CM096

12 de Junho de 2019

Nome: ______________________________

Q:	1	2	3	4	5	Total
P:	20	20	20	20	40	120
N:						

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Seja $f(x) = (x-1)^3$.

(a) $\boxed{15}$ Calcule a integral de f no intervalo $[1,2]$ usando o método do ponto médio de modo que o erro absoluto da aproximação seja menor ou igual a 10^{-2}. Use valores exatos.

(b) $\boxed{5}$ Qual o valor da aproximação obtida por Simpson repetido para a integral de f no intervalo $[-2,5]$ usando $n = 1000$? Justifique.

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Calcule a decomposição LU com pivoteamento da matriz abaixo e use-a para resolver o sistema. Evidencie cada passo. Use valores exatos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. é definida positiva usando Cholesky.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Considere o sistema $Ax = b$, com matriz inversível e solução não-nula. Seja $\overline{x}$ uma solução aproximada desse sistema e defina $\Delta x = x - \overline{x}$ e $\Delta b = b - A\overline{x}$.

(a) $\boxed{10}$ Prove que $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.

(b) $\boxed{10}$ Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2+\alpha \\ 3 \end{bmatrix}$, e $\Delta b = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}$, com $0 < \alpha < 1$. Calcule um limitante para o erro relativo $\|\Delta x\|/\|x\|$, usando a norma 1.

Questão 5 .... $\boxed{40}$

Resolva as questões abaixo:

(a) $\boxed{10}$ Seja $A = U^T U$ para uma matriz $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que A é definida positiva se, e somente se, U tem posto coluna completo.

(b) $\boxed{10}$ Seja $A = \alpha I + \varepsilon e_i e_j^T$ onde e_i e e_j são a i-ésima e j-ésima colunas da matriz identidade, com $i > j$, e $\alpha, \varepsilon > 0$. Calcule $\kappa_1(A)$ e a decomposição LU de A.

(c) $\boxed{10}$ Seja $H = \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & -F \end{bmatrix}$ onde Q e F são matrizes definidas positivas de dimensões n e m respectivamente, e A é uma matriz m por n qualquer. Encontre L com diagonal unitária em forma de blocos, tal que $LHL^T = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & -D_2 \end{bmatrix}$ explicitando D_1 e D_2.

(d) $\boxed{10}$ Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\|uv^T\|_1 = \|u\|_1 \|v\|_\infty$ e $\|uv^T\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$.