29/05 - Cholesky

Tenho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\exists\ B$ t.q. $A = B^2$?

Mais especificamente: $A = A^T$, $\exists\ B$: $A = B^TB$?

Para quê?

$$Ax = b \Rightarrow B^TBx = b \begin{cases} B^Ty = b \\ Bx = y \end{cases}$$

Se B é mais simples, os sistemas com B e B^T são mais fáceis.

Def.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica definida positiva se $x^TAx > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$x^TAx = x^T\begin{bmatrix} 3x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0 \text{ se } x \neq 0.$$

Exerc.: Se $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, então Λ é def. pos. se, e somente se, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$

Teo.: (espectral) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica, então existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ do $\mathbb{R}^n$ tal que v_i é autovetor de A.

Exerc.: Se $A = A^T$ e v e w são autovetores associados a autovalores diferentes, então $v \perp w$.

R. Sejam λ e μ os autovalores, i.e.,

$$Av = \lambda v \quad \text{e} \quad Aw = \mu w, \quad \lambda \neq \mu.$$

$$\lambda v^Tw = (\lambda v)^Tw = (Av)^Tw = v^TA^Tw \overset{\text{sim.}}{=} v^TAw$$
$$= v^T(\mu w) = \mu v^Tw$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)v^Tw = 0. \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow \underline{v^Tw = 0}.$$

Prop.: Se λ é autovalor com multiplicidade r, então $\dim(N(A - \lambda I)) = r$, ou seja, existem r autovetores L.I. associados à λ.

Teo.: Se $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ela tem n autovalores $\in \mathbb{R}$, contando multiplicidade

Exerc.: Dê exemplos

(i) De matrizes sem autovalores reais

(ii) Com autovalores reais, mas sem n autovetores L.I.

Exerc.: Se v é ass. a 0 e w à 1, pode v e w ser LD?

Def.: Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita ortogonal se $Q^{-1} = Q^T$.

Teo.: (espectral matricialmente) Se $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal e Λ diagonal tais que $AV = V\Lambda$, ou $A = V\Lambda V^T$.

(Note que as col. de V são autovetores, e os elementos da diagonal de Λ são os autovalores)

Dem.: Pelo Teo. espectral, $\exists\ \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonal e v_i autovetor. Seja λ_i o autovalor associado a v_i, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$. Daí, seja $V = [v_1 \vdots v_2 \vdots \cdots \vdots v_n]$. Temos

$$AV = [Av_1 \vdots Av_2 \vdots \cdots \vdots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \vdots \lambda_2 v_2 \vdots \cdots \vdots \lambda_n v_n]$$
$$= V\Lambda$$

Exerc.: Mostre que os autovalores de uma matriz def. pos. são positivos.

Pergunta: Se $A = A^T$, $\exists\ B$ t.q. $A = B^TB$?

Teo. Esp.: $A = V\Lambda V^T$

$$\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2} \rightarrow (V\Lambda^{1/2}) \cdot (V\Lambda^{1/2})^T$$

Se $\lambda_i \geq 0$, Define $\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$,

e obtenho $B = (V\Lambda^{1/2})^T$.

Como iremos resolver sistemas lineares, $\lambda_i \neq 0$, e chegamos a uma matriz sim. def. pos.

Na prática, é mais fácil resolver o sistema fazendo:

$$Ax = b \Rightarrow V\Lambda V^Tx = b \Rightarrow x = V\Lambda^{-1}V^Tb$$

Segundo, calcular V e Λ é mais caro.

Cholesky. Seja $A = A^T$ def. pos.

Buscaremos $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. inferior tal que $A = GG^T$.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ & g_{22} & g_{32} \\ & & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = \underline{g_{11}^2}$ 1º	$a_{22} = g_{21}^2 + \underline{g_{22}^2}$ 4º
$a_{21} = \underline{g_{21}}g_{11}$ 2º	$a_{32} = g_{31}g_{21} + \underline{g_{32}}g_{22}$ 5º
$a_{31} = \underline{g_{31}}g_{11}$ 3º	$a_{33} = g_{31}^2 + g_{32}^2 + \underline{g_{33}^2}$ 6º

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{i} g_{ij}^2 \quad \Bigg| \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} g_{ik}g_{jk}, \quad i > j$$

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}^2} \quad \Bigg| \quad g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}}{g_{jj}}$$

Ex.:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 29 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$

$g_{21} = \dfrac{a_{21}}{g_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1$

$g_{31} = \dfrac{a_{31}}{g_{11}} = \dfrac{-4}{2} = -2$

$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$

$g_{32} = \dfrac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} = \dfrac{1 - (-2)\times 1}{1} = 3$

$g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2} = \sqrt{29 - 4 - 9} = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 6 & & & \\ 3 & 7 & 10 & & \\ 4 & 8 & 11 & 13 & \\ 5 & 9 & 12 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

Teo.: Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$. A é def. pos. se, e somente se, A tem dec. de Cholesky.