CM042 - Cálculo II

28 de Agosto de 2017 - Prova 1

Gabarito

1. Considere a curva dada pela função $\vec{r}(t) = e^t \cos t\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + e^t \sin t\hat{\mathrm{k}}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) $\boxed{7}$ Calcule o vetor tangente unitário $\hat{\mathrm{T}}(t)$.

   Solution:

   $$\vec{r'}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\hat{\imath} + e^t\hat{\jmath} + e^t(\sin t + \cos t)\hat{\mathrm{k}}$$
   $$|\vec{r'}(t)| = \sqrt{3}e^t$$
   $$\hat{\mathrm{T}}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{|\vec{r'}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\cos t - \sin t)\hat{\imath} + \hat{\jmath} + (\sin t + \cos t)\hat{\mathrm{k}}\right].$$

   (b) $\boxed{7}$ Calcule o vetor normal unitário $\hat{\mathrm{N}}(t)$.

   Solution:

   $$\hat{\mathrm{T}}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}[(-\sin t - \cos t)\hat{\imath} + (\cos t - \sin t)\hat{\mathrm{k}}]$$
   $$|\hat{\mathrm{T}}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$
   $$\hat{\mathrm{N}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-\sin t - \cos t)\hat{\imath} + (\cos t - \sin t)\hat{\mathrm{k}}].$$

   (c) $\boxed{7}$ Calcule o vetor binormal unitário $\hat{\mathrm{B}}(t)$.

   Solution:

   $$\begin{aligned}\hat{\mathrm{B}}(t) &= \hat{\mathrm{T}}(t) \times \hat{\mathrm{N}}(t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\hat{\imath}(\cos t - \sin t) - \hat{\jmath}[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2] + \hat{\mathrm{k}}(\sin t + \cos t)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\cos t - \sin t)\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + (\sin t + \cos t)\hat{\mathrm{k}}.\right]\end{aligned}$$

   (d) $\boxed{8}$ Calcule a curvatura dessa curva.

   Solution:

   $$\kappa(t) = \frac{|\hat{\mathrm{T}}'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}}{\sqrt{3}e^t} = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{3}.$$

   (e) $\boxed{8}$ Calcule o comprimento da curva dada por $\vec{r}(t)$ no intervalo $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Solution:

$$L = \int_{-2\pi}^{2\pi} |\vec{r'}(t)| \mathrm{d}t = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{3} e^t \mathrm{d}t = \sqrt{3} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^t \mathrm{d}t = \sqrt{3}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

(f) $\boxed{8}$ Calcule a reparametrização de $\vec{r}$ em relação ao comprimento de arco a partir do ponto $(1, 1, 0)$ na direção crescente de t.

Solution:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r'}(u)| \mathrm{d}u = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

$$\vec{r}(t(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\left[\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right)\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right)\hat{\mathrm{k}}\right]$$

para $s \in (-\sqrt{3}, +\infty)$.

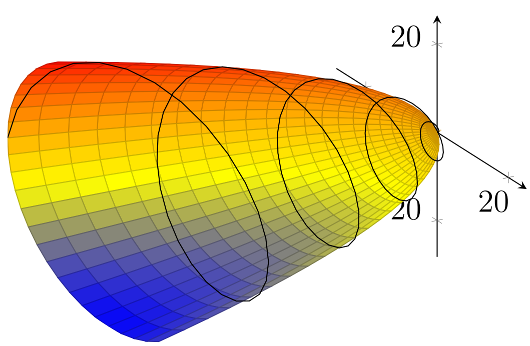
2. Considere a curva dada parametricamente pela função vetorial $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\hat{\imath} + t\cos t\hat{\jmath} + t\sin t\hat{\mathrm{k}}$, para $t \geq 0$. Faça o que se pede:

(a) $\boxed{10}$ Essa curva está sobre uma quádrica conhecida. Qual a equação dessa quádrica e seu nome?

Solution: Como $x(t) = t^2/2$, $y(t) = t\cos t$ e $z(t) = t\sin t$, então

$$y^2 + z^2 = t^2 = 2x.$$

A quádrica com essa equação é um parabolóide elíptico.



(b) $\boxed{10}$ Calcule a curvatura dessa curva em $t = 0$.

Solution: Temos

$$\vec{r'}(t) = t\hat{\imath} + (\cos t - t\sin t)\hat{\jmath} + (\sin t + t\cos t)\hat{\mathrm{k}}.$$

$$\vec{r''}(t) = \hat{\imath} + (-2\sin t - t\cos t)\hat{\jmath} + (2\cos t - t\sin t)\hat{\mathrm{k}}.$$

Em $t = 0$,

$$\vec{r'}(0) = \hat{\jmath},$$

$$\vec{r''}(0) = \hat{\imath} + 2\hat{\mathrm{k}}.$$

Daí,

$$\vec{r'}(0) \times \vec{r''}(0) = \hat{\jmath} \times \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \times \hat{\mathrm{k}} = -\hat{\mathrm{k}} + 2\hat{\imath}.$$

Então,

$$\kappa(0) = \frac{|\vec{r'}(0) \times \vec{r''}(0)|}{|\vec{r'}(0)|^3} = \frac{\sqrt{4+1}}{1^3} = \sqrt{5}.$$

3. $\boxed{15}$ Encontre uma parametrização para a curva obtida pela interesecção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ e do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

Solution: A intersecção desse dois objetos terá uma sombra no plano xy em cima da círcunferência de raio 1. No plano xz, isto é, $y = 0$, temos $x = \pm 1$ e $z = 1$. No plano yz, isto é, $z = 0$, temos $y = \pm 1$ e $z = -1$. Isso nos dá a impressão de que a curva é um objeto rotacionando em cima do cilindro e subindo e descendo no z.

Como $x^2 + y^2 = 1$, então $x = \cos t$ e $y = \sin t$ é uma possibilidade. Daí, $z = \cos^2 t - \sin^2 t$ é a solução para o parabolóide. Como dá voltas, podemos escolher $t \in [0, 2\pi]$ como intervalo para t.

Em resumo,

$$\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath} + (\cos^2 t - \sin^2 t)\hat{\mathrm{k}}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

4. Considere a curva dada por $\vec{r}(t) = h(t)\cos t\hat{\imath} + h(t)\sin t\hat{\jmath}$, onde $h(t)$ é uma função real positiva com a propriedade $h'(t) = \lambda h(t)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante.

   (a) $\boxed{10}$ Verifique que $|\vec{r}'(t)| = h(t)\sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Solution:

$$\vec{r}'(t) = [h'(t)\cos t - h(t)\sin t]\hat{\imath} + [h'(t)\sin t + h(t)\cos t]\hat{\jmath}.$$

Como $h'(t) = \lambda h(t)$, então

$$\vec{r}'(t) = h(t)\Big[(\lambda\cos t - \sin t)\hat{\imath} + (\lambda\sin t + \cos t)\hat{\jmath}\Big].$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|\vec{r}'(t)| &= h(t)\sqrt{(\lambda\cos t - \sin t)^2 + (\lambda\sin t + \cos t)^2} \\
&= h(t)\sqrt{\lambda^2\cos^2 t - 2\lambda\sin t\cos t + \sin^2 t + \lambda^2\sin^2 + 2\lambda\sin t\cos t + \cos^2 t} \\
&= h(t)\sqrt{\lambda^2 + 1}.
\end{aligned}$$

(b) $\boxed{10}$ Mostre que o ângulo entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}\,'(t)$ é sempre constante, i.e., não depende de t.

Solution: O ângulo θ entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}\,'(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle \vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)\rangle}{|\vec{r}(t)||\vec{r}\,'(t)|} \\
&= \frac{h(t)^2\Big[\cos t \times (\lambda\cos t - \sin t) + \sin t \times (\lambda \sin t + \cos t)\Big]}{h(t)\times h(t)\sqrt{\lambda^2+1}} \\
&= \frac{\lambda\cos^2 t - \cos t \sin t + \lambda \sin^2 t + \sin t \cos t}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}.
\end{aligned}$$

5. $\boxed{10}$ Prove ou dê um contra-exemplo: Se a curvatura de uma curva é constante e não nula em todos os pontos, isto é, se $\kappa(t) = C$, onde $C > 0$ é uma constante, então a curva é uma circunferência.

Solution: A afirmação é falsa. Veja o exemplo

$$\vec{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath} + t\hat{\mathrm{k}}.$$

Temos

$$\vec{r'}(t) = -\sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + \hat{\mathrm{k}},$$

e

$$\vec{r''}(t) = -\cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath}.$$

Daí,

$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) = \sin t\hat{\imath} - \cos t\hat{\jmath} + \hat{\mathrm{k}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|}{|\vec{r'}(t)|^3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$