05/06 - Cholesky

Prop.: Se A é def. pos., $A=A^T$, então

(i) $a_{ii} > 0$

(ii) S^TAS é def. pos. p/ $S \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $p \leq n$ e S com posto $= p$.

(iii) Os autovalores de A são positivos

Dem.: (i) Se $A=A^T$ é def. pos, então $x^TAx > 0$, $\forall x \neq 0$. Daí, para $x = e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$, temos

$$e_i^TAe_i > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0,$$

(ii) (S^TAS def. pos.)

Seja $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$. $v^TS^TASv = (Sv)^TA(Sv)$ é maior que 0 se, e somente se, $Sv \neq 0$.

Como posto$(S) = p$, então pelo Teo. N-I,

$$\text{posto}(S) + \dim(N(S)) = p \Rightarrow \cancel{p+\dim(N(S))=p}$$

$$\therefore \dim(N(S)) = 0. \Rightarrow N(S) = \{0\},$$

logo $Sv = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Então,

$$v^TS^TASv = (Sv)^TA(Sv) > 0, \quad \forall v \neq 0.$$

(iii) Sejam (λ_i, v_i) autopares de A. Daí,

$$0 < v_i^TAv_i = v_i^T(\lambda_i v_i) = \lambda_i v_i^Tv_i = \lambda_i \|v_i\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda_i > 0.$$

Prop.: $A=A^T$ é def. pos. se, e somente se, $\det(A[1:k,1:k]) > 0$, p/ todo $k = 1,\dots,n$.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$ é def. pos.?

Ex.: Calcule det de
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$A_{11} = [2]$ ✓

$A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A_{22}| = 4 - 1 = 3 > 0$ ✓

$|A_{33}| = 8 - 2 - 2 = 4 > 0$ ✓

Dem.: ($\Rightarrow$) $A=A^T$ é def. pos. Daí, S^TAS é def. pos. p/ qualquer $S \in \mathbb{R}^{n\times p}$, posto$(S) = p$. Tome $S = I[1:n, 1:p]$, $= [e_1\, e_2 \cdots e_p]$

i.e., $S = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & 0 & \end{bmatrix}$. Daí,

$$S^TAS = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_p^T \end{bmatrix} A[e_1 \cdots e_p] = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_p^T \end{bmatrix} [Ae_1\ Ae_2 \cdots Ae_p]$$

$$= \begin{bmatrix} e_1^TAe_1 & e_1^TAe_2 & \cdots & e_1^TAe_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_p^TAe_1 & e_p^TAe_2 & \cdots & e_p^TAe_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} = A[1:p, 1:p]$$

$S^TAS = A_{pp}$ é def. pos, logo seus autovalores são positivos e como o det. é o produto dos autovalores, temos $|A_{pp}| > 0$. Logo $|A_{kk}| > 0$, $k = 1,\dots,n$

Teo.: Se A é def. pos., existe Cholesky.

(Dem. por LU)

Se $A=A^T$ é def. pos., então $|A_{kk}| > 0$, daí, pelo Teo. de exist. de LU, existe dec. LU sem piv., i.e., $\exists$ L tri. inf. e U tri. sup., L com diag. unitária t.q. $A = LU$, e U tem diag. ñ-nula.

Daí, seja D a matriz diagonal com os elementos da diagonal da U e seja $\tilde{U} = D^{-1}U$. Daí,

$$A = LD\tilde{U},$$

com $\tilde{U}$ diag. unitária. Como $A = A^T$, temos

$$A^T = \tilde{U}^TDL^T = LD\tilde{U} = A$$

$$\underbrace{\underbrace{L^{-1}}_{\substack{\text{tri.}\\ \text{inf.}\\ \text{diag.}\\ \text{unit.}}}\ \underbrace{\tilde{U}^T}_{\substack{\text{tri.}\\ \text{inf.}\\ \text{diag.}\\ \text{unit.}}}}_{\text{T.I.D.U.}} = \underbrace{\underbrace{D}_{\text{diag}}\ \underbrace{\tilde{U}L^{-T}}_{\substack{\text{tri.}\\ \text{sup.}}}\ \underbrace{D^{-1}}_{\text{diag.}}}_{\text{Tri. Sup.}}$$

T.S.D.U

Para ser Tri. inf. e sup. ao mesmo tempo, as matrizes têm que ser diagonais. Além disso, o lado esq. tem diag. unit., ou seja, tem que ser I.

$$L^{-1}\tilde{U}^T = I \Rightarrow \boxed{\tilde{U} = L^T}$$

Portanto, $$A = LDL^T.$$

Veja que se $S = L^{-T}$, temos

$$S^TAS = L^{-1}AL^{-T} = L^{-1}LDL^TL^{-T} = D,$$

que é def. pos, pela prop. anterior. Como D é diag., segue que seus elementos são positivos.

Daí, seja $D^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_{nn}} \end{bmatrix}$. Temos

$$A = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T.$$

Definindo $G = LD^{1/2}$, temos Cholesky.

Ex.: Seja $A = I + \alpha uu^T$, $u \in \mathbb{R}^n$, com $\alpha \geq 0$. Mostre que A é def. pos.

$$x^TAx = x^Tx + \alpha x^Tu \cdot u^Tx = \|x\|^2 + \alpha (x^Tu)^2 > 0, \ x \neq 0.$$

a) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, qual o menor α t.q. $A = I + \alpha uu^T$ é def. pos, se $u \neq 0$,

Veja que

$$Au = u + \alpha u\overbrace{u^Tu}^{\text{número}} = u + \alpha\overbrace{(u^Tu)}^{\text{número}} \cdot u = (1 + \alpha\|u\|^2) \cdot u,$$

i.e., $(1 + \alpha\|u\|^2, u)$ é autopar.

e, como $u \neq 0$, $\exists$ $w_1, \dots, w_{n-1}$ t.q. $u \perp w_j$. Daí,

$$Aw_j = w_j + \alpha u\cancel{(u^Tw_j)}^{0} = w_j$$

i.e, $(1, w_j)$ é autopar. Autovalores: 1 com mult. $n-1$ e $1 + \alpha\|u\|^2$ c/ mult. 1.

Pra ser def. pos., devem ser positivos, logo

$$1 + \alpha\|u\|^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha > \frac{-1}{\|u\|^2}}.$$

Ex.: e $A = uu^T + \alpha I$, $u \neq 0$?