As Propriedades do Triângulo de Pascal

Bianca Aparecida da Costa

O Triângulo de Pascal

O Triângulo Aritmético ficou conhecido por vários nomes no decorrer da história. Por exemplo, na China o chamavam de Yang Hui, na Itália de Triângulo de Tartaglia, em outras regiões de Tartaglia-Pascal e de Triângulo Combinatório. Mas, a denominação mais famosa pela qual o Triângulo Aritmético ficou conhecido foi dada pelos franceses. Eles o chamavam de Triângulo de Pascal. Há dois mil anos antes de Pascal trabalhar no Triângulo Aritmético, este já era objeto de estudo na Índia. Os indianos estudavam vários temas matemáticos, dentre eles, destacava-se o estudo de combinatória.

O Triângulo de Pascal consiste em uma tabela onde, estão dispostos os coeficientes binomiais, de tal maneira em que os coeficientes com o mesmo numerador estão na mesma linha, e os coeficientes com o mesmo denumerador encontram-se na mesma coluna. Assim como segue na figura a seguir:

$$
\begin{array}{ll}
\text{linha } 0 \longrightarrow & \binom{0}{0} \\
\text{linha } 1 \longrightarrow & \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\text{linha } 2 \longrightarrow & \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\text{linha } 3 \longrightarrow & \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\text{linha } 4 \longrightarrow & \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\qquad \vdots & \\
\text{linha } n \longrightarrow & \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\cdots\binom{n}{n}.
\end{array}
$$

Figura 1: Triângulo de Pascal

As Propriedades

A seguir, enunciaremos e demonstraremos algumas propriedades do Triângulo de Pascal. E com isto nota-se o quão pratico o mesmo é em relação à operações binomiais que são frequêntementes utilizadas em vários ramos da matemática como por exemplo em álgebra quando precisamos fazer expanssões de polinômios.

Propriedade 1 *Em toda linha do triângulo, o primeiro elemento é sempre igual à 1.*

Demonstração. Segue do fato do primeiro elemento do triângulo de Pascal ser $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Propriedade 2 *Em toda linha do triângulo, o último elemento é sempre igual à 1.*

Demonstração. O último elemento do triangulo de Pascal sempre é $\left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. ■

A propriedade a seguir é conhecida como relação de Stifel. Ela relaciona a soma dos elementos de uma mesma linha do triângulo de Pascal com um elemento da próxima linha do mesmo. Binialmente a relação de Stifel quer dizer que:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p \end{array}\right), n \geqslant p, n \geqslant 2.$$

A relação de Stifel também pode ser observada pela seguinte figura:

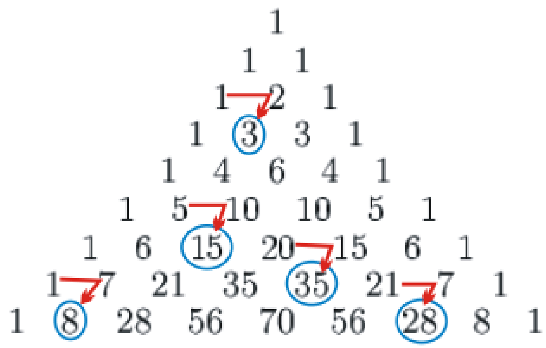

Figura 2: Relação de Stifel

Propriedade 3 *Somando os elementos consecutivos de uma mesma linha obtem-se o elemento situado abaixo da última parcela.*

Demonstração. Utilizando a definição de coeficientes binomiais, temos:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,[(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} && (1)\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} && (2)\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-p-1)!} && (3)\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right) && (4)\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}\left(\frac{n}{(n-p)p}\right) && (5)\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}. && (6)
\end{aligned}$$

Assim obtemos a relação descrita. ■

A seguinte propriedade diz que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Propriedade 4 *Em uma mesma linha, dois binomiais equidistantes dos extremos têm o mesmo valor.*

Demonstração. Dois coeficientes binomiais dos extremos são complementares e, portanto tem o mesmo valor. Sendo assim,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

E a relação é válida. ■

A próxima propriedade é conhecida também como Teorema das Linhas e afirma que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Propriedade 5 *A soma da n-ésima linha é 2^n.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n. Defina

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Se $n = 0$ temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Agora se $n = 1$ tem-se $S_1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$. Suponhamos então que o resultado é válido para todo $n = 1, \cdots, k$. Vamos mostrar que o mesmo é válido para

$n = k + 1$, ou seja, mostraremos que

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Temos que $\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1}$. Aplicando a relação de Stifel, nas parcelas da soma que estão entre a primeira e a última parcela, e utilizando o fato de que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, tem-se que

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k}.$$

Reescrevendo,

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

Ou seja, $S_{k+1} = 2S_k$ e como por hipótese de indução vale que $S_k = 2^k$ concluímos que $S_{k+1} = 2.2^k = 2^{k+1}$. Assim a Propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Tem-se também uma relação análoga para a soma dos termos de uma coluna do Triângulo de Pascal. Ela afirma que:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Propriedade 6 *A soma dos elementos de uma coluna do triângulo, começando do primeiro elemento da coluna, tem o mesmo valor que o elemento que se encontra na linha e coluna imediatamente anterior ao último elemento binomial da soma.*

Demonstração. Novamente aplicaremos a relação de Stifel. Agora aos elementos da coluna $p+1$, a partir da linha $p+2$. Temos:

$$\binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p}$$

$$\binom{p+3}{p+1} = \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p}$$

$$\binom{p+4}{p+1} = \binom{p+3}{p+1} + \binom{p+3}{p}.$$

Por fim

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p}.$$

Fazendo a soma de todas as relações escritas acima e simplificando as parcelas iguais que aparecem em lados opostos da igualdade temos que

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Como queriamos demonstrar. ■

Referências

[1] Affonso, A. *O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton*. 2014. Trabalho de conclusão de curso de Pós-Graduação Profissional em Matemática. Universidade Federal Fluminense.

[2] Silva, S. D. *Estudo do Binômio de Newton*. 2013. Trabalho de conclusão de curso de Pós- Graduação Profissional em Matemática. Universidade Federal da Paraiba.