Cálculo Diferencial e Integral I

05 de Abril de 2017

Questão 1 56

Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

(a) (8 points) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin 2x}$.

Solution:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin \pi/4}{\sin \pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) (8 points) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-3x^2+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-3(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x} \\
&= \frac{-6}{\sqrt{4}+2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(c) (8 points) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Solution:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-1} = \frac{2-3}{2-1} = -1.$$

(d) (8 points) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}$.

Solution:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{2\cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(e) (8 points) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$

(f) (8 points) $\lim_{x\to3^-} \frac{x^2-5x+6}{(x-3)^3}$.

Solution:

$$\lim_{x\to3^-} \frac{x^2-5x+6}{(x-3)^3} = \lim_{x\to3^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)^3} = \lim_{x\to3^-} \frac{1}{(x-3)^2}(x-2) = +\infty$$

(g) (8 points) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-2x+7}{2-x^3-2x^4}$.

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-2x+7}{2-x^3-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^4}}{\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x}-2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}.$$

Questão 2 . . . . $\boxed{24}$

(a) (8 points) Resolva a desigualdade $\frac{(x^2-4)(3x+2)}{3-2x} \geq 0$.

Solution: Fazer usando o "varal".

(b) (8 points) Resolva a igualdade $\frac{|x+1|-|x|}{2x} = 1$.

Solution: Para $x < -1$, temos

$$\frac{-(x+1)+x}{2x} = 1 \Rightarrow -1 = 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Como $-\frac{1}{2} > -1$, não é solução. Para $-1 \leq x < 0$, temos

$$\frac{x+1+x}{2x} = 1 \Rightarrow 2x+1 = 2x \Rightarrow 1 = 0,$$

que é impossível. Para $x > 0$, temos

$$\frac{x+1-x}{2x} = 1 \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Como é positivo, é solução. Portanto, $S = \{\frac{1}{2}\}$.

(c) (8 points) Determine os valores de a para que seja contínua a função

$$f(x) = \begin{cases} ax + a - 2, & x < 1, \\ ax^2 - 2ax + a^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Solution: Devemos ter $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ para que f seja contínua. Como cada parte de f é contínua, temos

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = ax + a - 2\Big|_{x=1} = 2a - 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = ax^2 - 2ax + a^2\Big|_{x=1} = -a + a^2.$$

Além disso, $f(1) = -a + a^2$. Então, precisamos ter

$$2a - 2 = -a + a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \text{ ou } a = 2.$$

Portanto, existem dois possíveis valores para a: 1 ou 2.

Questão 3 .... $\boxed{10}$

Calcule pela definição $\lim_{x\to 3} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{3x - 9}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3. \end{cases}$

Solution: Seja $\varepsilon > 0$. Tome $\delta = 3\varepsilon/2$, e x tal que

$$0 < |x - 3| < \delta.$$

Daí, temos $x \neq 3$, e portanto

$$f(x) = \frac{2x^2 - 10x + 12}{3x - 9} = \frac{2(x-2)(x-3)}{3(x-3)} = \frac{2}{3}(x - 2).$$

Intuitivamente, esperamos que o limite seja $\frac{2}{3}$. Vamos mostrar isso, fazendo

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3}(x-2) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3}(x-3) \right| = \frac{2}{3}|x - 3| < \frac{2}{3}\delta = \varepsilon.$$

Assim, mostramos que $\lim_{x\to 3} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Questão 4 .... $\boxed{10}$

Sabendo que $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ para $0 \leq x < 1$, calcule $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Solution: Como estamos no limite para $x \to 0^+$, então $x > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 + x + \frac{x^2}{2} &\leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \\ x + \frac{x^2}{2} &\leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \\ 1 + \frac{x}{2} &\leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{x}{2} = 1,$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1,$$

então, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Dê um exemplo de função $f : [0,1] \to [0,1]$ não injetora, nem sobrejetora, nem contínua. Mostre cada uma dessas afirmações para sua função.

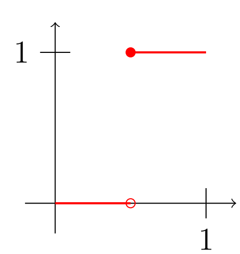
Solution: Existem várias soluções para este problema. A ideia aqui seria perceber que

1. como a função não pode ser injetora, então ela tem que repetir algum valor;
2. como a função não pode ser sobrejetora, ela não pode assumir todos os valores entre $[0,1]$;
3. como ela não é contínua, ela tem que ter alguma "falha".

Um exemplo bastante simples é

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Aqui sua representação gráfica (não necessária):



Para mostrar que não é injetora, note que $f(0) = f(0.1) = 0$. Para mostrar que não é sobrejetora, basta ver que f só assume dois valores, 0 ou 1, então sua imagem é $\{0, 1\}$. Para mostrar que não é contínua, basta ver que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0,$$

e

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 1.$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite não existe, e portanto a função não é contínua.

Outro exemplo legal é

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Cujo gráfico é