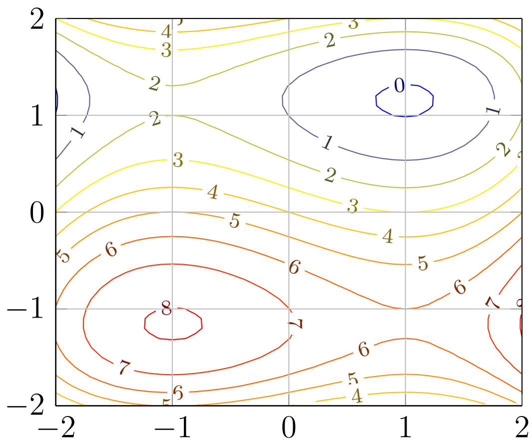
CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

10 de Setembro de 2018 - Prova 1

Gabarito

1. Considere a função f cujas curvas de nível estão abaixo



(a) $\boxed{5}$ Estime $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$;

Solution: $f_x(0,0) \approx \frac{f(1,0)-f(0,0)}{1} = \frac{3-4}{1} = -1$

(b) $\boxed{5}$ Estime $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$.

Solution: $f_y(0,0) \approx \frac{f(0,-0.5)-f(0,-1)}{0.5} = \frac{6-7}{0.5} = -2$

(c) $\boxed{5}$ Estime a derivada direcional de f no ponto $(0.5,-1)$ na direção unitária que aponta para $(-1,0)$.

Solution: $\vec{v} = \langle -1.5, 1\rangle$. $|\vec{v}| = \sqrt{2.25+1} \approx 1.8$.

$D_{\vec{v}}f(0.5,-1) \approx \nabla f(0.5,-1)\cdot \frac{\vec{v}}{1.8}$.

$f_x(0.5,-1) \approx \frac{f(1,-1)-f(0.5,-1)}{0.5} \approx \frac{6-6.3}{0.5} = -0.6$

$f_y(0.5,-1) \approx \frac{f(0.5,-0.75)-f(0.5,-1)}{0.25} \approx \frac{6-6.3}{0.25} = -1.2$

$D_{\vec{v}}f(0.5,-1) \approx \frac{-0.6\times(-1.5)-1.2\times 1}{1.8} = \frac{0.9-1.2}{1.8} = \frac{-0.3}{1.8} = -\frac{1}{6} \approx -0.17$

2. Mostre que não existem os seguintes limites

(a) $\boxed{15}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y^3+x^2y^5}{x^{12}+y^6}$.

Solution: (i) Curva $\langle t,0\rangle$, $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$;

(ii) Curva $\langle t,t^2\rangle$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0}\frac{2t^{12}}{2t^{12}} = 1$.

(b) $\boxed{15}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$.

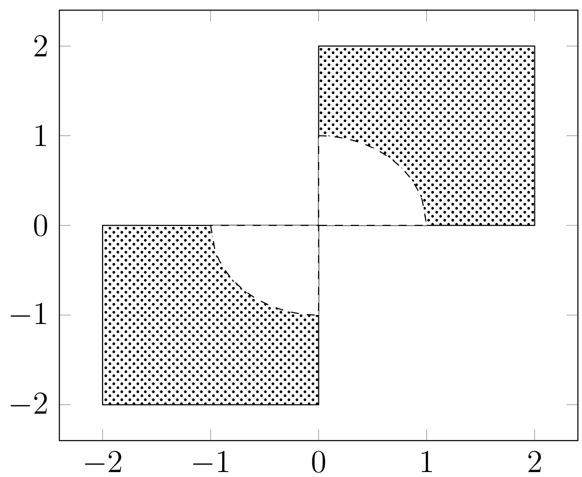
Solution: (i) Curva $\langle t,0\rangle$, $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$;

(ii) Curva $\langle t,t\rangle$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2}-1}{2t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{2te^{t^2}}{4t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}e^{t^2} = \frac{1}{2}$.

3. $\boxed{10}$ Esboce o domínio da função $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + \sqrt{xy}$.

Solution: Argumento do ln deve ser positivo: $x^2+y^2 > 1$;

Argumento da raiz deve ser não-negativo: $xy \geq 0$; Para que $xy \geq 0$, podemos ter $x, y \geq 0$ ou $x, y \leq 0$.

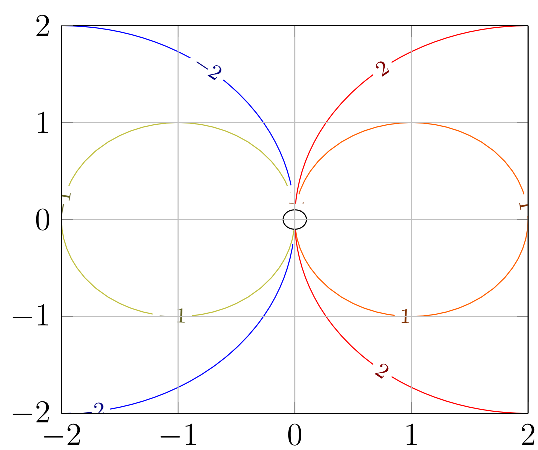


4. $\boxed{15}$ Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$.

Solution: Veja que $x \neq 0$.

$$\frac{x^2+y^2}{2x} = k \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2 = 2kx \qquad \Rightarrow \qquad (x-k)^2+y^2 = k^2.$$

Circunferências de raio $|k|$, centradas em $(k, 0)$.



5. Considere a função $u(t,x) = 20e^{-3t}\sin(\pi x)$.

   (a) $\boxed{10}$ Mostre que $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para algum valor de α e mostre esse valor de α.

Solution: $u_t(t,x) = -60e^{-3t}\sin(\pi x)$
$u_x(t,x) = 20\pi e^{-3t}\cos(\pi x)$
$u_{xx}(t,x) = -20\pi^2 e^{-3t}\sin(\pi x)$
$\alpha = \dfrac{u_t(t,x)}{u_{xx}(t,x)} = \dfrac{3}{\pi^2}$, para $u_{xx}(t,x) \neq 0$.

(b) $\boxed{10}$ Calcule a aproximação linear de $u(t,x)$ em torno de $t = 0$ e $x = 1/4$.

Solution: $u(0,1/4) = 10\sqrt{2}$, $u_t(0,1/4) = -30\sqrt{2}$, $u_x(0,1/4) = 10\pi\sqrt{2}$.
$L(t,x) = u(0,1/4) + u_t(0,1/4)t + u_x(0,1/4)(x-1/4) = 10\sqrt{2}\Big(1 - 3t + \pi(x-1/4)\Big)$.

6. $\boxed{10}$ A posição (x,y) de uma partícula no instante $t \in \mathbb{R}$ é dada pelas equações $x = t\sin(3t)$ e $y = t\cos(t)$. A força que age sobre essa partícula, em módulo, é dada pela função $F(x,y) = \sin x \sin y$. Calcule a derivada de F em relação à t no instante $t = \pi/3$, **usando a regra da cadeia**.

Solution:

$$x(\pi/3) = 0, \quad y(\pi/3) = \pi/6$$

$$x' = \sin 3t + 3t\cos 3t \Rightarrow x'(\pi/3) = -\pi$$

$$y' = \cos t - t\sin t \Rightarrow y'(\pi/3) = 1/2 - \sqrt{3}\pi/6$$

$$\mathrm{d}F = \cos x \sin y \mathrm{d}x + \sin x \cos y \mathrm{d}y$$

em $t = \pi/3$,

$$\mathrm{d}F = 1 \times \frac{1}{2}(-\pi \mathrm{d}t) + 0\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t$$

7. $\boxed{10}$ **(Bônus)** Considere uma função f diferenciável em (a,b), e alguma curva diferenciável $\vec{r}$ sobre o gráfico desta função que passa em $(a,b,f(a,b))$ ($\vec{r}$ é de três dimensões). Mostre que a reta tangente à curva em $(a,b,f(a,b))$ pertence ao plano tangente ao gráfico de f em (a,b).

Solution: Seja $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), f(x(t),y(t))\rangle$ com $\vec{r}(0) = \langle a, b, f(a,b)\rangle$, isto é, $x(0) = a$ e $y(0) = b$. Daí,

$$\vec{r}\,'(t) = \langle x'(t), y'(t), f_x x'(t) + f_y y'(t)\rangle\,.$$

No ponto $t = 0$, temos $\vec{r}\,'(0) = \langle x'(0), y'(0), f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0)\rangle$. Por outro lado, o plano tangente nesse ponto tem normal $\vec{n} = \langle f_x(a,b), f_y(a,b), -1\rangle$. Logo,

$$\vec{r}\,'(0)\cdot\vec{n} = x' f_x + y' f_y - (x' f_x + y' f_y) = 0,$$

de modo que o vetor $\vec{r}\,'(0)$ está contido nesse plano. Como a reta tangente à curva tem vetor diretor $\vec{r}\,'(0)$ e passa no ponto $(a,b,f(a,b))$, então toda a reta tangente está contida no plano tangente.