeltez pode ser maior que 200, como por exemplo, no caso de postes.

Nas estruturas usuais em concreto armado, a grande maioria dos pilares tem um índice de esbeltez inferior a 90. Em casos particulares, na qual a arquitetura do edifício impõe uma geometria mais ousada, adotam-se pilares mais esbeltos, com  $\lambda > 90$ . Nestes casos, é obrigatória a consideração do efeito de fluência do concreto.

Casos de pilares com índice de esbeltez superior a 140 são raros e devem ser evitados. No caso de sua utilização, deve-se empregar um coeficiente adicional para ponderação das ações, dados por  $\gamma_{n1} = 1 + [0,01(\lambda - 140) / 1,4]$ .

Ainda, os esforços locais de 2ª ordem podem ser desprezados quando o índice de esbeltez for menor que o valor limite  $\lambda_1$ , que pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 e_1/h}{\alpha_b}, \quad \text{onde } 35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad 3.23$$

Sendo:

$e_1/h$  é a excentricidade relativa de 1ª ordem na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto;

$\alpha_b$  é um coeficiente definido no item 3.3.4.

Verificar se os efeitos locais de segunda ordem podem ser dispensados é tão trabalhoso quanto a sua própria consideração através de métodos simplificados.

### 3.3.4 Coeficiente $\alpha_b$

Este coeficiente considerar a influência do tipo de vinculação das extremidades do pilar, bem como a forma do diagrama de momentos fletores. O valor de  $\alpha_b$  deve ser obtido conforme estabelecido a seguir:

a) Para pilares biapoiados sem cargas transversais:

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \frac{M_B}{M_A} \geq 0,40 \quad 3.24$$

Onde  $M_A$  e  $M_B$  são os momentos de 1ª ordem nas extremidades dos pilar. Sendo  $M_A$  o maior valor absoluto do momento fletor ao longo do pilar e  $M_B$  o momento na outra extremidade, com sinal positivo se tracionar a mesma face que  $M_A$  e negativo em caso contrário.

b) Para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \frac{M_c}{M_A} \geq 0,85 \quad 3.25$$

Onde  $M_A$  é o momento de 1ª ordem no engaste e  $M_C$  é o momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

c) para pilares com momentos inferiores ao  $M_{1d,min}$  ou pilares biapoiados com cargas transversais significativas:

$$\alpha_b = 1,0 \quad 3.26$$

### 3.3.5 Relações momento-curvatura

Conforme visto no item anterior, a rigidez  $EI$  pode ser considerada através da construção da relação esforço normal – momento fletor – curvatura (curva N–M–1/r). Porém, agora o problema passa a ser determinar um valor de  $EI$  que represente bem os efeitos da não linearidade física.

Ainda, na construção desta relação precisam ser levados em conta dois aspectos: o primeiro sobre a consideração da tensão de pico do concreto, e por último, pode-se considerar a formulação de segurança em que se calculam os efeitos de 2ª ordem das cargas majoradas de  $\gamma_f/\gamma_{f3}$ .

Quanto à tensão de pico, esta deve ser igual a  $1,1f_{cd}$ , já incluído o efeito de carga de longa duração, conhecido como efeito Rüschi. Esta consideração se deve ao fato de que, no momento da perda de estabilidade, nem todas as seções do pilar atingem o esgotamento de sua capacidade resistente de forma simultânea.

Já, quanto à consideração do coeficiente  $\gamma_{f3}$ , a curva com  $1,1f_{cd}$  é obtida com uma força normal igual a  $N_{rd}/\gamma_{f3}$ , e o esforço para definição da rigidez deve ser igual a  $M_{rd}/\gamma_{f3}$ .

A construção da curva com estas considerações é apresentada na Figura 3.10. Sendo que, a rigidez secante  $EI_{sec}$  é obtida pela reta AB e pode ser utilizada em processos aproximados para flexão composta normal ou oblíqua.

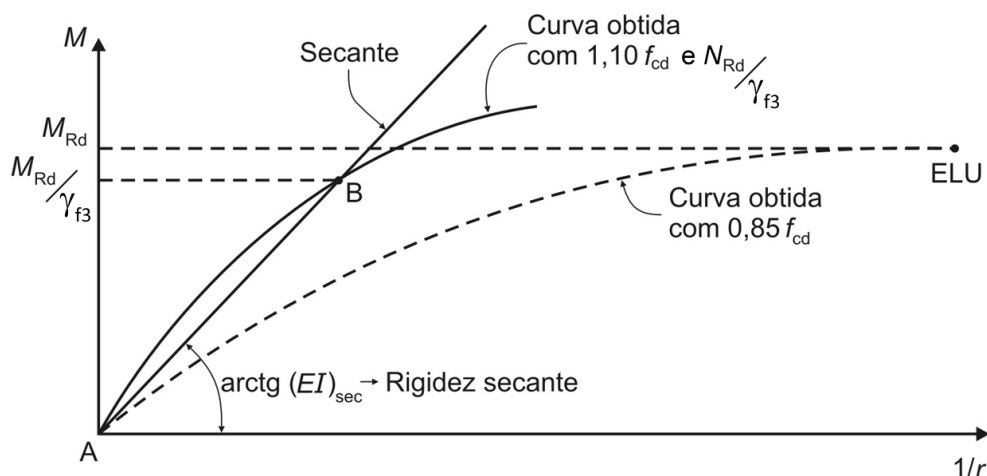


Figura 3.10: Rigidez  $EI$  na relação momento-curvatura (ABNT NBR 6118)

Outra consideração importante é que a rigidez definida pela reta AB, na grande maioria das vezes, está a favor da segurança. Isto pode ser notado pela construção da relação momento curvatura variando o momento fletor na direção ortogonal à direção analisada. Isso gerará uma série de curvas (um para cada valor de momento ortogonal até o esforço último). Estes diagramas são apresentados Figura 3.11 por uma vista espacial e uma vista lateral.

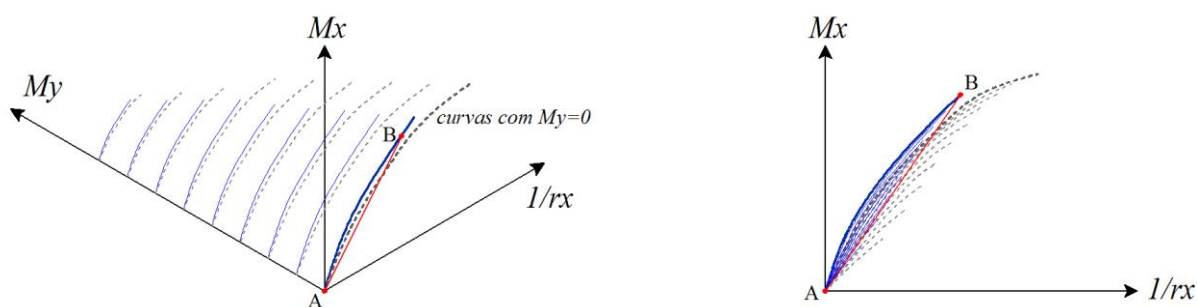


Figura 3.11: Relações momento-curvatura ( $M_x$ - $1/r_x$ ) em função de  $M_y$

As curvas com  $M_y = 0,0 \text{ tf.m}$  destacadas nos gráficos da figura anterior correspondem exatamente aos diagramas com  $0,85f_{cd}$  e  $1,1f_{cd}$  que foram utilizadas para extrair a rigidez  $EI_{sec,x}$ . Nota-se que a reta AB está por baixo de quase todas as curvas com  $1,1f_{cd}$ , gerando quase sempre uma rigidez menor (a favor da segurança), independente do valor de  $M_y$ .

### 3.3.6 Efeitos locais de 2ª ordem

A norma ABNT NBR 6118 apresenta quatro métodos para o cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem:

- Pilar-padrão com curvatura aproximada;
- Pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada;
- Pilar padrão acoplado a diagramas M-N-1/r;
- Método geral.

Cada um desses métodos possui limitações próprias, e por isso, podem ser aplicados desde que a esbeltez do pilar esteja dentro de determinados limites.

Nos próximos subitens serão apresentados critérios e características de cada um destes métodos.

#### 3.3.6.1 Pilar-padrão com curvatura aproximada

Este método pode ser empregado apenas para o cálculo de pilares com índice de esbeltez  $\lambda \leq 90$ , seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, conforme apresentado no item 3.1.3. O momento máximo no pilar é calculado pela seguinte expressão:

$$M_{Sd,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad 3.27$$

O momento  $M_{1d,A}$  é o valor de cálculo de 1ª ordem do momento  $M_A$ , que deve ser maior ou igual ao momento mínimo  $M_{1d,min}$  (equação 3.20). Já o valor de  $1/r$  é a curvatura na seção crítica, que pode ser avaliada pela seguinte expressão aproximada:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h (\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad 3.28$$

onde:

$\nu = N_d / (A_c f_{cd})$ , o esforço normal reduzido;

$h$  é a altura da seção na direção considerada.

### 3.3.6.2 Pilar-padrão com rigidez $\kappa$ aproximada

Assim como no método anterior, este método pode ser empregado no cálculo de pilares com índice de esbeltez  $\lambda \leq 90$ , armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, porém apenas em casos onde a seção é retangular e constante.

Novamente, a não linearidade geométrica foi considerada conforme apresentado no item 3.1.3, no entanto, a expressão para o pilar padrão é desenvolvida em função da rigidez a flexão do pilar, e não mais em função da curvatura  $1/r$ . O desenvolvimento completo desta formulação pode ser encontrado em França (1991).

Num processo de dimensionamento, o cálculo do momento total máximo  $M_{Sd,tot}$  deve ser realizado de forma iterativa em função da rigidez adimensional  $\kappa$ , de acordo com as seguintes expressões:

$$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa / \nu}} \geq M_{1d,A} \quad 3.29$$

$$\kappa = \kappa_{approx} = 32 \left( 1 + 5 \frac{M_{Sd,tot}}{h N_d} \right) \nu \quad 3.30$$

Substituindo a equação 3.30 em 3.29, chega-se a formulação direta dada pela equação a seguir:

$$M_{Sd,tot} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4.A.C}}{2.A} \quad 3.31$$

Com:

$$A = 5h ;$$

$$B = h^2 N_d - \frac{N_d \ell_e^2}{320} - 5h \alpha_b M_{1d,A} ;$$

$$C = -N_d h^2 \alpha_b M_{1d,A} .$$

### 3.3.6.3 Pilar padrão acoplado a diagramas M-N-1/r

O método pilar padrão pode ser aplicado em conjunto com a rigidez  $\kappa$  obtida através da linearização da curva M-N-1/r, conforme o item 3.3. Este método pode ser empregado apenas para o cálculo de pilares com índice de esbeltez  $\lambda \leq 140$ .

O momento total máximo  $M_{Sd,tot}$  é calculado pela mesma equação 3.29. No entanto, a rigidez  $\kappa$  é dada pela rigidez secante adimensional  $\kappa_{sec}$ , igual a:

$$\kappa_{sec} = \frac{EI_{sec}}{A_c \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad 3.32$$

A rigidez  $EI_{sec}$  é obtida pela linearização segundo o diagrama M–N–1/r proposto na ABNT NBR 6118, conforme Figura 3.10.

Para aplicação deste método, é preciso que a armadura do pilar seja previamente conhecida, pois esta é necessária para construir a curva M–N–1/r. Assim, o dimensionamento direto passa a ser realizado por um processo iterativo de verificações.

Este procedimento também está presente no método geral, descrito no próximo subitem.

#### 3.3.6.4 Método geral

Este método pode ser empregado apenas para pilares com  $\lambda \leq 200$  e é obrigatório para pilares com  $\lambda > 140$ , sendo que, tanto a não linearidade física quanto a geométrica devem ser consideradas de maneira refinada.

A consideração da não linearidade geométrica de forma não aproximada pode ser feita analiticamente através solução da equação diferencial de equilíbrio, ou por meio de algum método numérico, por exemplo, o método proposto no item 3.1.2. Estes métodos consistem basicamente em obter a configuração de equilíbrio do pilar de forma iterativa, ou incremental.

Ao se adotar algum método numérico como solução do problema, deve se ter o cuidado de discretizar adequadamente a barra. Em lances de pilares de edifícios usuais, a discretização em 10 trechos é suficiente.

Diferentemente dos outros métodos, a rigidez  $EI_{sec}$  pode ser obtida através da curva M–N–1/r, considerando o momento atuante em cada seção. Porém, é conveniente definir a rigidez através da linearização do diagrama, conforme visto no item 3.3.5. Estudos mostram que esta consideração é a favor da segurança (França, 1991) e facilita muito a análise, pois permite resolver o problema por meio do desacoplamento das direções.

#### 3.3.6.5 Resumo

Foram apresentados nesta seção todos os métodos presentes na ABNT NBR 6118 para a consideração dos efeitos locais de 2ª ordem. Conforme visto, cada um possui particularidades

e restrições quanto à sua utilização. É apresentado na Tabela 3.1 a seguir um resumo geral das características de cada um destes métodos.

Tabela 3.1: Resumos dos métodos para consideração dos efeitos locais de 2ª ordem

Método	Pilar padrão com 1/r aproximada	Pilar padrão com k aproximado	Pilar padrão acoplado com N-M-1/r	Método geral
<b>Limite de Esbeltez</b>	$\lambda \leq 90$	$\lambda \leq 90$	$\lambda \leq 140$	$\lambda \leq 200$
<b>Não linearidade geométrica</b>	$M_{Sd,tot} = \alpha_b M_{ld,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r}$ (Equação 3.27)	$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{ld,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa/\nu}}$ (Equação 3.29)	$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{ld,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa/\nu}}$ (Equação 3.29)	Integração Numérica ou P-δ
<b>Não linearidade física</b>	$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h (\nu + 0,5)}$ (Equação 3.28)	$\kappa_{aprox} = 32 \left( 1 + 5 \frac{M_{Sd,tot}}{h N_d} \right) \nu$ (Equação 3.30)	$\kappa_{sec} = \frac{EI_{sec}}{A_c h^2 f_{cd}}$ (Equação 3.32)	$EI_{sec}$ (Figura 3.5)
<b>Armadura conhecida</b>	Não	Não	Sim	Sim
<b>Permite o cálculo manual</b>	Sim	Sim	Não*	Não
<b>Disposição da armadura</b>	Simétrica	Simétrica	Qualquer	Qualquer
<b>Tipo de seção</b>	Qualquer	Retangular	Qualquer	Qualquer

\* Pode ser resolvido manualmente por meio de ábacos  $\nu$ - $\mu$ - $\omega$ - $\kappa$ .

Na Tabela 3.1, a palavra “qualquer” deve ser encarada com precaução, pois há casos em que o seu campo de aplicação ainda não foi devidamente testado e comprovado, sendo necessários estudos mais aprofundados para se ter uma resposta mais precisa e definitiva.

O próprio Método Geral que é mais abrangente, por exemplo, necessita de mais testes para que seja comprovada a sua validade para todo e qualquer tipo de pilar (ex.: pilares de seção genérica com índice de esbeltez acima de 140).

Enquanto não se tem uma resposta definitiva para todos os casos, é sempre conveniente durante a elaboração de um projeto estrutural, cercar-se de soluções que levem a uma estrutura mais segura, principalmente em situações “que fogem do trivial”.



## 4 SISTEMA COMPUTACIONAL PCALC

O PCalc é um aplicativo gratuito desenvolvido com o intuito de auxiliar o estudo de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, explorando diferentes métodos para consideração da não linearidade física e geométrica.

A janela principal do aplicativo é organizada de forma prática, com acesso rápido a todas as entradas de dados e saída de resultados. Esta janela é apresentada na Figura 4.1 juntamente com a indicação do conteúdo descritos nos próximos itens.

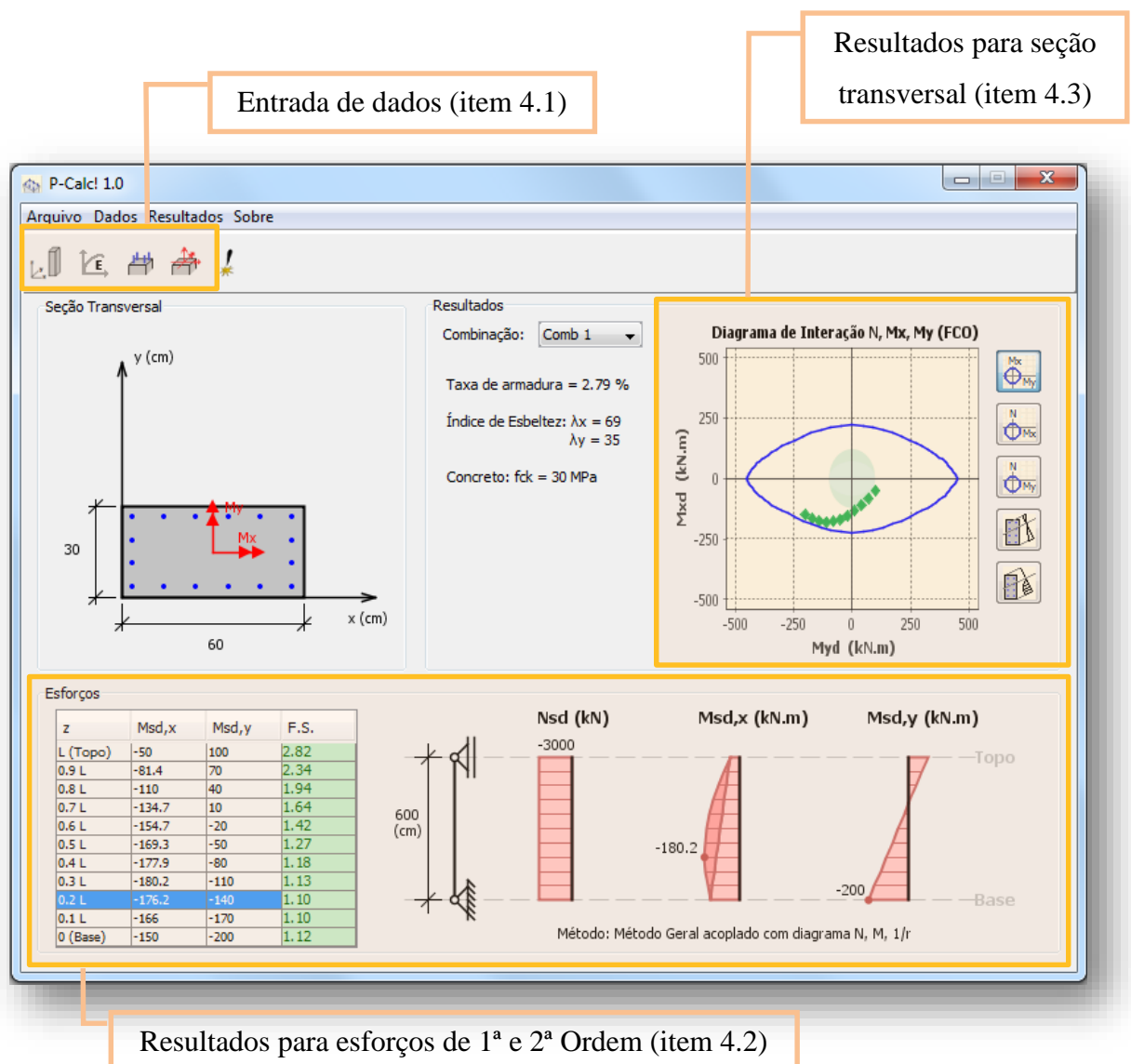


Figura 4.1: Janela principal do PCalc

## 4.1 Entrada de dados

A entrada de dados do programa está dividida em quatro partes: Geometria, Materiais, Armação e Esforços, sendo cada uma delas apresentada nos próximos subitens. Inicialmente, as entradas de dados de armação e de esforços estão bloqueadas, pois elas só podem ser acessadas após a definição dos dados referentes à geometria.

### 4.1.1 Entrada de dados: Geometria ( )

Nesta entrada de dados são definidos o tipo de seção transversal e as condições de vinculação. A princípio estão disponíveis as seções transversais do tipo retangular e circular, sendo estas vazadas ou maciças. Já os tipos de vinculações disponíveis são: pilar em balanço e pilar biapoiado. Ainda, existe a opção “única seção” na qual é possível fazer uma análise de uma seção transversal isolada para fins de avaliação no ELU, portanto, sem a consideração dos efeitos locais de 2ª ordem. A Figura 4.2 apresenta a janela de entrada de dados, bem como as seções transversais e condições de vinculação disponíveis.

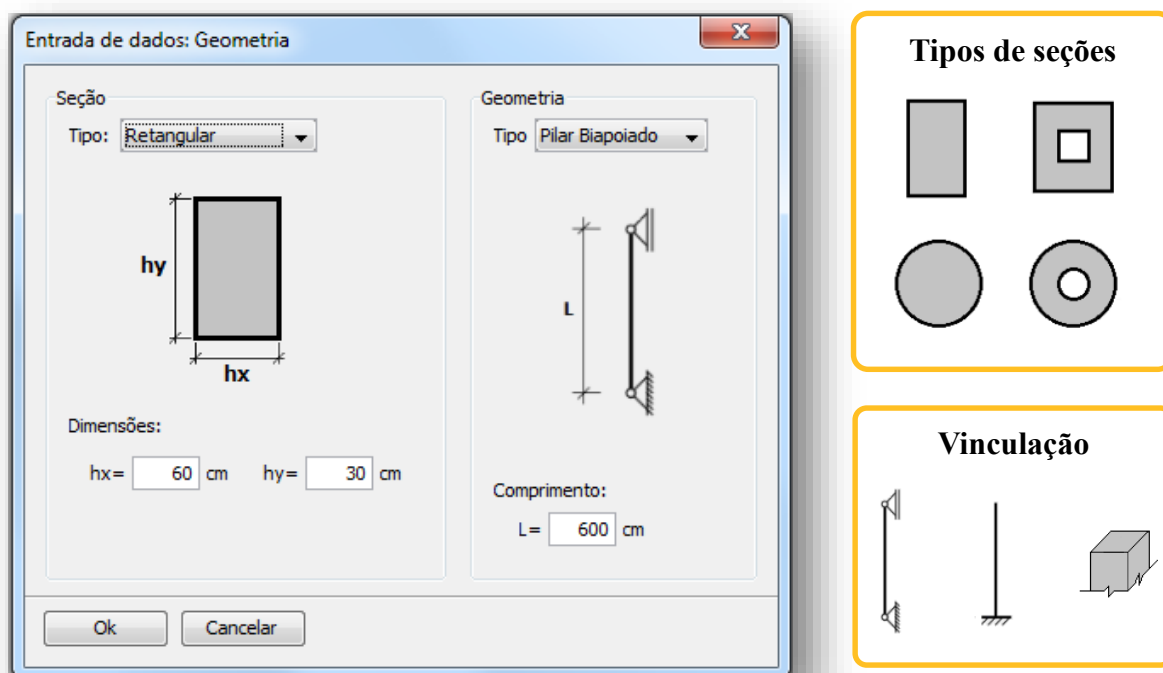


Figura 4.2: Janela de entrada de dados - geometria

### 4.1.2 Entrada de dados: Materiais (📁)

Nesta entrada de dados são informados parâmetros que descrevem o comportamento tensão-deformação dos materiais, como a resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), a resistência característica ao escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) e do seu módulo de elasticidade ( $E_s$ ). A Figura 4.3 mostra a janela do programa para esta entrada de dados.

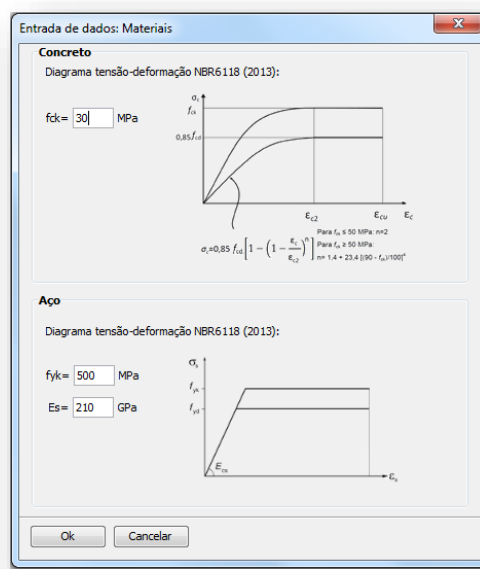


Figura 4.3: Janela de entrada de dados - Materiais

### 4.1.3 Entrada de dados: Armação (🏗️)

O programa dispõe de duas maneiras para inserir os dados referentes à armação, "Edição rápida" e "por coordenadas". Estas maneiras são descritas a seguir, com as correspondentes janelas do programa apresentadas nas Figuras 4.4a e 4.4b.

*Edição rápida* - é a maneira mais direta, onde são inseridas barras de mesmo diâmetro de acordo com sua quantidade por face da seção;

*Por coordenadas* - cada barra, ou linha de barras, é inserida de acordo seu diâmetro e suas coordenadas  $x$  e  $y$ . Esta entrada de dados é necessária no caso de existirem barras com diâmetros diferentes ou alguma particularidade no posicionamento da armação.

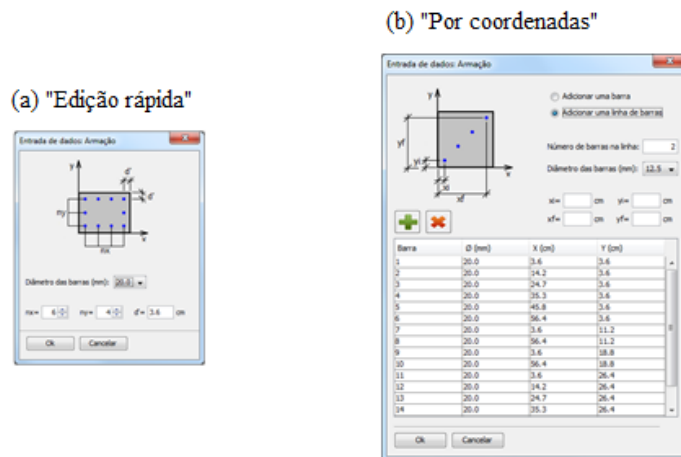



Figura 4.4: Janelas de entrada de dados - armação

Ambas as entradas podem ser acessadas através do menu suspenso *Dados/Armação*. O ícone , presente na janela principal, dá acesso à “Edição rápida”, porém, ao clicar nesse mesmo ícone com a tecla *control* pressionada, é acessada a entrada “Por coordenadas”.

#### 4.1.4 Entrada de dados: Esforços ( )

Como entrada de esforços solicitantes, são informados a força normal e os momentos segundo as direções  $x$  e  $y$ , no topo e na base pilar. Para análise de seções isoladas, logicamente, são informados os pares de momentos para seção analisada. A Figura 4.5 apresenta a janela do programa para a inserção dos esforços no pilar.

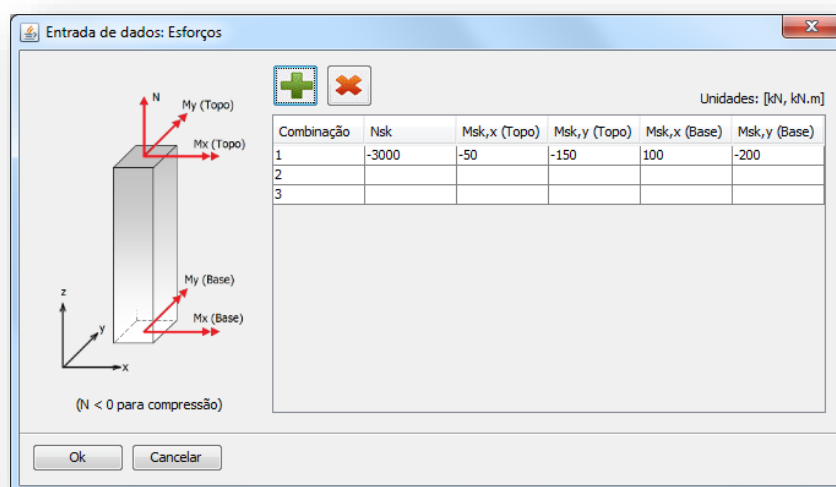


Figura 4.5: Janela de entrada de dados - esforços

Os esforços devem ser informados em valores característicos já que o programa calcula as combinações de cálculo a partir do coeficiente de ponderação das ações,  $\gamma_f$ , definido no menu suspenso *Dados/Critérios*. Como alternativa, pode-se entrar diretamente com valores de cálculo das solicitações e alterar o valor de  $\gamma_f$  para 1,0.

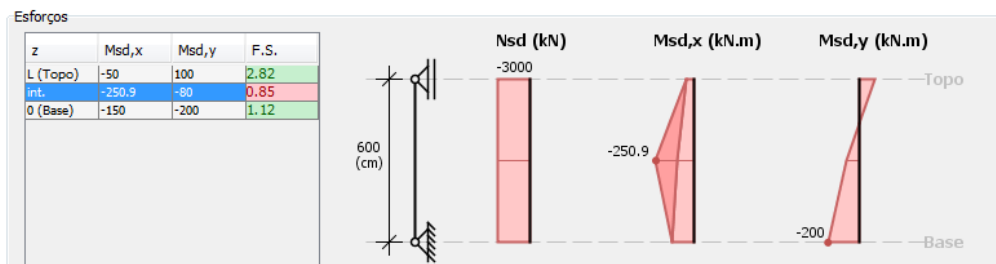
O programa resolve de forma simultânea até dez combinações de esforços, identificando a combinação mais desfavorável ao final do processamento.

## 4.2 Saída de resultados: Esforços de 1ª e 2ª ordem

O programa calcula os esforços locais de segunda ordem de acordo com os processos apresentados no subitem 3.3.6. Nestes processos, a consideração da não linearidade geométrica pode ser feita através do método pilar padrão ou método geral.

Para o método pilar padrão são avaliadas apenas três seções: No topo e na base do pilar, e num ponto intermediário onde se admite atuar concomitantemente os momentos  $M_{d,tot}$  nas duas direções (x e y). Já para o método geral são avaliadas onze seções, de acordo com a discretização adotada para solução numérica do problema (subitem 3.1.2). As Figuras 4.6a e 4.6b apresentam, respectivamente, a saída gráfica do programa para cada um destes métodos.

(a) Pilar-padrão



(b) Método geral

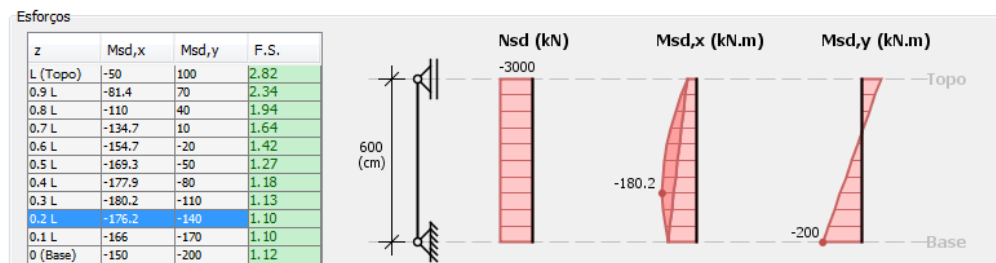


Figura 4.6: Saída gráfica - esforços (1ª e 2ª ordem)

A esquerda das Figuras 4.6a e 4.6b existe uma tabela onde são apresentados os momentos  $M_{sd,tot}$  nas direções ( $x$  e  $y$ ). Já na última coluna existe um parâmetro F.S. que mede a razão entre o momento resistente e o solicitante ( $M_{rd} / M_{sd}$ ). Este parâmetro é uma espécie de fator de segurança, sendo que a verificação quanto ao *ELU* é atendida quando  $F.S. \geq 1,00$ .

### 4.3 Saída de resultados: Verificação da seção transversal

O programa faz a verificação quanto à segurança na flexão composta oblíqua (FCO) através de diagramas de interação. Além desta verificação, onde a curva momento resistente é construída de acordo com o esforço normal solicitante de cálculo, o programa constrói curvas de interação para casos de flexão composta normal (FCN). Estes diagramas são apresentados nas Figuras 4.7a, 4.7b e 4.7c.

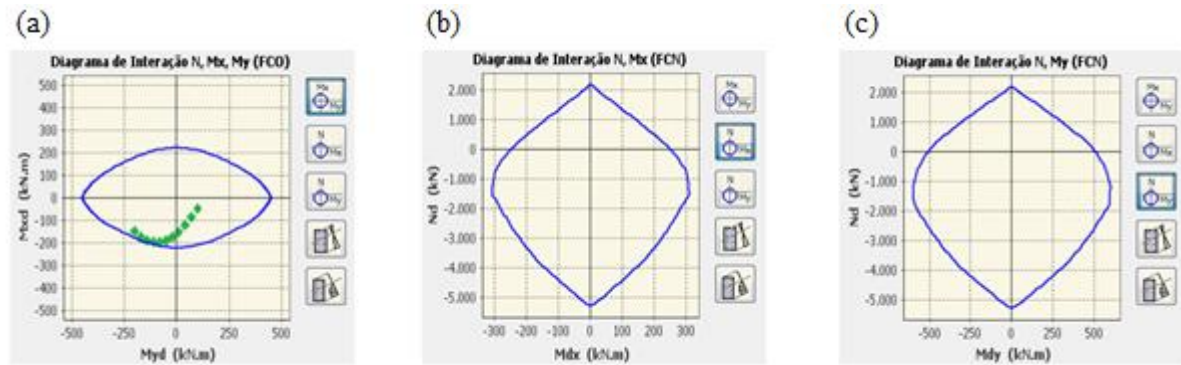
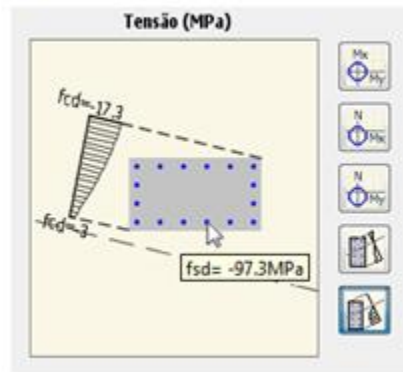


Figura 4.7: Diagrama de interação: a)  $N, M_x, M_y$ ; b)  $N, M_x$ ; c)  $N, M_y$

O programa sempre permite visualizar diagramas de interação para FCN, mesmo para os casos de existirem momentos nas duas direções (FCO). Porém, os pontos correspondentes aos esforços solicitantes de cálculo somente serão representados graficamente somente no caso solicitações de FCN.

Outros resultados apresentados são a tensão e deformação da seção transversal submetida à combinação de esforços solicitantes. Estes são apresentados de forma gráfica, Figuras 4.8a e 4.8b, de acordo com a combinação selecionada na tabela que contém os esforços ao longo do pilar, item 4.2.

(a) Tensão



(b) Deformação

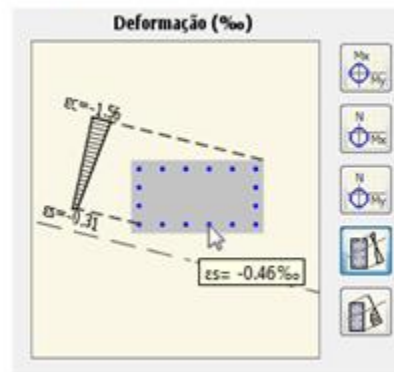


Figura 4.8: tensão e deformação na seção transversal

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO DO SISTEMA PCALC

Nestes capítulos serão resolvidos diversos exemplos numéricos com o intuito de validar o sistema PCalc. Para isso, seus resultados serão comparados com resultados obtidos por soluções analíticas e outros sistemas computacionais. Sendo resolvidos exemplos envolvendo a construção de curvas envoltória resistentes, relações momentos curvaturas e avaliação dos efeitos locais de 2ª ordem.

### 5.1 Seção retangular

Os próximos subitens contêm exemplos numéricos para uma seção de concreto armado retangular, variando a resistência característica à compressão do concreto e a força normal de cálculo atuante. Em todos os exemplos a geometria da seção transversal e a armação serão constantes, de tal forma que é possível fazer as seguintes considerações iniciais:

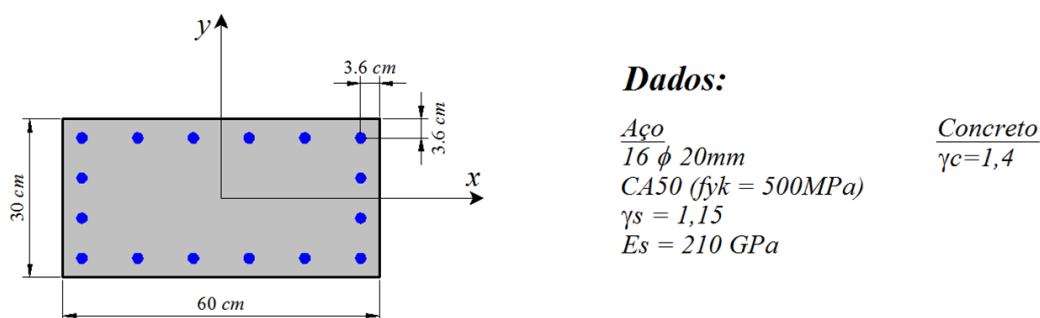


Figura 5.1: Dados para o exemplo de seção retangular

#### 5.1.1 Verificação da capacidade resistente - flexão simples

O problema da verificação da capacidade resistente na flexão normal simples corresponde a encontrar o momento que leva a seção à ruptura, sendo o esforço normal nulo. Para o caso da flexão normal simples, juntamente com as condições de simetria da seção, este momento está em torno do eixo  $x$  ( $M_{rd,xx}$ ) ou do eixo  $y$  ( $M_{rd,yy}$ ), que são os eixos principais de inércia da seção. Os itens a e b apresentam esta solução considerando a resistência característica do concreto à compressão igual a  $f_{ck} = 20 \text{ Mpa}$ .

##### a) Momento resistente de cálculo em torno do eixo $x$ ( $M_{rd,xx}$ )

Conforme visto no item 2.5, o problema da verificação da capacidade resistente de uma seção recai em aplicar um processo iterativo para encontrar a profundidade da linha neutra.



Para este exemplo, a posição da linha neutra foi calculada através de aproximações sucessivas do valor  $x_{LN}$  na equação 2.11, resultando  $x_{LN} = 8.23 \text{ cm}$ . A Figura 5.2 apresenta a configuração de equilíbrio na ruptura para esta posição de linha neutra.

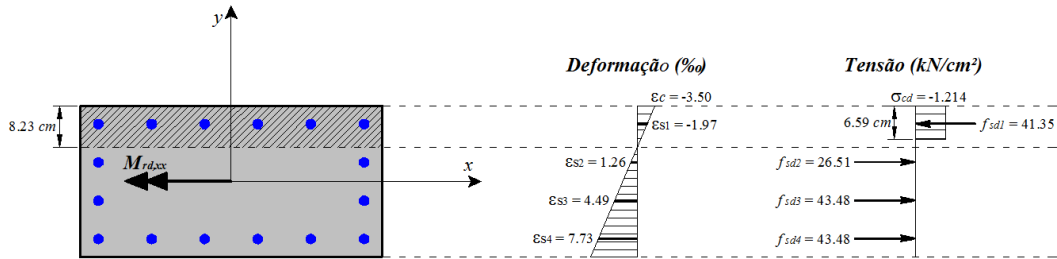


Figura 5.2: Condição de equilíbrio  $M_{rd,xx}$

A partir desta distribuição de deformações, o momento resistente  $M_{rd,xx}$  é determinado através da equação 2.2, resultando:

$$\begin{aligned}
 -M_{Rd,xx} &= \int_{Ac} \sigma_{cd} y_c dA + \sum_{j=1}^{16} \sigma_{sdj} A_{sj} y_{sj} \\
 -M_{Rd,xx} &= -1.214 \times 11.71 \times 6.59 \times 60 - 41.35 \times 18.85 \times 11.4 + 26.51 \times 6.28 \times 3.8 + 43.48 \times 6.28 \times (-3.8) + \\
 &\quad + 43.48 \times 18.85 \times (-11.4) = -24262 \text{ kNcm} \\
 \boxed{M_{Rd,xx} &= 242.62 \text{ kNm}}
 \end{aligned}$$

#### b) Momento resistente de cálculo em torno do eixo y ( $M_{rd,yy}$ )

Analogamente ao item anterior, foram utilizadas aproximações sucessivas para encontrar a profundidade da linha neutra, resultando em  $x_{ln} = 19.09 \text{ cm}$ . A Figura 5.3 apresenta a configuração de equilíbrio na ruptura para esta posição de linha neutra.

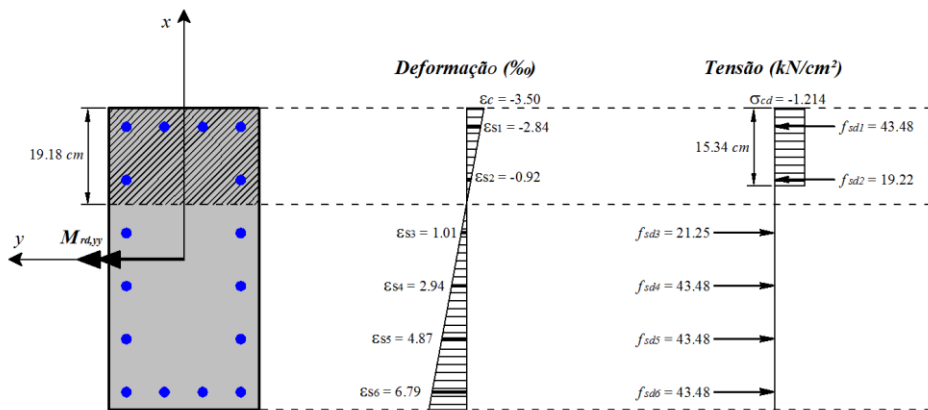


Figura 5.3: Condição de equilíbrio  $M_{rd,yy}$

A partir desta distribuição de deformações, o momento resistente  $M_{rd,yy}$  é determinado através da equação 2.3, resultando:

$$M_{Rd,yy} = -\int_{Ac} \sigma_{cd} x_c dA - \sum_{j=1}^{16} \sigma_{sdj} A_{sj} x_{sj}$$

$$M_{Rd,yy} = -(-1.214 \times 22.33 \times 15.34 \times 30) - [-43.48 \times 12.57 \times 26.4 - 19.22 \times 6.28 \times 15.84 + 21.25 \times 6.28 \times 5.28 + 43.48 \times 6.28 \times (-5.28) + 43.48 \times 18.85 \times (-15.84) + 43.48 \times 12.57 \times (-26.4)] = 48312 \text{ kNcm}$$

$M_{Rd,yy} = 483.07 \text{ kNm}$

Resolvendo os itens a) e b) utilizando o sistema PCalc, resultam momentos resistentes de cálculo iguais a  $M_{rd,xx} = 241,88 \text{ kNm}$  e  $M_{rd,yy} = 482,02 \text{ kNm}$ . Para este exemplo, os resultados obtidos praticamente se igualam aos obtidos através das equações de equilíbrio, apresentando uma diferença percentual da ordem de 0,2%. Cabe salientar que o sistema PCalc considera o diagrama parábola-retângulo para representar a relação tensão-deformação do concreto (Figura 2.2).

### 5.1.2 Diagrama de interação 1: Flexão composta oblíqua (FCO)

A verificação da capacidade resistente na flexão composta oblíqua se faz por meio do diagrama de interação. Foram calculados diagramas de interação para a seção da figura 5.1 através dos sistemas computacionais PCalc, CAD/TQS (TQS, 2014), Oblíqua (CESEC, 2014) e FCO (França, 1984), com  $N_{Sd} = -2000 \text{ kN}$  (compressão) e  $f_{ck} = 20 \text{ Mpa}$ . Os resultados para o quadrante positivo dos diagramas são apresentados nos gráficos da Figura 5.4.

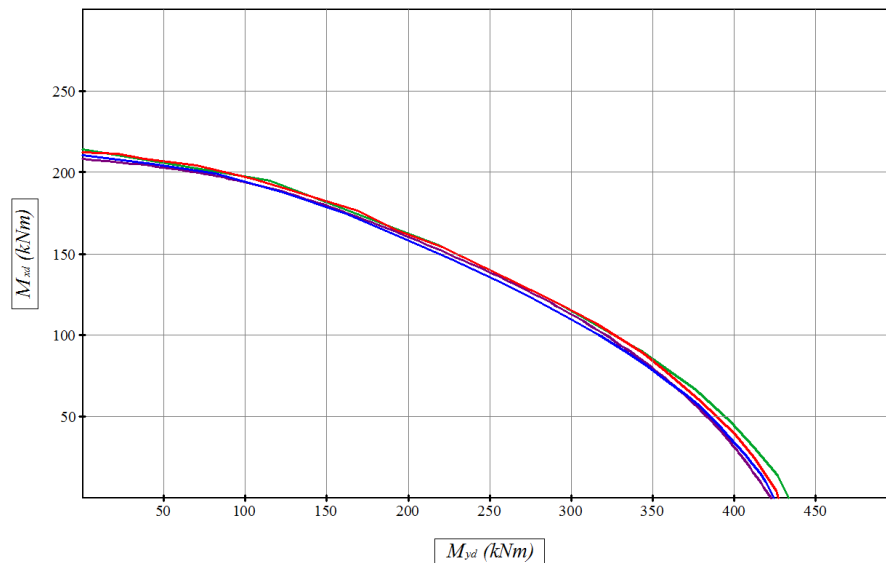


Figura 5.4: Comparação entre diagramas de interação dos para diferentes sistemas [(—) PCalc, (—) CAD/TQS, (—) Oblíqua e (—) FCO]

Como pode-se notar nos diagramas obtidos para este exemplo (Figura 5.4), todos os sistemas apresentaram uma boa correlação entre os resultados. Salienta-se que os programas aqui comparados não apresentam necessariamente a mesma metodologia de solução, parâmetros de discretização e tolerâncias.

### 5.1.3 Diagrama de interação 2: Flexão composta oblíqua (FCO)

Com o intuito de validar o sistema desenvolvido, de acordo com as formulações presentes na norma ABNT NBR 6118 para concretos de alto resistência, foram comparados diagramas de interação obtidos utilizando os sistemas PCalc e CAD/TQS. Estes diagramas são apresentados nas Figuras 5.5 a 5.7 e foram obtidos considerando concreto com  $f_{ck}$  de 30, 60 e 90 MPa, com solicitação normal de cálculo igual a -2000 kN e -4000 kN.

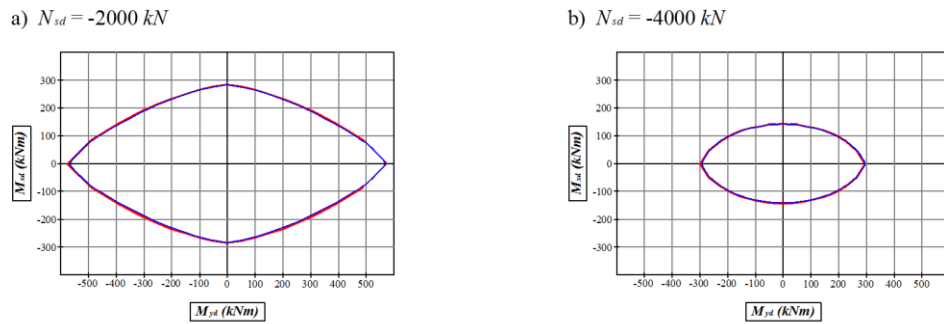


Figura 5.5: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck} = 30$  MPa (—PCalc; —CAD/TQS)

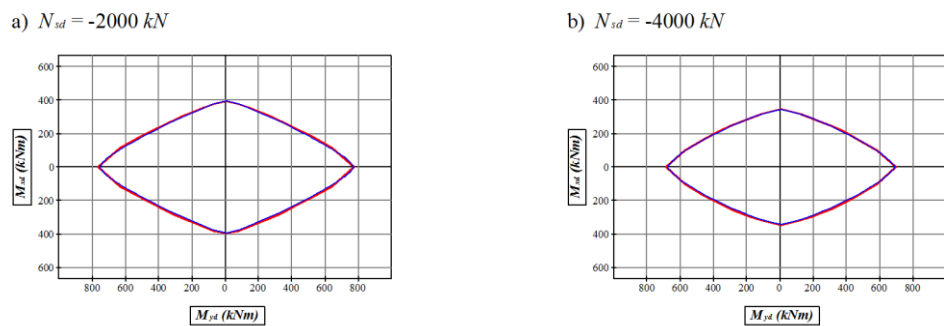


Figura 5.6: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck} = 60$  MPa (—PCalc; —CAD/TQS)

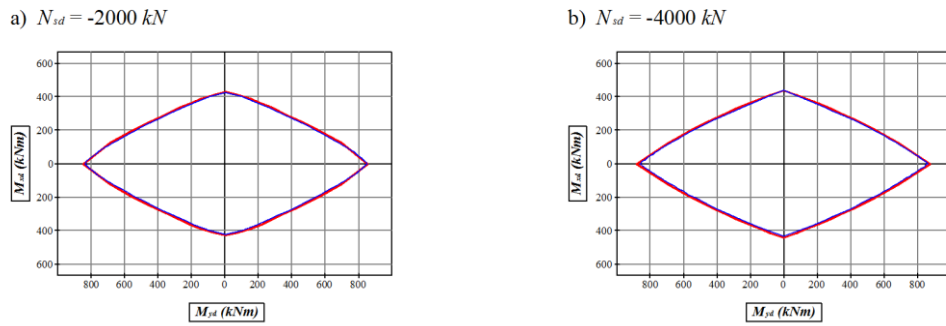


Figura 5.7: Diagrama de interação para concreto com  $f_{ck} = 90$  MPa (—PCalc; —CAD/TQS)

#### 5.1.4 Diagrama $N, M, 1/r$

Neste subitem são comparados diagramas  $N, M_x, 1/r_x$  obtidos através dos sistemas PCalc e CAD/TQS. Estes diagramas são apresentados nas Figuras 5.8 a 5.10 e foram obtidos considerando concreto com  $f_{ck}$  de 30, 60 e 90 MPa com tensão de pico do concreto igual a 0,85  $f_{cd}$ , e solicitação normal de cálculo igual a -2000 kN e -4000 kN.

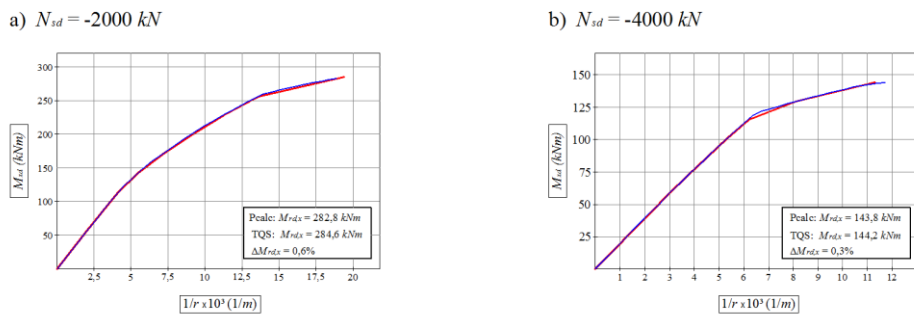


Figura 5.8: Diagrama  $N, M_x, 1/r_x$  para concreto com  $f_{ck} = 30$  MPa (—PCalc; —CAD/TQS)

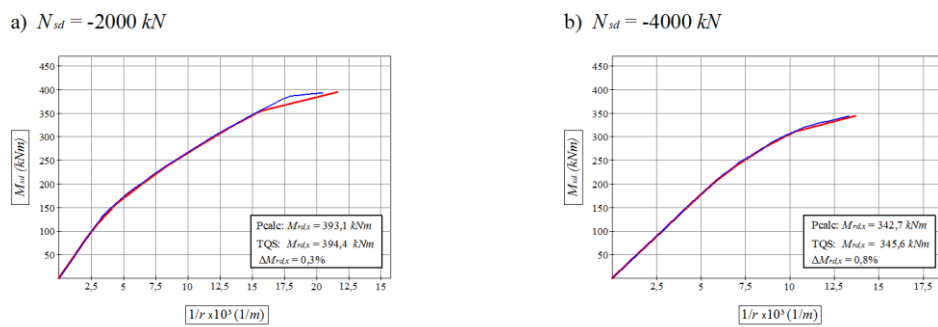


Figura 5.9: Diagrama  $N, M_x, 1/r_x$  para concreto com  $f_{ck} = 60$  MPa (—PCalc; —CAD/TQS)

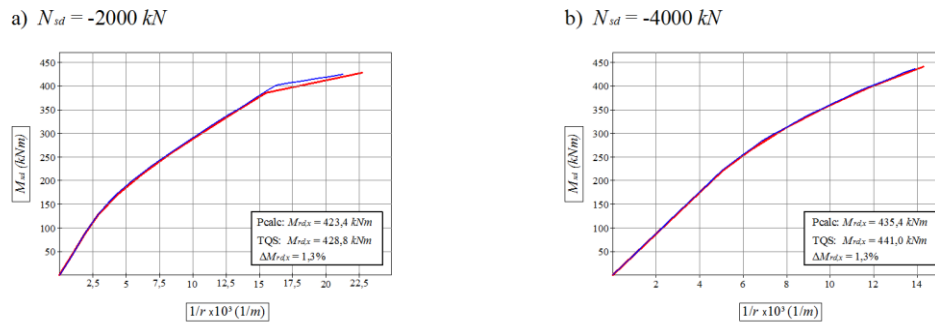


Figura 5.10: Diagrama  $N$ ,  $M_x$ ,  $1/r_x$  para concreto com  $f_{ck} = 90 \text{ MPa}$  (— PCalc; — CAD/TQS)

## 5.2 Análise de um pilar com o sistema PCalc

A seguir, será feita uma análise de um pilar considerando os efeitos locais de 2ª ordem através dos quatro métodos propostos pela ABNT NBR 6118 e apresentados no subitem 3.3.6 do capítulo 3.

A geometria da seção é a mesma apresentada na Figura 5.1, com concreto de  $f_{ck}$  igual a  $30 \text{ MPa}$ . A condição de vinculação, o comprimento do pilar, e os esforços de 1ª ordem atuantes são dados na Figura 5.11.

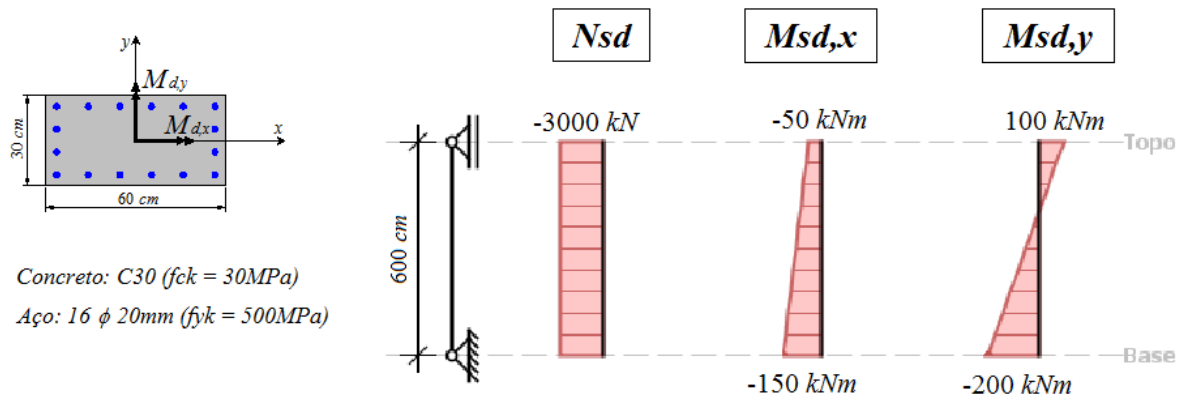


Figura 5.11: Dados do pilar e esforços de 1ª Ordem

O pilar apresenta índices de esbeltez  $\lambda_x = 69$  e  $\lambda_y = 35$ . Para o momento em torno do eixo  $y$ , os esforços locais de segunda ordem podem ser desprezados, pois o índice de esbeltez  $\lambda_y$  é menor que valor limite  $\lambda_{1,y} = 66$ . Desta forma, nos próximos subitens serão calculados somente os momentos de 2ª ordem em torno do eixo  $x$ .

### 5.2.1 Pilar padrão com curvatura aproximada

Para o método pilar padrão com curvatura aproximada, o momento total em torno da direção  $x$  no pilar é dado pela equação 3.27 e calculado a seguir:

$$M_{sd,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = 0.73333 \times 150 + 3000 \times \frac{6^2}{10} \times 0.01667 = 250.9 \text{ kNm}$$

Com:

$$\alpha_b = 0.60 + 0.40 M_B / M_A = 0.60 + 0.40 (50) / 150 = 0.73333;$$

$$M_{1d,A} = 150 \text{ kNm e } N_d = 3000 \text{ kN};$$

$$\ell_e = 6 \text{ m};$$

$$1 / r = 0.005 / [ h_y ( \nu + 0.5 ) ] = 0.005 / [ 0.3 ( 0.77778 + 0.5 ) ] = 0.01304 \text{ 1/m}$$

$$\nu = N_{sd} / ( A_c f_{cd} ) = 3000 / ( 0.18 \times 30000 / 1.4 ) = 0.77778.$$

A Figura 5.12 apresenta os resultados obtidos para este exemplo utilizando o sistema PCalc.

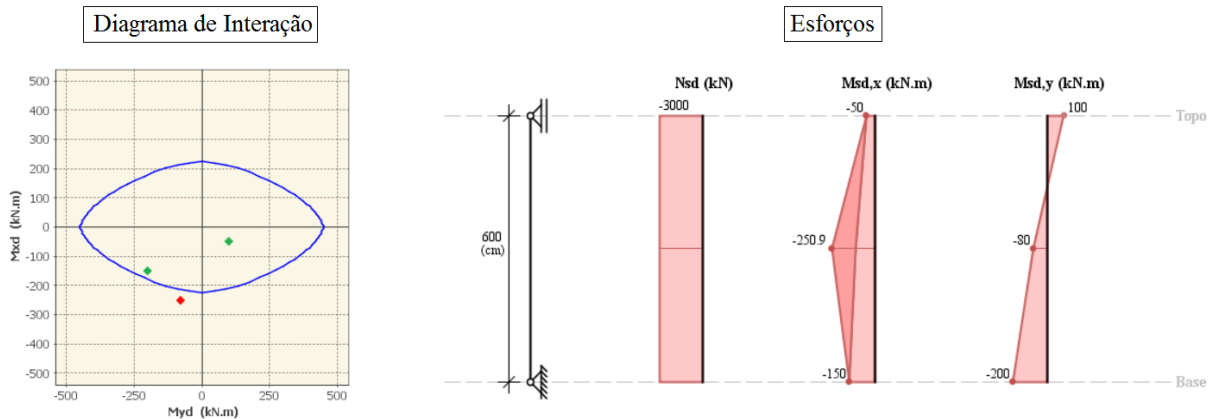


Figura 5.12: Resultados do PCalc com método pilar padrão com curvatura aproximada

### 5.2.2 Pilar padrão com rigidez $\kappa$ aproximada

Para o método pilar padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada, o momento total em torno da direção  $x$  no pilar é dado pela equação 3.29 ou pela formulação direta dada pela equação 3.31, a seguir é apresentado o cálculo pela formulação direta.

$$M_{sd,tot} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4.A.C}}{2.A} = \frac{-(232.5) + \sqrt{(-232.5)^2 - 4 \times 1.5 \times 29700}}{2 \times 1.5} = 238.1 \text{ kNm}$$

Com:

$$A = 5h_y = 5 \times 0.3 = 1.5 \text{ m};$$

$$B = h_y^2 N_d - \frac{N_d \ell_e^2}{320} - 5h_y \alpha_b M_{1d,A} = 0.3^2 \times 3000 - \frac{(3000 \times 6^2)}{320} - 5 \times 0.3 \times 0.73333 \times 150 = -232.5 \text{ kNm}^2;$$

$$C = -N_d h_y^2 \alpha_b M_{1d,A} = -3000 \times 0.3^2 \times 0.73333 \times 150 = 29700 \text{ kN}^2 \text{m}^3.$$

A Figura 5.13 apresenta os resultados obtidos para este exemplo utilizando o sistema PCalc.

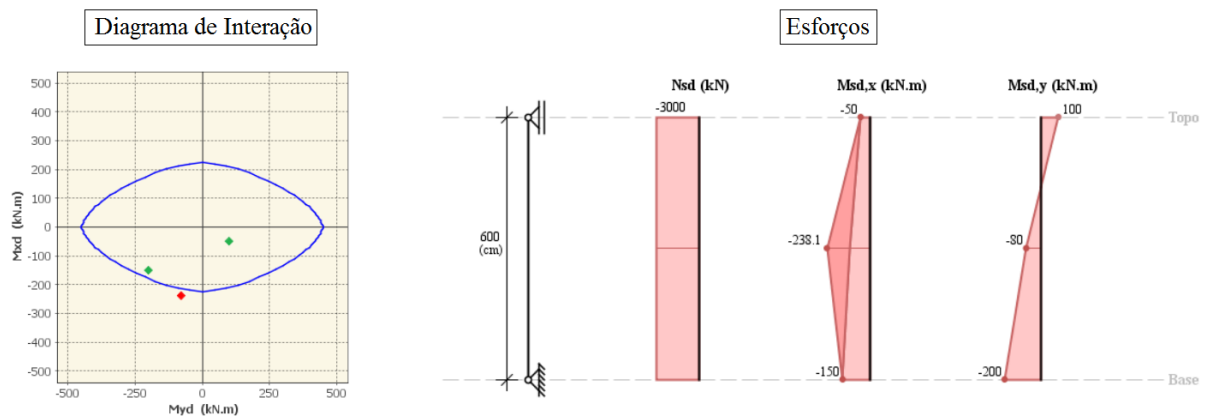


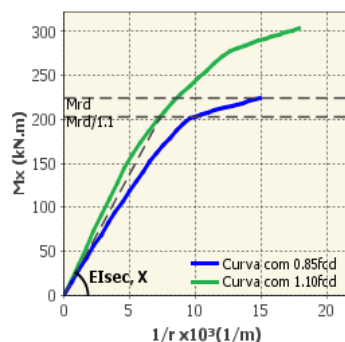
Figura 5.13: Resultados do PCalc com método pilar padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada

### 5.2.3 Pilar padrão acoplado a diagramas $N$ , $M$ , $1/r$

Para o método pilar padrão acoplado a diagramas  $N$ ,  $M$ ,  $1/r$ , o momento total em torno da direção  $x$  no pilar é dado pela equação 3.29, mesma equação utilizada no método pilar padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada. No entanto, a rigidez é obtida de forma gráfica de acordo com o cálculo apresentado a seguir:

$$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa/\nu}} = \frac{0.7333 \times 150}{1 - \frac{69^2}{120 \times 79.75742/0.77778}} = 179.4 \text{ kNm}$$

sendo a rigidez  $\kappa$ , dada pela rigidez secante adimensional  $\kappa_{sec}$ , equação 3.32, que é função da rigidez secante,  $EI_{sec}$ , obtida graficamente conforme a Figura 5.14.



$$\kappa_{sec} = \frac{EI_{sec}}{A_c \cdot h_y^2 \cdot f_{cd}} = \frac{27687.22}{0.18 \times 0.3^2 \times 30000 / 1.4} = 79.75742$$

Com:

$$EI_{sec} = 27687.22 \text{ kNm}^2$$

Figura 5.14: Rigidez secante a partir do diagrama  $N, M_x, 1/r$

A Figura 5.15 apresenta os resultados obtidos para este exemplo utilizando o sistema PCalc.

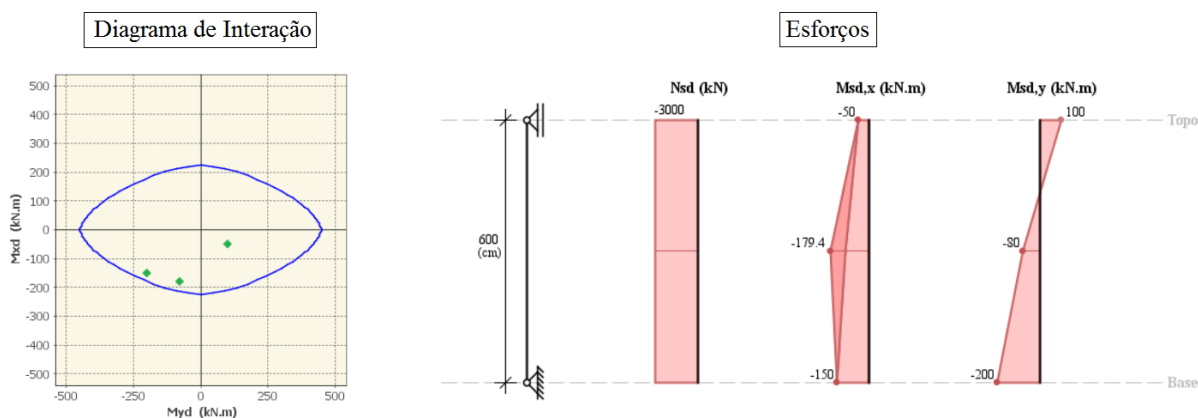


Figura 5.15: Resultados do PCalc com método pilar padrão acoplado a diagramas  $N, M, 1/r$

## 5.2.4 Método Geral

No método geral a consideração da não linearidade geométrica deve ser feita de maneira não aproximada, com a não linearidade física considerada através da relação momento-curvatura. A Figura 5.16 apresenta um esquema para o cálculo dos deslocamentos. Já a Tabela 5.1, apresenta os resultados em termos de deslocamento e esforços, considerando  $\gamma_{f3} = 1,1$  e a rigidez igual a obtida na Figura 5.14 ( $EI_{sec} = 27687 \text{ kNm}^2$ ).



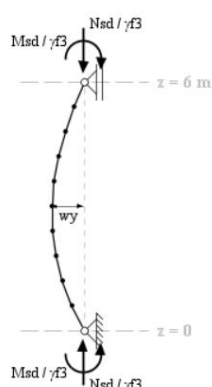


Figura 5.16: Deslocamento

$w_y$

Tabela 5.1: Cálculo dos momentos totais pelo método geral

$z$ [m]	$w_y$ [m]	$M_{sd1,x}$ [kNm]	$M_{sd2,x}$ [kNm]	$M_{sd,tot,x}$ [kNm]
6	0	-50	0	-50
5.4	-0.00715	-60	-21.4	-81.4
4.8	-0.01334	-70	-40	-110
4.2	-0.01825	-80	-54.7	-134.7
3.6	-0.02157	-90	-64.7	-154.7
3	-0.02309	-100	-69.3	-169.3
2.4	-0.02262	-110	-67.9	-177.9
1.8	-0.02007	-120	-60.2	-180.2
1.2	-0.0154	-130	-46.2	-176.2
0.6	-0.00867	-140	-26	-166
0	0	-150	0	-150

A Figura 5.17 apresenta os resultados obtidos para este exemplo utilizando o sistema PCalc.

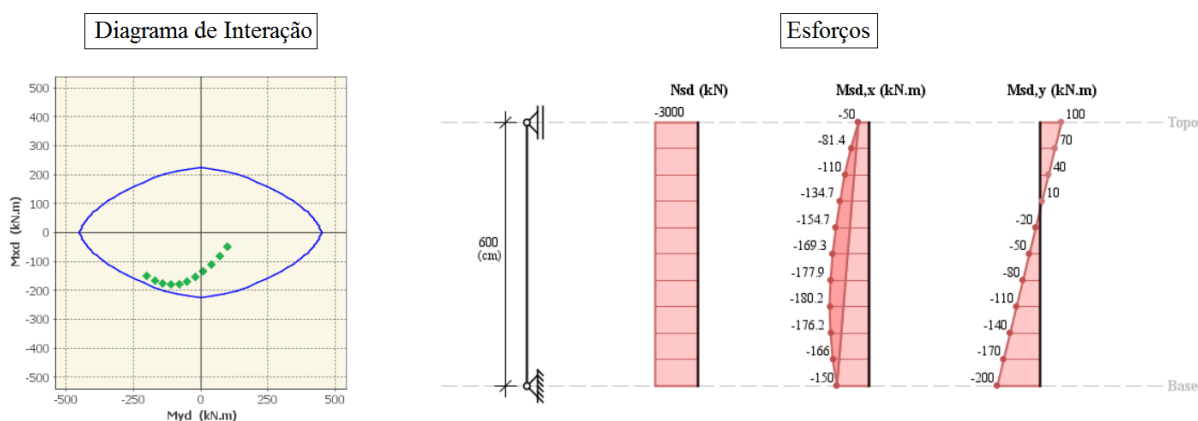


Figura 5.17: Resultados do PCalc com método geral

### 5.2.5 Resumo e comparação dos resultados (Exemplo 5.2)

Neste exemplo, o mesmo pilar foi resolvido por todos os métodos presentes na ABNT NBR 6118. Como se pode notar, existem diferenças significativas entre os resultados obtidos por estes métodos, sendo que para alguns casos, o pilar chega a não atender a condição de Estado Limite Último. A Tabela 2 apresenta de forma resumida estes resultados.

Tabela 5.2: Resumo dos resultados do exemplo 5.2

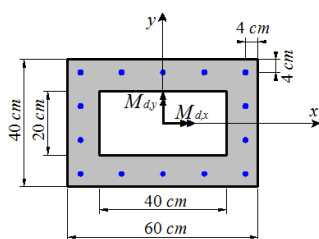
Método	$EI$ [ $kN.m^2$ ]	$M_{sd,tot,x}$ [ $kN.m$ ]	$M_{sd} \leq M_{rd}$
Pilar padrão com curvatura aproximada	19241	250,9	Não
Pilar padrão com rigidez $\kappa$ aproximada	20072	238,1	Não
Pilar padrão acoplado com diagrama $N, M, 1/r$	27687	179,4	Sim
Método geral	27687	180,2	Sim

Note que, para este exemplo, a maneira como a não linearidade geométrica é tratada não trouxe grandes diferenças nos resultados, pois o método pilar padrão acoplado a  $N, M, 1/r$  e método geral apresentaram resultados bem próximos para valores de rigidez  $EI$  iguais. Já, a maneira como a não linearidade física foi tratada teve significativa importância no resultado final.

### 5.3 Outras seções transversais

Neste item serão resolvidos exemplos de outros tipos de seção transversal presentes no sistema PCalc (retangular vazada, circular e circular vazada). Os exemplos são referentes a comparação de diagramas de interação obtidos através dos sistemas PCalc e CAD/TQS, onde foi constatada uma boa correlação entre os resultados. Os resultados, bem como os dados considerados nesses problemas são apresentados na sequência nas figuras 5.18 a 5.20.

#### a) Seção retangular vazada:



Esforço Normal:

$$N_{sd} = -3000 \text{ kN}$$

Concreto:

C40 ( $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ )

$$\gamma_c = 1,4$$

Aço:

14  $\phi$  16mm ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ )

$$\gamma_s = 1,15$$

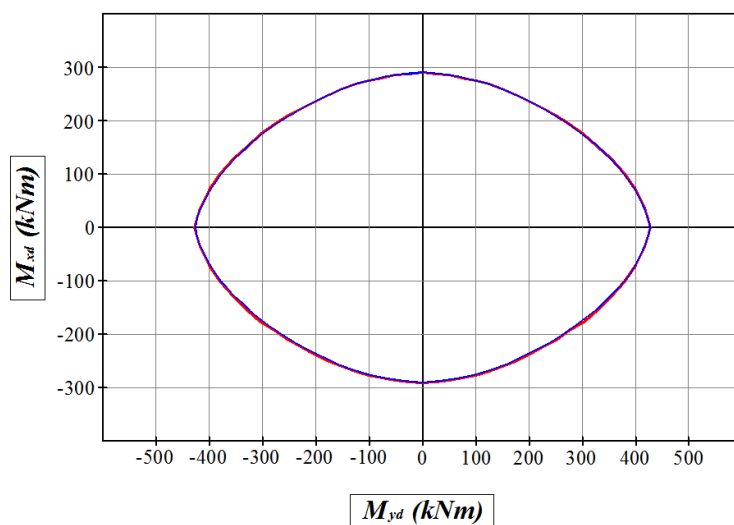
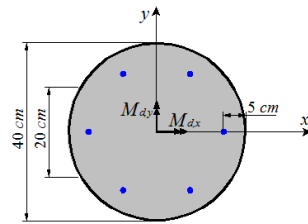


Figura 5.18: Diagrama de interação seção retangular vazada (— PCalc; — CAD/TQS)

## b) Seção circular



Esforço Normal:  
 $N_{sd} = -700 \text{ kN}$

Concreto:  
 C40 ( $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ )  
 $\gamma_c = 1,4$

Aço:  
 6  $\phi$  12,5mm ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ )  
 $\gamma_s = 1,15$

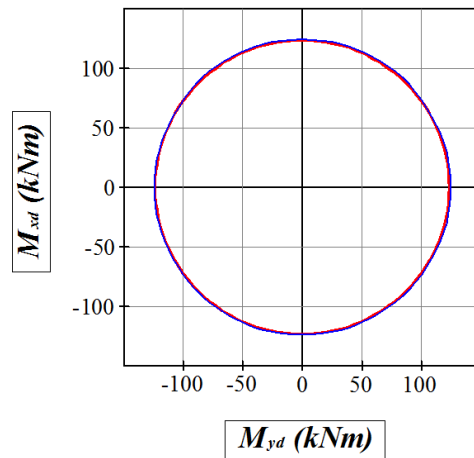
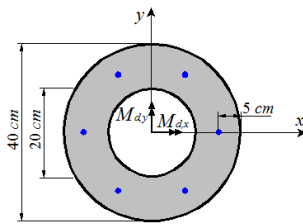


Figura 5.19: Diagrama de interação seção circular (— PCalc; — CAD/TQS)

## c) Seção circular vazada:



Esforço Normal:  
 $N_{sd} = -700 \text{ kN}$

Concreto:  
 C40 ( $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ )  
 $\gamma_c = 1,4$

Aço:  
 6  $\phi$  12,5mm ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ )  
 $\gamma_s = 1,15$

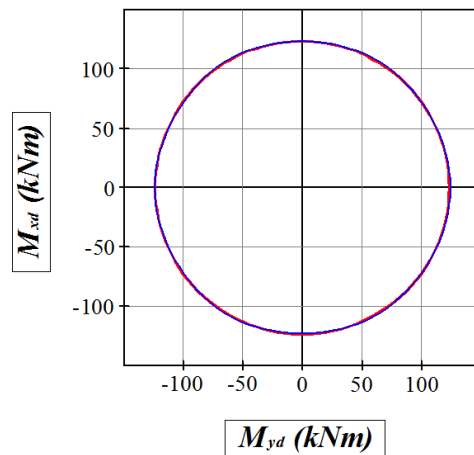


Figura 5.20: Diagrama de interação seção circular vazada (— PCalc; — CAD/TQS)

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um aplicativo desenvolvido para auxiliar o estudo de pilares de concreto armado, seja como uma ferramenta auxiliar na atividade profissional de um Engenheiro ou como uma ferramenta didática no ensino acadêmico. Além de permitir uma análise da flexão composta oblíqua sem o uso de ábacos, explora a consideração da não linearidade física e geométrica na avaliação dos efeitos locais de segunda ordem em pilares de acordo com todos os métodos adotados pela ABNT NBR 6118.

Foram comparados alguns resultados obtidos através deste programa computacional com os obtidos pelo sistema CAD/TQS, sendo que, tanto para curvas momento resistente quanto para curvas  $N$ ,  $M$ ,  $1/r$ , os programas apresentaram uma excelente correlação. Porém, ressalta-se que apesar de inicialmente o programa apresentar bons resultados, este deve ser mais testado.

Pôde-se observar durante a resolução de exemplos numéricos que o uso de processos mais sofisticados (pilar-padrão acoplado a diagramas  $N$ ,  $M$ ,  $1/r$  e método geral) tende a levar a um dimensionamento mais econômico. Em certos casos, a redução da armadura não é pequena.

Por isso, é recomendável que o uso de processos mais refinados no dimensionamento de armaduras de pilares seja feito apenas se o Engenheiro tiver total segurança e controle da modelagem utilizada para simular a estrutura. Caso contrário, sugere-se sempre o uso de processos mais conservadores.

## 7 REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. M., “Curso de concreto armado – Vol. 3”, Ed. DUNAS, Rio Grande, 1997.

ARAÚJO, J. M., “Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado”, Dissertação de mestrado, Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), “NBR 6118:2014 - Projeto de estruturas de concreto – Procedimento”, Rio de Janeiro, 2007.

BORGES, A. C. L., “Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua”, Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

CARDOSO JÚNIOR, S. D.; KIMURA, A. E. . “Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado”. In: 55CBC 55º Congresso Brasileiro do Concreto, 2013, Gramado.

CECCON, J. L., “Análise dos efeitos de segunda ordem em pilares solicitados a flexão oblíqua composta”, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CENTRO DE ESTUDOS DE ENGENHARIA CIVIL (CESEC), “Oblíqua 1.0 - Flexão Composta Oblíqua”. Disponível em: <<http://www.cesec.ufpr.br/concretoarmado>>. Acesso em: 16 jun. 2014.

FRANÇA, R. L. S., “Relações momento-curvatura em peças de concreto-armado submetidas à flexão oblíqua composta”, Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

FRANÇA, R. L. S., “Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto-armado”, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

CAMPOS FILHO, A., “Dimensionamento e verificações de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua”, Programa de pós graduação em engenharia civil, Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto alegre, 2000.

CAMPOS FILHO, A., “Projeto de pilares de concreto armado”, Escola de engenharia civil, Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto alegre, 2000.

FUSCO, P. B., “Estruturas de Concreto – Solicitações Normais”, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1981.

IBRACON, “Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação NB-1”, Comitê Técnico Concreto Estrutural, São Paulo, 2007.

KIMURA, A. E., “EE05 – Pilares”, curso de pós-graduação FESP, Notas de aula, 2010.

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA (PECE), “GES009 - Estabilidade global e análise de peças esbeltas”, Universidade São Paulo, Notas de aula, 2003.

SMANIOTTO, A., “Dimensionamento e detalhamento automático de pilares retangulares submetidos à flexão composta oblíqua”, Dissertação de mestrado, curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

TQS INFORMÁTICA LTDA, “CAD TQS v18 - Softwares CAD para o cálculo estrutural de concreto armado”. Disponível em: < <http://www.tqs.com.br/> >. Acesso em: 16 jun. 2014.