Cálculo Diferencial e Integral I

13 de Julho de 2016

Questão 1 .... $\boxed{70}$

Calcule

(a) (10 points) O limite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)}{(x-2)} \frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(b) (10 points) A derivada de $f(x) = x^2 e^{3x}$

Solution:

$$f'(x) = (x^2e^{3x})' = (x^2)'e^{3x} + x^2(e^{3x})' = 2xe^{3x} + x^2 3e^{3x} = xe^{3x}(2+3x)$$

(c) (10 points) A derivada de $g(x) = \ln(\sin(x)+2)$

Solution:

$$g'(x) = [\ln(\sin(x)+2)]' = \frac{1}{\sin(x)+2}[\sin(x)+2]' = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$$

(d) (10 points) A derivada de $h(x) = x^{\sin x}$

Solution:

$$\begin{aligned}\ln h(x) &= \sin(x)\ln(x) \\ \frac{h'(x)}{h(x)} &= \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \\ h'(x) &= x^{\sin(x)}\left[\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right]\end{aligned}$$

(e) (10 points) $\displaystyle\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 - x + 5)\mathrm{d}x$

Solution:

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 - x + 5)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^2 = \frac{16-1}{2} - (8-1) - \frac{4-1}{2} + 5$$
$$= \frac{15 - 14 - 3 + 10}{2} = 4$$

(f) (10 points) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$

Solution: Substituindo $u = \ln x$, temos $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x = \int u^2 \mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

(g) (10 points) $\displaystyle\int \arctan(x)\mathrm{d}x$

Solution: Por partes, com $u = \arctan(x)$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Daí, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ e $v = x$, e temos

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = uv - \int v\mathrm{d}u = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Essa integral é resolvida por substituição $u = 1 + x^2$. Daí, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ e

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln|u|}{2} + C.$$

Daí,

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - C.$$

Questão 2 .... $\boxed{40}$

Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{4(x-1)}$.

(a) (8 points) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos críticos, e classifique-os;

Solution: Um “truque” nesta questão é perceber que

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{4(x-1)}.$$

Fazendo isso, todas as contas são facilitadas. O exercício ainda pode ser feito sem isso, mas com um pouco mais de trabalho.

Temos
$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(x-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{x^2-2x}{4(x-1)}.$$
Os pontos crítico são 0 e 2. Da última igualdade tiramos os intervalos de crescimento e decrescimento fazendo o varal. Temos que f decresce para $x < 0$ e $1 < x < 2$ e cresce para $0 < x < 1$ e $x > 2$. Daí, 0 é maximizador local e 2 é minimizador local.

(b) (8 points) Encontre os intervalos de concavidade para cima e para baixo.

Solution:
$$f''(x) = \frac{1}{2(x-1)^3}.$$
O sinal de $f''(x)$ é trivialmente determinado: Positivo se $x > 1$ e negativo de $x < 1$. Daí, a concavidade é positivo para $x > 1$, negativa para $x < 1$.

(c) (8 points) Encontre as assíntotas verticais;

Solution: A única possibilidade de assíntota vertical é em $x = 1$. Vemos facilmente que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} > 0$, e sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, então
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$
Portanto $x = 1$ é assíntota vertical. Analogamente $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

(d) (8 points) Encontre as assíntotas horizontais e oblíquas;

Solution: Escrevendo
$$f(x) = \frac{x+1}{4} + \frac{1}{4(x-1)}$$
fica trivial ver a assíntota.

É fácil ver que
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$
Daí,
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x(x-1)} = 1.$$
Logo, $m = \frac{1}{4}$. Para achar b fazemos
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \frac{x}{4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4(x-1)} = \frac{1}{4}$$

Então $y = \dfrac{x+1}{4}$ é assíntota oblíqua para $\pm\infty$.

(e) (8 points) Esboce o gráfico dessa função, marcando todos os pontos importantes.

Solution: