Fractais dos Conjuntos Julia

Luana Cristina Baier

.

1 Introdução

O termo fractal aparece quando,Benoit Mandelbrot utiliza pela primeira vez em 1975.Durante seus estudos ele descobriu a necessidade de nomear a geometria que se assemelha a natureza. Olhando para o dicionário em latim,pode-se encontra o adjetivo fractus que vem do verbo frangere, que significa quebrar, assim criada a palavra Fractal.

As principais propriedades que caracteristizam os fractais é auto-semelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão .Auto-semelhança é vista quando, uma porção da figura ou de contorno, é identica a a original só que em uma escala menor.A complixade infinita é que ao executar um processo de geração da figura, pode se fazer um sub-procedimento na mesma, e assim infintamente gerar com o mesmo procedimento a mesma imagem.E por fim a dimensão do fractal é uma quantidade fracionária, que representa o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.O Conjunto de Julia é uma geometria fractal e que vai ser brevemente abordada neste trabalho.

2 Conjuntos de Julia

Os conjuntos de julia surgiram após vários estudos acerca de processos interativos envolvendo números complexos. Estes estudos foram apresentados no ano de 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou sem o recurso do computador que hoje é de grande ajuda para produzir detalhadamente o comportamento dos conjuntos. Seja $F_{k+1} = F_k^2 - c$ uma função em que c é um ponto fixo no plano complexo. Para cada ponto Z_0 geramos uma função complexo, tendo assim uma sequência números complexos(órbita de Z_0).

$$Z_O \Longrightarrow Z_1 = Z_0^2 - c \Longrightarrow Z_2 = Z_1^2 - c \Longrightarrow \dots$$

Se a órbita de Z_0 é atraida para o infinito, então Z_0 não pertence a nenhum conjunto de júlia. Se a órbita de Z_0 é atraida para um círculo em entorno da origem, então Z_0 pertence a algum conjunto de Julia. As duas situações para as orbitas de Z_0 complementam-se e preenchem alguma parte do plano complexo e com os dois conseguimos gerar o conjunto de Julia associado ao parâmento c. O valor do ponto c determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo asssociado com um conjunto de Julia em particular.Podemos ver alguns exemplos na figura 1,em que por exemplo, para $c = 0$ obtemos o círculo unitário.Se c pertence ao conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia obtido será conexo. Se pelo contrário, o ponto c não pertecer ao conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia correspondente é desconexo .

3 Conjuntos de Julia na linguagem da programação

Essa seção tem como objetivo explicar como programar os Conjuntos de Julia utilizando a linguagem da programação no programa Julia. Como explicado na seção anterior,os conjuntos de Julia são gerados com sequências da função $F_{k+1} = F_k^2 - c$ e as órbitas de um ponto Z_0 convergindo ou divergindo, fixidos a um ponto c.

Agora que já temos a ideia matemática precisamos passa-la para a linguagem da programação e primeira coisa que devemos notar é que como c é um número complexo fixo(que nesse trabalho foi utilizado c=-1,1 +0,125i),então precisamos deixar eles bem definidos para o programa.

Agora precisamos criar os Z_0 da nossa seguência então:

Para i de 1 até m temos

$X_0 = -2 + 4(i/m)$

Para j de 1 até m temos

$Y_0 = 2 + 4(i/m)$

Onde $X = X_0$ e $Y = Y_0$

X e Y são as cordenadas dos nossos pontos Z_0

O próximo passo é gerar a função que usará os nossos pontos Z_0 para fazer a sequência. Essa função precisa ser limitada as interações na função para que o programa tenha uma noção de quando se deve parar e ir para outro ponto.

As interações vão de 1 até 20 com as funções que gerão os pontos X e Y:

$X_1 = X^2 - y^2 + C_1$ e

$Y_1 = 2XY + C_2$ onde $X = X_1$ e $Y = Y - 1$

Se $X^2 + Y^2 > 2$ a orbita do ponto diverge. Neste momento o progama pode parar e ir para o próximo ponto.

Se $X^2 + Y^2 <= 2$ a orbita não irá divergir, assim criando o outro conjunto,que unido ao caso dos pontos que vão para o infinito, resultaram em particular um conjunto de julia.

4 Conclusão

Este trabalho foi uma possibilidade de conhecer e experimentar um pouco da programação na matemática. O Latex e o programa Julia foram ferramentas de grande ajuda no desenvolvimento desse projeto, já que proporcionariam certa facilidade para manipular a linguagem matemática com a linguagem de programação.

Os conjuntos de Julia, que foi o conteúdo matemático escolhido para utilizarmos as ferramentas de programação, trouxe um pouco de conhecimento e beleza, pois era um assunto matemático totalmente novo e que utiliza de resultados gráficos carregados de grandes detalhes.

Referências

[1] Adilson J.Miranda *Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot* url:https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/97

[2] Raquel S. R. Nunes *Geometria Fractal e Aplicações* url:http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf

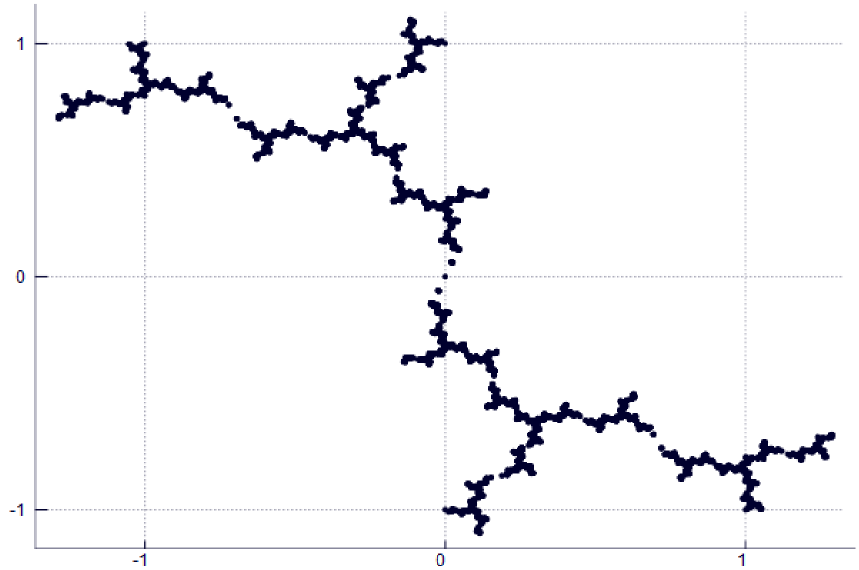

Figura 1: Exemplo de um conjunto de Julia com $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$

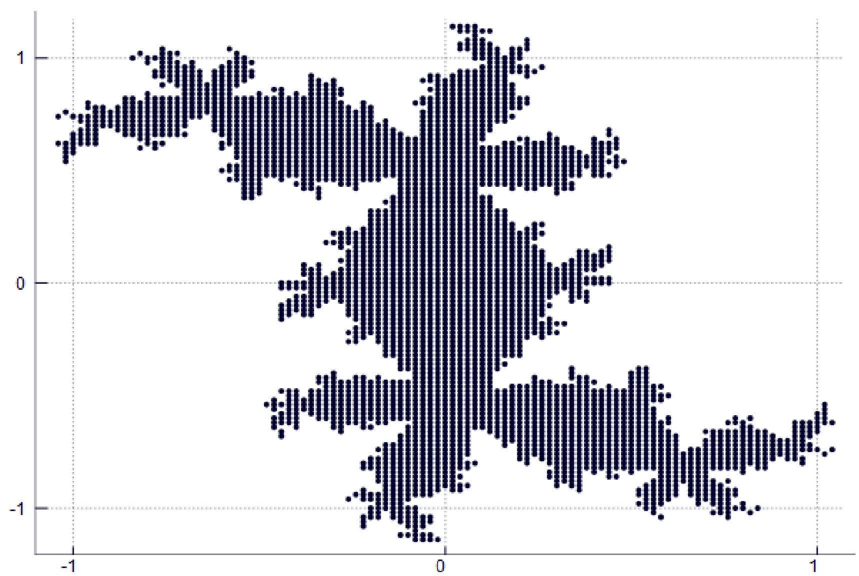

Figura 2: Exemplo de um conjunto de Julia com $C_1 = 0.285$ e $C_2 = 0.535$