CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

10 de Dezembro de 2018 - Final

Gabarito

1. $\boxed{10}$ Mostre que não existe o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin x}{x^3+y^3}$.

Solution: Na curva $(t,0)$ temos $f(t,0) = 0$, $t \neq 0$, de modo que o limite é 0.

Na curva (t,t) temos $f(t,t) = \dfrac{t^2 \sin t}{2t^3} = \dfrac{\sin t}{2t}$, de modo que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como os limites são diferentes, não existe o limite.

2. Calcule

(a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 y^3 (x^5+1)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ invertendo a ordem de integração.

Solution: Temos $0 \leq y \leq 2$ e $y/2 \leq x \leq 1$. Graficamente teremos um triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ e $(1,0)$, que podemos representar como $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2x$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{2x} y^3 (x^5+1)^{1/2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 4x^4 (x^5+1)^{1/2} \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \int_1^2 u^{1/2} \mathrm{d}u \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(b) $\boxed{15}$ $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}A$ onde D é a região limitada pelas circunferências de raio 1 e 2, limitada inferiormente por $y=0$ e superiormente por $y=x$.

Solution: Em coordenadas polares, temos $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, e a região dada por $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \int_1^2 \frac{r^2}{r^2 \cos^2\theta} \cos(\tan\theta) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \cos(\tan\theta) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 \cos u \mathrm{d}u = \frac{3}{2} \sin(1).\end{aligned}$$

(c) $\boxed{15}$ $\displaystyle\iiint_E \frac{x^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^3+1}\mathrm{d}V$ onde E é a região limitada pela esfera de raio 1 acima do plano xy.

Solution: Em coordenadas esféricas, como estamos acima do plano xy, temos $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Dentro da esfera temos $0 \leq \rho \leq 1$. Sobra $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Daí, a integral fica

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\rho\cos\varphi}{\rho^6+1}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{\rho^5}{\rho^6+1}\mathrm{d}\rho$$
$$= \pi \times \int_0^1 u^3\mathrm{d}u\int_1^2\frac{1}{6v}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{24}\ln 2.$$

3. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+1}$

(a) $\boxed{10}$ Desenhe as curvas de nível de f.

Solution: Buscamos $\dfrac{y-1}{x^2+1} = k$, obtendo $y = 1+k(x^2+1) = kx^2+k+1$. Caimos em três situações, $k=0$ temos a reta $y=1$, para $k>0$ temos parábolas com concavidade para cima, e para $k<0$ temos parábolas com concavidade para baixo.

(b) $\boxed{10}$ Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}$ usando a regra da cadeia, onde $x(t) = t^2+2t+1$ e $y(t) = e^{t-1}$.

Solution:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{(1-y)2x}{(x^2+1)^2}(2t+2) + \frac{1}{x^2+1}e^{t-1}$$

Como $x(1) = 4$ e $y(1) = 1$, então temos

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = 0 + \frac{1}{17}e^0 = \frac{1}{17}.$$

4. $\boxed{10}$ Encontre as soluções da equação diferencial $(1+t^2)y' + 4ty = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Solution: Dividimos por $(1+t^2)$, obtendo $p(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ e $q(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$, daí

$$\mu(t) = \exp\int\frac{4t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \exp\int\frac{2}{u}\mathrm{d}u = e^{2\ln u} = e^{\ln u^2} = u^2 = (1+t^2)^2.$$

Também temos

$$\int \mu(t)q(t)\mathrm{d}t = \int 2t\mathrm{d}t = t^2 + C.$$

Logo, a solução é

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}(t^2 + C) = \frac{t^2 + C}{(1 + t^2)^2}.$$

5. Um cone de altura h e raio de base R pode ser descrito como a região limitada inferiormente por $z = \dfrac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $z = h$.

   (a) $\boxed{10}$ Calcule o volume desse cone utilizando integral tripla por coordenadas cilíndricas.

   Solution: Em coordenadas cilíndricas, temos $x^2 + y^2 = r^2$, de modo que o cone é limitado por $z = \frac{hr}{R}$ e $z = h$. A intersecção dessa superfícies acontece quando $hr/R = h$, isto é, $r = R$. Não existem outras restrições, então temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$ e $hr/R \leq z \leq h$. O volume é

   $$\begin{aligned} V &= \iiint_E \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{hr/R}^h r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^R r(h - \tfrac{hr}{R})\mathrm{d}r = 2h\pi\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{\pi R^2 h}{3}. \end{aligned}$$

   (b) $\boxed{10}$ Encontre o volume máximo do cone sujeito à restrição $h^2 + R^2 = 1$. (Note que h e R devem ser positivos).

   Solution: A função do volume é $V(h, r) = \frac{\pi}{3}hR^2$, e a da restrição é $g(h, R) = h^2 + R^2$. Pelo MML, temos

   $$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{3}R^2 &= 2h\lambda \\ \tfrac{2\pi}{3}hR &= 2R\lambda \\ h^2 + R^2 &= 1. \end{aligned}$$

   Da segunda equação, como $R > 0$, tiramos $\lambda = \frac{\pi}{3}h$. Daí, na primeira equação obtemos $R^2 = 2h^2$. Substituindo na última, encontramos $h = \sqrt{3}/3$ e $R = \sqrt{6}/3$. O volume máximo é

   $$V = \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{6}{9} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}.$$