Integração Numérica

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Ideia: usar p, poli. interpolador. Por exemplo, se L_i é o i-ésimo poli. interpolador de Lagrange, então

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

daí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

Vamos ainda considerar que os pontos são igualmente espaçados neste caso, e separar em dois casos:

Fechado: $x_0=a$, $x_n=b$, $h=\frac{b-a}{n}$.

Aberto: $x_0=a+h$, $x_n=b-h$, $h=\frac{b-a}{n+2}$

Números de Pontos:

Fechadas

- Trapézio: 2, grau 1, $h=b-a$
- Simpson: 3, grau 2, $h=\frac{b-a}{2}$
- 4, grau 3, $h=\frac{b-a}{3}$

Abertas

- Ponto Médio: 1, grau 0, $h=\frac{b-a}{2}$
- 2, grau 1, $h=\frac{b-a}{3}$
- 3, grau 2, $h=\frac{b-a}{4}$

Trapézio, $[a,b]=[x_0,x_1]$, $h=b-a$

$$p(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$\int_a^b f(x) \approx \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx = \frac{f(x_1)}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx - \frac{f(x_0)}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)dx$$

$$= \frac{f(x_1)}{h}\int_0^h t\,dt + \frac{f(x_0)}{h}\int_0^h t\,dt \quad (x=x_0+t,\ x=x_1-t)$$

$$= \frac{f(x_1)}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{f(x_0)}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

Mas lembre-se

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

logo, o erro da aprox. de Trapézio é

$$E_T = \int_{x_0}^{x_1}\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$\overset{TVM}{=} \frac{f''(\xi)}{2}\int_0^h t(t-h)dt = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{t^2}{2}(-h)+\frac{t^3}{3}\right]_0^h = -\frac{f''(\xi)\,h^3}{12}$$

TVM p. Integrais. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e g é integrável e não muda o sinal, então $\exists\, c\in(a,b)$ t.q.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Resumindo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{f''(\xi)}{12}h^3.$$

Regra de Simpson $h=\frac{b-a}{2}$

Interpolação em $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$, com $x_2-x_1=x_1-x_0=h$.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{2h^2},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)}{h^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2h^2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{2} y_i\int_{x_0}^{x_0+2h} L_i(x)dx$$

$$= \frac{y_0}{2h^2}\int_0^{2h}(t-h)(t-2h)dt - \frac{y_1}{h^2}\int_0^{2h}t(t-2h)dt + \frac{y_2}{2h^2}\int_0^{2h}t(t-h)dt$$

$$= \frac{y_0}{2h^2}\left[\frac{(2h)^3}{3} - 3h\frac{(2h)^2}{2} + 2h^2\cdot 2h\right] - \frac{y_1}{h^2}\left[\frac{(2h)^3}{3} - 2h\frac{(2h)^2}{2}\right] + \frac{y_2}{2h^2}\left[\frac{(2h)^3}{3} - h\frac{(2h)^2}{2}\right]$$

$$= h\left[y_0\left(\frac{4}{3}-3+2\right) - y_1\left(\frac{8}{3}-4\right) + y_2\left(\frac{4}{3}-1\right)\right]$$

$$= h\left(\frac{y_0}{3}+\frac{4y_1}{3}+\frac{y_2}{3}\right) = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

Erro

$$E_S = \int_{x_0}^{x_2}\frac{f'''(\xi(x))}{6}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{\not\geq 0}dx$$

Não conseguimos aplicar o TVM mas podemos mostrar que

$$|E_S| = O(f'''(\xi)\cdot h^4).$$

De outra maneira:

$$f(x_0)+f(x_2) = f(x_1-h)+f(x_1+h) = 2f(x_1) + h^2f''(x_1) + \frac{h^4}{24}\left[f^{(iv)}(\xi_1)+f^{(iv)}(\xi_2)\right].$$

logo

$$I_S = \frac{h}{3}\left[6f(x_1) + h^2f''(x_1) + \frac{h^4}{24}\left(f^{(iv)}(\xi_1)+f^{(iv)}(\xi_2)\right)\right]$$

e

$$f(x) = f(x_1) + (x-x_1)f'(x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(iv)}(\xi)}{24}(x-x_1)^4$$

logo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{-h}^{h} f(x_1+t)dt = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{1}{24}\int_{-h}^{h} f^{(iv)}(\xi)t^4dt$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(iv)}(\xi)}{12}\frac{h^5}{5}$$

Pelo TVI, podemos concluir que existe μ e temos

$$E_S = h^5 f^{(iv)}(\mu)\left[\frac{1}{60}-\frac{1}{36}\right] = -\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\mu).$$

Seja $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $w_1,\dots,w_n\geq 0$ não todos nulos. Então, existe $c\in[a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\sum w_i f(x_i)}{\sum w_i}.$$

Dem.: Usar TVI, pois o lado direito estará entre min $f(x_i)$ e max $f(x_i)$.

Ponto-Médio: $h=\frac{b-a}{2}$

$$p(x) = f(x_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x_1)dx = 2hf(x_1) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

$f(x)-p(x) = f'(\xi)(x-x_1)$, logo não vale o TVM.

$$E_{PM} = \int_{x_0}^{x_2}\left[f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)^2\right]dx - 2hf(x_1) = \int_{-h}^{h}\frac{f''(\xi(x))}{2}t^2dt = \frac{f''(\xi)}{3}h^3$$

Resumo

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{f''(\xi)}{3}h^3 \quad \text{Ponto Médio},\ h=\frac{b-a}{2}$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi) \quad \text{Trapézio},\ h=b-a$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi) \quad \text{Simpson},\ h=\frac{b-a}{2}$$

Def. A ordem da fórmula é o grau do maior poli. integrado exatamente. Ou seja, o grau do erro menos 1.

n	Ordem F	Ordem A
0		1
1	1	1
2	3	3
3	3	
4	5	

Integração composta

Vamos repetir as fórmulas

Ex: Usando a tabela, integre e^x no intervalo [0,1] com TR, PM e S.

x	0	0.25	0.5	0.75	1.0
e^x	1.000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Trapézio

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^{0.5} e^x dx + \int_{0.5}^1 e^x dx \approx \frac{0.5}{2}\left[e^0 + 2e^{0.5} + e^1\right] = 1.7539$$

$E = |1.7183 - 1.7539| = 0.0356$

Simpson

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{0.5}{3}\left[e^0 + 4e^{0.5} + e^1\right] = 1.7189$$

Ponto Médio

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^{0.5} e^x dx + \int_{0.5}^1 e^x dx \approx 2(0.25)\left[e^{0.25}+e^{0.75}\right] = 0.5\cdot 3.4010 = 1.7005$$

Imediatamente chegamos às fórmulas de integração no intervalo [a,b] particionado com n+1 pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ igualmente espaçados:

TR:
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Usando TVI, teremos

$$E_{TR} = \sum_{i=1}^{n} E_{T_i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{h^3}{12}f''(\xi_i) = \frac{-h^3 n}{12}f''(\mu) = \frac{-h^2(b-a)}{12}f''(\mu)$$

Simpson R. (n deve ser par)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0,2,\dots}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \sum_{i=0,2,\dots}^{n-2}\frac{h}{3}[f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1}f(x_i)+2\sum_{i=2,4,\dots}^{n-2}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Erro:

$$E_{SR} = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=0,2}^{n-2}f^{(iv)}(\xi_i) = \frac{-h^5 n}{180}f^{(iv)}(\mu).$$

$$= \frac{-h^4(b-a)}{180}f^{(iv)}(\mu)$$

Ponto-Médio R. (n par)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0,2,\dots}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \sum_{i=0,2,\dots}^{n-2} 2hf(x_{i+1}) = 2h\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1}f(x_i)$$

Erro:

$$E_{PMR} = \frac{h^3}{3}\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1}f''(\xi_i) = \frac{h^3 n}{6}f''(\mu) = \frac{h^2(b-a)}{6}f''(\mu).$$

Ex.: Para $\int_0^1 e^x dx$ com $h=0.25$, obtivemos

$I_{TR} = 1.7272$, $E_{TR} = 0.0089$

$I_{SR} = 1.7183$, $E_{SR} = 0$

$I_{PMR} = 1.7005$, $E_{PMR} = 0.0178$

As fórmulas:

$$E_{TR} = \frac{-h^2(b-a)}{12}f''(\mu) = -0.0052e^{\mu} \quad \mu\approx 0.5$$

$$E_{SR} = \frac{-h^4(b-a)}{180}f^{(iv)}(\mu) = -0.0000217\times e^{\mu}$$

$$E_{PMR} = \frac{h^2(b-a)}{6}f''(\mu) = 0.01042e^{\mu} \quad \mu\approx 0.5$$