CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

29 de Outubro de 2018 - Prova 2

Gabarito

1. $\boxed{15}$ Seja $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3xy^2$. Encotre e classifique todos seus pontos críticos.

Solution: Derivando e igualando a zero:

$$f_x = 3x^2 - 6y + 3y^2 = 0 \tag{1}$$
$$f_y = -6x + 6xy = 0. \tag{2}$$

Da segunda equação, temos $6x(y-1) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $y = 1$.

- Para $x = 0$, temos $-6y + 3y^2 = 0$, logo $y = 0$ ou $y = 2$.
- Para $y = 1$, temos $3x^2 - 6 + 3 = 0$, i.e., $x^2 = 1$, logo $x = \pm 1$.

Os pontos são $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Classificação. $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -6 + 6y = 6(y-1)$ e $f_{yy} = 6x$.

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x^2 - 36(y-1)^2.$$

- $(0, 0)$, $D = -36 < 0$, logo ponto de sela.
- $(0, 2)$, $D = -36 < 0$, logo ponto de sela.
- $(1, 1)$, $D = 36 > 0$ e $f_{xx} = 6 > 0$, logo minimizador.
- $(-1, 1)$, $D = 36 > 0$ e $f_{xx} = -6 < 0$, logo maximizador.

2. $\boxed{20}$ Encontre os valores extremos de $f(x, y) = x + y$ na região limitada por $y \geq 2x^2 - 1$ e $y = 1$, usando o métodos dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos sobre a parábola.

Solution: Vamos separar a região em três partes:

- Interior. Como $\nabla f(x, y) = \langle 1, 1 \rangle \neq 0$, não existem ponto críticos nessa região.

- A parábola $y = 2x^2 - 1$. Restrição $g(x, y) = 2x^2 - y = 1$. MML:

$$\begin{aligned} 1 &= 4x\lambda \\ 1 &= -\lambda \\ 2x^2 - y &= 1 \end{aligned}$$

Temos que $\lambda = -1$, daí $x = -\frac{1}{4}$ e $y = 2\frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$. Valor de função no ponto críticos: $f(-1/4, -7/8) = -9/8$.

- O segmento $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Quando $y = 1$, temos $f(x, 1) = x + 1$. Essa função não tem pontos críticos, então olhamos os extremos do intervalo: $f(-1, 1) = 0$ e $f(1, 1) = 2$.

Avaliando os três valores de função, temos que os extrema são $-9/8$ em $(-1/4, 7/8)$ e 2 em $(1, 1)$.

3. Calcule as integrais a seguir

(a) $\boxed{10}$ $\int_0^1 \int_1^2 x^2 e^{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution:

$$\int_0^1 \int_1^2 x^2 e^{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 x^2 \frac{e^{xy}}{x}\bigg|_{y=0}^{1} \mathrm{d}x = \int_1^2 x(e^x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 xe^x \mathrm{d}x - \int_1^2 x\mathrm{d}x = xe^x\bigg|_1^2 - \int_1^2 e^x \mathrm{d}x - \frac{4-1}{2}$$
$$= 2e^2 - e - e^2 + e - \frac{3}{2} = e^2 - \frac{3}{2}.$$

(b) $\boxed{10}$ $\int_1^e \int_0^{\ln y} \frac{x}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution:

$$\int_1^e \int_0^{\ln y} \frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^e \frac{x^2}{2y}\bigg|_{x=0}^{\ln y} \mathrm{d}y = \int_1^e \frac{(\ln y)^2}{2y}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \frac{u^2}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}.$$

(c) $\boxed{10}$ $\iint_D x\mathrm{d}A$ onde D é a região limitada por $y = 8x - 4x^2$ e $y = 4x^2$.

Solution: $8x - 4x^2 = 4x^2$ implica em $x = 0$ ou $x = 1$.
Podemos escrever como tipo I, $0 \leq x \leq 1$, e $4x^2 \leq y \leq 8x - 4x^2$.

$$\int_0^1 \int_{4x^2}^{8x-4x^2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x(8x - 4x^2 - 4x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 8(x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 8\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}.$$

(d) $\boxed{15}$ $\iint_D \frac{xe^y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A$ onde D é a região limitada pelas circunferências de raio 1 e 2 no primeiro quadrante.

Solution: A região é trivialmente $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\iint_D \frac{xe^y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{r\cos\theta e^{r\sin\theta}}{r} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} r\cos\theta e^{r\sin\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$
$$= \int_1^2 \int_0^r e^u \mathrm{d}u\mathrm{d}r = \int_1^2 (e^r - 1)\mathrm{d}r = e^2 - e - 1,$$

onde fizemos a substituição $u = r\sin\theta$, com $\mathrm{d}u = r\cos\theta\mathrm{d}\theta$.

4. $\boxed{15}$ Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 12 - x^2 - 2y^2$.

Solution: Intersecção: $2x^2 + y^2 = 12 - x^2 - 2y^2$, i.e., $x^2 + y^2 = 4$.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (12 - x^2 - 2y^2 - 2x^2 - y^2)\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \times 3 \times \int_0^2 (4r - r^3)\mathrm{d}r = 6\pi\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 6\pi(8-4) = 24\pi. \end{aligned}$$

5. $\boxed{15}$ Calcule a integral

$$\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}A,$$

onde D é a região no **primeiro quadrante**, **dentro** da circunferência $x^2 + y^2 = 2x$ e **fora** da circunferência $x^2 + y^2 = 2y$.

Solution: $x^2 + y^2 = 2x$ quer dizer $r = 2\cos\theta$ e é a circunferência centrada em $(1, 0)$ com raio 1.

$x^2 + y^2 = 2y$ quer dizer $r = 2\sin\theta$ e é a circunferência centrada em $(0, 1)$ com raio 1.

Visualmente, ou algebricamente, podemos ver que a intersecção das duas circunferências ocorre em $x = y$, com $x = y = 0$ e $x = y = 1$. Como estamos no primeiro quadrante, a região começa em $\theta = 0$ e acaba em $\theta = \pi/4$. O raio da região varia da curva mais interna $r = 2\sin\theta$ à mais externa $r = 2\cos\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta} r\cos\theta r r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4}\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{2^4}{4}\left[\cos^4\theta - \sin^4\theta\right]\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4}\left[\left(1 - \sin^2\theta\right)^2 - \sin^4\theta\right]\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2} [(1-u^2)^2 - u^4]\mathrm{d}u \\ &= 4\int_0^{\sqrt{2}/2} (1 - 2u^2)\mathrm{d}u = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Se você perceber que $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, sai mais fácil.