CM042 - Cálculo II

01 de Dezembro de 2017 - Prova 4

Gabarito

1. Calcule

   (a) $\boxed{15}$ $\displaystyle\int_C 4y(2x+1)\mathrm{d}s$, onde C é a curva $x = \dfrac{y^2}{2}$ de $(0,0)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$.

   Solution: A curva é $y = t$ e $x = t^2/2$ com $0 \le t \le 1$. Daí,

   $$r'(t) = t\hat{\imath} + \hat{\jmath},$$

   logo

   $$|r'(t)| = \sqrt{t^2+1}.$$

   Logo,

   $$\int_C 4y(2x+1)\mathrm{d}s = \int_0^1 4t(t^2+1)\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\sqrt{u}\mathrm{d}u = 2\int_1^2 u^{3/2}\mathrm{d}u$$
   $$= \left.\frac{4u^{5/2}}{5}\right|_1^2 = \frac{4}{5}(2^{5/2}-1).$$

   (b) $\boxed{15}$ $\displaystyle\int_C e^x\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y^2+y}\mathrm{d}y$ sobre a curva $y = x^2$ de $(1,1)$ a $(2,4)$.

   Solution: Curva $x = t$, $y = t^2$, com $1 \le t \le 2$. Daí, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t$. Então,

   $$\int_C e^x\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y^2+y}\mathrm{d}y = \int_1^2 e^t\mathrm{d}t + \frac{t^2}{t^4+t^2}2t\mathrm{d}t = \int_1^2 e^t\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
   $$= e^2 - e + \int_2^5 \frac{\mathrm{d}u}{u} = e^2 - e + \ln 5 - \ln 2.$$

   (c) $\boxed{15}$ $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y+e^{-x})\hat{\imath} + (x+2y)\hat{\jmath}$ sobre a curva dada parametricamente por

   $$\vec{r}(t) = \sin(\pi t/4)\hat{\imath} + (t^2-5t+6)\hat{\jmath}, \qquad 0 \le t \le 2.$$

   Solution: Se $P = y + e^{-x}$ e $Q = x + 2y$, então $Q_x = 1 = P_y$. Logo, usaremos o Teorema Fundamental. Buscaremos f tal que $f_x = P$ e $f_y = Q$.

   $$f(x,y) = \int (y+e^{-x})\mathrm{d}x = yx - e^{-x} + g(y).$$

   Daí, $f_y = x + g'(y) = Q = x + 2y$. Então, $g'(y) = 2y$, logo $g(y) = y^2 + C$. Portanto, $f(x,y) = yx - e^{-x} + y^2 + C$. Os limites da curva são $\vec{r}(2) = \hat{\imath}$ e $\vec{r}(0) = 6\hat{\jmath}$. Ou seja,

   $$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = f(1,0) - f(0,6) = -e^{-1} - (-e^0 + 36) = -e^{-1} - 35.$$

(d) $\boxed{15}$ $\displaystyle\oint_{\partial D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$ onde D é o triângulo dado pelos vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Solution: A região D pode ser descrita como $0\le x\le 1$ e $0\le y\le x$. Pelo Teorema de Green, temos

$$\oint_{\partial D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=\iint_D(y-2y)\mathrm{d}A=\int_0^1\int_0^x(-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-x^2}{2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}.$$

(e) $\boxed{15}$ A área da região delimitada por $\vec{r}(t)=(1-t^2)\hat{\imath}+\sin(\pi t)\hat{\jmath}$, $-1\le t\le 1$, usando o Teorema de Green. Dica: $\displaystyle\int t\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\frac{\sin(\pi t)-\pi t\cos(\pi t)}{\pi^2}+C$.

Solution: Curva: $x=1-t^2$ e $y=\sin(\pi t)$. $\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}y=\pi\cos(\pi t)\mathrm{d}t$. Como a área depende de $y\mathrm{d}x$ ou $x\mathrm{d}y$, devemos decidir o que queremos usar. Baseado nesses valores e na dica, vamos escolher

$$\begin{aligned}A(D)&=-\oint_{\partial D}y\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\sin(\pi t)(-2t)\mathrm{d}t=2\int_{-1}^1 t\sin(\pi t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi^2}[\sin(\pi t)-\pi t\cos(\pi t)]_{-1}^1=\frac{2}{\pi^2}(-\pi)(-1-1)=\frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

(f) $\boxed{10}$ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ onde $\vec{F}(x,y,z)=xy\hat{\imath}+xyz\hat{\jmath}+y^2z\hat{\mathrm{k}}$.

Solution:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{\mathrm{k}}\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\xy&xyz&y^2z\end{vmatrix}=\hat{\imath}(2yz-xy)+\hat{\mathrm{k}}(yz-x).$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=y+xz+y^2.$$

(g) $\boxed{15}$ O fluxo do campo $\vec{F}=z^2\hat{\mathrm{k}}$ através da superfície da semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1$ com $z\ge 0$, na direção para cima.

Solution:

$$\begin{aligned}\text{fluxo}&=\iint_S z^2\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\\&=\iint_S z^2\hat{\mathrm{k}}\cdot(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{\mathrm{k}})\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}z^3\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=2\pi\int_1^0u^3(-\mathrm{d}u)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. Considere a superfície dada por $\vec{r}(u,v)=u\cos(v)\hat{\imath}+u\sin(v)\hat{\jmath}+u\hat{\mathrm{k}}$, com $0\le u\le 2$ e $0\le v\le 2\pi$.

(a) $\boxed{5}$ Encontre uma equação não paramétrica para a superfície acima, e descreva que objeto ela descreve.

Solution: Fazendo $x^2 + y^2 = u^2 = z^2$, ou seja, a figura faz parte de um cone. Como $0 \le u \le 2$ e $z = u$, então a superfície é a do cone limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.

(b) $\boxed{5}$ Encontre os vetores tangentes $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$, e calcule $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Solution:

$$\vec{r}_u = \cos(v)\hat{\imath} + \sin(v)\hat{\jmath} + \hat{\mathrm{k}}.$$

$$\vec{r}_v = -u\sin(v)\hat{\imath} + u\cos(v)\hat{\jmath}.$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = -\hat{\imath}u\cos(v) - \hat{\jmath}u\sin(v) + \hat{\mathrm{k}}u.$$

(c) $\boxed{5}$ Calcule a área da superfície dada usando integral de superfície.

Solution:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{2}u.$$

$$A(S) = \iint_S |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\sqrt{2}\pi.$$

3. $\boxed{15}$ Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + xz\hat{\mathrm{k}}$ através do cubo de lado 1 com vértices opostos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

Solution: A melhor maneira de resolver este exercício é com o Teorema da Divergência.

$$\begin{aligned} \text{fluxo } &= \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \iiint_E \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y+z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1\int_0^1 (y+z+\frac{1}{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 (z+1)\mathrm{d}z = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$