Cônicas

Lueinne Christinne Cipriano dos Santos

19 de dezembro de 2016

1 Introdução

Este trabalho terá como interesse elaborar uma forma computacional para identificar uma cônica (elipse, hipérbole, parábola). Através da equação algébrica de uma cônica, poderá se obter o tipo de cônica que se trata.

2 Tipos de Cônicas

De forma geral as cônicas são curvas geradas ou encontradas, na intersecção de um plano que atravessa um cone.

No plano, uma cônica é um conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$ que satisfazem uma expressão da forma: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$.

No plano a equação acima pode ser escrita da seguinte forma: $x^T Ax + Kx + f = 0$.

Em uma superfície afunilada, existem três tipos de cortes que podem ser obtidos por esse processo e que resulta na:

- Elipse a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, secciona o cone em apenas uma de suas folhas. Define-se elipse como:o conjunto de pontos P do plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante, ou seja, se $d(F_1, F_2) = 2c$ então a elipse é o conjunto de ponto P tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, onde $c < a$.

- Hipérbole é a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, secciona as duas folhas do cone e é perpendicular à base do mesmo.

  Define-se hipérbole como: é o conjunto de pontos P do plano tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante,ou seja, se $d(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto de pontos P tais que $|(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2c$, onde $a < c$.

- A Parábola é a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, é paralelo a uma reta geratriz do cone.

  Define-se Parábola como:conjunto de pontos P do plano equidistantes de uma reta r e de um ponto F, F não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto de pontos P tais que $d(P, F) = d(P, r)$.

3 Autovaleres e Autovetores

Defini-se Autovalores e Autovetores como: Dado um espaço vetorial V sobre o espaço $\mathbb{C}$, considera-se as transformações lineares, $T : V \to V$.

Um vetor não nulo v e dito autovetor se T se existe um número real λ tal que, $T(v) = \lambda v$

O escolar λ é denominado autovalor de T associado a v.

4 Teorema dos Autovalores

Teorema 4.1. *Seja Γ não vazio, o conjunto de pontos do plano que satisfazem a equação:*

$x^T Ax + Kx + f = 0$ *onde,* $x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

Sejam a_1 e a_2 os autovalores da matriz A, então,

- *se $a_1 a_2 > 0$ então Γ é uma elipse.*
- *se $a_1 a_2 < 0$ então Γ é uma Hipérbole.*
- *se $a_1 a_2 = 0$ então Γ é uma Parábola.*

5 Implementação computacional

Para obter sucesso na caracterização das cônicas, abaixo será apresentado um código que envolve o Teorema dos Autovalores:

```
function conica(a, b, c)
    A = [ab/2; b/2c]
    a1 = eig(A)[1][1]; a2 = eig(A)[1][2];
        println("Autovalores: ", a1, "e ", a2)
        if (a1 * a2) > 0
            println("Elipse")
        elseif (a1 * a2) < 0
            println("Hiperbole")
        else
            println("Parabola")
        end
end
```

5.1 Exemplos

A partir do codigo criado através do Teorema dos Autovalores veja abaixo alguns exemplos de expressões de cônicas.

Exemplo 5.1. *Considere a seguinte expressão* $4x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 + 17 = 0$

- *Autovalores da matriz que gera:* $a_1 = 11/2$ $a_2 = 5/2$
- *Tipo de cônica: Como* $a_1a_2 = 13,75 > 0$ *então é uma Elipse.*

Exemplo 5.2. *Considere a expressão* $5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 - 6x_1 + 9x_2 - 11/2 = 0$

- *Autovalores da matriz que gera:* $a_1 = 6$ *e* $a_2 = -4$
- *Tipo de cônica:Como* $a_1a_2 = -24 < 0$ *então é uma Hipérbole.*

Exemplo 5.3. *Considere a expressão* $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 13x_2 + 7 = 0.$

- *Autovalores da matriz que gera:* $a_1 = 2$ *e* $a_2 = 0$
- *Tipo de cônica:Como* $a_1a_2 = 0$ *então é uma Parábola.*

6 Conclusões

Levando-se em conta o que foi observado durante as aulas da disciplina e também a criação desse projeto, concluímos que a linguagem do Julia e latex, contribui para enriquecer nossa formação acadêmica quanto licenciando de Matemática.Já que ao longo do curso não temos contato com disciplinas obrigatórias que utilizem estas linguagens.

Pode se observar também que os conceitos matemáticos presentes no projeto são tratados de formas isoladas ao longo do curso,por isso foi enriquecedor trabalhar com os mesmos.

Apesar das dificuldades encontradas para se habituar as novas linguagens, concluo o projeto com satisfação.