CM042 - Cálculo II

28 de Novembro de 2019 - Prova 3

Gabarito

1. $\boxed{20}$ Calcule $\displaystyle\int_C x^2 \mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x$ onde C é a curva sobre $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 1$, da esquerda para a direita.

Solution: Curva $x = t$, $y = t^2$, para $-1 \leq t \leq 1$.

$$\oint_C x^2\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} t^2(2t\mathrm{d}t) - t \cdot t^2\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^3\mathrm{d}t = 0.$$

2. $\boxed{20}$ Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (2xy - 5x^4)\hat{\imath} + (x^2 + 2)\hat{\jmath}$ e C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle (t-1)\ln(1+t^2) + t, t^2 - 4t + 3\rangle$, de $t = 0$ à $t = 1$.

Solution: $\vec{F}$ é conservativo? $P = 2xy - 5x^4$ e $Q = x^2 + 2$. Daí, $P_y = 2x$ e $Q_x = 2x$, logo $P_y = Q_x$. Então, $\vec{F}$ é conservativo.

Devemos calcular $f(x, y) = \displaystyle\int P(x, y)\mathrm{d}x$.

$$f(x, y) = \int P(x, y)\mathrm{d}x = \int (2xy - 5x^4)\mathrm{d}x = x^2y - x^5 + h(y)$$

Agora, $f_y(x, y) = Q$, logo

$$f_y(x, y) = x^2 + h'(y) = x^2 + 2 = Q.$$

Assim, $h'(y) = 2$, então $h(y) = 2y + C$. Portanto,

$$f(x, y) = x^2y - x^5 + 2y + C.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) \\ &= f(1, 0) - f(0, 3) = -1 - 6 = -7.\end{aligned}$$

3. $\boxed{20}$ Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = y^2\hat{\imath} + (x^2 + y^2)\hat{\jmath}$, C é a curva fechada com orientação anti-horária que circunda o trapézio de vértices $(1, 1), (2, 2), (-2, 2), (-1, 1)$.

Solution: Temos $P = y^2$ e $Q = x^2 + y^2$. Daí, $P_y = 2y$ e $Q_x = 2x$, de modo que o campo não é conservativo. Daí, como a curva é fechada, usaremos o Teorema de Green.

A região pode ser descrita como $1 \leq y \leq 2$ e $-y \leq x \leq y$. Daí,

$$\begin{aligned}\oint_C y^2 \mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y &= \iint_D (2x - 2y)\mathrm{d}A = \int_1^2 \int_{-y}^{y} (2x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2xy)\Big|_{-y}^{y} \mathrm{d}y = \int_1^2 (-4y^2)\mathrm{d}y = \frac{-4}{3}(8-1) = \frac{-28}{3}.\end{aligned}$$

4. $\boxed{20}$ Calcule $\int_C z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$ onde C é a curva composto dos segmentos de $(0,0,0)$ à $(1,1,0)$ e daí à $(0,0,1)$.

Solution: $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$, de modo que o campo não é conservativo. Logo, faremos pela definição.

Parte I: $x = t$, $y = t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_0^1 0 - t\mathrm{d}t + 0 = -\int_0^1 t = -\frac{1}{2}.$$

Parte II: $\vec{r}(t) = \langle 1,1,0 \rangle + t\big(\langle 0,0,1 \rangle - \langle 1,1,0 \rangle\big)$. Assim, $x = 1 - t$, $y = 1 - t$, e $z = t$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_C z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_0^1 t(-\mathrm{d}t) - (1-t)(-\mathrm{d}t) + (1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (2 - 3t)\mathrm{d}t = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Então, a integral dá 0.

5. $\boxed{20}$ Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ através da superfície da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$. Indique se o fluxo resultante é para cima ou para baixo.

Solution: A superfície tem $\mathrm{d}\vec{S} = 2\langle x, y, z\rangle \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Daí,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \iint_D \langle y, -x, z\rangle \cdot 2\langle x, y, z\rangle \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 2z^2 \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\cos^2\varphi \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= 16\pi\int_1^0 u^2(-\mathrm{d}u)\mathrm{d}u = \frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

6. $\boxed{20}$ Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = xy\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ através da superfície dada por $\vec{r}(u,v) = \langle uv, -u, v^2\rangle$ para $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq u \leq 2$.

Solution: Temos

$$\vec{r}_u = \langle v, -1, 0 \rangle$$

e

$$\vec{r}_v = \langle u, 0, 2v \rangle .$$

Daí,

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathrm{k}} \\ v & -1 & 0 \\ u & 0 & 2v \end{vmatrix} = -2v\hat{\imath} - 2v^2\hat{\jmath} + u\hat{\mathrm{k}} = \left\langle -2v, -2v^2, u \right\rangle .$$

Daí, $\mathrm{d}\vec{S} = \langle -2v, -2v^2, u \rangle \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$, e

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \langle 0, xy, xz \rangle \cdot \left\langle -2v, -2v^2, u \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v = -2xyv^2 + xzu$$

Como $\langle x, y, z \rangle = r(u, v)$, então $x = uv$, $y = -u$ e $z = v^2$. Portanto,

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -2(uv)(-u)v^2 + (uv)(v^2)u = 3u^2v^3.$$

Sendo assim,

$$\text{fluxo} = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1 \int_0^2 3u^2v^3 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 3 \times \frac{8}{3} \times 14 = 2.$$