Número de Euler

Afonso Ferronato Neto

18 de Dezembro de 2016

1 Número de Euler

O número de Euler, também conhecido por número de Naiper, a primeira referência à esa constante foi publicada em 1618 ntabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por JakobBernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

Que vale aproximadamente: 2,718 281 828 459 045 235 360 287.

Também pode ser representada por:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \tag{2}$$

2 Cálculo do Número de Euler

2.1 Demonstração da irracionalidade do número de Euler

É necessário provarmos a irracionalidade do número de Euler pois, sem essa prova não poderiamos usar de aproximações para o número e, pois ele poderia ser um número Real.

Esta é uma prova por contradição. Inicialmente, assume-se que e é um número racional, ou seja, que pode ser escrito na forma:

$$e = a/b$$

$$x = b!(e - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!})$$

Aqui x, é obrigatoriamente um número inteiro pois pode ser escrito como:

$$x = b!(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}$$

Agora, usamos a representação em séries dada por (2):

$$x = b!(\sum_{n=0}^{\infty} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}) = a(b-1)! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Desta forma fica claro que $x > 0$. Se pudermos provar que $x < 1$, o resultado está terminado, pois a contradição terá sido obtida, uma vez que não existe número inteiro maior que zero e menor que um.

Prova-se agora que $x < 1$, observando que para cada termo $n > b$, vale a estimativa:

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+(n-b))} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$$

Introduz-se a mudança de variável $k = n - b$ e usa-se soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b} < 1$$

E o resultado segue, pois como é fácil ver $2 < e < 3$, o que implica que e, não é um número inteiro e, portanto, $b > 1$.

2.2 Formulas utlizadas no trabalho

Como dito anteriormente, o número de Euler surgiu na tentativa de encantrar um valor para a expressão:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Para calcular esse limite foi feito algo muito simples, apenas foi montada a equação no Julia e ao aplicarmos o valor 2^{62} conseguimos uma aproximação muito infeliz do número de Euler, apenas acertando nas 19 primeiras casas do número, mas realizando o cálculo em 0,011 segundos.

$$e = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{3}$$

Para calcular esse limite também foi feito de forma muito simples, apenas aplicamos o valor $1/2^{62}$ e como de se esperar obtemos exatamente os mesmos resultados.

$$e = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} \tag{4}$$

Para calcular esse somatório primeiramente foi necessário criar a função $fatorial(x)$ e depois foi criado o código para fazer o somatório, que resumidamente calcula $1/k!$ para todos os números variando de 1 a x, onde no somatório $x = \infty$, mas isso levaria um tempo indeterminado para calcular, por isso foi colocado um limite maximo para o somatório, que como tende ao infinito nunca terminaria seus cálculos, por isso limitamos esse somatório para somar até o número 2^{10}, onde conseguimos alcançar 2641 casas decimais corretas em 0,765 segundos.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Para calcular esse somatório utlizamos da função $fatorial(x)$ e o código para o somatório, que resumidamente calcula $1/k!$ para todos os números variando de 1 a x, onde no somatório $x = \infty$, mas isso levaria um tempo indeterminado para calcular, por isso nesse somatório limitamos para 2^{13} e ao calcular $x = 2^{13}$ acertamos nos 19727 primeiros dígitos, calculando isso em 84,553 segundos.

3 Programação do Cálculo do n-ésimo dígito de Euler após a virgula

O Programa tem uma base muito simples mas pouca efetiva devido a potencia de 10 estourar rapidademnte o limite da Julia. O Programa pega $q = euler1(2^{10}) - 2$, onde obtemos apenas os números decimais, depois disso multiplicamos q por 10^{x-1} e obtemos w onde vamos utilizar esse valor numa função cujo o trabalho é apenas eliminar as casas decimais que chamaremos de r. Após isso fazemos a seguinte conta $(w * 10) - (r * 10)$ onde obtemos o valor da do dígito desejado. Mas por limitações de potências de 10 o programa só funciona para valores entre 1 e 19. Com uma aprimoração no código e modificarmos para temos uma leitura dos bits do valor basta checarmos os 4 primeiros valores de bits, onde podemos apenas representar o número dessa sequencia e o valor formado por eles será o da casa decimal requisitada.

4 Conclusão

A utilização de somatórios foi muito efetiva para calcular o número de Euler, que apesar de demorar um tempo considerável para conseguir uma precisão de quase 20000 casas decimais, pode ter seu código aprimorado para trabalhos futuros.

Para o cálculo do n-ésimo digito do número de e infelizmente não alcancei resultados satisfatórios para o modo que o programa foi escrito, pois facilmente o programa estoura o limite do maior número do Julia. Que impede a utilização do programa para digitos muito altos.