# CM106/CMI043 - Otimização I

Lista de Exercícios (última atualização: 24 de Fevereiro de 2020)

Irrestritos

1. Exercícios dos capítulo 1 a 6 do livro da Ana Friedlander.

2. Mostre que o problema a seguir têm solução global única para qualquer $\lambda > 0$.

$$\min_x \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \lambda\frac{1}{2}\|x\|^2,$$

   onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que $x \to 0$ quando $\lambda \to \infty$.

3. Resolva o problema de encontrar o polígono de maior área inscrito numa circunferência. Dica: olhe para os ângulos, e reescreva a restrição eliminando uma variável.

4. Dados uma matriz simétrica $A$ e um vetor $x$ compatível, resolva

$$\min_\lambda \frac{1}{2}\|Ax - \lambda x\|_2^2.$$

5. Encontre os valor extremos de $f(x) = \dfrac{x^TAx}{x^Tx}$ onde $A$ é simétrica.

6. Mostre que se $S$ é um conjunto convexo, e $f$ é uma função convexa em $S$, então o conjunto $\{(x, \lambda) : \ f(x) \geqslant \lambda\} \subset S \times \mathbb{R}$ é convexo.

7. Mostre que a função $f(x, y) = |xy|$ não é convexa.

8. Mostre que $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1$ é uma função estritamente convexa, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$.

9. Encontre a solução de $f(x, y) = (x - 1)^2 + 4(y - 1)^2 + \lambda(|x| + |y|)$ em função de $\lambda \geqslant 0$.

10. Dado $A$, uma matriz simétrica, encontre a matriz mais próxima da matriz $A$, no sentido de minimizar a norma de Frobenius e a norma 2, quando possível, aproximando por matrizes nos casos de

    - Uma matriz na forma $\alpha I$
    - Uma matriz diagonal
    - Uma matriz na forma $uu^T$