Cálculo do π

Renata Naoko Corrêa

2º semestre 2016

Projeto da disciplina CM141 Tópicos de Matemática II
Profº Dr. Abel Siqueira

Sumário

1 Introdução **2**

2 Contexto histórico do π **2**

2.1 Relato da existência do número π e a investigação de Arquimedes 2
2.2 De Arquimedes a contribuições à teoria das frações contínuas 3
2.3 Série de Leibniz 3
2.4 Fórmula de Machin 4
2.5 Século XX e a Fórmula BBP 5
2.6 Século XXI 5

3 Irracionalidade do π **6**

4 Curiosidades sobre π **6**

4.1 O símbolo π 6
4.2 Por que calcular π com tantas casas decimais? 7

5 Considerações Finais **7**

1 Introdução

Será apresentado neste trabalho a pesquisa feita para o projeto da disciplina CM141 Tópicos de Matemática II. O principal objetivo é a observação da aprendizagem da utilização da escrita matemática com o uso do $\LaTeX$ utilizando o site overleaf.com e da programação desenvolvida no software Julia.

O tema escolhido para o projeto é o cálculo do número π. Este trabalho possui

2 Contexto histórico do π

2.1 Relato da existência do número π e a investigação de Arquimedes

O número π tem uma história que começou cerca de 3000 mil anos atrás. No velho testamento (I Reis 7:23) lê-se: "E ele (Salomão) fez também um lago de dez cúbitos, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo, e trinta cúbitos em redor". Esta passagem ocorre em uma lista de especificações para o grande templo de Salomão, construído cerca de 950 a.C. A circunferência era, três vezes o diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir a π o valor 3. Provavelmente este valor foi encontrado a partir da medição manual do lago.

Nessa condição de medição de uma região circular e seu contorno, foi observado que o valor 3 não era equivalente a razão entre eles. Na antiguidade, no Egito e na Bavilônia foi estudado o valor do π. Um dos grandes problemas da antiguidade era a chamada quadratura do círculo. Este problema constiste em construir, apenas com régua e compasso, um quadrado de área igual â área de um círculo dado. E apartir disso, os egípcios tomaram o valor de $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ e os babilônios $\pi = 3\frac{1}{8}$. Sabemos que a área de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$, mas como será que os povos antigos chegaram nessa igualdade? Provavelmente recorrendo ao método de decomposição,por exemplo, se aplicarmos o método a um círculo, podemos transformá-lo num quase-paralelogramo de base $2\pi r$ e altura r.

O método utilizado pelos egípcios para cálcular a área do círculo, e consequentemente determinar π é conhecido, já que os documentos até então registrados pelos historiadores matemáticos, que são do período pré-helênico, são da sua maioria egípcios. Entre esses documentos, existe o Papiro de Rhind (denominado desta forma por ter sido encontrado pelo antiquário escocês Henry Rhind), que apresenta 84 problrmas e as suas respectivas resoluções. O exercício número 50 se calcula π e assume (de acordo com o problema 48) que a área de um círculo de 9 unidades de diâmetro é igual à área de um quadrado de 8 unidades de lado. A solução contida no Papiro foi de $3,160493827...$.

Durante o período de ouro da matemática grega, Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.), considerado o maior gênio matemático da antiguidade, recorreu a um processo que consistia em inscrever e circunscrever uma circunferência em polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Calculou o perímetro destes polígonos, obtendo limites superior e inferior para π, ou pelo menos noções destes limites. Usando polígonos regulares de 96 lados, Arquimedes calculou que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Ou seja,

$$3,140845 < \pi < 3,142857.$$

É dito que Arquimedes "peca"por não ter demonstrado de forma rigorosa a existência dos limites, mas essa não era a preocupação da época e os recursos dificilmente resolveriam.

No século V d.C. muitos matemáticos, tendo registro dos matemáticos chineses, hindus e árabes, encontraram valores mais aproximados de π.

2.2 De Arquimedes a contribuições à teoria das frações contínuas

Um fato interessante é que depois de muito tempo depois que Arquimedes formalizou o cálculo do π que foi elaborado um novo método para a determinação do valor de π, organizado pelo matemático Viète (1540 - 1603). embora seguindo as linhas gerais do método de Arquimedes, Viète utilizou do método dos limites, caracterizado pela utilização de processos infinitos de cálculo e chegou a

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}...}.$$

A partir de Viète, alguns matemáticos tentaram calcular o valor de π, principalmente depois da descoberta do cálculo diferencial e integral. Teve também Lord William Brouncker (1620-1684) que chegou na expressão

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + ...}}}}},$$

uma das primeiras contribuições para a teoria das frações contínuas, porém não serviu para o cálculo longe de π.

2.3 Série de Leibniz

No século XVII, James Gregory (1638 - 1675) e Leibniz (1646 - 1716), partindo de

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = arctan(x)$$

chegaram quase simultaneamente a

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + ... \tag{1}$$

tomando $x = 1$ em (1), temos

$$\frac{\pi}{4} = arctan(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}.$$

O que levou a

$$\pi = 4\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\right).$$

Está série infinita é a primeira que converge para π, foi obtida por volta de 1670 e é conhecida como fórmula de Leibniz ou fórmula de Gregory-Leibniz. O problema desta série é que a convergência se dá de forma muito lenta.

Esta fórmula será utilizada para o projeto na parte de programação, por ser a primeira série infinita formulada para se chegar a π e também para ser comparada com outras fórmulas que a convergência ocorre de forma mais rápida.

2.4 Fórmula de Machin

Em 1706, John Machin introduziu uma variação da série de Leibniz com um aumento significativo da convergência. Machin usou a fórmula da soma de arcos para a tangente

$$tan(u+v) = \frac{tan(u)+tan(v)}{1-tan(u).tan(v)},$$

e obteve a identidade

$$tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tan(x)-1}{1+tan(x)}.$$

Com $x = 4arctan\left(\frac{1}{5}\right)$, escreveu

$$tan\left(4arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tan\left(4arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)-1}{1+tan\left(4arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}.$$

Usando a fórmula da duplicação de arcos para a tangente, Machin calculou

$$tan\left(2arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2.tan\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-tan^2\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{2.\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}. \tag{2}$$

De (2) tem se que

$$tan\left(4arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2.tan\left(2arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-tan^2\left(arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{2.\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}. \tag{3}$$

Agora substituindo o valor encontrado em (3) na igualdade (1) temos

$$tan\left(4arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\dfrac{120}{119}-1}{1+\dfrac{120}{119}}=\frac{1}{239}. \tag{4}$$

Aplicando arco tangente em ambos os membro em (4), temos a fórmula

$$\frac{\pi}{4}=4arctan\left(\frac{1}{5}\right)-arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Com esta fórmula, Machin conseguiu calcular 100 casas decimais para π. Após Machin, muitos matemáticos, entre eles, Euler e Gauss, utilizaram-se dessa ideia e centenas de fórmulas foram obtidas por esse processo.

Esta fórmula será apresentado também no projeto na parte de programação.

2.5 Século XX e a Fórmula BBP

Em 1914, o indiano Srinivasa Ramanujan descobriu a fórmula

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Esta série converge muito rápido. Mas em 1987, os irmãos Gregory e David Chudnovsky melhoraram a série de Ramanujan e descobriram uma das melhores séries para obter π, pois converge muito rápido. A série dos irmão é da forma

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n}{(n!)^3(3n)!(640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

É importante lembrar que neste período, já era possível a utilização do computador para realizar estes cálculos, sempre bem mais rápido e fácil a obtenção do valor do π.

Em 1997 a fórmula

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)$$

foi descoberta por Bailey, borwein e Plouffe. É conhecida com fórmula BBP e é muito interessante, pois permite calcular em base 16 (e consequentemente em base 2) qualquer um dos dígitos decimais de π sem precisar calcular os dígitos precedentes. Por tal relevância, será também apresentado na programação de cálculo aproximado do π.

2.6 Século XXI

Em 2002, Yasumasa Kanada bateu recorde calculando 1,24 trilhões de dígitos de π, ele usou a série em arco tangente de Takano para calcular. Daisuke Takahashi, batendo o recorde de Kanada em 2009, usou o algoritmo de Gauss-Legendre para calcular e um algoritmo de Borwein para verificar.

3 Irracionalidade do π

Em 1761, o matemático francês Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) provou que π é um número irracional. A construção desta prova foi feita considerando as seguintes proposições:

Proposição 3.1. *Vamos considerar a fração contínua x, convergente e ilimitada, em que a_i, b_i são números inteiros para todo $i \geq 1$,*

$$x = \cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \cfrac{a_3}{b_3 - \cfrac{a_4}{b_4 - \cfrac{a_4}{b_4 - ...}}}}}.$$

Se $|a_i| < |b_i|$ de um determinado valor i, então x é irracional.

Proposição 3.2. *Seja x um número racional. Então a tangente de x pode ser expressado como fração contínua da seguinte forma:*

$$tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - ...}}}}}.$$

O teorema apresentado por Lambert utiliza dos resultados de 3.1 e 3.2 para provar:

Teorema 3.3. *Se $x \neq 0$ é um número racional, então $tan(x)$ é irracional.*

A ideia deste teorema é que como $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, então $\frac{\pi}{4}$ não pode ser racional, uma vez que neste caso, 1 deve ser um irracional, o que não é.

Não será realizado a demonstração de nenhum dos resultados pelo fato do projeto estar voltado ao cálculo do valor de π. Porém é importante ressaltar que os matemáticos ao longo dos tempos queriam provar que o número π era racional e queriam encontrar a última casa decimal, porém como foi provado por Lambert e depois por outros matemáticos por meio de outras formas, π é irracional, porém mesmo assim foi dedicado tempo para encontrar as várias casas decimais, como já citado na última seção. Será apresentado na seção 4.2 o porque destas investigações mais atuais.

4 Curiosidades sobre π

4.1 O símbolo π

O primeiro registro da utilização da letra grega π na representação de circunferências foi em 1647, o matemático inglês William Oughtred (1575 - 1660) escreveu $\frac{\delta}{\pi}$ para expressar a razão entre o diâmetro de uma circunferência e seu perímetro. Em 1706, o matemático galês (1675 - 1749) usou π para denotar a razão entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro, num trabalho que apresentava resultado da fórmula de John Machin para o valor de π com 100 casas decimais.

4.2 Por que calcular π com tantas casas decimais?

Durante o trabalho é citado que Daisuke Takashi em 2009 calculou π com cerca de 1,3 trilhão de dígitos com a ajuda do computador. Claro que esse recorde já foi quebrado com a utilização de processos e computadores mais potentes. Agora, veremos a importância de se conseguir π com muitas casas decimais.

Antes da existência do computador, o desafio e o prazer da descoberta faziam com que matemáticos se esforçasse nesta situação. Após a utilização do computador para ajudar no processo de descobrir o valor aproximado de π foi observado que não era preciso mais de 39 casas decimais, por exemplo, para calcular a medida da circinferência do universo com erro menor do que o diâmetro de um átomo de hidrogênio.

Um fato ainda atual é estudar a estatística da distribuição dos dígitos do π, verificar se há uma distribuição aleatória ou não dos algarismos nas casas decmais de π

Uma aplicação prática do cálculo do π é o teste de microprocessadores. Quando um computador ou um processor numérico é desenvolvido, é necessário saber até que ponto sua eficiência numérica é confiável, e nestas condições, é interessante testá-lo, calculando um número já conhecido. Calcular dígitos de π, atualmente, não é mais uma questão de conhecer este número, mas sim de comprovar o poder dos computadores.

5 Considerações Finais

Este projeto apresenta um contexto histórico sobre o π que apresenta a evolução dos métodos de cálculo, minimizando cada vez mais o erro de aproximação. E isso foi comprovado pelo projeto de programação em que faz uma comparação de erro de aproximação entre a série de Leibniz, a fórmula de Machin e a fórmula BBP, em relação ao valor π que o próprio software Julia calcula.

Outra situação interessante é que foi verificado em prática que o cálculo do π, quando se trata de séries infinitas, para n muito elevado, dependendo do computador e também do próprio software, pode demorar um tempo maior para se chegar na solução, ainda mais, quando se utiliza de processos sucessivos e o programador não facilita na hora de programar, não agilizando o "entendimento"e o cálculo do computador.

Com este projeto foi observado que a escrita matemática é muito importante em textos acadêmicos, já que foi pesquisado em alguns textos o assunto e foi observado que a compreensão é facilitada uma vez que a escrita matemática esteja de acordo, quanto a isso, o LaTeXé uma ggrande ferramenta, tanto para textos científicos quanto para materiais didáticos.

Referências

[1] Anésia Regina Schiavolin Bortoletto. “Reflexões relativas às definições do número PI e à presença da sua história em livros didáticos de Matemática do ensino fundamental”. Em: *Universidade Metodista de Piracicaba* (2008).

[2] Sandro Marcos Guzzo. “O número PI”. Em: *Revista Eletrônica de Matemática* (2010).

[3] Thiago Veríssimo Pereira. “Regiões circulares e o número Pi”. Em: *Universidade Federal de Goiás* (2013).

[4] J F Porto da Silveira. *Cálculo das constantes elementares clássicas: O Caso do PI*. Universidade Federal de Rio Grande do Sul. URL: `http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html`.