CM042 - Cálculo II

12 de Setembro de 2019 - Prova 1

Gabarito

1. $\boxed{10}$ Seja $\vec{r}(t) = \langle \cos t, 3\cos t \rangle$. Calcule o comprimento de arco de $\vec{r}$ de $t = 0$ à $t = \pi/2$.

Solution:

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, -3\sin t \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + 9\sin^2 t} = \sqrt{10}\sin t.$$

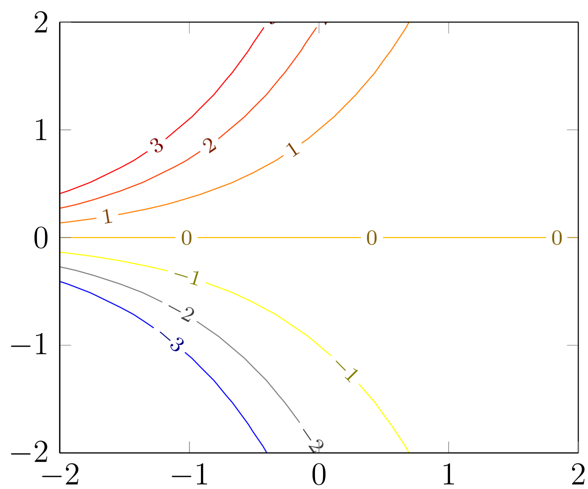
$$L = \int_0^{\pi/2} |\vec{r}'(t)| \mathrm{d}t = \sqrt{10}\int_0^{2\pi} \sin t = \sqrt{10}.$$

2. $\boxed{15}$ Seja $f(x, y) = ye^{-x}$. Esboce as curvas de nível de f.

Solution:

$$ye^{-x} = k \qquad \Rightarrow \qquad y = ke^x$$

Uma curva para $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$ são suficientes.



3. $\boxed{15}$ Mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}.$$

Solution: (i) Pelo caminho $x = t, y = 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

(ii) Pelo caminho $x = t^3, y = t$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^6}{2t^6} = \frac{1}{2}.$$

São diferentes, logo o limite não existe.

4. $\boxed{15}$ Seja $u(t,x) = e^{-2t+3x}(2t-3x)$. Mostre que u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x},$$

para algum valor de α. Mostre o valor de α.

Solution:

$$u_t = -2e^{-2t+3x}(2t-3x) + 2e^{-2t+3x} = -2e^{-2t+3x}(2t-3x-1)$$
$$u_x = 3e^{-2t+3x}(2t-3x) - 3e^{-2t+3x} = 3e^{-2t+3x}(2t-3x-1)$$

Dai,

$$\frac{u_t}{u_x} = -\frac{2}{3}.$$

u satisfaz a equação com $\alpha = -2/3$.

5. Seja $f(x,y) = x^{12} + y^9 + x^{20}y^{19}$.

(a) $\boxed{5}$ Calcule o gradiente de f em $(x,y) = (-1,1)$.

Solution:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left\langle 12x^{11} + 20x^{19}y^{19},\ 9y^8 + 19x^{20}y^{18} \right\rangle$$
$$\vec{\nabla} f(-1,1) = \langle -12-20,\ 9+19 \rangle = \langle -32,\ 28 \rangle .$$

(b) $\boxed{5}$ Calcule a derivada directional em $(-1,1)$ na direção $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

Solution:

$$D_{\vec{v}} f(-1,1) = \langle -32,\ 28 \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle = -2\sqrt{2}.$$

(c) $\boxed{5}$ Se $x(t) = -\cos t$ e $y(t) = 1 + \sin t$, calcule $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ pela regra da cadeia.

Solution:

$$x'(t) = \sin t \qquad y'(t) = \cos t$$
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-1,1).$$

$$x'(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_x(-1,1)x'(0) + f_y(-1,1)y'(0) = (-32) \times 0 + 28 \times 1 = 28.$$

6. $\boxed{20}$ Seja $f(x,y) = y^3 - 3y + 3x^2y$. Calcule e classifique os pontos críticos de f.

Solution:

$$f_x(x,y) = 6xy \qquad f_x(x,y) = 3y^2 - 3 + 3x^2.$$

Igualando $f_x(x,y) = 0$ obtemos $x = 0$ ou $y = 0$. Agora pra segunda equação. Se $x = 0$, então $y = \pm 1$. Se $y = 0$, então $x = \pm 1$. Logo, temos 4 pontos críticos: $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

$$f_{xx}(x,y) = 6y \qquad f_{xy}(x,y) = 6x \qquad f_{yy} = 6y.$$

$$D = 36y^2 - 36x^2 = 36(y^2 - x^2).$$

Para $(x,y) = (\pm 1, 0)$, $D = -36 < 0$, logo são pontos de sela.

Para $(x,y) = (0,1)$, $D = 36 > 0$ e $f_{xx}(0,1) = 6 > 0$, logo é um minimizador.

Para $(x,y) = (0,-1)$, $D = 36 > 0$ e $f_{xx}(0,-1) = -6 < 0$, logo é um maximizador.

7. $\boxed{20}$ Calcule os valores extremos da função $f(x,y) = 3(x-1)^2 - y$ no conjunto dado pelos pontos que satisfazem $y \leq 2$ e $y \geq x^2 - 2$.

Solution: **Interior:** $f_x(x,y) = 6(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ e $f_y(x,y) = -1 \neq 0$, ou seja não tem ponto crítico.

Borda: A borda é dada pela reta $y = 2$ e a parabóla $y = x^2 - 2$. A intersecção é $2 = x^2 - 2$, ou seja $x = \pm 2$. Para esses pontos $y = 2$. Então temos a parte de cima, a de baixo e os vértices $(2,2)$ e $(-2,2)$.

Borda de cima: Para $y = 2$ temos $f(x,2) = 3(x-1)^2 - 2$. Derivando e igualando a zero temos $6(x-1) = 0$, ou seja $x = 1$. Candidato: $(1,2)$.

Borda de baixo: Para $y = x^2 - 2$ temos $f(x, x^2 - 2) = 3(x-1)^2 - (x^2 - 2)$. Derivando e igualando a zero temos $6(x-1) - 2x = 0$, isto é $x = \frac{3}{2}$, e $y = x^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$. Candidato: $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$.

Vértices: $(2,2)$ e $(-2,2)$.

(x,y)	$(1,2)$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$	$(2,2)$	$(-2,2)$
$f(x,y)$	-2	$\frac{1}{2}$	2	25

Mínimo -2 em $(1,2)$ e Máximo 25 em $(-2,2)$.