CM042 - Cálculo II

11 de Maio de 2018 - Prova 2

Gabarito

1. $\boxed{15}$ Encontre os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y$ e classifique-os.

Solution: $\nabla f(x,y) = \langle 3x^2 - 3, 3y^2 - 12\rangle = 0 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 2.$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = 0, f_{yy} = 6y.$

$D = 36xy.$

Em $(1,-2)$ e $(-1,2)$, temos $D = -72 < 0$, logo são pontos de sela.

Em $(1,2)$, temos $D = 72 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$, logo é um minimizador local.

Em $(-1,-2)$, temos $D = 72 > 0$ e $f_{xx} = -6 < 0$, logo é um maximizador local.

2. $\boxed{15}$ Encontre os valores máximos e mínimos de $f(x,y) = x - y^2$ no conjunto $x^2 + y^2 \le 1$.

Solution: Primeiro verificamos os pontos críticos no interior do conjunto. Como $\nabla f(x,y) = \langle 1, -2y\rangle$, então não é possível zerar o gradiente. Ou seja, não existem pontos críticos no interior.

Na borda, temos a equação $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. Daí, podemos buscar os candidatos pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = 1,$$

implicam em

$$\begin{cases} 1 &= 2x\lambda \\ -2y &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

Daí, $y = 0$, ou $\lambda = -1$.

Se $y = 0$, então $x = \pm 1$. $f(\pm 1, 0) = \pm 1$.

Se $\lambda = -1$, então $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$.

Comparando os valores de função, vemos que o mínimo é $-5/4$ em dois pontos: $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ e o máximo é 1 no ponto $(1,0)$.

3. Calcule

(a) $\boxed{8}$ $\displaystyle\int_1^2\int_1^2 ye^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution:

$$\int_1^2\int_1^2 ye^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 ye^{xy}\frac{1}{y}\bigg|_1^2 \mathrm{d}x = \int_1^2 (e^{2x} - e^x)\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right]_1^2$$
$$= \frac{e^4 - e^2}{2} - e^2 + e = \frac{e^4}{2} - \frac{3}{2}e^2 + e.$$

(b) $\boxed{8}$ $\displaystyle\int_1^e \int_1^x \frac{\ln y}{xy}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

Solution:

$$\begin{aligned}\int_1^e \int_1^x \frac{\ln y}{xy}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_1^e \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x}\int_0^{\ln x} u\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\ &= \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{2x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u^2}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(c) $\boxed{8}$ $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\mathrm{d}A$ onde D é delimitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$, $y \leq \sqrt{3}x$ e $x \leq \sqrt{3}y$.

Solution: Para $y \leq \sqrt{3}x$ e $x \leq \sqrt{3}y$, devemos ter D no primeiro quadrante. Daí $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$: D é $1 \leq r \leq \sqrt{2}$. Para $y = \sqrt{3}x$, temos $\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$, logo $\tan\theta = \sqrt{3}$, de modo que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Aí, $x = \sqrt{3}y$, temos $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\mathrm{d}A &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{r^2\cos^2\theta} r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2\theta\mathrm{d}\theta \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r = \left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}\right)(\sqrt{2}-1) \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\sqrt{2}-1) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

(d) $\boxed{8}$ $\displaystyle\iint_D x\mathrm{d}A$ onde D é a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x+2$.

Solution: Interseção $x^2 = x+2 \Rightarrow x = -1$ e $x = 2$.
Temos $-1 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq x+2$.

$$\begin{aligned}\iint_D x\mathrm{d}A &= \int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 x(x+2-x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (x^2+2x-x^3)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

(e) $\boxed{8}$ $\displaystyle\iiint_E \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}V$ onde E é delimitada pelos cilindros de raio 1 e 2, o parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$ e cone $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$.

Solution: Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $z = z$, a região E fica definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$ e $1 + r^2 \leq z \leq 3r$. Note que $1 + r^2 < 3r$ no intervalo

$r \in [1,2]$, de modo que a limitação $1 \leq r \leq 2$ deve ser usada.

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{1+r^2}^{3r} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^3} r\ \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\int_1^2\int_{1+r^2}^{3r}\mathrm{d}z\mathrm{d}r \\ &= \pi\int_1^2(3r-1-r^2)\mathrm{d}r = \pi\left[\frac{3r^2}{2}-r-\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \pi\left(\frac{9}{2}-1-\frac{7}{3}\right) \\ &= \frac{7\pi}{6}.\end{aligned}$$

(f) $\boxed{8}$ $\iiint_E y^2(z^2-x^2-y^2)\ \mathrm{d}V$ onde E é a região limitada pela esfera de raio 1.

Solution: Usando coordenadas esféricas $x=\rho\cos\theta\sin\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\varphi$ a região E é dada por $0\leq\rho\leq 1$, $0\leq\varphi\leq\pi$, e $0\leq\theta\leq 2\pi$. Veja que $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$ e lembre-se que $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Daí,

$$\begin{aligned}\iiint_E y^2(z^2-x^2-y^2)\ \mathrm{d}V &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)\rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1\rho^6\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{7}\times\pi\times\int_0^{\pi}(2\cos^2\varphi-1)(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{7}\int_{-1}^1(2u^2-1)(1-u^2)\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{7}\int_0^1(3u^2-1-2u^4)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\pi}{7}\left(1-1-\frac{2}{5}\right) = -\frac{4\pi}{35}.\end{aligned}$$

(g) $\boxed{8}$ $\iiint_E \frac{xz\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V$ no primeiro octante, entre as esferas de raio 1 e 4.

Solution: No primeiro octante obtemos $0\leq\theta\leq\pi/2$ e $0\leq\varphi\leq\pi/2$. Das esferas obtemos $1\leq\rho\leq 4$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{xz\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}V &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^4 \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi e^{\rho^2}}}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^4\rho^3e^{\rho^2}\mathrm{d}\rho \\ &= 1\times\int_0^1 u^3\mathrm{d}u\int_1^{16}\frac{ve^v}{2}\mathrm{d}v = \frac{1}{8}\left[ve^v-e^v\right]_1^{16} \\ &= \frac{1}{8}(16e^{16}-e^{16}-e+e) = \frac{15e^{16}}{8}\end{aligned}$$

(h) $\boxed{8}$ $\iint_D xy(x^2+y^2)\mathrm{d}A$ onde D é delimitada por $1\leq xy\leq 2$ e $1\leq y^2-x^2\leq 2$ no 1° quadrante.

Solution: Faremos a mudança $u = xy$ e $v = y^2 - x^2$, obtendo o conjunto $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 2$. Também obtemos

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = y(2y) - (x)(-2x) = 2(x^2 + y^2),$$

de onde tiramos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}.$$

Daí,

$$\iint_D xy(x^2 + y^2)\mathrm{d}A = \int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{3}{4}\mathrm{d}v = \frac{3}{4}.$$

(i) $\boxed{8}$ $\displaystyle\iint_D (x-y)^{2017}(3y - 2x + 2)^{1104}\mathrm{d}A$ onde D é o quadrilátero de vértices $\begin{cases} (-2,-2),(1,0) \\ (-1,-1),(2,1) \end{cases}$

Solution: Vamos fazer a mudança dessa região usando o $(-2,-2)$ como origem do novo eixo, e as direções de $(-2,-2)$ a $(1,0)$ e de $(-2,-2)$ a $(-1,-1)$. A mudança é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v.$$

Veja que o ponto que sobra vira

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2+2 \\ 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a região vira o quadrado $[0,1] \times [0,1]$.
Daí,

$$x = -2 + 3u + v \text{ e } y = -2 + 2u + v,$$

de modo que

$$x - y = u \text{ e } 3y - 2x + 2 = v.$$

Também temos $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$. Portanto,

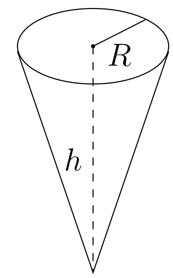
$$\iint_D (x-y)^{2017}(3y - 2x + 2)^{1104}\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^1 u^{2017}v^{1104}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2018} \times \frac{1}{1105}.$$

(j) $\boxed{8}$ $\displaystyle\iint_D x\mathrm{d}A$ onde D é delimitada por $x^2 + y^2 = 2y$ e $x^2 + y^2 = 4$ no primeiro quadrante.

Solution: Em coordenadas polares: $x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r = 2\sin\theta$. A região é limitada inferiormente por $r = 2\sin\theta$ e superiormente por $r = 2$.

$$\begin{aligned}\iint_D x\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/2}\int_{2\sin\theta}^{2} r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{8-8\sin^3\theta}{3}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\int_0^1(1-u^3)\mathrm{d}u = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2.\end{aligned}$$

4. $\boxed{15}$ Considere a seção cônica de altura h e base circular de raio R, ilustrada na figura ao lado. Encontre o volume dessa região em função de R e h, utilizando integração múltipla.



Solution: O cone pode ser em coordenadas cilíndricas como $z = \alpha r$. Para que $z = h$ quando $r = R$, temos $h = \alpha R$, ou seja, $\alpha = \dfrac{h}{R}$. Daí, buscamos o volume da região dada por $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le R$, e $\dfrac{hr}{R} \le z \le h$.

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{hr/R}^{h} r\ \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^R r\left(h-\frac{h}{R}r\right) = 2\pi\left(\frac{hR^2}{2}-\frac{hR^2}{3}\right) \\ &= \frac{\pi hR^2}{3} = \frac{1}{3}\times\pi R^2\times h\end{aligned}$$