Cálculo Diferencial e Integral I - Prova 2

17 de Maio de 2017

Questão 1 .... $\boxed{50}$

Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) (10 points) $f(x) = xe^x$.

> **Solution:** $f'(x) = e^x + xe^x$.

(b) (10 points) $p(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$.

> **Solution:** $p'(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin(x))^{-1/2}\cos(x)$

(c) (10 points) $g(x) = e^{2\pi}$.

> **Solution:** g é constante. $g'(x) = 0$.

(d) (10 points) $h(t) = \dfrac{t^2+1}{t^3-t}$.

> **Solution:**
> $$h'(t) = \frac{2t(t^3-t) - (t^2+1)(3t^2-1)}{(t^3-t)^2} = \frac{-t^4-4t^2+1}{(t^3-t)^2}.$$

(e) (10 points) $q(z) = z^{3z-1}$.

> **Solution:** $\ln q(z) = (3z-1)\ln z$, então
> $$\frac{q'(z)}{q(z)} = 3\ln z + (3z-1)\frac{1}{z} = 3\ln z + 3 - \frac{1}{z}.$$
> Portanto,
> $$q'(z) = z^{3z-1}\left(3\ln z + 3 - \frac{1}{z}\right).$$

Questão 2 .... $\boxed{10}$

A quantidade de um certo remédio no sangue após t horas após ingestão pode ser modelada pela equação

$$Q(t) = \alpha Q_0 t e^{-\alpha t + 1}, \qquad t \geq 0,$$

onde $Q_0 > 0$ é a dose tomada e $\alpha > 0$ é um parâmetro que depende do remédio. Encontre o instante onde a quantidade de remédio no sangue é máxima. Mostre que sua resposta é, de fato, o máximo. Indique também qual o valor máximo.

Solution: Temos

$$Q'(t) = \alpha Q_0 e^{-\alpha t+1}(1-\alpha t).$$

e

$$Q''(t) = \alpha^2 Q_0 e^{-\alpha t+1}(\alpha t - 2).$$

$Q'(t) = 0$ apenas em $t = 1/\alpha$, logo t é o único ponto crítico. Temos $Q''(1/\alpha) = \alpha^2 Q_0 e^{-1+1}(1-2) = -\alpha^2 Q_0 < 0$. Como $Q'(1/\alpha) = 0$ e $Q''(1/\alpha) < 0$, então $1/\alpha$ é ponto de máximo.

Como estamos buscando o máximo para $t \geq 0$, devemos olhar para $t = 0$ e $t \to +\infty$, além de $t = 1/\alpha$. Como $Q(0) = 0$, não é o máximo. Para o outro lado, temos

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha Q_0 t e^{-\alpha t+1} = \lim_{t\to+\infty} \alpha Q_0 \frac{t}{e^{\alpha t-1}} = \lim_{t\to+\infty} \alpha Q_0 \frac{1}{\alpha e^{\alpha t-1}} = 0.$$

Em $t = 1/\alpha$,

$$Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha Q_0 \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha/\alpha+1} = Q_0 e^{-1+1} = Q_0 > 0.$$

Como $Q(1/\alpha) = Q_0 > 0$, então $t = 1/\alpha$ é o maximizador global com máximo global Q_0.

Questão 3 20

Faça o esboço do gráfico $f(x) = (x+1)^3(x-1)$, atentando-se a cada item abaixo:

(a) (2 points) As raízes;

(b) (5 points) As regiões de crescimento e descrescimento;

(c) (3 points) Os pontos críticos e de que tipos são;

(d) (5 points) As regiões de concavidades para cima e para baixo;

(e) (5 points) Gráfico correto.

Solution: As raízes estão claramento definidas: -1 e 1.

$$f'(x) = 3(x+1)^2(x-1) + (x+1)^3 = (x+1)^2(4x-2),$$

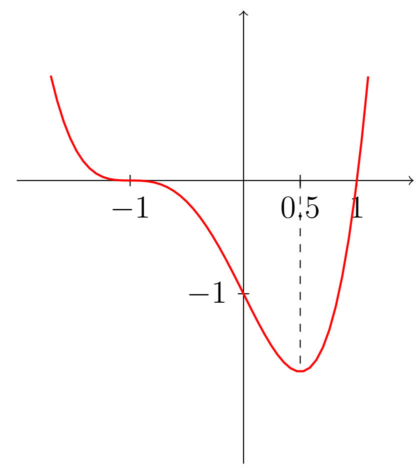
então temos

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & \frac{1}{2} & \\ \searrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

De onde tiramos que o ponto $x = -1$ é de sela e $x = 0.5$ é min. local.

$$f''(x) = 2(x+1)(4x-2) + (x+1)^2 4 = 12x(x+1).$$

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 0 & \\ \cup & & \cap & & \cup \end{array}$$



Questão 4 .... $\boxed{10}$

Considere a equação $e^{1-y} + y^2 = 2x^2$, para $y = y(x)$.

(a) (2 points) Verifique que $y(-1) = 1$.

(b) (8 points) Encontre $y'(-1)$.

Solution: Substituindo $x = -1$ e $y = 1$ temos

$$e^{1-1} + 1^2 = 2(-1)^2 \Rightarrow 1 + 1 = 2.\checkmark$$

Derivando em x, temos

$$-y'e^{1-y} + 2yy' = 4x.$$

Logo,

$$y' = \frac{4x}{2y - e^{1-y}}.$$

Como $y(-1) = 1$, então,

$$y'(-1) = \frac{4(-1)}{2 - e^0} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Calcule

(a) (10 points) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$

Solution: Esse limite é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, então podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{100x^{99} - 2x + 1}{10x^9} = \frac{100 - 2 + 1}{10} = \frac{99}{10}.$$

(b) (10 points) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\dfrac{x^2+1}{2^x}\right)}{x^2-x}$

Solution: Esse limite é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, então podemos aplicar L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\dfrac{x^2+1}{2^x}\right)}{x^2-x} &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+1)-\ln(2^x)}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+1)-x\ln 2}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x}{x^2+1}-\ln 2}{2x-1} \\
&= \frac{\frac{2}{2}-\ln 2}{1} = 1-\ln 2.
\end{aligned}$$