CM103

30 de Novembro de 2017

ATENÇÃO: Utilize 4 casas decimais onde for necessário aproximar.

Questão 1 .... $\boxed{35}$

(a) (15 points) Aplique o método de eliminação Gaussiana sem pivoteamento para o sistema linear abaixo e resolva o sistema triangular resultante.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Solution: Primeira coluna: $m_{21} = \frac{2}{2} = 1$ e $m_{31} = \frac{-4}{2} = -2$.

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = (2,2,3,7) - (2,0,-3,-1) = (0,2,6,8).$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = (-4,-1,0,-5) + 2(2,0,-3,-1) = (0,-1,-6,-7).$$

O sistema atual é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Segunda coluna: $m_{32} = \frac{-1}{2}$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = (-1,-6,-7) + \frac{1}{2}(2,6,8) = (0,-3,-3).$$

O sistema atual é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo

$$x_3 = \frac{-3}{-3} = 1.$$

$$x_2 = \frac{8 - 6x_3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3x_3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

(b) (20 points) Calcule a decomposição LU com pivoteamento da matriz do sistema acima. Mostre quem é a matriz P

Solution: Faremos pivoteamento, e eliminação.

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad p = (1,2,3).$$

$$\tilde{A}^0 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad p = (3, 2, 1).$$

$m_{21} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ e $m_{31} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = (2, 2, 3) + \frac{1}{2}(-4, -1, 0) = (0, \frac{3}{2}, 3).$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = (2, 0, -3) + \frac{1}{2}(-4, -1, 0) = (0, -\frac{1}{2}, -3).$$

$$\tilde{A}^1 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}, \qquad p = (3, 2, 1).$$

Sem pivoteamento.

$$m_{32} = \frac{-1/2}{3/2} = -\frac{1}{3}.$$

$$L_3 \leftarrow L_2 - m_{32}L_2 = (-\frac{1}{2}, -3) + \frac{1}{3}(\frac{3}{2}, 3) = (0, -2).$$

$$\tilde{A}^2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}, \qquad p = (3, 2, 1).$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ -1/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ & 3/2 & 3 \\ & & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

Questão 2 15

Ajuste os dados ao lado à uma reta. Calcule o resíduo.

x	-1	0	1	2	3
y	4	2	3	0	1

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}, \qquad A^Ty = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (A^TA)^{-1}A^Ty = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

Resíduo:

$$r = y - A\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.8 \\ 1.0 \\ -1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Questão 3 20

Faça 2 iterações do método de Newton aplicado ao sistema não-linear a seguir, a partir do ponto $(x^0, y^0)^T = (1, 1)^T$.

$$\begin{cases} x - y^2 + 2 &= 0 \\ 2y + x^2 - 8 &= 0. \end{cases}$$

Dica: Lembre-se que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Solution:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x - y^2 + 2 \\ 2y + x^2 - 8 \end{bmatrix}, \qquad J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 2x & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponto inicial: $(x^0, y^0)^T = (1, 1)^T$.

$F(x^0, y^0) = (2, -5)^T$.

$\|F(x^0, y^0)\| = 5.3852$.

$J(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} d = -\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$d = \dfrac{-1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$(x^1, y^1) = (x^0, y^0) + d = (1.0, 1.0) + (1.0, 1.5) = (2.0, 2.5)$.

$F(x^1, y^1) = (-2.25, 1.0)$.

$\|F(x^1, y^1)\| = 2.4622$.

$J(x^1, y^1) = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} d = -\begin{bmatrix} -2.25 \\ 1 \end{bmatrix}$

$d = \dfrac{-1}{22} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.25 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0227 \\ -0.4545 \end{bmatrix}$

$(x^2, y^2) = (x^1, y^1) + d = (2.0, 2.5) - (0.0227, 0.4545) = (1.9773, 2.0454)$.

Questão 4 15

Considere o sistema $A^T\lambda = c$. Indique como resolver este sistema utilizando a decomposição LU com pivoteamento de A. (Dica: Lembre-se que se P é uma matriz de permutação, então $P^T P = I$.

Solution: Temos $PA = LU$, logo $A^T P^T = U^T L^T$. Daí,

$$A^T\lambda = c \quad \Rightarrow \quad A^T P^T P\lambda = c \Rightarrow U^T L^T P\lambda = c.$$

Fazendo $u = P\lambda$ e $w = L^T u$, temos $U^T w = c$.

$$\begin{cases} U^T w &= c \\ L^T u &= w \\ \lambda &= P^T u. \end{cases}$$

Questão 5 .... $\boxed{25}$

Uma matriz é dita tridiagonal se $a_{ij} = 0$ para todo $|i - j| > 1$. Se existir, a decomposição LU sem pivoteamento dessa matriz resultará em uma matriz L bidiagonal inferior com diagonal unitária e uma matriz U bidiagonal superior, isto é, L e U serão da forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ c_1 & 1 & & & & \\ & c_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & c_{n-2} & 1 & \\ & & & & c_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \qquad U = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & & \\ & d_2 & e_2 & & & \\ & & d_3 & e_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & & d_n \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, a decomposição pode ser representada por 3 vetores, $c, e \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $d \in \mathbb{R}^n$. Descreva um algoritmo que recebe de entrada c, d, e e $b \in \mathbb{R}^n$ e **resolve o sistema linear** $Ax = b$, utilizando a decomposição LU dada nos vetores c, d e e. Não crie vetores novos, **substitua** em b a solução do sistema.

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Calcule quantas operações faz o algoritmo a seguir, sabendo que (i) `A[:,j]` refere-se a pegar a coluna `j` da matriz, e não tem custo, (ii) `dot(v,w)` recebe dois vetores de tamanho `p` e faz `2p-1` operações, (iii) a atribuição também não tem custo.

```
ALGORITMO
Entrada: matriz A m por n
1.   Para j de 1 a n-1
1.1.    s = dot(A[:,j], A[:,j])
1.2.    Para k = j+1 a n
1.2.1.     d = dot(A[:,j], A[:,k])
1.2.2.     A[:,k] = A[:,k] - A[:,j] * (d / s)
1.3.    Fim do Para
2.   Fim do Para
```

Solution: 1.2.1 tem custo $2m-1$ e 1.2.2 tem custo $2m+1$. Daí, uma iteração do for 1.2 tem custo $4m$, de modo que 1.2 tem custo $(n-j)*4m$. 1.1 tem custo $2m-1$, então a iteração j do for tem custo $2m-1+4mn-4mj$. Portanto, o algoritmo todo tem custo

$$\sum_{j=1}^{n-1}(2m-1+4mn-4mj) = (2m-1+4mn)(n-1) - 4m\frac{n(n-1)}{2} = 2mn^2-2m-n+1$$