UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THAIZA RAFAELE DOS SANTOS RIEVRS

PROBLEMA DE ESTOQUE E ROTEIRIZAÇÃO COM TRANSBORDO

CURITIBA

2018

THAIZA RAFAELE DOS SANTOS RIEVRS

PROBLEMA DE ESTOQUE E ROTEIRIZAÇÃO COM TRANSBORDO

Monografia apresentada à coordenação do curso de Matemática Industrial, da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos para obter aprovação na disciplina de projeto de Matemática Industrial.

Orientador: Prof. Dr. Abel Soares Siqueira

CURITIBA
2018

Resumo

O problema de estoque e roteirização é um problema onde o fornecedor gerencia os estoques dos seus clientes. Pode ser descrito como a combinação do problema da roteirização da frota de veículos e do gerenciamento de estoque, em que um fornecedor tem que entregar produtos a um determinado número de clientes, geograficamente dispersos, sujeito a algumas restrições. O problema fornece soluções logísticas, otimizando simultaneamente o gerenciamento de estoques, a roteirização da frota de veículos e o agendamento de entregas. Esse problema tem como objetivo minimizar o custo total de armazenagem e transporte, com o intuito de reduzir este custo por meio de transbordos entre os clientes.

Palavras-chave: Problema de estoque e roteirização, transbordo, estoque gerenciado pelo fornecedor, pesquisa operacional, modelagem matemática.

Abstract

The inventory-routing problem is a problem where the supplier manages the inventory of its customers, and can be described as the combination of the vehicle fleet routing and inventory management problem in which a supplier has to deliver products to a number of customers, geographically dispersed, subject to some restrictions. The problem provides logistical solutions while optimizing inventory management, vehicle routing and scheduling of deliveries. This problem aims to minimize the total cost of inventory and transportation, and in order to further reduce this cost transhipment between customers also implemented.

Keywords: Inventory-routing problem, transhipment, supplier managed inventory, operations research, mathematical modelling.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O mercado global tem buscado cada vez mais otimizar seus processos, buscando aumentar o nível de serviço, diminuir o desperdício de tempo e/ou matéria prima e controlar os gastos. Para isso, as empresas investem no gerenciamento de suas cadeias de suprimento *(supply chain)*, que concentram diferentes funções, por exemplo, o controle de estoque e distribuição de seus produtos para seus clientes ou centros de distribuição, utilizando conceitos que minimizam os custos totais da empresa. Um desses conceitos utilizados por empresas é o *Vendor Managed Inventory* (VMI) que desenvolve metodologias para a solução do Problema de Estoque e Roteização.

O Problema de Estoque e Roteização vem do inglês *Inventory Routing Problem* (IRP) e consiste nas decisões de gerenciamento de estoque, ou seja, quando reabastecer cada cliente, qual será o roteiro de abastecimento e quanto entregar a cada cliente quando ele é reabastecido, com o objetivo de minimizar os custos de estoque e transporte, de forma a evitar que ocorra falta dos produtos para os clientes.

Com o intuito de reduzir o custo total das empresas foi implementado os transbordos entre os clientes. Assim, foi aplicado o Problema de Estoque e Roteização com Transbordo do inglês *Inventory Routing Problem with Transshipment* (IRPT) que também utiliza o conceito VMI para solucionar esse problema.

1 PROBLEMA DE ESTOQUE E ROTEIRIZAÇÃO

O Problema de Estoque e Roteirização ou *Inventory Routing Problem* (IRP) consiste nas decisões de gerenciamento de estoque, roteirização de veículos e programação de entrega feitas pelo fornecedor para os seus clientes. O *Vendor Managed Inventory* (VMI) é uma das técnicas propostas pelo Movimento *Efficient Consumer Response* (ECR) ou Resposta Eficiente ao Consumidor e desenvolve metodologias para solução deste problema com base em políticas específicas de estoque e da cadeia de suprimentos. Essa técnica beneficia ambos os lados, uma vez que o fornecedor reduz os custos totais de estoque e transporte e os clientes aumentam o nível de serviço e investem menos recursos no controle do nível de estoque e pedidos. As decisões que o fornecedor tem que tomar simultaneamente são:

- quando reabastecer cada cliente,
- quanto entregar a cada cliente quando ele é reabastecido,
- qual o roteiro de abastecimento,

com o objetivo de minimizar os custos de estoque e transporte, de modo que as demandas de todos os clientes sejam atendidas.

Aqui utilizamos a referência Coelho et al. (2014) para uma visão geral do problema de estoque e roteirização.

1.1 CRITÉRIOS DO PROBLEMA

Muitas versões do IRP foram descritas ao longo dos anos desde Bell et al. (1983), logo não existe uma versão padrão do problema. As versões do IRP podem ser classificadas de acordo com sete critérios: horizonte de planejamento, estrutura, roteiro, políticas de estoque, decisões de estoque, tamanho e composição da frota de veículos. Cada critério tem suas opções, o horizonte de planejamento é o período de tempo que o problema toma as suas decisões e pode ser finito ou infinito. A estrutura contém a quantidade de fornecedores e clientes, portanto, podemos ter um fornecedor e um cliente, um fornecedor e vários clientes ou vários fornecedores e vários clientes. O roteiro é a quantidade de clientes por rota que determinado veículo pode visitar, logo pode ser direto quando há um cliente por rota, múltiplo quando há vários clientes na mesma rota ou contínuo quando há um depósito central como, por exemplo, em aplicações marítimas. As políticas de estoque definem regras para o reabastecimento dos clientes e para estas versões básicas as opções dessas políticas são a *Maximum level* (ML) onde o nível de reabastecimento é flexível, mas limitado pela capacidade de estoque de cada cliente, ou a *Order-up-to level* (OU) que toda vez que um cliente é visitado a quantidade a ser entregue será para preencher a capacidade de estoque deste cliente. As decisões de estoque são as decisões sobre como o estoque será gerenciado, ou seja, se vai ser permitido que tenha ou não atraso nos pedidos dos clientes e que tenha produtos sobrando em estoque. Se for permitido que os pedidos atrasem, a demanda será atendida em um período posterior, caso contrário, a demanda será atendida normalmente. Se não houver pedidos atrasados e tiver uma demanda extra, esta será considerada perda de vendas. Os dois últimos critérios são a composição e o tamanho da frota de veículos. A composição da frota é referente a capacidade de cada veículo, logo, pode ser homogênea, ou seja, todos os veículos terão a mesma capacidade, ou heterogênea, na qual os veículos terão capacidades diferentes. Já o tamanho da frota é a quantidade de veículos disponíveis pelo fornecedor e pode ser um veículo, muitos veículos ou sem restrições.

Para finalizar a classificação do problema temos que saber se a demanda dos clientes é determinística ou estocástica. Quando a demanda é determinística ela está totalmente disponível no início do horizonte de planejamento. Já quando a demanda é estocástica, pode ser representada por uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida.

1.2 MODELO MATEMÁTICO DO IRP

O modelo estudado é uma extensão do artigo de Archetti et al. (2007) proposta por outros dois artigos, Coelho and Laporte (2013) e Adulyasak et al. (2013). Este modelo é uma versão básica do IRP e para esta versão o horizonte de planejamento é finito. A estrutura do problema será com um fornecedor e vários clientes e conhecemos as demandas dos clientes no início do horizonte de planejamento, ou seja, a demanda é determinística. Na rota de cada veículo podemos ter vários clientes. A política de estoque que define a regra para reabastecer os clientes será a política *Order-up-to Level* (OU). Não será permitido atrasos nos pedidos. Teremos uma frota de veículos composta por mais de um veículo e homogênea.

O problema é definido em um grafo não direcionado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{V} = \{0, \cdots, n\}$ é o conjunto de vértices e $\mathcal{E} = \{(i,j) : i, j \in \mathcal{V}, i < j\}$ é o conjunto de arcos.

As seguintes definições serão importantes neste estudo:

- $\mathcal{V} = \{0, \cdots, n\}$ e $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \backslash \{0\}$ onde 0 representa o fornecedor e $\mathcal{V}'$ representa os clientes,
- p é o horizonte de planejamento para cada instante $t \in \mathcal{T} = \{0, \cdots, p\}$,
- $\mathcal{K} = \{1, \cdots, K\}$ representa os K veículos disponíveis.

Como convenção, usaremos os índices $i,\ j \in \mathcal{V}$, $t \in \mathcal{T}$ e $k \in \mathcal{K}$.

No início do horizonte de planejamento precisamos de dados de entrada para poder resolver o problema, esses dados são:

- custo unitário de manutenção de estoque h_i, $\forall\ i \in \mathcal{V}$,
- capacidade máxima de estoque dos clientes C_i, $\forall\ i \in \mathcal{V}'$,
- quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor por instante de tempo r^t, $\forall\ t \in \mathcal{T}$,
- nível de estoque do fornecedor e clientes no final do instante de tempo atual I_i^0, $\forall\ i \in \mathcal{V}$,
- demanda dos clientes por instante de tempo d_i^t, $\forall\ i \in \mathcal{V}'$, $\forall\ t \in \mathcal{T}$,
- capacidade de cada veículo $\mathcal{Q}_k$, $\forall\ k \in \mathcal{K}$,
- c_{ij}: custo de roteamento, onde o custo $c_{ij} = c_{ji}$, $\forall\ i,\ j \in \mathcal{V}$.

Para resolver o problema o fornecedor tem que tomar as três decisões citadas no inicio deste capítulo, para isto temos as seguintes variáveis de decisão:

- x_{ij}^{kt} é igual ao número de vezes que o arco (i, j) é usada na rota do veículo k no instante t,
  - $x_{ij}^{kt} \in \{0,\ 1\}$, $\forall\ i, j \in \mathcal{V}'$, é igual a 1 se, e somente se, o veículo k passar do cliente i para o cliente j no instante t,
  - $x_{i0}^{kt} \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $\forall\ i \in \mathcal{V}'$, onde $x_{i0}^{kt} = 2$ significa que o veículo k saiu do fornecedor e foi para o cliente i e voltou para o fornecedor, ou seja, fez uma entrega direta para o cliente i no instante t. Note que o grafo é não direcionado, então $x_{ij}^{kt} = x_{ji}^{kt}\ \forall\ i, j \in \mathcal{V}$.
- $y_i^{kt} \in \{0,\ 1\}$, $i \in \mathcal{V}$, é igual a 1 se, e somente se, o cliente i é visitado pelo veículo k no período t,

- $q_i^{kt},\ i \in \mathcal{V}$, é igual a quantidade de produto entregue para o cliente i pelo veículo k no período t.

O objetivo do problema é minimizar o custo total de estoque e transporte, atendendo à demanda de cada cliente. O problema está sujeito às seguintes restrições:

- O nível de estoque dos clientes nunca pode exceder a capacidade máxima do estoque,
- Os níveis de estoque não podem ser negativos,
- Os veículos podem fazer uma rota por período, começando e terminando no fornecedor,
- A capacidade dos veículos não pode ser excedida.

A solução do problema determina para cada período de tempo quais clientes serão atendidos e quanto foi entregue para os clientes que estão na rota de cada veículo. No problema o custo total que será minimizado é o somatório dos custos de armazenagem para o fornecedor e os clientes, mais o somatório dos custos do roteamento dos veículos:

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_i I_i^t + \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}, i<j} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{ij} x_{ij}^{kt}, \tag{1.1}$$

note que o grafo é não direcionado, então olhamos apenas para $i < j$.

Definimos a seguir todas as restrições do problema, começando com a definição do nível de estoque do fornecedor, assim, o nível de estoque do fornecedor no final do instante t é igual ao nível de estoque no final do instante anterior, mais a quantidade disponível de produtos pelo fornecedor no instante t, menos a quantidade de produtos entregue para cada cliente com cada veículo no instante t.

$$I_0^t = I_0^{t-1} + r^t - \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^{kt}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.2}$$

Definimos também o nível de estoque de cada cliente no instante t, que é dado por seu nível de estoque no instante anterior, mais a quantidade total de produtos entregue por cada veículo, menos a sua demanda.

$$I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^{kt} - d_i^t, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.3}$$

A próxima restrição impõe que o nível de estoque do fornecedor e de cada um dos clientes não pode ser negativo, em todos os instantes de tempo.

$$I_i^t \geq 0, \quad i \in \mathcal{V}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.4}$$

Esta restrição garante que para cada cliente o nível de estoque não excede a capacidade máxima do estoque no final de cada instante.

$$I_i^t \leq C_i, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.5}$$

As duas próximas restrições garantem que as quantidades de produtos entregues por cada veículo, para cada cliente, em cada instante será para preencher sua capacidade de estoque.

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} q_i^{kt} \leq C_i - I_i^{t-1}, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}, \tag{1.6}$$

$$C_i y_i^{kt} - I_i^{t-1} \leq q_i^{kt} \leq C_i y_i^{kt}, \quad i \in \mathcal{V}', \quad k \in \mathcal{K}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.7}$$

Para cada cliente, em cada instante de tempo, a restrição (1.6) garante que tudo o que foi entregue por todos os veículos será para preencher a capacidade de estoque do cliente, isto é, a diferença da capacidade máxima e o nível de estoque no instante de tempo anterior. A restrição (1.7) também relaciona as quantidades entregues a variável de decisão de roteamento, ou seja, se o cliente for visitado, i.e., $y_i^{kt} = 1$, ele vai ser atendido e vai receber uma quantidade de produtos entre o que falta para completar o estoque e a capacidade máxima do estoque, para cada veículo em cada instante de tempo.

Esta restrição garante que a capacidade de cada veículo não seja excedida. Se houver entrega, i.e., $y_0^{kt} = 1$ então para cada veículo a soma das quantidades de produtos entregues para todos os clientes tem que ser menor que a capacidade do veículo, para cada instante. Senão, $y_0^{kt} = 0$ e $q_i^{kt} = 0$.

$$\sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^{kt} \leq Q_k y_0^{kt}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.8}$$

A próxima restrição garante que uma rota viável é criada para cada cliente atendido por cada veículo, em cada instante t, portanto, se $y_i^{kt} = 1$ os somatórios de x_{ij}^{kt} garantem que é criada uma rota até o cliente i e uma rota saindo do cliente i. Senão, $y_i^{kt} = 0$, a rota não contém o cliente.

$$\sum_{j \in \mathcal{V}, i<j} x_{ij}^{kt} + \sum_{j \in \mathcal{V}, i>j} x_{ji}^{kt} = 2y_i^{kt},$$
$$i \in \mathcal{V}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.9}$$

Esta restrição impede um subciclo, se existir. Ou seja, quando uma rota é criada entre um subconjunto de clientes sem uma ligação com o fornecedor, esta restrição é adicionada ao problema e elimina esse subciclo.

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{S}, i<j} x_{ij}^{kt} \leq \sum_{i \in \mathcal{S}} y_i^{kt} - y_m^{kt},$$
$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}', \quad m \in \mathcal{S}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.10}$$

O subconjunto $\mathcal{S}$ contém os clientes de cada rota. E toda vez que encontramos uma solução, verificamos para cada rota, para cada cliente nesta rota, $m \in \mathcal{S}$, se a soma dos arcos desta rota é menor ou igual a diferença entre a soma de todos os clientes visitados nesta rota e o cliente m visitado. Caso contrário será adicionada a restrição ao problema, para cada cliente m pertencente a rota $\mathcal{S}$.

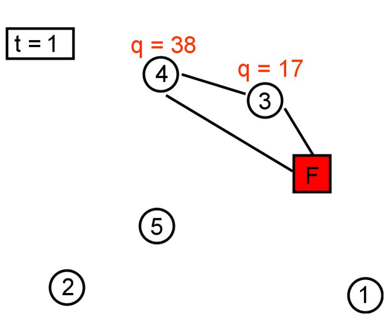
A última restrição garante a não negatividade da variável das quantidades de produtos entregues.

$$q_i^{kt} \geq 0, \quad i \in \mathcal{V}', \quad k \in \mathcal{K}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.11}$$

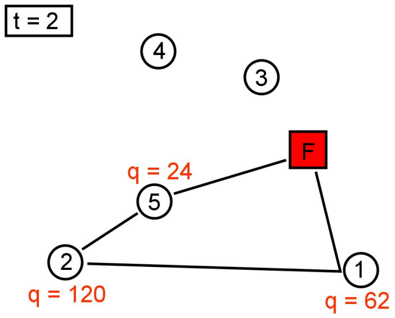
Assim, finalizamos a definição do problema e apresentamos um exemplo do IRP e a solução encontrada. O exemplo contém 5 clientes, o horizonte de planejamento $p = 3$ e 2 veículos. Os dados de entrada são:

- matriz de custo de roteamento: $c = \begin{bmatrix} 0.00 & 170.0 & 318.0 & 35.0 & 112.0 & 235.0 \\ 170.0 & 0.00 & 311.0 & 205.0 & 258.0 & 301.0 \\ 318.0 & 311.0 & 0.00 & 326.0 & 278.0 & 137.0 \\ 35.0 & 205.0 & 326.0 & 0.00 & 89.0 & 230.0 \\ 112.0 & 258.0 & 278.0 & 89.0 & 0.00 & 160.0 \\ 235.0 & 301.0 & 137.0 & 230.0 & 160.0 & 0.00 \end{bmatrix}$,
- custo unitário de manutenção de estoque: $h = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.04 & 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.03 \end{bmatrix}^T$,
- capacidade máxima de estoque dos clientes: $C = \begin{bmatrix} 93 & 180 & 51 & 114 & 24 \end{bmatrix}^T$,
- quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor: $r^t = 158$, $\forall\, t \in \{1, 2, 3\}$,
- nível de estoque no final do instante de tempo inicial: $I^0 = \begin{bmatrix} 62 & 120 & 34 & 76 & 12 \end{bmatrix}^T$,
- demanda dos clientes: $d^t = \begin{bmatrix} 31 & 60 & 17 & 38 & 12 \end{bmatrix}^T$, $\forall\, t \in \{1, 2, 3\}$,
- capacidade dos veículos $\mathcal{Q}_k = 237$, $\forall\, k \in \{1, 2\}$.

Apresentamos abaixo a solução encontrada para o problema, representada em dois grafos. O primeiro mostra a solução para o primeiro período onde os clientes 3 e 4 foram visitados por um veículo e receberam respectivamente 17 e 38 produtos. Já o segundo mostra a solução para o segundo período onde os clientes 1, 2 e 5 foram visitados por um veículo e receberam respectivamente 62, 120 e 24 produtos.



(a) Primeiro período



(b) Segundo período

Figura 1 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO DE UM IRP.

A melhor solução encontrada para este problema foi $Z = 1.176, 63$, que também foi a solução encontrada por Archetti et al. (2007). Onde Z é o valor da função objetivo (1.1).

2 PROBLEMA DE ESTOQUE E ROTEIRIZAÇÃO COM TRANSBORDO

A partir do IRP introduzimos o conceito de transbordo no roteamento de estoque, assim os produtos podem ser enviados para um cliente diretamente do fornecedor ou de outro cliente. Isso acontece, por exemplo, entre franquias de uma determinada loja que podem enviar mercadorias entre si quando ocorrem faltas no estoque. Usamos como referência o artigo de Coelho et al. (2012).

2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O IRPT é definido como se segue. O horizonte de planejamento é finito. A estrutura do problema será com um fornecedor e vários clientes e a demanda será determinística. O fornecedor tem apenas um veículo, que é capaz de fazer uma rota no início de cada período de tempo para entregar produtos para um subconjunto de clientes. Este veículo reabastece os clientes com a política de estoque *Order-up-to Level*. O transbordo pode ser feito mais tarde em cada período de tempo, que pode começar a partir do fornecedor ou de qualquer cliente em um subconjunto dos clientes, ou seja, esses clientes podem transportar produtos para outros clientes, conforme necessário. Podem ocorrer quando é mais rentável enviar produtos do fornecedor para um determinado cliente ou de cliente para cliente. Isso pode ser feito através da contratação de uma transportadora que irá retirar produtos do fornecedor ou de qualquer cliente, estas entregas serão feitas apenas por entrega direta, usando a política de estoque *Maximum Level*. Assim, é possível que tanto o veículo do fornecedor quanto o terceirizado visite o mesmo cliente no mesmo período de tempo.

O objetivo do problema é minimizar o custo total de roteamento, transbordo e estoque enquanto atende a demanda de cada cliente em cada período. O plano de reabastecimento está sujeito às seguintes restrições:

- O nível de estoque dos clientes nunca pode exceder a capacidade máxima do estoque,
- Os níveis de estoque não podem ser negativos,
- Os veículos podem fazer uma rota por período, começando e terminando no fornecedor,
- A capacidade do veículo não pode ser excedida.

A solução do problema determina para cada período de tempo quais clientes serão atendidos, quanto será entregue para os clientes que estão na rota do veículo do fornecedor e quanto será enviado por transbordo do fornecedor para um determinado cliente ou de cliente para cliente.

2.2 MODELO MATEMÁTICO DO IRPT

O problema é definido em um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{V} = \{0, \cdots, n\}$ é o conjunto de vértices e $\mathcal{A} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos.

As seguintes definições serão importantes neste estudo:

- $\mathcal{V} = \{0, \cdots, n\}$ e $\mathcal{V}' = \mathcal{V}\backslash\{0\}$ onde 0 representa o fornecedor e $\mathcal{V}'$ representa os clientes,
- p é o horizonte de planejamento para cada instante $t \in \mathcal{T} = \{0, \cdots, p\}$,
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}'$ é um subconjunto dos clientes,

como convenção, usaremos os índices $i,\ j \in \mathcal{V}$ e $t \in \mathcal{T}$.

No início do horizonte de planejamento precisamos de dados de entrada para poder resolver o problema, esses dados são:

- custo unitário de manutenção de estoque h_i, $\forall\ i \in \mathcal{V}$,
- capacidade máxima de estoque dos clientes C_i, $\forall\ i \in \mathcal{V}'$,
- quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor por instante de tempo r^t, $\forall\ t \in \mathcal{T}$,
- nível de estoque do fornecedor e clientes no final do instante de tempo atual I_i^0, $\forall\ i \in \mathcal{V}$,
- demanda dos clientes por instante de tempo d_i^t, $\forall\ i \in \mathcal{V}'$, $\forall\ t \in \mathcal{T}$,
- capacidade do veículo do fornecedor $\mathcal{Q}$,
- c_{ij}: custo de roteamento do fornecedor, onde o custo $c_{ij} = c_{ji}$, $\forall\ i,\ j \in \mathcal{V}$,
- b_{ij}: custo associado ao transbordo de produtos de i para j, onde $b_{ij} < c_{ji}$, porque é uma entrega direta $\forall\ i,\ j \in \mathcal{V}$.

Para resolver o problema o fornecedor tem que decidir para cada período de tempo quais clientes serão atendidos, quanto será entregue para os clientes que estão na rota do veículo do fornecedor e quanto será enviado por transbordo do fornecedor para um determinado cliente ou de um cliente para outro. Para isto, temos as seguintes variáveis de decisão:

- $x_{ij}^t \in \{0,\ 1\},\ i, j \in \mathcal{V},\ i \neq j$, é igual a 1 se, e somente se, o cliente j seguir imediatamente o cliente i na rota do veículo do fornecedor no instante t,
- $q_i^t,\ i \in \mathcal{V}$, é igual a quantidade de produto entregue para o cliente i pelo veículo do fornecedor no instante t,
- w_{ij}^t é a quantidade de produto entregue diretamente do $i \in \mathcal{R} \cup \{0\}$ ao cliente $j \in \mathcal{V}'$ no instante t pelo veículo terceirizado,
- v_i^t representa a soma das entregas feitas pelo veículo no instante t depois de visitar o cliente i.

Para o IRPT, o custo total que será minimizado é os somatórios dos custos de armazenagem para o fornecedor e os clientes, mais o somatório dos custos do roteamento para o veículo do fornecedor e os custos do transbordo.

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_i I_i^t + \sum_{i \in \mathcal{V}} \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{ij} x_{ij}^t + \sum_{i \in \mathcal{R} \cup \{0\}} \sum_{j \in \mathcal{V}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} b_{ij} w_{ij}^t. \tag{2.1}$$

Como é padrão no roteamento de veículos, os custos de viagem dependem da distância e não estão relacionados com a carga do veículo. No entanto, o custo do transbordo depende da distância e do volume, porque as vezes é assim que as empresas terceirizadas definem os termos de seus contratos.

Definimos a seguir todas as restrições do problema. O nível de estoque no fornecedor no final do instante t é dado pelo nível de estoque no final do instante $t-1$, mais a quantidade de produtos disponível pelo fornecedor, menos a quantidade total de produtos enviados aos clientes usando o veículo do fornecedor, menos a quantidade total de produtos transbordada para os clientes, no instante t.

$$I_0^t = I_0^{t-1} + r^t - \sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^t - \sum_{i \in \mathcal{V}'} w_{0i}^t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.2}$$

Da mesma forma, para cada cliente o nível de estoque no instante t, é dado pelo nível de estoque no instante anterior, mais a quantidade de produtos entregue pelo veículo do fornecedor, mais a quantidade total de produtos recebida por transbordo, menos a quantidade total de produtos enviada por transbordo para outros clientes, menos sua demanda, no instante t.

$$I_i^t = I_i^{t-1} + q_i^t + \sum_{i \in \mathcal{R} \cup \{0\}} w_{ji}^t - \sum_{j \in \mathcal{V}'} w_{ij}^t - d_i^t, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.3}$$

A próxima restrição impõe que o nível de estoque do fornecedor e de cada um dos clientes não pode ser negativo, em todos os instantes de tempo.

$$I_i^t \geq 0, \quad i \in \mathcal{V}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.4}$$

Esta restrição garante que para cada cliente o nível de estoque não excede a capacidade máxima do estoque no final de cada instante.

$$I_i^t \leq C_i, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.5}$$

As próximas três restrições garantem que, para cada cliente em cada instante, se $x_{ij}^t = 1$ o cliente será atendido e a quantidade entregue pelo veículo do fornecedor preencherá a capacidade de estoque. Senão, $x_{ij}^t = 0$ e $q_i^t = 0$.

$$q_i^t \geq C_i \sum_{j \in \mathcal{V}} x_{ij}^t - I_i^{t-1}, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}, \tag{2.6}$$

$$q_i^t \leq C_i - I_i^{t-1}, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}, \tag{2.7}$$

$$q_i^t \leq C_i \sum_{j \in \mathcal{V}} x_{ij}^t, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.8}$$

Para cada cliente i visitado em cada instante t, a restrição (2.8) limita a quantidade entregue à capacidade máxima de estoque do cliente, e esse limite será restringido pela restrição (2.7), impossibilitando entregar mais do que excederia essa capacidade. A restrição (2.6) modela a política de reabastecimento, garantindo que a quantidade entregue será exatamente o limite fornecido pela restrição (2.7).

Esta restrição garante que a capacidade do veículo do fornecedor não seja excedida, então para cada instante, a soma das quantidades de produtos entregues para todos os clientes tem que ser menor que a capacidade do veículo.

$$\sum_{i \in \mathcal{V}'} q_i^t \leq \mathcal{Q}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.9}$$

As restrições (2.10) até (2.13) garantem que uma rota viável é criada para visitar todos os clientes atendidos no instante t.

Esta restrição impõem que o número de arcos entrando e saindo de um vértice deve ser o mesmo, ou seja, para cada cliente, só pode ter uma rota chegando e uma saindo, de um outro cliente ou do fornecedor.

$$\sum_{j \in \mathcal{V}} x_{ij}^t = \sum_{j \in \mathcal{V}} x_{ji}^t, \quad i \in \mathcal{V}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.10}$$

Como o fornecedor tem um único veículo disponível, restringimos a soma de todos os arcos dos clientes para o fornecedor, como menor ou igual a 1.

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} x_{i0}^t \leq 1, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.11}$$

As próximas restrições impõem que pode ter apenas uma única rota passando pelos clientes.

$$v_i^t - v_j^t + \mathcal{Q}x_{ij}^t \leq \mathcal{Q} - q_j^t, \quad i, j \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}, \tag{2.12}$$

$$q_i^t \leq v_i^t \leq \mathcal{Q}, \quad i \in \mathcal{V}', \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.13}$$

Se o cliente j é visitado imediatamente depois do cliente i em uma rota no instante t, $x_{ij}^t = 1$, então $v_i^t \leq v_j^t - q_j^t$, ou seja, no instante t, a soma das entregas feitas pelo veículo depois de visitar o cliente i está limitado à soma das entregas feitas pelo veículo depois de visitar o cliente j menos a quantidade de produto entregue para o cliente j pelo veículo do fornecedor. Senão $x_{ij}^t = 0$, o cliente j não é visitado imediatamente depois do cliente i em uma rota no instante t, então $v_i^t \leq \mathcal{Q} - q_j^t + v_j^t$, i.e., no instante t, a soma das entregas feitas pelo veículo depois de visitar o cliente i está limitado à soma das entregas feitas pelo veículo depois de visitar o cliente j menos a quantidade de produto entregue para o cliente j pelo veículo do fornecedor, mais a capacidade do veículo $\mathcal{Q}$. Ou seja, a restrição (2.12) garante que terá uma sequência na entrega.

A última restrição garante a não negatividade das variáveis das quantidades de produtos entregues.

$$v_i^t, \quad q_i^t, \quad w_{ji}^t \geq 0, \quad i \in \mathcal{V}', \quad j \in \mathcal{R} \cup \{0\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{2.14}$$

A seguir apresentamos um exemplo do IRPT e a solução encontrada. O exemplo contém 10 clientes e o horizonte de planejamento é igual a 3. Os dados de entrada são:

- matriz de custo de roteamento: $b_{ij} = 0.01c_{ji}, \forall\, i,\ j \in \mathcal{V}$,

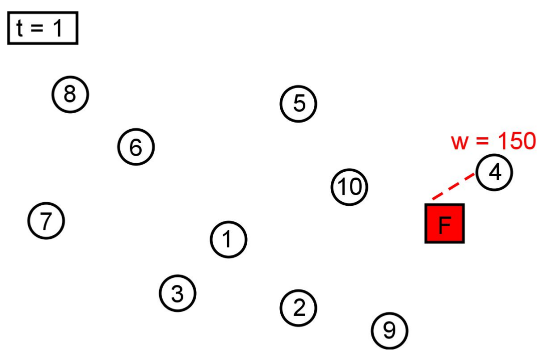
$$b = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.98 & 2.35 & 3.19 & 0.47 & 2.80 & 3.76 & 4.39 & 4.30 & 1.83 & 1.35 \\ 2.98 & 0.00 & 0.87 & 0.25 & 3.24 & 2.99 & 1.63 & 1.57 & 2.53 & 1.72 & 1.82 \\ 2.35 & 0.87 & 0.00 & 0.98 & 2.69 & 3.16 & 2.39 & 2.44 & 3.25 & 0.85 & 1.49 \\ 3.19 & 0.25 & 0.98 & 0.00 & 3.46 & 3.22 & 1.72 & 1.48 & 2.62 & 1.83 & 2.06 \\ 0.47 & 3.24 & 2.69 & 3.46 & 0.00 & 2.57 & 3.83 & 4.56 & 4.28 & 2.25 & 1.48 \\ 2.80 & 2.99 & 3.16 & 3.22 & 2.57 & 0.00 & 2.30 & 3.44 & 2.22 & 3.44 & 1.94 \\ 3.76 & 1.63 & 2.39 & 1.72 & 3.83 & 2.30 & 0.00 & 1.17 & 0.90 & 3.14 & 2.41 \\ 4.39 & 1.57 & 2.44 & 1.48 & 4.56 & 3.44 & 1.17 & 0.00 & 1.83 & 3.28 & 3.09 \\ 4.30 & 2.53 & 3.25 & 2.62 & 4.28 & 2.22 & 0.90 & 1.83 & 0.00 & 3.96 & 2.99 \\ 1.83 & 1.72 & 0.85 & 1.83 & 2.25 & 3.44 & 3.14 & 3.28 & 3.96 & 0.00 & 1.53 \\ 1.35 & 1.82 & 1.49 & 2.06 & 1.48 & 1.94 & 2.41 & 3.09 & 2.99 & 1.53 & 0.00 \end{bmatrix},$$

- custo unitário de manutenção de estoque:

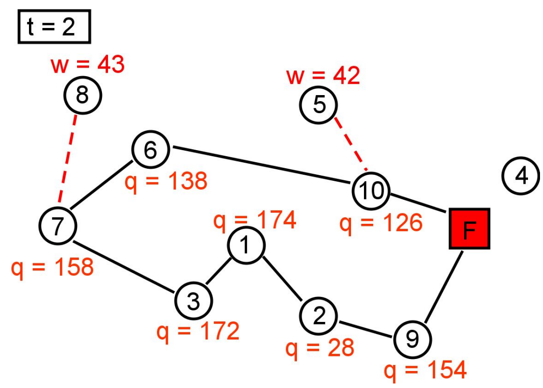
$$h = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.23 & 0.32 & 0.33 & 0.23 & 0.18 & 0.29 & 0.42 & 0.42 & 0.24 & 0.43 \end{bmatrix}^T,$$

- capacidade máxima de estoque dos clientes:
  $C = \begin{bmatrix} 87 & 14 & 86 & 75 & 42 & 69 & 79 & 43 & 77 & 63 \end{bmatrix}^T,$
- quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor:
  $r^t = 635, \forall\, t \in \{1, 2, 3\},$
- nível de estoque no final do instante de tempo inicial:
  $I^0 = \begin{bmatrix} 1583 & 87 & 14 & 172 & 75 & 84 & 69 & 158 & 86 & 77 & 126 \end{bmatrix}^T,$
- demanda dos clientes:
  $d^t = \begin{bmatrix} 87 & 14 & 86 & 75 & 42 & 69 & 79 & 43 & 77 & 63 \end{bmatrix}^T, \forall\, t \in \{1, 2, 3\},$
- capacidade do veículo $Q = 952$.

Apresentamos abaixo a solução encontrada para o problema, representada em dois grafos. O primeiro mostra a solução para o primeiro período onde o cliente 4 foi visitado por um veículo terceirizado e recebeu 150 produtos, via transbordo. Já o segundo mostra a solução para o segundo período onde os clientes $\{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10\}$ foram visitados pelo veículo do fornecedor e receberam $\{174, 28, 172, 138, 158, 154, 126\}$ produtos, depois os clientes 5 e 8 receberam via transbordo 42 e 43 produtos, dos clientes 10 e 7, respectivamente.



(a) Primeiro período



(b) Segundo período

Figura 2 – SOLUÇÃO DO EXEMPLO DE UM IRPT.

A melhor solução encontrada para este problema foi $Z = 3.562, 70$. Onde Z é o valor da função objetivo (2.1).

3 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

3.1 IMPLEMENTAÇÃO

Estes modelos foram implementados na linguagem Julia (Bezanson et al.), através do pacote JuMP (Dunning et al.) que é específico para modelagem de problemas de otimização e usamos o solver Gurobi, que foi chamado dentro dos dois algoritmos para resolver os problemas, testando com as instâncias citadas no artigo do Archetti et al.. Estas instâncias são compostas por problemas de 5 até 50 clientes para custos de manutenção de estoque baixo, estes custos foram selecionados aleatoriamente no intervalo $[0,01; 0,05]$, e problemas de 5 até 30 clientes para custos de manutenção de estoque alto, que são selecionados aleatoriamente no intervalo $[0,1; 0,5]$, com horizonte de planejamento p igual a 3 e 6. O computador utilizado para rodar os algoritmos foi um Notebook HP com processador Intel Core i5-4210U 1.70 GHz e 4 GB RAM.

Uma particularidade da implementação do modelo IRP descrito no Capítulo 1 é uma função do tipo Callback, que é a função que permite personalizar o procedimento do resolvedor, é chamada sempre que o solver encontra uma solução que satisfaça todas as restrições, permitindo a adição da restrição (1.10) ao modelo. Esta função identifica todos os componentes conexos no grafo da solução, encontra as arestas de cada subciclo $\mathcal{S}$ e adiciona, se necessário, a restrição (1.10) para eliminar este subciclo. Na próxima seção representamos os dados obtidos após executar os modelos implementados, um desses dados é o Gap, que é a diferença percentual entre a melhor solução viável e o melhor limite inferior obtido através da relaxação linear.

3.2 RESULTADOS

Representamos nas tabelas as soluções encontradas, o Gap, em porcentagem, e o tempo, em segundos, para 5 variações de cada instância. Usamos o tempo máximo de 1800 segundos por instância. Nós restringimos o tempo e também as instâncias de 5 até 20, para o horizonte de planejamento igual a 3, e 5 até 10, para o horizonte de planejamento igual a 6, por falta de tempo e poder de processamento. Em negrito estão as melhores soluções encontradas por instância.

3.2.1 RESULTADOS DO IRP

Nas tabelas abaixo, representamos os dados obtidos após executar o algoritmo do IRP.

Tabela 1 – HORIZONTE DE PLANEJAMENTO $p = 3$.

Custo de Estoque Baixo			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	1247.68	0.00	0.50
abs2n5	1176.63	0.00	0.19
abs3n5	1860.14	0.00	0.21
abs4n5	1251.34	0.00	0.20
abs5n5	**1165.40**	0.00	0.25
abs1n10	2042.52	0.00	15.16
abs2n10	2223.02	0.00	0.75
abs3n10	2099.68	0.00	1.45
abs4n10	2050.52	0.00	2.22
abs5n10	**1911.66**	0.00	0.53
abs1n15	2163.24	0.00	1.13
abs2n15	2247.80	0.00	26.63
abs3n15	2689.28	0.00	16.36
abs4n15	2129.94	0.00	4.59
abs5n15	**2123.86**	0.00	6.18
abs1n20	**2508.14**	0.00	98.26
abs2n20	2604.18	0.00	28.34
abs3n20	2702.46	0.00	8.22
abs4n20	2930.48	0.07	1800
abs5n20	3154.04	0.06	1800
Custo de Estoque Alto			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	2114.06	0.00	0.06
abs2n5	1959.05	0.00	0.14
abs3n5	3093.92	0.00	0.17
abs4n5	**1843.58**	0.00	0.16
abs5n5	2362.16	0.00	0.25
abs1n10	4861.68	0.00	7.93
abs2n10	4519.04	0.00	0.57
abs3n10	4289.84	0.00	0.93
abs4n10	**4210.20**	0.00	2.25
abs5n10	4754.92	0.00	0.71
abs1n15	5615.36	0.00	1.26
abs2n15	5565.42	0.00	27.33
abs3n15	6561.84	0.00	16.17
abs4n15	4930.26	0.00	5.67
abs5n15	**4869.58**	0.00	5.98
abs1n20	7083.82	0.00	578.15
abs2n20	7180.64	0.00	273.92
abs3n20	7535.24	0.00	15.20
abs4n20	**6846.22**	0.06	1800
abs5n20	8233.82	0.03	1800

A Tabela 1 contém os resultados para o horizonte de planejamento $p = 3$, das instâncias com 5, 10, 15 e 20 clientes. As instâncias de 20 clientes com 3 veículos, e as restantes com 2 veículos disponíveis.

Tabela 2 – HORIZONTE DE PLANEJAMENTO $p = 6$.

Custo de Estoque Baixo			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	3335.24	0.00	3.51
abs2n5	2722.33	0.00	2.54
abs3n5	4687.42	0.00	4.98
abs4n5	3246.66	0.00	3.39
abs5n5	**2419.67**	0.00	1.79
abs1n10	**4524.25**	0.12	1800.00
abs2n10	5234.10	0.00	69.89
abs3n10	4652.53	0.00	192.93
abs4n10	5104.91	0.00	1271.50
abs5n10	4663.71	0.00	19.82
Custo de Estoque Alto			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	5942.82	0.00	5.18
abs2n5	5045.91	0.00	2.08
abs3n5	6873.76	0.00	5.73
abs4n5	5163.42	0.00	3.67
abs5n5	**4581.66**	0.00	1.54
abs1n10	8897.96	0.06	1800.00
abs2n10	8562.48	0.00	60.56
abs3n10	**8509.81**	0.00	172.35
abs4n10	8792.29	0.00	1402.30
abs5n10	9620.07	0.00	26.50

A Tabela 2 contém os resultados para o horizonte de planejamento $p = 6$, das instâncias com 5 e 10 clientes, todas com 2 veículos disponíveis.

3.2.2 RESULTADOS DO IRPT

Nas próximas tabelas, representamos os dados obtidos após executar o algoritmo do IRPT. A Tabela 3 contém os resultados das instancias com 5, 10, 15 e 20 clientes e o horizonte de planejamento $p = 3$.

Tabela 3 – HORIZONTE DE PLANEJAMENTO $p = 3$.

Custo de Estoque Baixo			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	**380.50**	0.00	0.01
abs2n5	413.93	0.00	0.11
abs3n5	1441.21	0.00	0.15
abs4n5	796.02	0.00	0.06
abs5n5	563.03	0.00	0.40
abs1n10	1479.57	0.00	3.20
abs2n10	1726.51	0.00	8.80
abs3n10	**1352.47**	0.00	1.45
abs4n10	1528.82	0.00	1.34
abs5n10	1646.25	0.00	1.37
abs1n15	1774.51	0.00	8.98
abs2n15	1707.07	0.00	34.52
abs3n15	1975.17	0.00	5.04
abs4n15	1692.55	0.00	95.45
abs5n15	**1655.32**	0.00	17.63
abs1n20	1986.06	0.00	327.01
abs2n20	**1977.91**	0.00	128.55
abs3n20	2231.87	0.00	138.57
abs4n20	2377.90	0.06	1800.00
abs5n20	2461.08	0.11	1800.00
Custo de Estoque Alto			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	1027.22	0.00	0.01
abs2n5	**1001.86**	0.00	0.03
abs3n5	2338.33	0.00	0.26
abs4n5	1216.65	0.00	0.04
abs5n5	1418.33	0.00	0.25
abs1n10	3562.70	0.00	4.83
abs2n10	3422.15	0.00	6.51
abs3n10	2943.80	0.00	0.95
abs4n10	**3150.69**	0.00	1.63
abs5n10	3689.28	0.00	1.40
abs1n15	4360.54	0.00	9.11
abs2n15	4190.92	0.00	23.07
abs3n15	4805.32	0.00	4.63
abs4n15	3814.33	0.00	64.58
abs5n15	**3656.79**	0.00	20.14
abs1n20	5390.96	0.00	175.26
abs2n20	5412.66	0.00	110.40
abs3n20	5763.88	0.00	177.94
abs4n20	**5258.28**	0.02	1800.00
abs5n20	6124.40	0.03	1800.00

A Tabela 4 contém os resultados das instâncias com 5 e 10 clientes e o horizonte de planejamento $p = 6$.

Tabela 4 – HORIZONTE DE PLANEJAMENTO $p = 6$.

Custo de Estoque Baixo			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	2531.46	0.00	0.60
abs2n5	1867.76	0.00	1.10
abs3n5	3967.08	0.00	21.84
abs4n5	2473.13	0.00	1.03
abs5n5	**1791.30**	0.00	7.33
abs1n10	3900.85	0.15	1800.00
abs2n10	4240.04	0.25	1800.00
abs3n10	**3619.94**	0.10	1800.00
abs4n10	3979.82	0.12	1800.00
abs5n10	4021.37	0.05	1800.00
Custo de Estoque Alto			
Instância	Z	Gap (%)	Tempo (s)
abs1n5	4705.64	0.00	0.43
abs2n5	3863.77	0.00	0.75
abs3n5	5806.66	0.00	11.50
abs4n5	4060.28	0.00	0.74
abs5n5	**3573.43**	0.00	5.62
abs1n10	7667.86	0.09	1800.00
abs2n10	7061.28	0.15	1800.00
abs3n10	**6815.00**	0.04	1800.00
abs4n10	7099.02	0.06	1800.00
abs5n10	8129.35	0.02	1800.00

Comparando as soluções encontradas pelo IRP e o IRPT, observamos que a maioria das soluções do IRPT são realmente menores do que as soluções do IRP, mas em média, todos os valores do IRPT são menores do que os valores do IRP. Quanto mais próximos de zero os valores do Gap estiverem, menor é a diferença entre o valor da solução do problema com as restrições adicionais, relaxado, e o valor da solução do problema sem estas restrições. Em relação ao tempo de processamento, para o horizonte de planejamento igual a 3 e o custo baixo, em média, o tempo de processamento do IRPT só foi maior nas instâncias com 15 clientes. Para o custo alto, em média, o tempo de processamento do IRPT foi maior nas instâncias com 10 e 15 clientes. Para o horizonte de planejamento igual a 6 e para o custo baixo e alto, em média, o tempo de processamento do IRPT foi maior nas instâncias com 5 e 10 clientes.

3.3 EXEMPLO E GRAFO

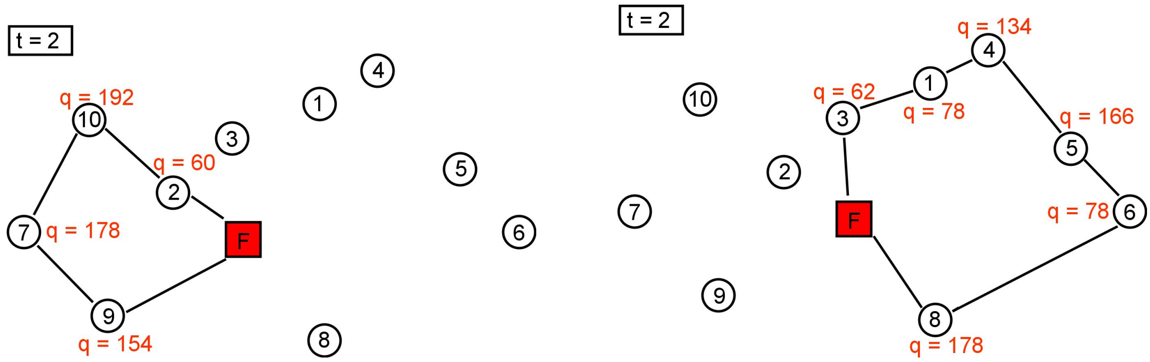
A seguir apresentamos as soluções para a instância abs5n10 pelo IRP e pelo IRPT. O exemplo contém 10 clientes, o horizonte de planejamento $p = 3$. Os dados de entrada são:

- matriz de custo de roteamento: $b_{ij} = 0.01c_{ji}, \forall\, i,\ j \in \mathcal{V}$,

$$b = \begin{bmatrix} 0.00 & 2.19 & 0.73 & 1.39 & 2.36 & 1.52 & 1.83 & 1.95 & 1.28 & 2.08 & 2.19 \\ 2.19 & 0.00 & 2.24 & 1.23 & 0.40 & 1.54 & 3.03 & 3.24 & 3.39 & 3.94 & 2.11 \\ 0.73 & 2.24 & 0.00 & 1.12 & 2.51 & 2.05 & 2.55 & 1.29 & 1.76 & 1.71 & 1.58 \\ 1.39 & 1.23 & 1.12 & 0.00 & 1.58 & 1.79 & 2.90 & 2.01 & 2.66 & 2.76 & 1.13 \\ 2.36 & 0.40 & 2.51 & 1.58 & 0.00 & 1.43 & 2.94 & 3.58 & 3.49 & 4.22 & 2.50 \\ 1.52 & 1.54 & 2.05 & 1.79 & 1.43 & 0.00 & 1.51 & 3.33 & 2.30 & 3.60 & 2.92 \\ 1.83 & 3.03 & 2.55 & 2.90 & 2.94 & 1.51 & 0.00 & 3.72 & 1.57 & 3.51 & 3.93 \\ 1.95 & 3.24 & 1.29 & 2.01 & 3.58 & 3.33 & 3.72 & 0.00 & 2.55 & 1.12 & 1.61 \\ 1.28 & 3.39 & 1.76 & 2.66 & 3.49 & 2.30 & 1.57 & 2.55 & 0.00 & 2.04 & 3.34 \\ 2.08 & 3.94 & 1.71 & 2.76 & 4.22 & 3.60 & 3.51 & 1.12 & 2.04 & 0.00 & 2.67 \\ 2.19 & 2.11 & 1.58 & 1.13 & 2.50 & 2.92 & 3.93 & 1.61 & 3.34 & 2.67 & 0.00 \end{bmatrix},$$

- custo unitário de manutenção de estoque:
$h = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & 0.04 & 0.05 & 0.04 & 0.05 & 0.02 & 0.05 & 0.05 & 0.04 & 0.02 \end{bmatrix}^T$,
- capacidade máxima de estoque dos clientes:
$C = \begin{bmatrix} 117 & 90 & 93 & 134 & 249 & 78 & 178 & 178 & 231 & 192 \end{bmatrix}^T$,
- quantidade de produto disponível no estoque do fornecedor:
$r^t = 640, \forall\, t \in \{1, 2, 3\}$,
- nível de estoque no final do instante de tempo inicial:
$I^0 = \begin{bmatrix} 1540 & 78 & 60 & 62 & 67 & 166 & 39 & 89 & 89 & 154 & 96 \end{bmatrix}^T$,
- demanda dos clientes:
$d^t = \begin{bmatrix} 39 & 30 & 31 & 67 & 83 & 39 & 89 & 89 & 77 & 96 \end{bmatrix}^T, \forall\, t \in \{1, 2, 3\}$,
- capacidade de cada veículo $\mathcal{Q} = 960$.

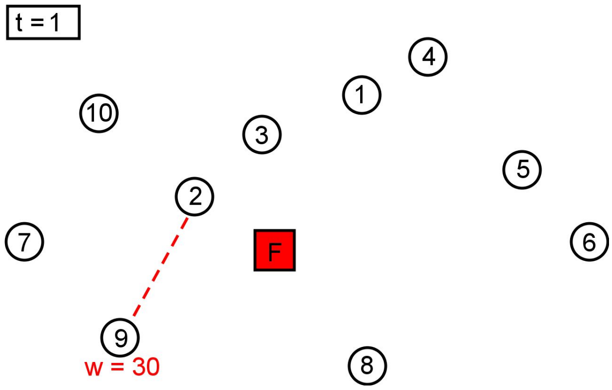
Apresentamos abaixo a solução encontrada para o problema usando o IRP, representada em dois grafos. O primeiro mostra a solução para o segundo período, onde os clientes $\{2, 7, 9, 10\}$ foram visitados pelo primeiro veículo e receberam $\{60, 178, 154, 192\}$ produtos, respectivamente. O segundo mostra a solução para o segundo período, onde os clientes $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ foram visitados pelo segundo veículo e receberam $\{78, 62, 134, 166, 78, 178\}$ produtos, respectivamente. A melhor solução encontrada para este problema via IRP foi $Z = 1.911, 66$.



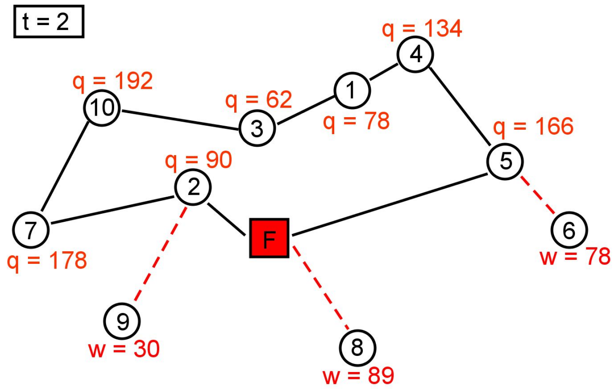
(a) Segundo período com o primeiro veículo (b) Segundo período com o segundo veículo

Figura 3 – EXEMPLO COM 10 CLIENTES (IRP).

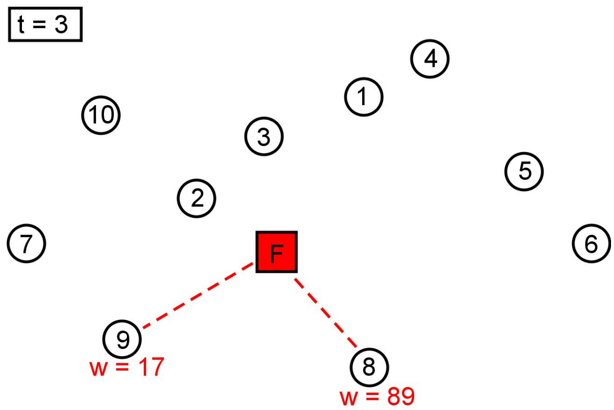
Para esta mesma instância, encontramos a solução via IRPT, apresentamos na Figura (4) esta solução, em três grafos. O primeiro mostra a solução para o primeiro período, onde o cliente 9 recebeu via transbordo 30 produtos do cliente 2. Já o segundo mostra a solução para o segundo período, onde os clientes $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$ foram visitados pelo veículo do fornecedor e receberam $\{78, 90, 62, 134, 166, 178, 192\}$ produtos, depois os clientes 6 e 9 receberam via transbordo 78 e 30 produtos, dos clientes 5 e 2, respectivamente, e o cliente 8 recebeu do fornecedor 89 produtos. O terceiro grafo mostra a solução do terceiro período onde os clientes 8 e 9 receberam via transbordo 89 e 17 produtos, do fornecedor.



(a) Primeiro período



(b) Segundo período



(c) Terceiro período

Figura 4 – EXEMPLO COM 10 CLIENTES (IRPT).

A melhor solução encontrada para este problema via IRPT foi $Z = 1.646, 25$.

Comparando as duas soluções podemos ver que a melhor solução é a que realiza transbordos. O tempo de processamento do IRPT foi maior, o que faz sentido, pois ele abasteceu os cliente em todos os instantes de tempo, já o IRP abasteceu somente no segundo período. O IRPT foi mais econômico porque ele abasteceu com o veículo dele somente sete clientes e fez 6 transbordos, quando o IRP teve que abastecer os dez e ainda usou dois veículos.

4 CONCLUSÃO

O problema de estoque e roteirização (IRP) é o problema onde o fornecedor gerencia o estoque dos seus clientes e foi apresentado por Bell et al. (1983), desde então evoluiu e é uma rica área de pesquisa. Varias versões do problema foram estudadas em suas varias classificações. Este trabalho apresenta uma classificação do IRP separada em duas partes: a estrutura do problema e o tempo em que as informações ficam disponíveis. Apresenta também o problema de estoque e roteirização com transbordo (IRPT), onde é permitido que tanto o fornecedor ou os clientes possam entregar produtos através de um veículo terceirizado. Os dois problemas têm como objetivo minimizar os custos. Implementamos os modelos matemáticos e apresentamos os resultados em tabelas. Problemas de otimização são difíceis de resolver principalmente porque exigem alto poder de processamento, portanto rodamos os algoritmos para as cinco variações de cada instância por 30 minutos. Outra dificuldade foi compreender como a restrição (1.10) funcionava e a sua implementação. Por outro lado o pacote JuMP, da linguagem Julia, facilitou a implementação dos dois modelos matemáticos. Concluímos que os algoritmos IRP e IRPT se aproximam das soluções citadas nos artigos de Archetti et al. (2007) e Coelho et al. (2012). Para trabalhos futuros poderíamos testar métodos heurísticos, que são algoritmos exploratórios que buscam resolver problemas, partindo de uma solução viável fazendo aproximações direcionadas a um ponto ótimo. Estes métodos costumam encontrar as melhores soluções possíveis.

Referências

Y. Adulyasak, J. F. Cordeau, and R. Jans. Formulations and branch-and-cut algorithms for multivehicle production and inventory routing problems. `http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.2013.0550`, 2013. INFORMS J, Comput., ePub ahead of print June 14.

C. Archetti, L. Bertazzi, G. Paletta, and M. Speranza. A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed invertory-routing problem. *Transportation Sci*, 41(3):382–391, 2007.

W. J. Bell, L. M. Dalberto, M. L. Fisher, A. J. Greenfield, R. Jaikumar, P. Kedia, R. Mack, and P. Prutzman. Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer. *Interfaces*, 13(6):4–23, 1983.

J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah. Julia: A fresh approach to numerical computing, 2017.

L. C. Coelho and G. Laporte. The exact solution of several classes of inventory-routing problems. *Comput. Oper. Res.*, 40(2):558–565, 2013.

L. C. Coelho, J. F. Cordeau, and G. Laporte. The inventory-routing problem with transshipment. *Comput. Oper. Res.*, 39(11):2537–2548, 2012.

L. C. Coelho, J. F. Cordeau, and G. Laporte. Thirty years of inventory routing. *Transportation Sci*, 40(1):1–19, 2014.

I. Dunning, J. Huchette, and M. Lubin. JuMP: A modeling language for mathematical optimization. *SIAM Review*, 59(2):295–320, 2017.