CM042 - Cálculo II

06 de Outubro de 2017 - Prova 2

Gabarito

1. Mostre que os limites a seguir não existem.

   (a) $\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.

Solution: Curva $x = t$, $y = z = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

Curva $x = y = z = t$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{3t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Os limites são diferentes, logo o limite não existe.

   (b) $\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x-y)^2}{(x+y)^2+(x-y)^4}$.

Solution: Curva $x = y = t$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t \times 0}{t^2} = 0.$$

Curva $x = t^2 + t$ e $y = t^2 - t$. Note que $x + y = 2t^2$ e $x - y = 2t$.

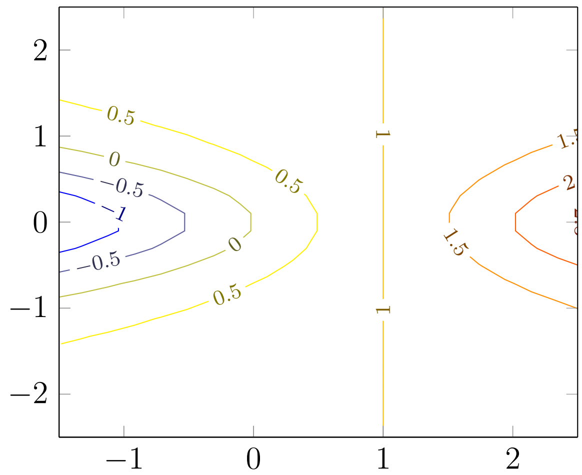
$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^2(2t)^2}{(2t^2)^2+(2t)^4} = \lim_{t\to 0} \frac{8t^4}{4t^4+16t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{8t^4}{20t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

2. $\boxed{10}$ Desenhe as curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{x+2y^2}{2y^2+1}$.

Solution: Consider $f(x,y) = k$. Veja que $k \in \mathbb{R}$, pois a imagem de f é $\mathbb{R}$. Daí, temos

$$x + 2y^2 = 2ky^2 + k \qquad \Rightarrow x = 2y^2(k-1) + k.$$

Logo, teremos uma parábola deitada, com concavidade positiva de $k > 1$, negativa se $k < 1$ e uma reta vertical se $k = 1$.



3. Seja $f(x,y) = e^{2x}y^2$.

   (a) $\boxed{8}$ Calcule a derivada direcional de f na direção $\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ no ponto $(-1,3)$.

   Solution:
   $$\nabla f(x,y) = 2e^{2x}y^2\hat{\imath} + 2e^{2x}y\hat{\jmath}.$$
   $$\nabla f(-1,3) = 18e^{-2}\hat{\imath} + 6e^{-2}\hat{\jmath}.$$
   A derivada direcional é
   $$\nabla f(-1,3)\cdot(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = 18e^{-2} - 12e^{-2} = 6e^{-2}.$$

   (b) $\boxed{8}$ Fazendo $x = 3s^2 - r^2$ e $y = \frac{3}{2}rs$, calcule o gradiente de f com relação à r e s, usando a regra da cadeia.

   Solution: Deve-se fazer
   $$\nabla_{s,r} f = \frac{\partial f}{\partial s}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\jmath},$$
   onde
   $$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2e^{2x}y^2)(6s) + (2e^{2x}y)(\frac{3}{2}r).$$
   e
   $$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2e^{2x}y^2)(-2r) + (2e^{2x}y)(\frac{3}{2}s).$$

4. Sabendo que $xy^2 + z^2x + e^z yx = 0$, $z = f(x,y)$ e $f(1,1) = 0$, faça o que se pede.

   (a) $\boxed{10}$ Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

   Solution: Sendo $F(x,y,z) = xy^2 + z^2x + e^z yx$, temos
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y^2 + z^2 + ye^z}{2xz + xye^z}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{2xy + xe^z}{2xz + xye^z}.$$

Logo, lembrando que se $z(1,1) = f(1,1) = 0$, então $f_x(1,1) = -2$ e $f_y(1,1) = -3$.

(b) $\boxed{5}$ Calcule o plano tangente à $z = f(x,y)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$.

Solution: O plano tangente é dado em $(1,1)$ é dado por

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1),$$

portanto

$$2x + 3y + z = 5.$$

5. Considere a equação diferencial $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda u$, onde λ é uma constante.

(a) $\boxed{6}$ Verifique que $u(t,x) = e^{\pi t}[(x-t)^2 - 1]$ satisfaz essa equação diferencial para alguma λ. Mostre o valor de λ.

Solution: Temos

$$u_t = \pi e^{\pi t}[(x-t)^2 - 1] - 2e^{\pi t}(x-t),$$

e

$$u_x = 2e^{\pi t}(x-t),$$

de modo que

$$u_t + u_x = \pi u.$$

Comparando com a equação, temos que $\lambda = \pi$.

(b) $\boxed{7}$ Fazendo a mudança de variável $x = \xi + \eta$ e $t = \xi - \eta$, encontre uma equação diferencial para u nas variáveis ξ e η.

Solution: A maneira mais fácil de resolver essa questão é ver que

$$u_\xi = u_x x_\xi + u_t t_\xi = u_x + u_t.$$

Logo, basta substituir, obtendo

$$u_\xi = \lambda u.$$

6. $\boxed{15}$ Encontre os pontos críticos da função $f(x,y) = (x-1)^2(y-1)y - y^2 + y - 1$ e classifique-os.

Solution: Temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} f_x &= 2(x-1)(y-1)y &= 0, \\ f_y &= (x-1)^2(2y-1) - 2y + 1 &= 0. \end{cases}$$

De $f_x = 0$, obtemos $x = 1$ ou $y = 1$ ou $y = 0$. Para cada uma dessas, resolvemos $f_y = 0$, obtendo os pontos críticos $(1, 1/2)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$. Para $(1, 1/2)$, temos

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 1 > 0,$$

e

$$f_{xx} = -1/2 < 0,$$

de modo que $(1, 1/2)$ é maximizador local. Para os outros, $D = -4 < 0$, logo são pontos de sela.

7. $\boxed{15}$ Sejam $f(x, y) = xy^2$ e $g(x, y) = 2x^2 + y^2$. Encontre os valores extremos de f no conjunto dos pontos que satisfazem $g(x, y) = 6$, utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Mostre todos os pontos críticos.

Solution: O MML diz que

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x, y) &= 6, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} y^2 &= \lambda 4x \\ 2xy &= \lambda 2y \\ 2x^2 + y^2 &= 6. \end{cases}$$

Da segunda equação tiramos $y = 0$ ou $x = \lambda$. Para $y = 0$, da última equação tiramos $x = \pm\sqrt{3}$. Para $x = \lambda$, na primeira equação temos $y^2 = 4x^2$. Daí, da última equação, $x = \pm 1$. Como $y^2 = 4x^2$, temos $y = \pm 2$ para cada opção de x, levando aos pontos críticos $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(1, \pm 2)$ e $(-1, \pm 2)$. Daí, os valores de função são 0, 4 e -4, respectivamente. Logo, $(-1, \pm 2)$ são minimizadores globais e $(1, \pm 2)$ são maximizadores globais.

8. $\boxed{10}$ Considere as retas do $\mathbb{R}^n$, $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v}$ e $\vec{R}(t) = \vec{R_0} + t\vec{w}$, com $\vec{v} \perp \vec{w}$. Encontre a distância entre essas duas retas em função de r_0, R_0, $\vec{r}$ e $\vec{w}$, usando otimização.

Solution: Buscamos um pontos $\vec{r}(t)$ e um $\vec{R}(s)$ que minimizam a distância das duas retas. Então, definimos

$$f(t, s) = d^2 = |\vec{r}(t) - \vec{R}(s)|^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_i(t) - R_i(s))^2 = \sum_{i=1}^{n} (r_{0_i} + tv_i - R_{0_i} - sw_i)^2.$$

As derivadas de f são

$$f_t(t, s) = 2\sum_{i=1}^{n} (r_{0_i} + tv_i - R_{0_i} - sw_i)v_i,$$

e

$$f_s(t, s) = 2\sum_{i=1}^{n} (r_{0_i} + tv_i - R_{0_i} - sw_i)(-w_i),$$

Note, no entanto, que essa é a definição de produto interno, isto é,

$$f_t(t,s) = 2(\vec{r}_0 + t\vec{v} - \vec{R}_0 - s\vec{w}) \cdot \vec{v} = 2[(\vec{r}_0 - \vec{R}_0) \cdot \vec{v} + t|\vec{v}|^2]$$

e

$$f_s(t,s) = -2(\vec{r}_0 + t\vec{v} - \vec{R}_0 - s\vec{w}) \cdot \vec{w} = -2[(\vec{r}_0 - \vec{R}_0) \cdot \vec{v} - s|\vec{w}|^2].$$

Fazendo $f_t(t,s) = 0 = f_s(t,s)$, e chamando $\vec{r}_0 - \vec{R}_0$ de $\vec{\gamma}$, temos

$$t = -\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2},$$

e

$$s = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}.$$

Portanto, a distância é

$$d = \left| \gamma - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} \right|.$$