CM106/CMI043 - Otimização I

Lista de Exercícios (última atualização: 24 de Fevereiro de 2020)

Restrições

1. Exercícios 7.1 - 7.6 do livro da Ana Friedlander.

2. Resolva
$$\min_y \frac{1}{2}\|y\|^2 \qquad \text{suj. a} \qquad A^T y = c.$$
Para deixar a solução explícita, qual a hipótese sobre a matriz A?

3. Considere os dois problemas a seguir
$$(QM) : \min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 \qquad\qquad (NM) : \min_y \frac{1}{2}\|y\|^2 \quad \text{suj. a} \quad A^T y = c,$$
onde A é uma matriz $m \times n$ com $m > n$ e A não necessariamente tem posto completo. Sejam $\overline{x}$ e $\overline{y}$ as soluções dos problemas acima.
   (a) Escreva as condições de otimalidade que $\overline{x}$ e $\overline{y}$ satisfazem.
   (b) Mostre que $\overline{y}^T(A\overline{x} - b) = 0$.
   (c) Mostre que $\overline{y}^T b = \overline{x}^T c$.
   (d) Se A tem posto coluna completo, mostre explicitamente quem são $\overline{x}$ e $\overline{y}$.
   (e) Mostre que se A tem posto coluna completo e b é factível para (NM), então $\overline{x}$ é o multiplicador de Lagrange associado à $\overline{y}$.

4. Mostre que o problema abaixo é equivalente ao problema (QM), i.e., que a solução de um é a solução de outro e vice-versa.
$$\min_{x,r} \frac{1}{2}\|r\|^2 \qquad \text{suj. a} \qquad Ax + r = b.$$

5. Encontre as condições de otimalidade do problema abaixo, modificado a partir do problema (NM):
$$\min_{y,t} \min \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{\delta}{2}\|t\|^2 \qquad \text{suj. a} \qquad A^T y + \delta t = c,$$
onde $\delta \geqslant 0$.

6. Descreva os pontos críticos de $x^T A x$ sujeito à $x^T x = 1$, onde A é simétrica.

7. Descreva os pontos crítidos de $x^T A y$ sujeito à $x^T x = 1$ e $y^T y = 1$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

8. Sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Calcule a distância entre os hiperplanos $w^T x = b$ e $w^T y = c$.

9. Escreva os seguintes problemas como problema de otimização com restrições lineares, e escreva as condições de otimalidade.
   (a) Qual a projeção de v na imagem de A?
   (b) Qual a projeção de w no núcleo de A?

10. Exercícios 8.1, 8.2, 8.4, 8.7 do livro da Ana Friedlander.

11. Exercícios 9.1, 9.2, 9.4 - 9.6, 9.8 do livro da Ana Friedlander.

12. Considere os problemas abaixo:

$$\min_x \frac{1}{2}x^TQx + x^Tg \qquad \text{suj. a} \qquad Ax = b, \quad x \geqslant 0, \tag{P}$$

e

$$\min_{x,r} \frac{1}{2}x^TQx + x^Tg + \frac{\rho}{2}\|x-a\|^2 + \frac{\delta}{2}\|r+b\|^2 \qquad \text{suj. a} \qquad Ax + \delta r = b, \quad x \geqslant 0, \tag{PR}$$

com $\rho, \delta \geqslant 0$.

   (a) Encontre as condições de otimalidade dos problemas acima.

   (b) Nas condições para o problema (PR), remova o r, deixando apenas x e os multiplicadores de Lagrange.

Nas questões abaixo, use o seguinte método de restrições ativas para o problema min $f(x)$ sujeito à $a_i^Tx \geqslant b_i$, com $i = 1, \ldots, m$.

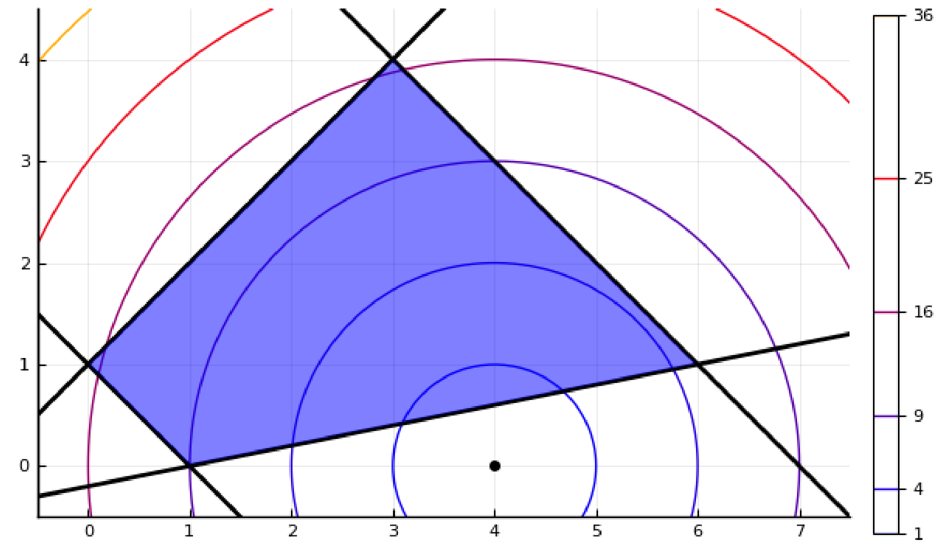
1: Dado x, faça $\mathcal{W} = \mathcal{A}(x)$ (restrições ativas),
2: Tente resolver o sistema $\nabla f(x) = \sum_{i\in\mathcal{W}} a_i\lambda_i$. Se não for possível, vá ao passo 3, se for possível vá ao passo 7.,
3: Calcule d a projeção de $-\nabla f(x)$ sobre as restrições em $\mathcal{W}$.
4: Calcule o minimizador de $f(x+\alpha d)$, $\alpha \geqslant 0$ e $a_i^T(x+\alpha d) \geqslant b_i$.
5: Se $x + \alpha d$ encontrou uma ou mais restrições, então adicione essas restrições adicionais em $\mathcal{W}$.
6: Volte ao passo 2.
7: Se $\lambda \geqslant 0$, FIM
8: Se algum $\lambda_i < 0$, escolha **uma** restrição com $\lambda_i < 0$ e remova de $\mathcal{W}$.
9: Volte ao passo 2.

---

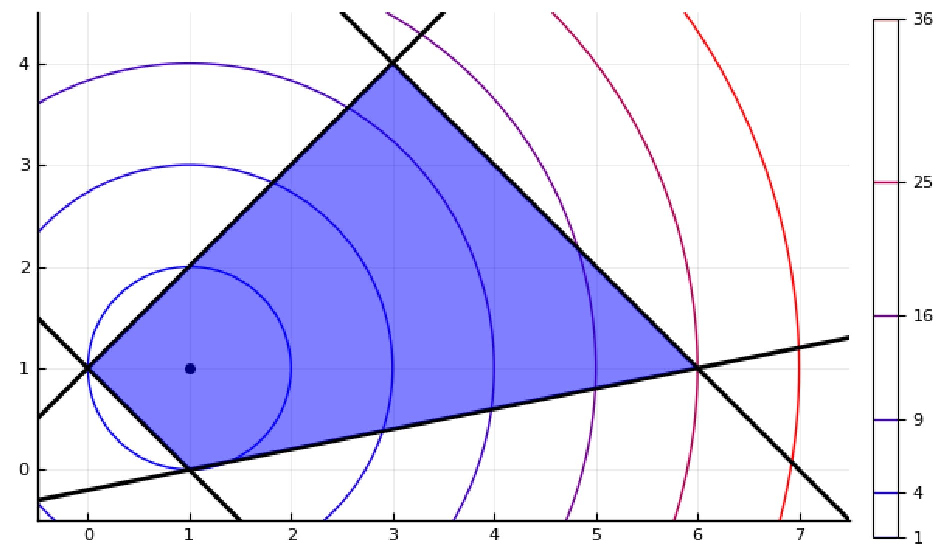
13. Exercícios 10.1 - 10.4 do livro da Ana Friedlander, mas apenas graficamente.

14. Resolva cada problema esboçado abaixo, a partir do ponto indicado. A cada opção de remoção de restrição de $\mathcal{W}$, faça todas as variações.

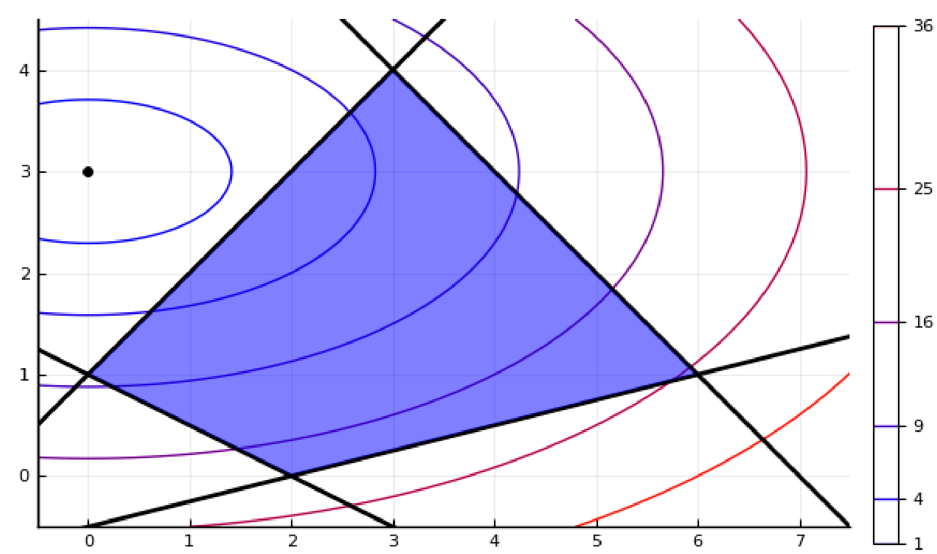
   (a) A partir de $x_0 = (0, 1)$.



(b) A partir de $x_0 = (3, 4)$.



(c) A partir de $x_0 = (4, 0.5)$.



15. Exercício 11.2 do livro da Ana Friedlander.

16. Exercícios 12.1 - 12.2 do livro da Ana Friedlander.

17. Escreva as condições de otimalidade de

$$\min_{x,t} f(x) + \frac{\delta}{2}\|t\|^2 \qquad \text{suj. a} \qquad h(x) + \delta t = 0,$$

onde $\delta \geqslant 0$.

18. Exercícios 13.1 - 13.9 do livro da Ana Friedlander.

19. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito à $x^2 + 4y^2 \leqslant 4$.

20. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ sujeito à $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

21. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = xy$ sujeito à $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

22. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x + y$ sujeito à $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

23. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^3 + y^2$ sujeito à $2y - x^2 + 4 \geqslant 0$.

24. Calcule a projeção de $v \in \mathbb{R}^n$ na esfera de raio $R > 0$ centrada na origem, usando otimização.