

CM106 - Otimização I

Lista de Exercícios (última atualização: 09 de Junho de 2018 às 18:42)

1. Exercícios 7.1 - 7.6 do livro da Ana Friedlander.

2. Resolva

$$\min_y \frac{1}{2} \|y\|^2 \quad \text{sujeito a} \quad A^T y = c.$$

Para deixar a solução explícita, qual a hipótese sobre a matriz A ?

3. Considere os dois problemas a seguir

$$(QM) : \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 \quad (NM) : \min_y \frac{1}{2} \|y\|^2 \quad \text{sujeito a} \quad A^T y = c,$$

onde A é uma matriz $m \times n$ com $m > n$ e A não necessariamente tem posto completo. Sejam \bar{x} e \bar{y} as soluções dos problemas acima.

(a) Escreva as condições de otimalidade que \bar{x} e \bar{y} satisfazem.

(b) Mostre que $\bar{y}^T (A\bar{x} - b) = 0$.

(c) Mostre que $\bar{y}^T b = \bar{x}^T c$.

(d) Se A tem posto coluna completo, mostre explicitamente quem são \bar{x} e \bar{y} .

(e) Mostre que se A tem posto coluna completo e b é factível para (NM), então \bar{x} é o multiplicador de Lagrange associado a \bar{y} .

4. Descreva os pontos críticos de $x^T A x$ sujeito a $x^T x = 1$, onde A é simétrica.

5. Descreva os pontos críticos de $x^T A y$ sujeito a $x^T x = 1$ e $y^T y = 1$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

6. Sejam $w \in \mathbb{R}^n$ e $b, c \in \mathbb{R}$. Calcule a distância entre os hiperplanos $w^T x = b$ e $w^T y = c$.

7. Escreva os seguintes problemas como problema de otimização com restrições lineares, e escreva as condições de otimalidade.

(a) Qual a projeção de v na imagem de A ?

(b) Qual a projeção de w no núcleo de A ?

8. Exercícios 8.1, 8.2, 8.4, 8.7 do livro da Ana Friedlander.

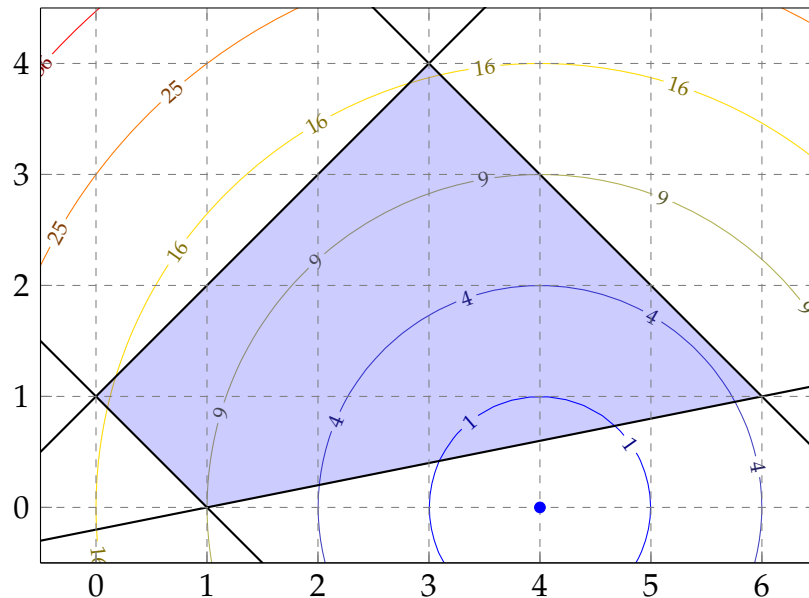
9. Exercícios 9.1, 9.2, 9.4 - 9.6, 9.8 do livro da Ana Friedlander.

Nas questões abaixo, use o seguinte método de restrições ativas para o problema $\min f(x)$ sujeito à $a_i^T x \geq b_i$, com $i = 1, \dots, m$.

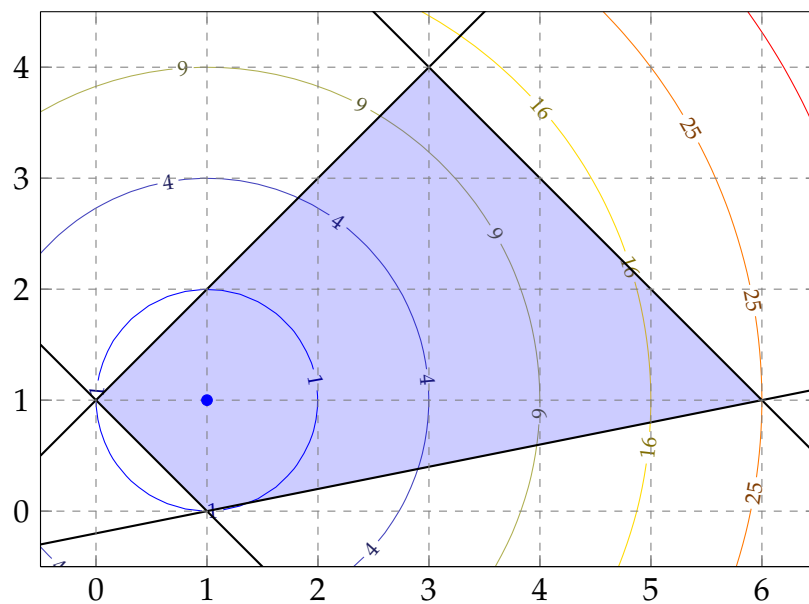
- 1: Dado x , faça $\mathcal{W} = \mathcal{A}(x)$ (restrições ativas),
- 2: Tente resolver o sistema $\nabla f(x) = \sum_{i \in \mathcal{W}} a_i \lambda_i$. Se não for possível, vá ao passo 3, se for possível vá ao passo 7.,
- 3: Calcule a projeção de $-\nabla f(x)$ sobre as restrições em \mathcal{W} .
- 4: Calcule o minimizador de $f(x + \alpha d)$, $\alpha \geq 0$ e $a_i^T(x + \alpha d) \geq b_i$.
- 5: Se $x + \alpha d$ encontrou uma ou mais restrições, então adicione essas restrições adicionais em \mathcal{W} .
- 6: Volte ao passo 2.
- 7: Se $\lambda \geq 0$, FIM
- 8: Se algum $\lambda_i < 0$, escolha **uma** restrição com $\lambda_i < 0$ e remova de \mathcal{W} .
- 9: Volte ao passo 2.

7. Exercícios 10.1 - 10.4 do livro da Ana Friedlander, mas apenas graficamente.
8. Resolva cada problema esboçado abaixo, a partir do ponto indicado. A cada opção de remoção de restrição de \mathcal{W} , faça todas as variações.

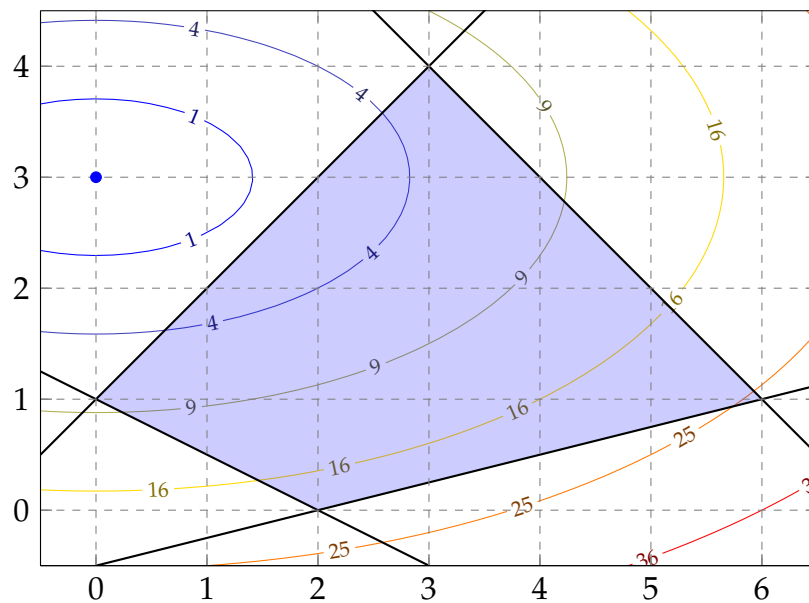
(a) A partir de $x_0 = (0, 1)$.



(b) A partir de $x_0 = (3, 4)$.



(c) A partir de $x_0 = (4, 0.5)$.



9. Exercício 11.2 do livro da Ana Friedlander.
10. Exercícios 12.1 - 12.2 do livro da Ana Friedlander.
11. Escreva as condições de otimalidade de

$$\min_{x,t} f(x) + \frac{\delta}{2} \|t\|^2 \quad \text{suj. a} \quad h(x) + \delta t = 0,$$

onde $\delta \geq 0$.

12. Exercícios 13.1 - 13.9 do livro da Ana Friedlander.
13. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeito à $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

14. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ sujeito à $x^2 + y^2 \leq 1$.
15. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = xy$ sujeito à $x^2 + y^2 \leq 1$.
16. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x + y$ sujeito à $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
17. Calcule os pontos críticos e classifique-os de $f(x, y) = x^3 + y^2$ sujeito à $2y - x^2 + 4 \geq 0$.
18. Calcule a projeção de $v \in \mathbb{R}^n$ na esfera de raio $R > 0$ centrada na origem, usando otimização.