CM042 - Cálculo II

28 de Março de 2018 - Prova 1

Gabarito

1. Calcule:

   (a) $\boxed{10}$ A curvatura de $\vec{r}(t) = \langle t\cos(\ln t), t\sin(\ln t)\rangle$, $t > 0$.

   Solution: $\vec{r}\,'(t) = \langle \cos(\ln t) - \sin(\ln t), \sin(\ln t) + \cos(\ln t)\rangle$,
   $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2}$,
   $\hat{\mathrm{T}}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle \cos(\ln t) - \sin(\ln t), \sin(\ln t) + \cos(\ln t)\rangle$,
   $\hat{\mathrm{T}}'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}t}\langle -\sin(\ln t) - \cos(\ln t), \cos(\ln t) - \sin(\ln t)\rangle$
   $\left|\hat{\mathrm{T}}'(t)\right| = \dfrac{1}{t}$,
   $\kappa(t) = \dfrac{\left|\hat{\mathrm{T}}'(t)\right|}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}t}$

   (b) $\boxed{10}$ O comprimento da curva $\vec{r}(t) = \left\langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2\right\rangle$ de $t = 0$ a $t = 2$.

   Solution: $\vec{r}(t) = \left\langle 12t, 8t^{3/2}, 3t^2\right\rangle$
   $\vec{r}\,'(t) = \left\langle 12, 12t^{1/2}, 6t\right\rangle = 6\left\langle 2, 2\sqrt{t}, t\right\rangle$
   $|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{4 + 4t + t^2} = 6\sqrt{(2+t)^2} = 6\,|2+t|$
   $S = \displaystyle\int_0^2 |\vec{r}\,'(t)|\mathrm{d}t = 6\int_0^2 |2+t|\mathrm{d}t = 6\int_0^2 (2+t)\mathrm{d}t = 36.$

2. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites

   (a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{x^2 + y^2}$

   Solution: (i) Curva $(t, 0)$: $f(t, 0) = 0$.
   (ii) Curva (t, t):

   $$\begin{aligned} f(t,t) = \frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{2t^2} &= \left(\frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{2t^2}\right)\left(\frac{\sqrt{t^2+1} + 1}{\sqrt{t^2+1} + 1}\right) \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{t^2+1} + 1)} \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   Os limites nas curvas são diferentes, logo o limite não existe.

   (b) $\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(2x+3y)}{x^2 + y^2}$

Solution: Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/5$, e seja (x, y) tal que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Daí, temos $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ e $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ e

$$\left| \frac{xy(2x + 3y)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|\,|y|\,|2x + 3y|}{x^2 + y^2} \leq 2\,|x| + 3\,|y| < 5\delta = \varepsilon.$$

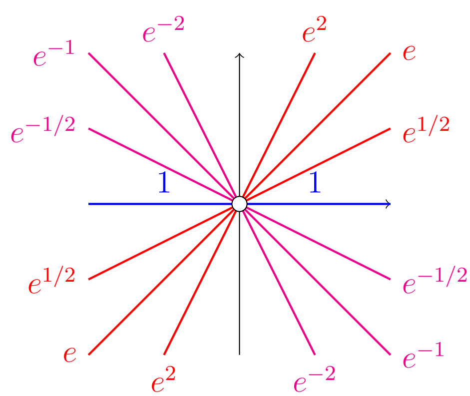
Portanto, o limite é 0.

3. $\boxed{15}$ Seja $f(x, y) = e^{y/x}$. Determine o domínio e imagem de f e esboce suas curvas de nível.

Solution: O domínio é $x \neq 0$, e a imagem é $(0, +\infty)$. Seja $k > 0$, daí

$$f(x, y) = k \quad \Rightarrow \quad e^{y/x} = k \quad \Rightarrow \quad y = x \ln k.$$

Logo, são retas com inclinação $\ln k$, passando na origem. Notem no entanto que a origem não está na curva, pois $x \neq 0$. Para $0 < k < 1$, temos inclinação negativa, para $k = 1$ temos a reta horizontal, e para $k > 1$, temos inclinação positiva.



4. $\boxed{10}$ Considere a função $u(t, x) = e^{-\varepsilon t} \cos(x - \sigma t)$. Mostre que essa função satisfaz a equação diferencial $\dfrac{\partial u}{\partial t} = A \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \dfrac{\partial u}{\partial x}$, mostrando quais os valores de A e B.

Solution: $u_t(t, x) = -\varepsilon e^{-\varepsilon t} \cos(x - \sigma t) + \sigma e^{-\varepsilon t} \sin(x - \sigma t)$

$u_x(t, x) = -e^{-\varepsilon t} \sin(x - \sigma t)$

$u_{xx}(t, x) = -e^{-\varepsilon t} \cos(x - \sigma t)$

Por comparação, $A = \varepsilon$ e $B = -\sigma$.

5. Seja $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(a) $\boxed{7}$ Calcule a aproximação linear de f no ponto $(2, 1)$, e a derivada direcional de f no ponto $(2, 1)$ na direção $\langle -1, 1 \rangle$.

Solution:
$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2y+x}{x^2+y^2}$$
Em $(2,1)$, $f(2,1) = \ln 5 + \arctan(\frac{1}{2})$, $f_x(2,1) = \frac{3}{5}$ e $f_y(2,1) = \frac{4}{5}$.
Aproximação linear:
$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) \\ &= \ln 5 + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5}(x-2) + \frac{4}{5}(y-1) \\ &= \ln 5 + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3x+4y}{5} - 2. \end{aligned}$$
Derivada direcional:
$$D_{-\vec{1},1}f(2,1) = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle \cdot \langle -1, 1 \rangle = \frac{-3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$
Alternativamente, pode-se fazer a divisão por $|\langle -1, 1\rangle|$ como alguns livros fazem.

(b) $\boxed{8}$ Utilizando a regra da cadeia, calcule a derivada de f com relação à r e θ em função de r e θ, para $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

Solution: Temos $x_r = \cos\theta$, $y_r = \sin\theta$, $x_\theta = -r\sin\theta$ e $y_\theta = r\cos\theta$. Substituindo r e θ, temos
$$f_x = \frac{2x-y}{x^2+y^2} = \frac{2\cos\theta - \sin\theta}{r}$$
e
$$f_y = \frac{2y+x}{x^2+y^2} = \frac{2\sin\theta + \cos\theta}{r}.$$
Regra da cadeia:
$$f_r = f_x x_r + f_y y_r = \frac{2\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta}{r} = \frac{2}{r}.$$
$$f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = \frac{-2r\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + r\cos^2\theta}{r} = 1.$$

6. $\boxed{10}$ Suponha que $y = y(x,z)$ é dada implicitamente por $xy^3z^5 = e^{x^2+y^2+z^2-3}$, e que $y(1,1) = 1$. Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z}(1,1)$.

Solution: A melhor maneira: aplique ln.
$$\ln x + 3\ln y + 5\ln z = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

Diferencial, colocando tudo do lado direito.

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(2y - \frac{3}{y}\right)\mathrm{d}y + \left(2z - \frac{5}{z}\right)\mathrm{d}z = 0.$$

Em $(x, z) = (1, 1)$, temos $y = 1$, e daí

$$\mathrm{d}x - \mathrm{d}y - 3\mathrm{d}z = 0,$$

logo

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x - 3\mathrm{d}z.$$

Logo, $y_x = 1$ e $y_z = -3$.

7. $\boxed{10}$ Seja f uma função diferenciável de duas variáveis e $\vec{r}$ uma curva suave no espaço, sobre o gráfico da função f. Mostre que o vetor $\vec{r}\,'$ a partir de $\vec{r}(t)$ está contido no plano tangente ao gráfico de f no ponto correspondente à $\vec{r}(t)$, para qualquer ponto da curva.

Solution: O gráfico de f é $z = f(x, y)$. A curva $\vec{r}$, estando sobre o gráfico, deve satisfazer $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), f(x(t), y(t))\rangle$. Daí,

$$\vec{r}\,'(t) = \langle x'(t), y'(t), f_x x'(t) + f_y y'(t)\rangle .$$

Por outro lado, sendo o plano tangente dado por $z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$, então a normal do plano tangente é $\vec{n} = \langle f_x, f_y, -1\rangle$. Logo,

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{n} = x'(t) f_x + y'(t) f_y - (f_x x'(t) + f_y y'(t)) = 0.$$

8. $\boxed{10}$ **Bônus:** Seja $\vec{r}$ uma curva continuamente diferenciável lisa no plano xy sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem. Supondo $\vec{r}(t) = \langle \cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))\rangle$, com θ uma função real de t, descreva as propriedades que θ deve satisfazer. Calcule a reparametrização de $\vec{r}$ com relação ao comprimento de curva, justificando por que isso é possível.

Solution: Sendo $\vec{r}$ continuamente diferenciável, dada por $\vec{r}(t) = \langle \cos\theta(t), \sin\theta(t)\rangle$, então

$$\vec{r}\,'(t) = \theta'(t) \langle -\sin\theta(t), \cos\theta(t)\rangle ,$$

implica em θ ser continuamente diferenciável.

$\vec{r}$ ser lisa quer dizer $\vec{r}\,'(t) \neq 0$, que quer dizer $\theta'(t) \neq 0$. Logo, $\theta'(t)$ é sempre positiva, ou sempre negativa, que corresponde respectivamente à θ ser sempre crescente, ou sempre decrescente.

Sem perda de generalidade, suponha θ crescente.

$$s(t) = \int_a^t \theta'(u)\mathrm{d}u = \theta(t) - \theta(a).$$

Como θ é sempre crescente, é possível inverter essa relação, obtendo uma equação para t. Daí,

$$\vec{r}(s) = \langle \cos(s + \theta(a)), \sin(s + \theta(a))\rangle .$$