CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

28 de Novembro de 2018 - Prova 3

Gabarito

1. $\boxed{15}$ Calcule a integral tripla $\iiint_E e^{z/y} \mathrm{d}V$, onde E é a região dada por $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 1$ e $0 \le z \le xy$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{xy} e^{z/y} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_y^1 y e^{z/y}\Big|_{z=0}^{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_y^1 y(e^x - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y(e - e^y - 1 + y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}e - \left(ye^y\Big|_0^1 - e^y\Big|_0^1 \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{e}{2} - \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

2. $\boxed{20}$ Calcule $\iiint_E z\mathrm{d}V$, onde E é a região acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Solution: Pode ser resolvido de duas maneiras:

Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas $z = r$ e $r^2 + z^2 = 2$. A intersecção é $r = 1$. Então, a região é dada por $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le 1$ e $r \le z \le \sqrt{2 - r^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} zr\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \pi \int_0^1 r(2 - r^2 - r^2)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas, a limitação do cone é $\varphi = \pi/4$, logo temos $0 \le \varphi \le \pi/4$. A limitação da esfera é $\rho = \sqrt{2}$, logo temos $0 \le \rho \le \sqrt{2}$, e $0 \le \theta \le 2\pi$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\varphi\rho^2\sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta &= 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}/2} u\mathrm{d}u\frac{\sqrt{2}^4}{4} \\ &= 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. $\boxed{20}$ Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$ onde E é a região dentro da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ no primeiro octante.

Solution: Temos, trivialmente, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \varphi \le \pi/2$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\cos\theta\sin\varphi\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3e^{\rho^2}\mathrm{d}\rho \\ &= 1\times\frac{\pi}{4}\int_0^1 ue^u\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{\pi}{8}\left[ue^u\Big|_0^1 - e^u\Big|_0^1\right] = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

4. $\boxed{15}$ Resolva a equação diferencial $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+x^4}{yx^2+y^4x^2}$.

Solution: Separando:

$$(y+y^4)\mathrm{d}y = \frac{1+x^4}{x^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)\mathrm{d}x$$

Logo,

$$\frac{y^2}{2}+\frac{y^5}{5} = -\frac{1}{x}+\frac{x^3}{3}+C.$$

5. $\boxed{15}$ Resolva o problema de valor inicial $xy'\ln x + y = (\ln x)^2$, $x > e$, $y(e) = \frac{4}{3}$.

Solution: Primeiro, divimos por $x \ln x$, fazendo

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{\ln x}{x}.$$

Agora, usamos o fator integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x\right) = \exp\left(\int \frac{1}{u} \mathrm{d}u\right) = \exp\left(\ln u\right) = u = \ln x.$$

Assim, obtemos $(\mu y)' = \mu q$, i.e.,

$$(y \ln x)' = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

de modo que

$$y \ln x = \int \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x = \int u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$$

isto é,

$$y(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^2 + \frac{C}{\ln x}.$$

Pela condição $y(e) = \frac{4}{3}$, temos

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C,$$

ou seja $C = 1$. Solução:

$$y(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^2 + \frac{1}{\ln x}.$$

6. $\boxed{15}$ Resolva o problema de valor de contorno $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Solution: A equação auxiliar é $r^2 + 2r + 2 = 0$, que tem raízes $r = -1 \pm i$. Sendo assim, a solução tem a forma

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Temos

$$y'(x) = -e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

Usando as condições de contorno, temos

$$\begin{array}{rcrcr} & & y(0) = 2 & \Rightarrow & c_1 = 2 \\ y'(0) = 1 & \Rightarrow & -c_1 + c_2 = 1 & \Rightarrow & c_2 = 3 \end{array}$$

Solução

$$y(x) = e^{-x}(2 \cos x + 3 \sin x).$$