# CM042 - Cálculo II

04 de Julho de 2018 - Final

**Gabarito**

1. $\boxed{10}$ Mostre que não existe o limite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y^2)^2}{x^2+y^4}$

**Solution:** Curva $x = t$ e $y = 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+0^2)^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Curva $x = -t^2$ e $y = t$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{(-t^2+t^2)^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

2. $\boxed{10}$ Mostre que $u(t,x) = e^{-2t}\cos(k\pi x)$ satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para algum valor de $\alpha$. Mostre o valor de $\alpha$, em função de $k$.

**Solution:**

$$u_t = -2u$$

$$u_{xx} = -(k\pi)^2 u$$

Temos

$$\alpha = \frac{2}{(k\pi)^2}.$$

3. $\boxed{20}$ Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$.

**Solution:**

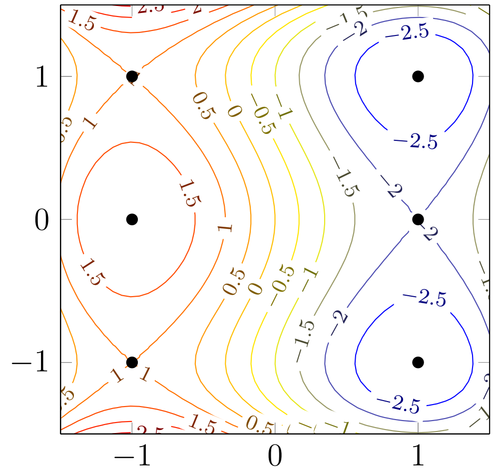
$$\left\{ \begin{array}{cl} 3x^2 - 3 & = 0 \\ 4y^3 - 4y & = 0. \end{array} \right\}$$

Daí, $x = \pm 1$ e $y = 0$ ou $y = \pm 1$.

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 12y^2 - 4$ e $f_{xy} = 0$, logo $D = 24x(3y^2 - 1)$.

- $(1,0)$, temos $D = -24 < 0$, logo ponto de sela.
- $(-1,0)$, temos $D = 24 > 0$ e $f_{xx} = -6 < 0$, logo maximizador local.
- $(1,\pm 1)$, temos $D = 48 > 0$, e $f_{xx} = 6 > 0$, logo minimizadores locais.

- $(-1, \pm 1)$, temos $D = -48 < 0$, então ponto de sela.




4. $\boxed{10}$ Calcule $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2y)\mathrm{d}A$ onde $D$ é a região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$.

**Solution:**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2 - 2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left( x^2(x - x^2) - y^2 \Big|_{x^2}^{x} \right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left( x^3 - x^4 - x^2 + x^4 \right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

5. $\boxed{10}$ Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{2xy\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{d}A$ onde $D$ é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3.

**Solution:**

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \int_1^3 \frac{2r\cos\theta r\sin\theta\cos(r^2)}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \times \int_1^3 2r\cos(r^2)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 u\mathrm{d}u \times \int_1^9 \cos v\mathrm{d}v = \frac{1}{2}(\sin 9 - \sin 1).
\end{aligned}$$

6. $\boxed{10}$ Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, onde $\vec{F} = (2x - 2y^2)\hat{\imath} - 4xy\hat{\jmath}$, onde $C$ é a reta de $(0,0)$ a $(1,1)$.

**Solution:** Pode ser feito pela definição ou pelo TFC.

Pela definição. $x = y = t$,

$$\int_C (2x - 2y^2)\mathrm{d}x - 4xy\mathrm{d}y = \int_0^1 (2t - 2t^2)\mathrm{d}t - 4t^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t - 6t^2)\mathrm{d}t = 1 - 2 = -1.$$

Pelo TFC. Vendo que $(-4xy)_x = -4y = (2x - 2y^2)_y$, sabemos existe a função potencial.

$$f(x, y) = \int (2x - 2y^2)\mathrm{d}x = x^2 - 2xy^2 + g(y).$$

Daí,

$$f_y = -4xy + g'(y) = -4xy,$$

logo $g(y) = C$, ou seja

$$f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + C.$$

Daí,

$$\int_C (2x - 2y^2)\mathrm{d}x - 4xy\mathrm{d}y = f(1, 1) - f(0, 0) = (1 - 2) = -1.$$

7. $\boxed{15}$ Calcule $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ onde $\vec{F} = x^2 z\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + xy\hat{\mathrm{k}}$, através da superfície de $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $xy$, orientada para cima.

**Solution:** Podemos fazer por integral de superfície ou usar o Teorema de Stokes.

Por integral de superfície. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \langle x, x^2 - y, 0\rangle$, e $\mathrm{d}\vec{S} = \langle 2x, 2y, 1\rangle \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Daí,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_D \left\langle x, x^2 - y, 0\right\rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1\rangle \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (2x^2 + 2x^2 y - 2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\cos^2\theta + r^4\cos^2\theta\sin\theta - r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 0,
\end{aligned}$$

calculando cada integral individualmente.

Pelo Teorema. A curva da borda é a circunferência no plano $xy$ de raio 1 e centro na origem, com sentido anti-horário em torno do eixo $z$. A parametrização é $x = \cos t$ e $y = \sin t$ e $z = 0$.

Daí,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}r = \oint_C x^2z\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z \\ = \int_0^{2\pi} 0\mathrm{d}t + \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t + 0\mathrm{d}t \\ = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

8. $\boxed{15}$ Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, onde $\vec{F} = \langle xz^2, yz^2, z^3\rangle$ através da esfera de raio 1 centrada na origem, para fora.

**Solution:** Podemos fazer pela definição de integral de superfície, ou pelo Teorema de Divergência.

Pela definição.

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_D \left\langle xz^2, yz^2, z^3\right\rangle \cdot \langle x, y, z\rangle \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D z^2(x^2+y^2+z^2)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= \iint_D \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} u^2 \mathrm{d}u = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema.

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iiint_E \vec{\nabla}\cdot \vec{F}\mathrm{d}V \\ &= \iiint_E 5z^2 \mathrm{d}V \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5\rho^2\cos^2\varphi\rho^2\sin\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$