CM042 - Cálculo II

20 de Junho de 2018 - Prova 3

Gabarito

1. $\boxed{15}$ Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x + xe^y\mathrm{d}y$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,2)$.

Solution:

$$\oint_C \frac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x + xe^y\mathrm{d}y = \iint_D \left(e^y - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^{2x}\left(e^y - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\left(e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{2} - 1 - \int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{e^2-3}{2} - \ln 2.$$

2. $\boxed{15}$ Calcule a integral de linha de $\vec{F}(x,y,z) = \langle 2x, z, y+e^z\rangle$ sobre a curva intersecção do cilindro $(x-z)^2 + 4(y-z)^2 = 5$ e do plano $2x - y + z = 1$, começando em $(0,0,1)$ e indo até $(1,1,0)$ pelo menor caminho.

Solution: É fácil calcular $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$, de modo que $\vec{F}$ é conservativo, e podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y + e^z.$$

Integrando a primeira temos $f(x,y,z) = x^2 + g(y,z)$. Derivando em y e comparando com a segunda, temos

$$\frac{\partial g}{\partial y} = z,$$

logo $g(y,z) = yz + h(z)$ e então $f(x,y,z) = x^2 + yz + h(z)$. Derivando em z e comparando com a terceira, temos

$$h'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad h(z) = e^z + C.$$

Portanto $f(x,y,z) = x^2 + yz + e^z + C$.

Agora, a integral vira

$$\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = f(1,1,0) - f(0,0,1) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0.$$

3. $\boxed{15}$ Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ onde C é a curva $\vec{r}(t) = \langle t^2, t^2, t\rangle$ com $0 \le t \le 1$, e $\vec{F}(x,y,z) = xe^y\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} - 2xz\hat{\mathrm{k}}$.

Solution: É fácil ver que esse $\vec{F}$ não é conservativo, então vamos usar a definição de integral de linha. Temos

$$\begin{cases} x &= t^2 \\ \mathrm{d}x &= 2t\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= t^2 \\ \mathrm{d}y &= 2t\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} z &= t \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{d}t \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C xe^y \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y - 2xz\mathrm{d}z &= \int_0^1 t^2e^{t^2}(2t\mathrm{d}t) + t^2(2t\mathrm{d}t) - 2t^2t\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2t^3e^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 ue^u\mathrm{d}u \\ &= (e-(e-1)) = 1. \end{aligned}$$

4. $\boxed{15}$ Calcule a integral de linha de $f(x,y) = x^2 - y^2$ no caminho multilíneo que passa nos pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ e $(2,2)$, nessa ordem.

Solution: Temos 3 caminhos retos:

- De $(0,0)$ a $(1,0)$: $\vec{r}(t) = \langle t, 0\rangle$, $0 \le t \le 1$
- De $(1,0)$ a $(2,1)$: $\vec{r}(t) = \langle 1+t, t\rangle$, $0 \le t \le 1$
- De $(2,1)$ a $(2,2)$: $\vec{r}(t) = \langle 2, 1+t\rangle$, $0 \le t \le 1$

Daí, usando a definição

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

nas três partes, temos

$$\begin{aligned} \int_C (x^2-y^2)\mathrm{d}s &= \int_0^1 t^2 \times 1\mathrm{d}t + \int_0^1 [(1+t)^2 - t^2]\times\sqrt{2}\mathrm{d}t + \int_0^1 [4-(1+t)^2]\times 1\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [t^2 + \sqrt{2}(1+2t) + 3 - 2t - t^2]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [\sqrt{2} + 3 + 2(\sqrt{2}-1)t]\mathrm{d}t = \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

5. $\boxed{15}$ Calcule o fluxo de $zx\hat{\imath} + zy\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ através da superfície dada por $x^2+y^2=4$ para $0 \le z \le 2$.

Solution: Para o cilindro de raio 2 temos

$$\hat{n}\mathrm{d}S = \langle x, y, 0\rangle\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \langle zx, zy, -2z\rangle \cdot \langle x, y, 0\rangle \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \iint_D z(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$$
$$= \iint_D 4z\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 4z\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = 16\pi.$$

6. $\boxed{15}$ Calcule $\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ onde $\vec{F}(x,y,z) = \langle x+y^2, y+z^2, z+x^2\rangle$ onde C é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, usando o Teorema de Stokes.

Solution: Precisamos de uma superfície cuja borda seja o triângulo dado. A mais óbvia é o plano que passa nesses pontos. O Teorema de Stokes dá

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Vamos usar o plano no formato $z = f(x,y)$, e como o plano é $x+y+z=1$, temos $z = f(x,y) = 1-x-y$. Nesta situação temos

$$\mathrm{d}\vec{S} = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle 1,1,1\rangle \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \langle -2z, -2x, -2y\rangle = \langle -2+2x+2y, -2x, -2y\rangle .$$

A região de integração é $0\le x\le 1$ e $0\le y\le 1-x$. Portanto,

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1\int_0^{1-x} \langle -2+2x+2y, -2x, -2y\rangle \cdot \langle 1,1,1\rangle \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(-2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -2\int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = -2\left(1-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

7. $\boxed{15}$ Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = \left\langle \frac{(\ln x)(\ln y)}{y}, -2xyz, xz^2\right\rangle$ através das superfícies do prisma limitado pelos planos $x=1$, $x=e$, $y=1$, $y=x$, $z=0$ e $z=1$.

Solution: Usando o Teorema da Divergência, temos

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S &= \iiint_E \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1\int_1^e\int_1^x \left(\frac{\ln y}{xy} - 2xz + 2xz\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1\int_1^e\int_1^x \frac{\ln y}{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \int_1^e\int_0^{\ln x}\frac{u}{x}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\ &= \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{2x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{v^2}{2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

8. $\boxed{15}$ O fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{\langle x,y,z\rangle}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ através da esfera S em direção à origem, onde S é a esfera de raio R e centro na origem.

Solution: Note que não podemos aplicar o Teorema da Divergência aqui, pois $\vec{F}$ não é contínua na origem.

A normal da esfera para dentro é $\hat{n} = -\dfrac{\vec{r}}{R} = \dfrac{-1}{R}\langle x,y,z\rangle$ e $\mathrm{d}S = R^2\sin\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$. Temos

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = -\frac{x^2+y^2+z^2}{R(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{R^2}.$$

então o fluxo é

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{R^2}R^2\sin\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 2\pi\cos\phi\Big|_0^{\pi} = -4\pi.$$