CM042 - Cálculo II

01 de Novembro de 2017 - Prova 3

Gabarito

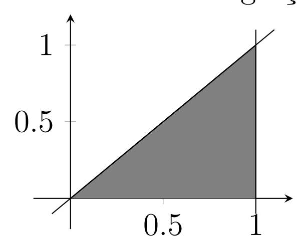
1. Calcule as seguintes integrais

   (a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 \frac{xe^x}{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

   Solution:
   $$\int_0^1\int_1^2 \frac{xe^x}{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^x \ln 2\mathrm{d}x = \ln 2.$$

   (b) $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 2(1-x^2)^{2017}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

   Solution: Aqui é preciso mudar a ordem de integração.



   $$\int_0^1\int_y^1 2(1-x^2)^{2017}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x 2(1-x^2)^{2017}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 2x(1-x^2)^{2017}\mathrm{d}x = \frac{1}{2018}.$$

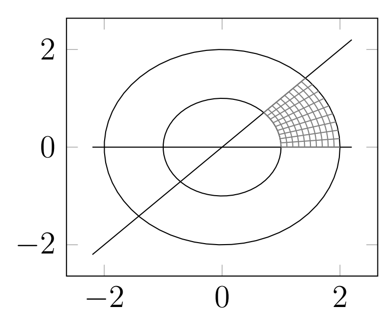
   (c) $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$

   Solution:
   $$\int_0^1\int_0^z\int_0^{x+z} 6xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1\int_0^z (6x^2z+6xz^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 2z^3+3z^2\mathrm{d}z = 1.$$

2. Calcule as seguintes integrais, nas regiões dadas

   (a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}A, \qquad D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}.$

   Solution:

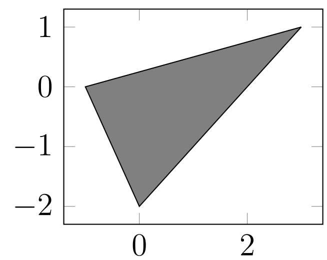


Então, $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \pi/4$.

$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}A = \int_0^{\pi/4}\int_1^2 \arctan(\tan\theta) r \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4}\int_1^2 \theta r \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{64}.$$

(b) $\boxed{10}$ $\iint_D (y + 2x + 2)\mathrm{d}A$, $\quad D$ é o triângulo formado pelos vértices $(3, 1)$, $(0, -2)$ e $(-1, 0)$.

Solution:



Fazemos a transformação $x = au+bv+e$ e $y = cu+dv+f$, para levar este triângulo no triângulo $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ em uv, com a correspondência $(-1, 0) \to (0, 0)$, $(0, -2) \to (1, 0)$ e $(3, 1) \to (1, 1)$. Temos

$$\begin{cases} -1 &= e \\ 0 &= a + e \\ 3 &= a + b + e \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 &= f \\ -2 &= c + f \\ 1 &= c + d + f \end{cases}$$

Portanto, $x = u + 3v - 1$ e $y = -2u + 3v$. Note que em uv, temos $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le u$ como região. Daí,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -9,$$

e

$$\begin{aligned} \iint_D (y + 2x + 2)\mathrm{d}A &= \int_0^1\int_0^u (-2u + 3v + 2u + 6v - 2 + 2) 9 \mathrm{d}v\mathrm{d}u = 81 \int_0^1\int_0^u v\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= 81\int_0^1 \frac{u^2}{2}\mathrm{d}u = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

(c) $\boxed{10}$ $\iiint_E x^2 \ \mathrm{d}V$, $\quad E$ é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Solution: Usando coordenadas cilíndricas, temos $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e o sólido limitado acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z = 2r$. Daí,

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 \ \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} r^2\cos^2\theta r \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^1 2r^4\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \times \frac{2}{5} = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

(d) $\boxed{10}$ $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V$ $\qquad E$ é a porção da bola unitária $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ que fica no primeiro octante.

Solution: Em coordenadas esféricas, o primeiro octante é dado por $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$. A outra restrição é $0 \leq \rho \leq 1$. Daí,

$$\begin{aligned}\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\cos\theta\sin\phi e^{\rho^2}\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3 e^{\rho^2}\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\phi)}{2}\mathrm{d}\phi \times 1 \times \int_0^1\frac{ue^u}{2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

3. Considere a mudança de variáveis $x = u - v$ e $y = u^2 + v$, e a região $S = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1\}$. Seja R a região correspondente no plano xy.

(a) $\boxed{7}$ Esboce R.

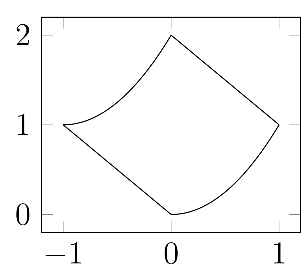
Solution: Como a região **não** é afim, a região em R não será um retângulo, provavelmente.

Fazendo $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$, temos $x = -v$ e $y = v$, $0 \leq v \leq 1$, ou seja $y = -x$ para $-1 \leq x \leq 0$.

Fazendo $u = 1$, $0 \leq v \leq 1$, temos $x = 1 - v$ e $y = 1 + v$, $0 \leq v \leq 1$, ou seja $y = 2 - x$, $0 \leq x \leq 1$.

Fazendo $v = 0$, $0 \leq u \leq 1$, temos $x = u$ e $y = u^2$, $0 \leq u \leq 1$, ou seja, $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Fazendo $v = 1$, $0 \leq v \leq 1$, temos $x = u - 1$ e $y = u^2 + 1$, $0 \leq u \leq 1$, isto é, $y = (x+1)^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 0$.



(b) $\boxed{8}$ Calcule $\iint_R x\mathrm{d}A$ usando a mudança de variável dada.

Solution: Temos

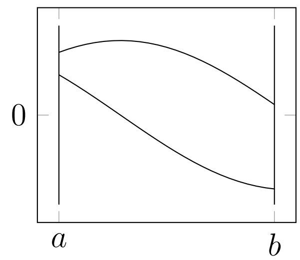
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2u.$$

Daí,

$$\iint_R x\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^1 (u-v)(1+2u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^1 \int_0^1 (u+2u^2-v-2uv)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1 (u+2u^2-\frac{1}{2}-u)\mathrm{d}u = \int_0^1 (2u^2-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

4. $\boxed{15}$ Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a,b]$ com $a > 0$, e $f(x) \geq g(x)$. Encontre a fórmula para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ e $x = b$, em torno do eixo y, usando integração múltipla.

Solution: No plano xy temos



Mas como estamos rotacionando em torno do eixo y, essa figura se repete para todo ângulo, de maneira que esse corte pode ser visto como o plano ry. Veja então que o ângulo pode dar toda a volta, ou seja, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e o raio entra no lugar do x, de modo que $a \leq r \leq b$. Originalmente, temos $g(x) \leq y \leq f(x)$, porém isso é apenas no plano xy. De maneira geral, dando toda a volta, temos $g(r) \leq y \leq f(r)$. Portanto,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{g(r)}^{f(r)} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_a^b r[f(r)-g(r)]\mathrm{d}r.$$

5. $\boxed{10}$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$, e seja F uma primitiva de f. Calcule $\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}A$ onde $D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ a \leq r \leq b\}$.

Solution: Como F é primitiva, então $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Na integral dada, temos

$$\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r^2) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = (\beta-\alpha)\int_{a^2}^{b^2} \frac{f(u)}{2}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\beta-\alpha}{2}[F(b^2)-F(a^2)].$$