Algoritmos Em Grafos

Grafos Eulerianos e Unicursais

Prof. João Caram

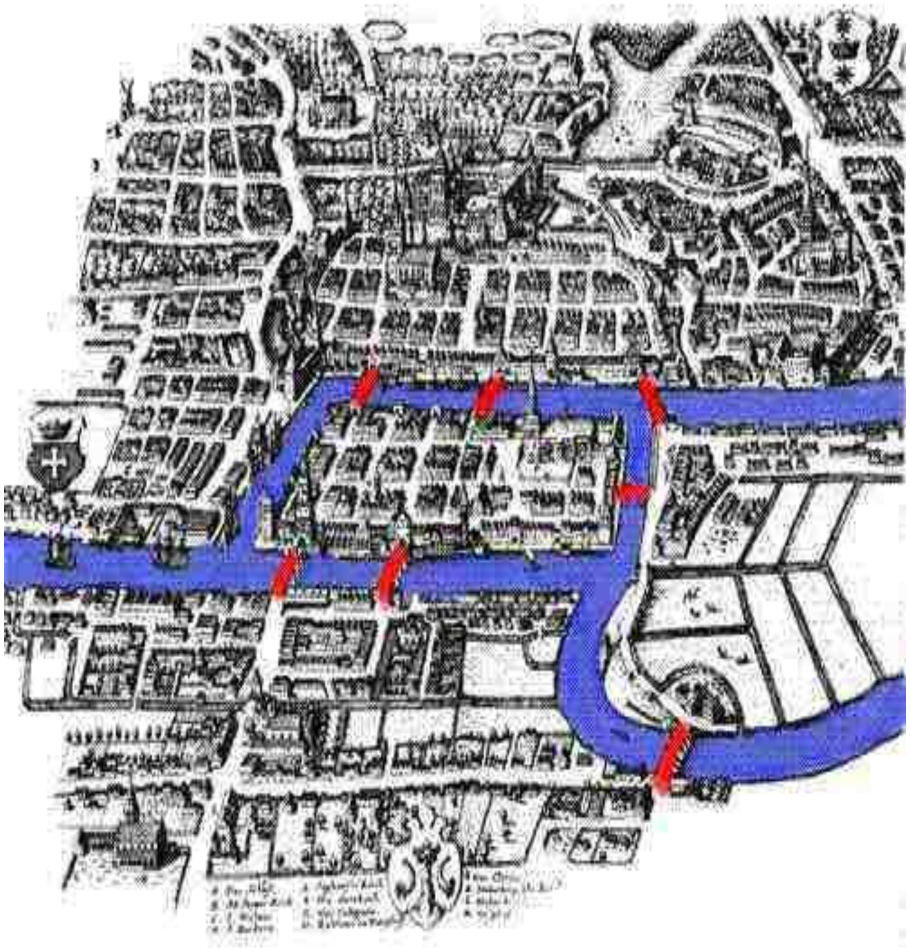
PUC MINAS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Agradecimentos

Ao prof. Max do Val Machado, pela cessão do material e exemplos que compõem a maior parte destes slides

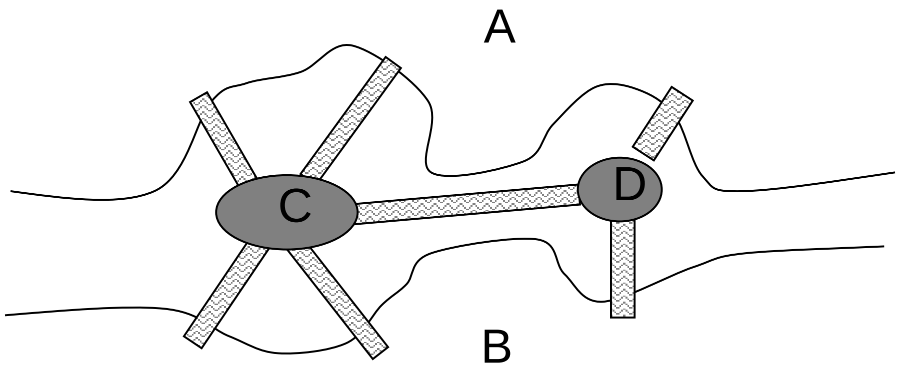
Grafos Eulerianos



- As pontes de Königsberg.
- É possível sair de um ponto, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?

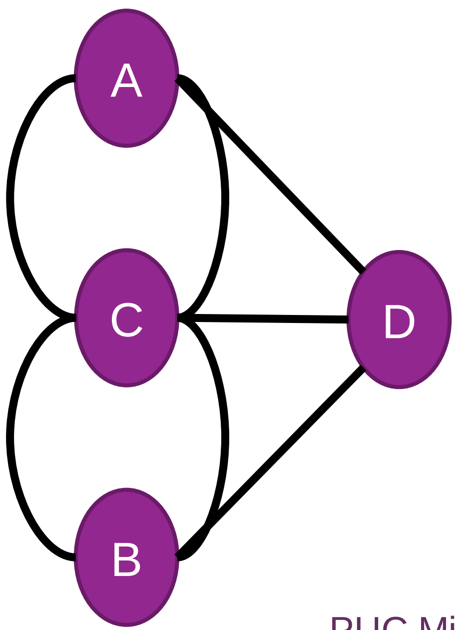
Grafos Eulerianos

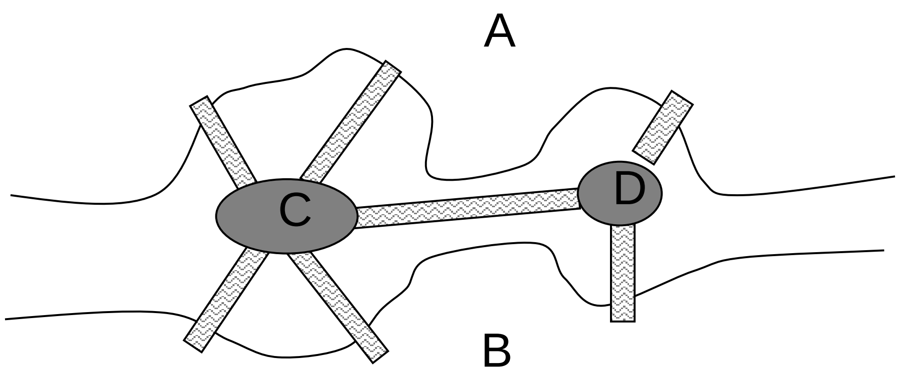
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes



Grafos Eulerianos

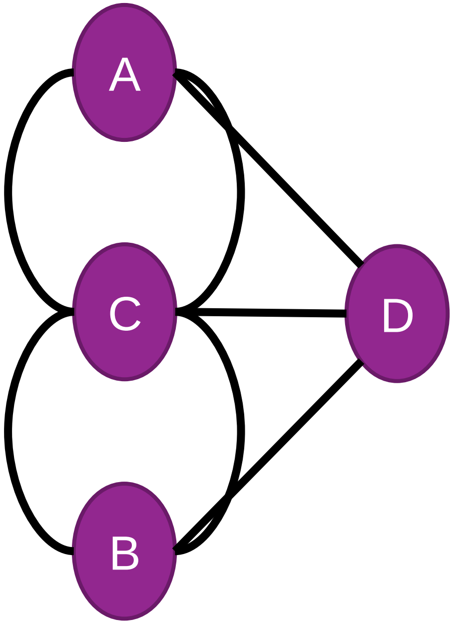
- Vértices: regiões da cidade
- Arestas: pontes





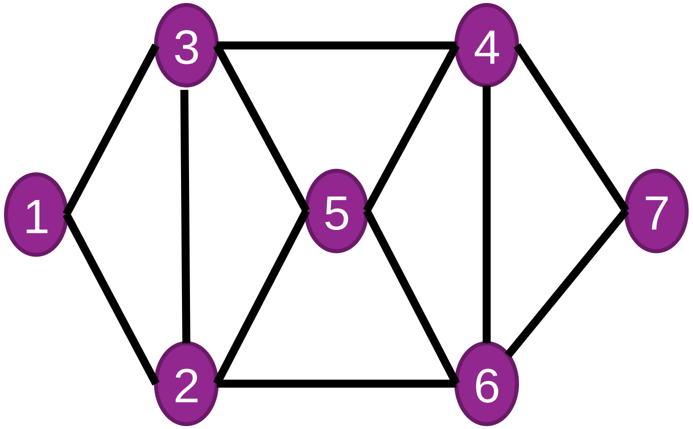
Grafos Eulerianos

- É possível sair de uma região, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto inicial?
- Problema: encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez



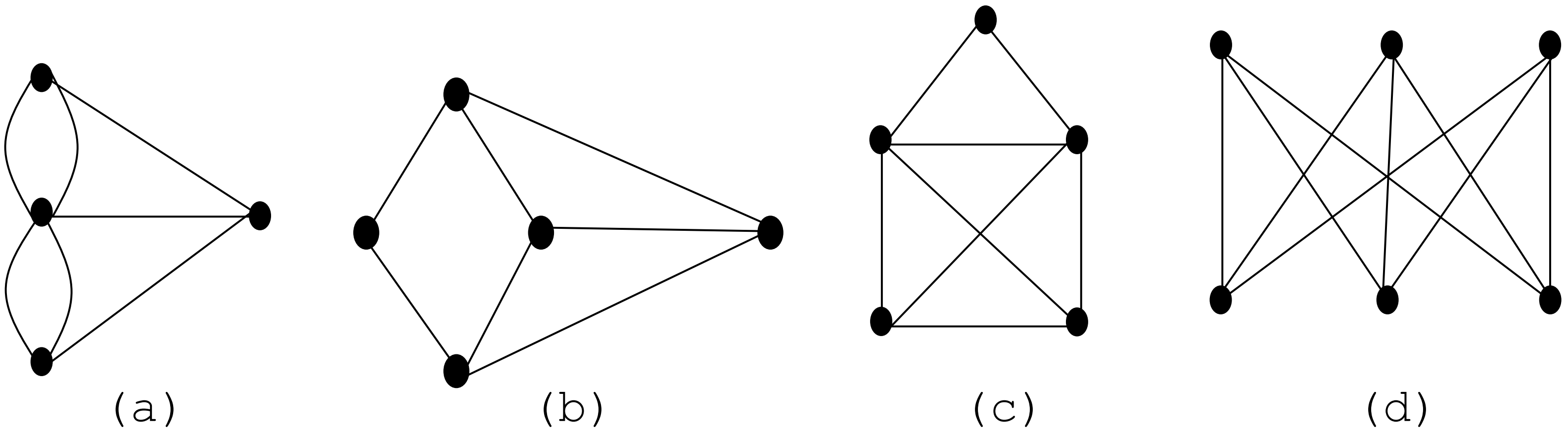
Grafos Eulerianos

- Problema do Explorador: um explorador deseja explorar todas as estradas entre um número de cidades. É possível encontrar um roteiro que passe por cada estrada apenas uma vez e volte a cidade inicial?
- Vértices: cidades
- Arestas: estradas



Grafos Eulerianos

- Problema: encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez



Grafos Eulerianos

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez, dizemos que G é um ***grafo euleriano***

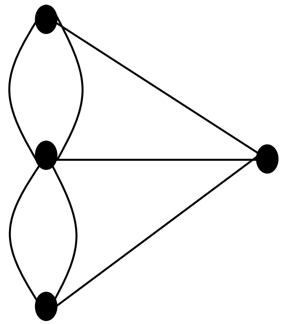
Grafos Eulerianos

- Em grafos conexos, se é possível encontrar um caminho fechado que passe por todas as arestas uma única vez, dizemos que G é um ***grafo euleriano***

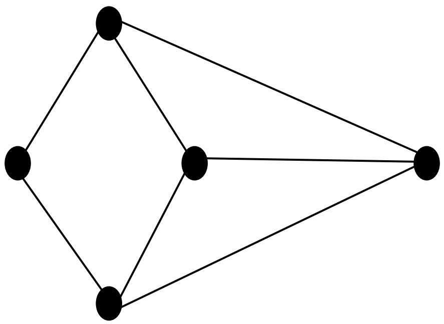
- **TEOREMA**: Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tiverem grau par

Exercício

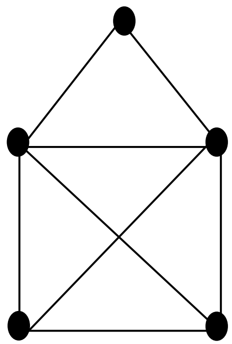
- Encontre um caminho fechado que passe por todos os arcos. Se não for possível, altere o grafo para que ele se torne euleriano com o menor número de alterações possível



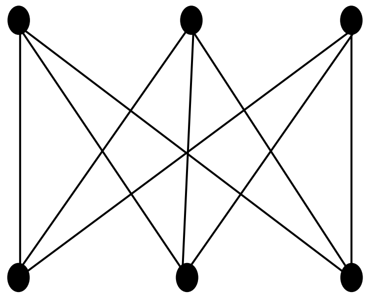
(a)



(b)



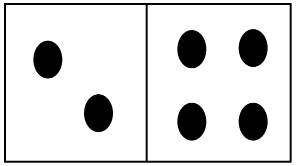
(c)



(d)

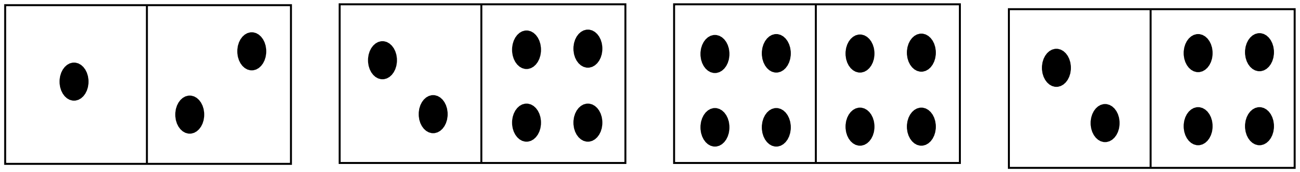
Exercício

- Considere todas as peças de um dominó. É possível formar um caminho fechado utilizando todas as peças disponíveis?



Exercício

- E caso só estejam disponíveis algumas peças?

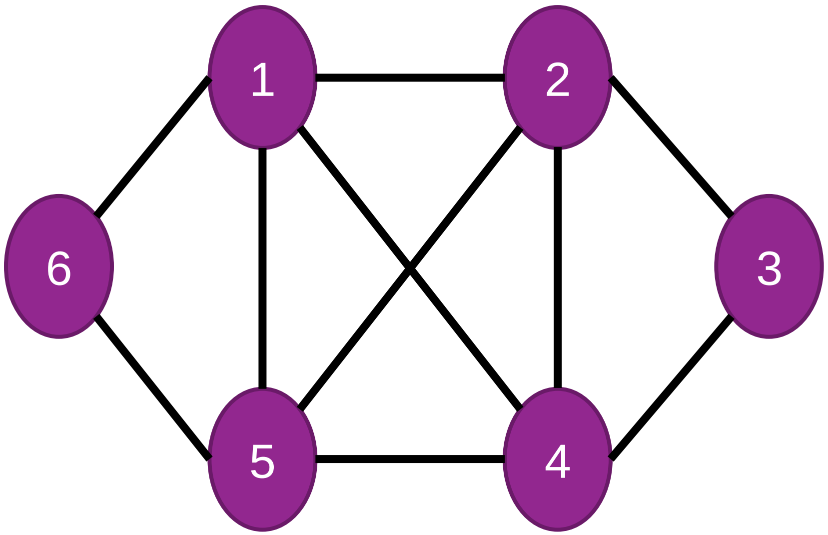


Algoritmo de Hierholzer (1873)

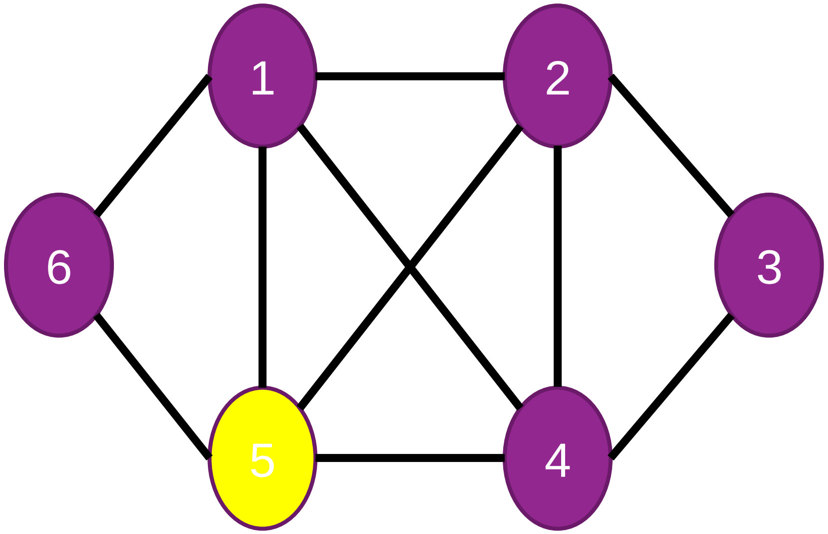
- Partindo do princípio que um grafo G é euleriano
  - Escolher um vértice ***v*** aleatório de G
  - Atravessar uma aresta aleatória ***v,w***
  - Repetir o processo a partir de ***w*** até formar um caminho fechado C
  - Remover as arestas pertencentes a C
  - Se não sobram arestas, encontramos o caminho euleriano

Algoritmo de Hierholzer (1873)

- Caso contrário, escolher um vértice v’ pertencente a C e com grau > 0 e repetir o processo para achar um novo caminho fechado C’
- ***Unir*** C’ a C
- Repetir os passos até não sobrarem arestas

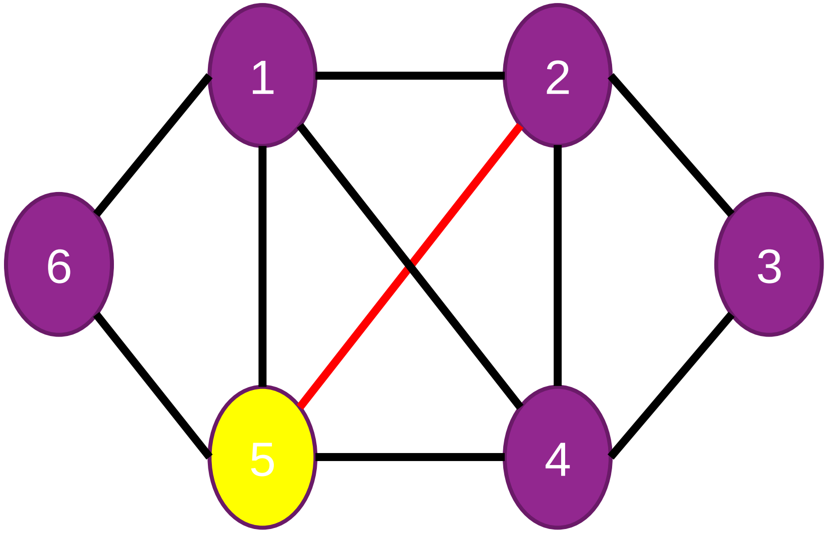


CAMINHO:
C:

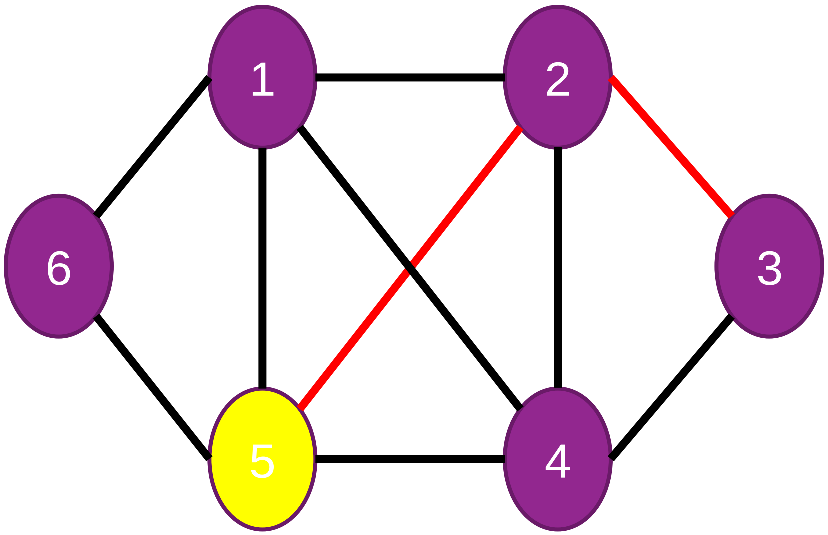


CAMINHO:

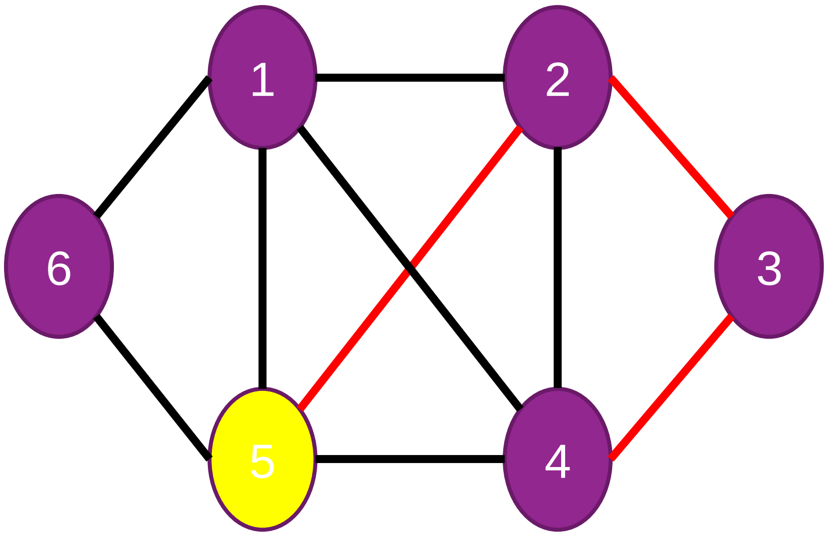
C:



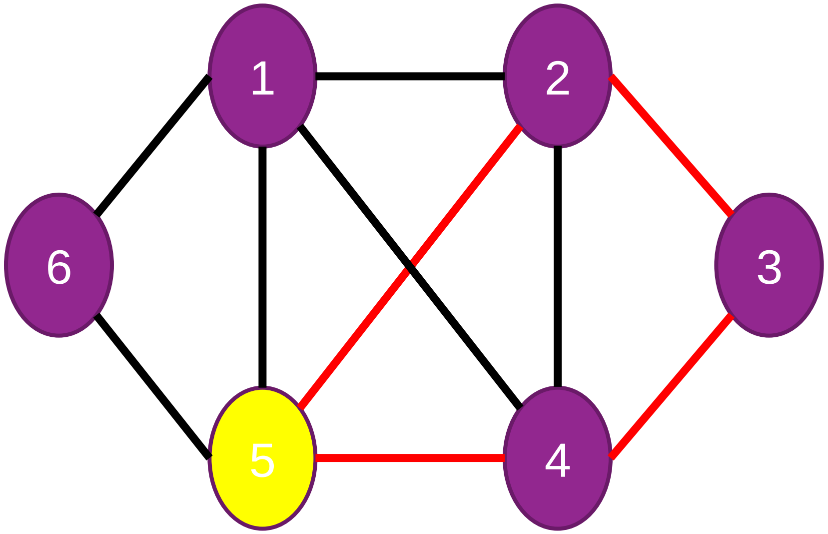
CAMINHO:
C: 5-2



CAMINHO:
C: 5-2-3



CAMINHO:
C: 5-2-3-4

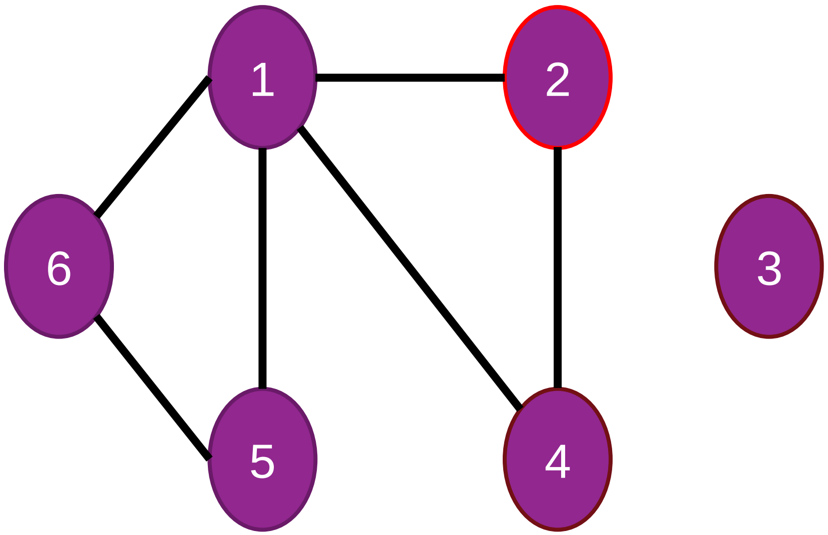


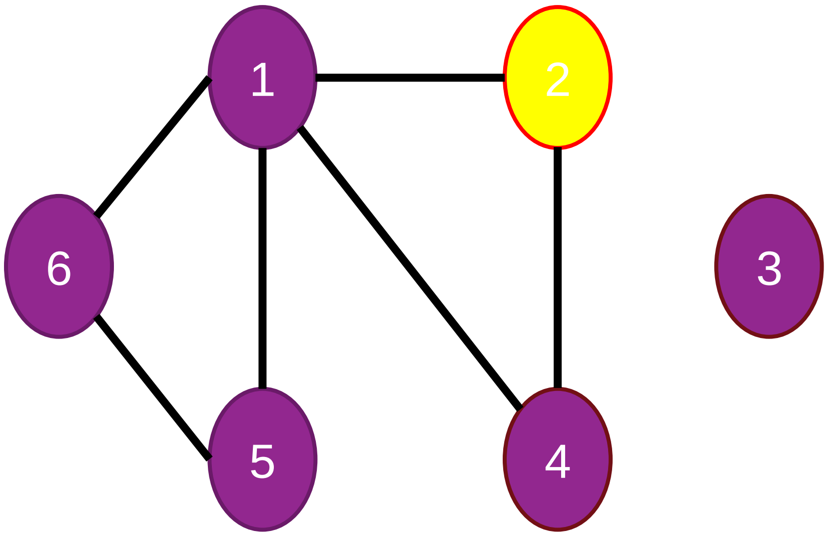
CAMINHO:

C: 5-2-3-4-5

CAMINHO:

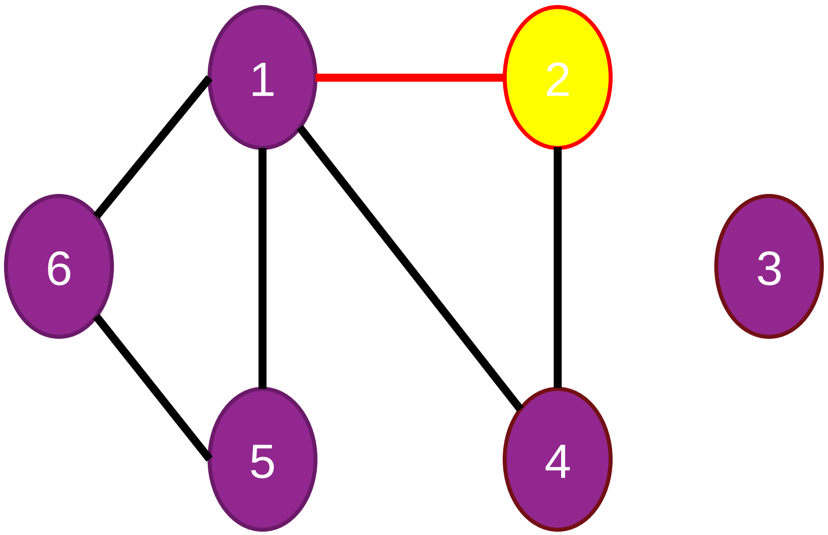
C: 5-2-3-4-5





CAMINHO:
C: 5-2-3-4-5

C’: 2

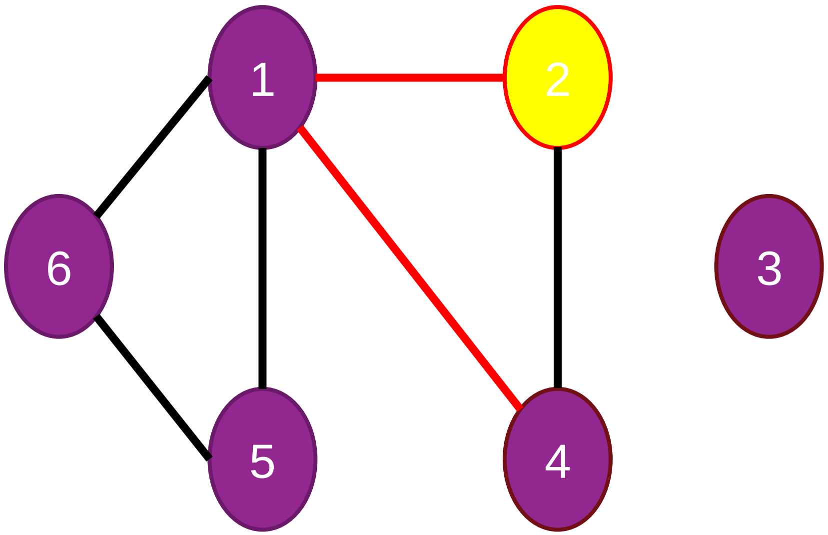


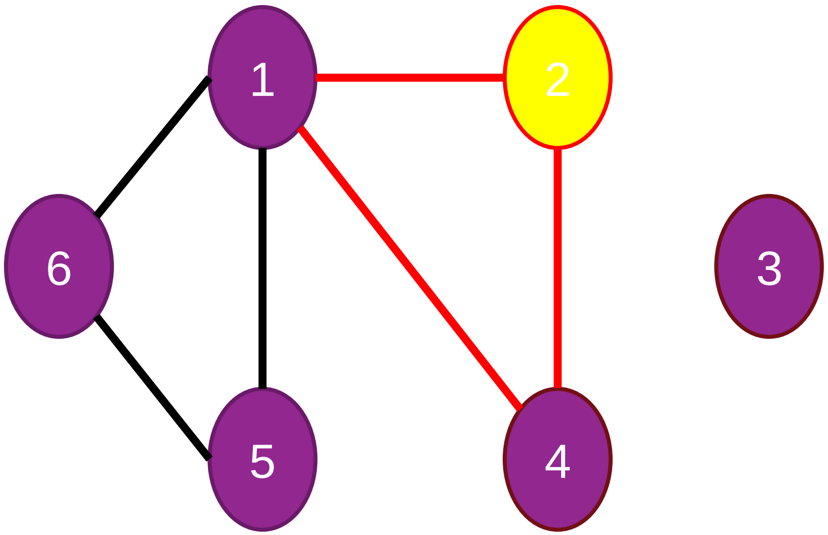
CAMINHO:
C: 5-2-3-4-5

C’: 2-1

CAMINHO:
C: 5-2-3-4-5

C': 2-1-4





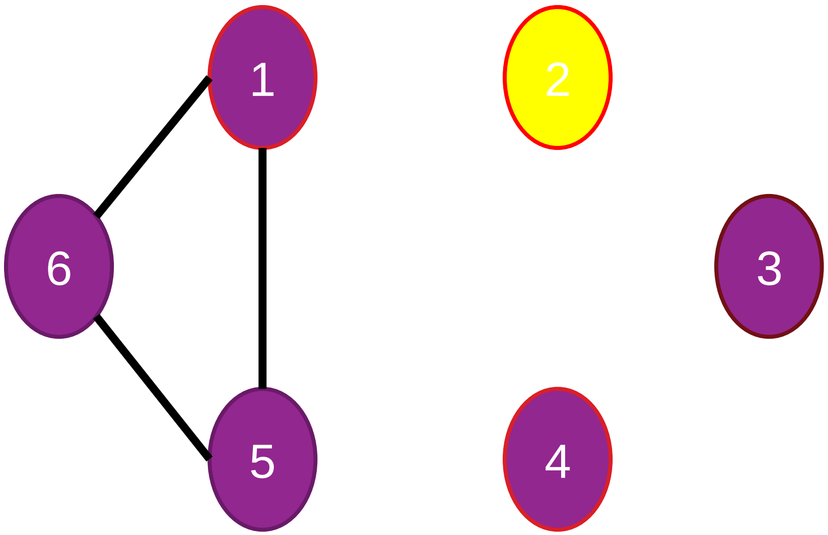
CAMINHO:
C: 5-2-3-4-5

C’: 2-1-4-2

CAMINHO:

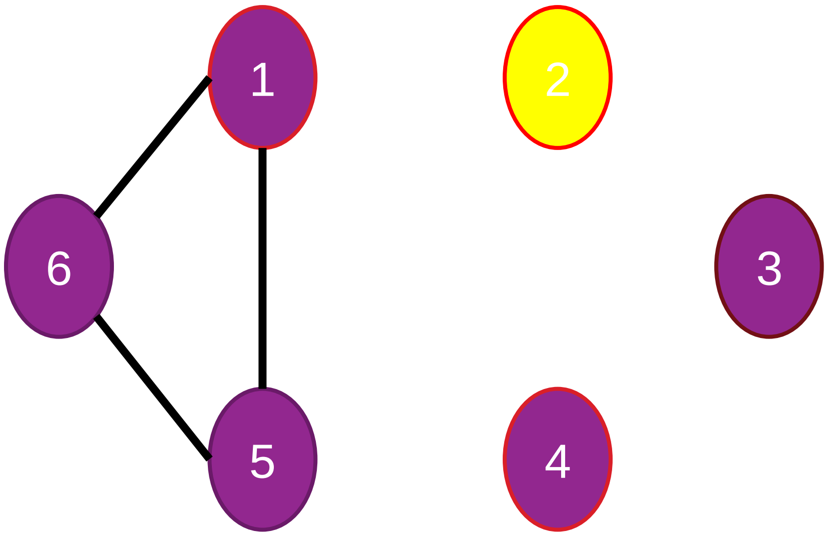
C: 5-2-3-4-5

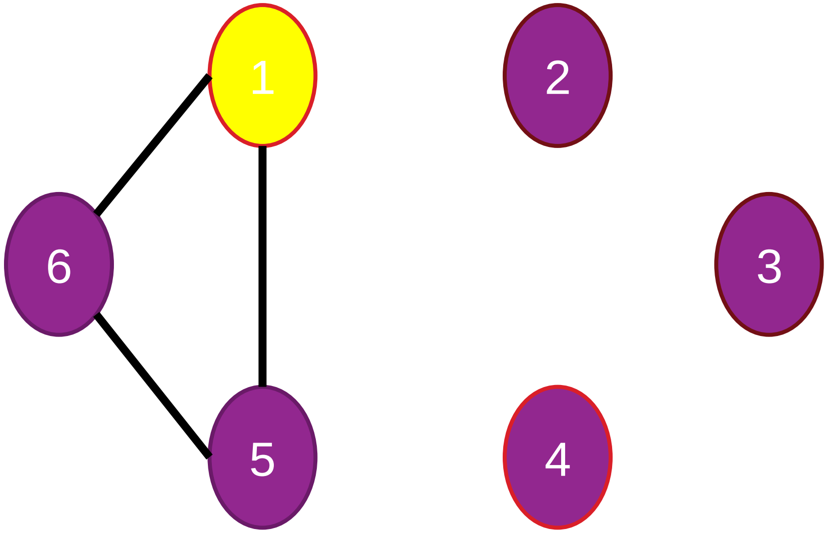
C’: 2-[illegible]-4-2



CAMINHO:

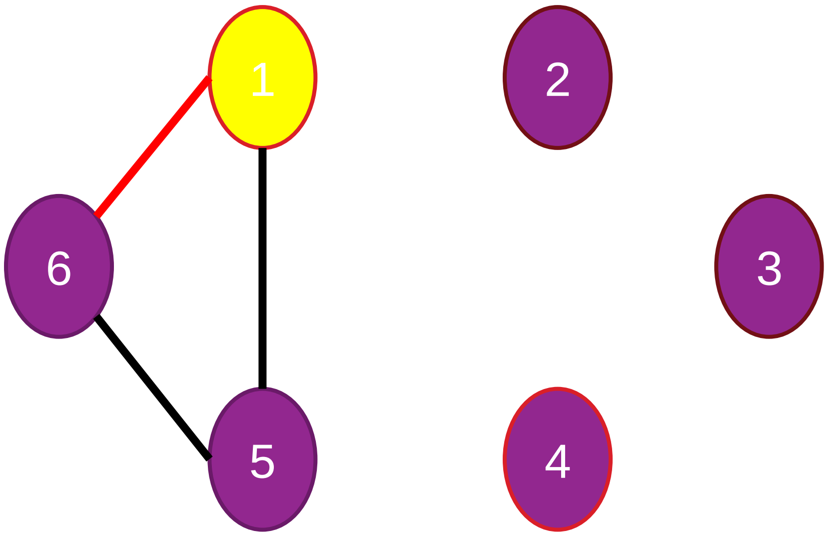
C: 5-2-1-4-2-3-4-5





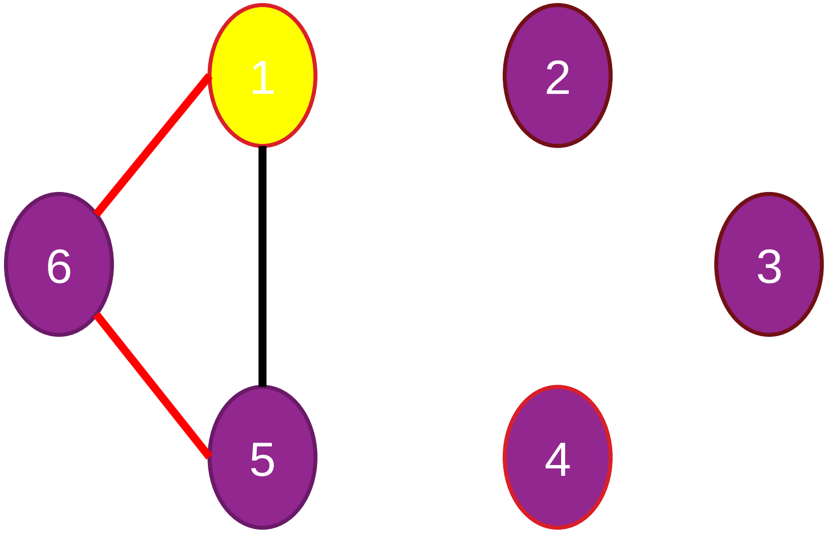
CAMINHO:
C: 5-2-1-4-2-3-4-5

C’:1



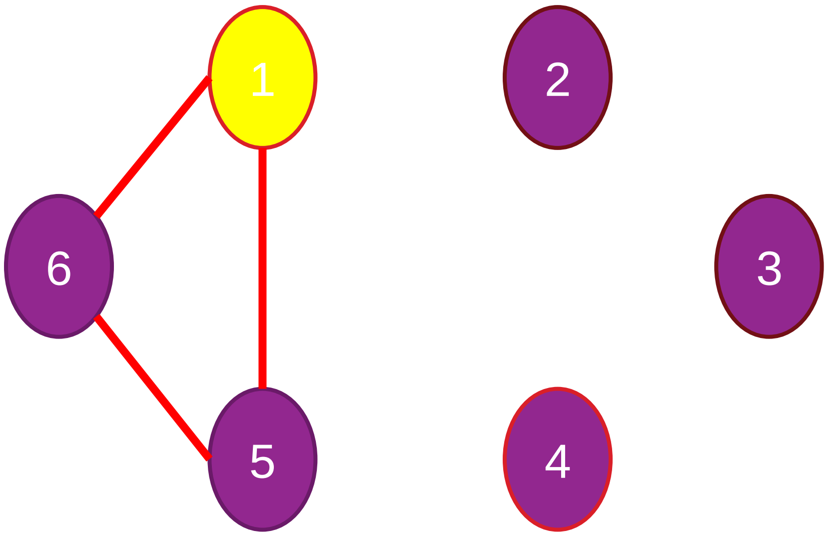
CAMINHO:
C: 5-2-1-4-2-3-4-5

C’:1-6



CAMINHO:
C: 5-2-1-4-2-3-4-5

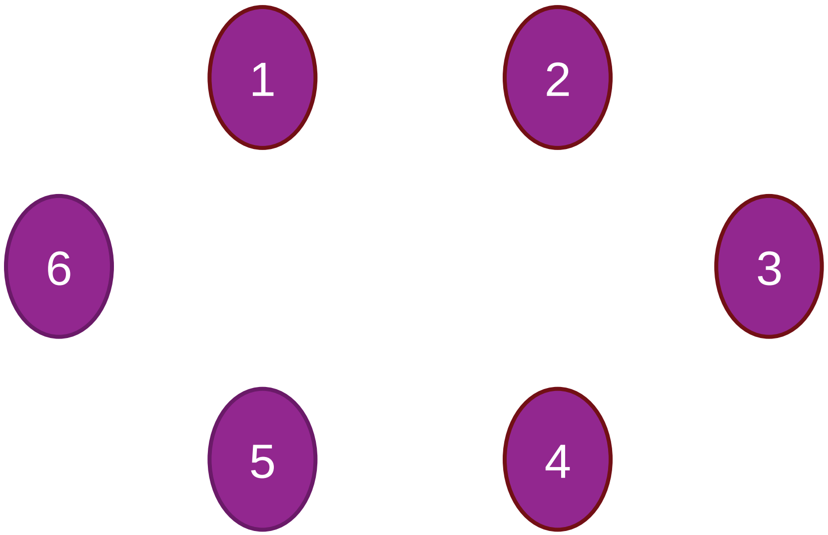
C’:1-6-5



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

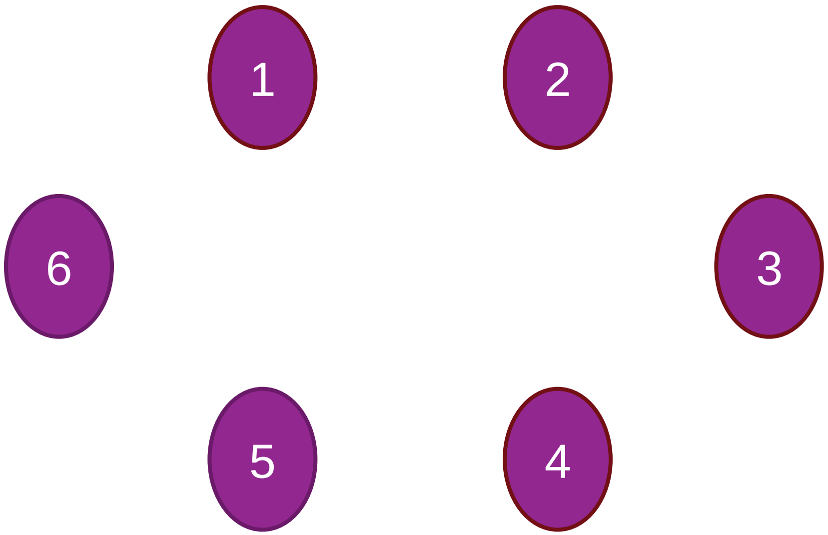
C’:1-6-5-1



CAMINHO:

C: 5-2-1-4-2-3-4-5

C’:1-6-5-1



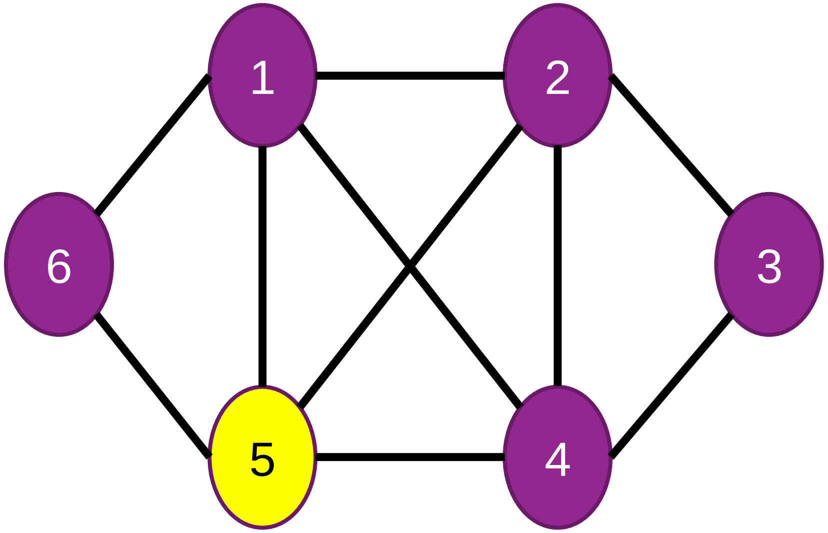
CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5

C’:1-6-5-1

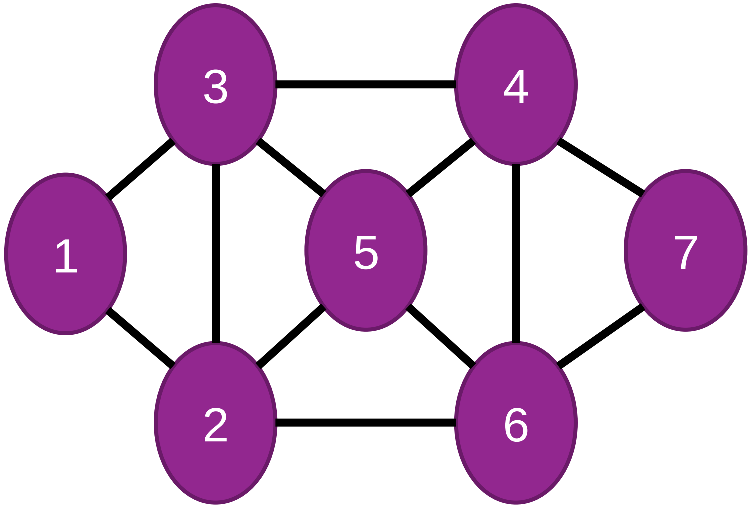
CAMINHO:

C: 5-2-1-6-5-1-4-2-3-4-5



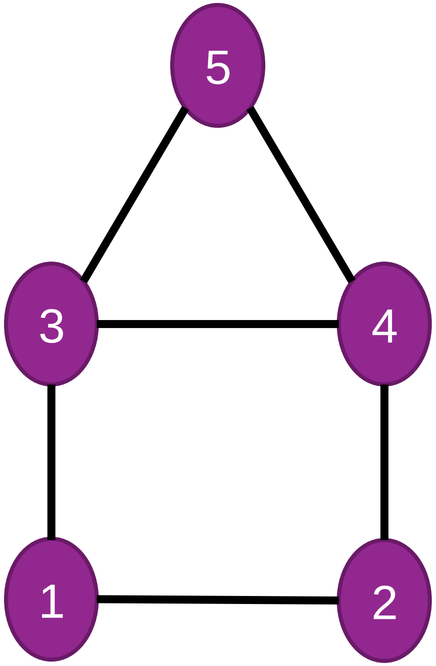
Exercício

- Usando o Algoritmo de Hierholzer, encontre o caminho euleriano no grafo abaixo, iniciando do vértice 5



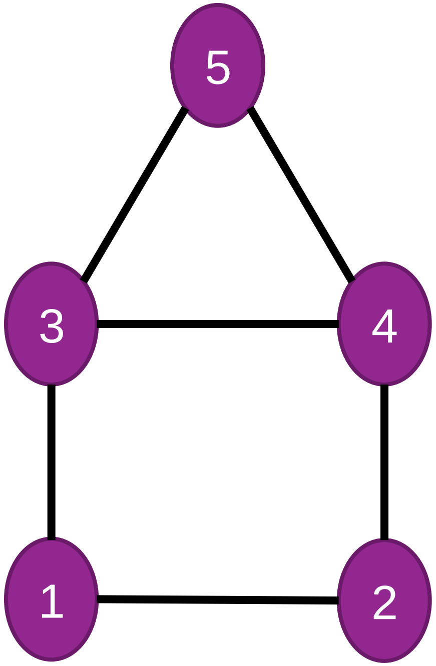
Grafos semieulerianos ou unicursais

- Um grafo é dito semieuleriano se existe um caminho aberto que passe por todas as arestas



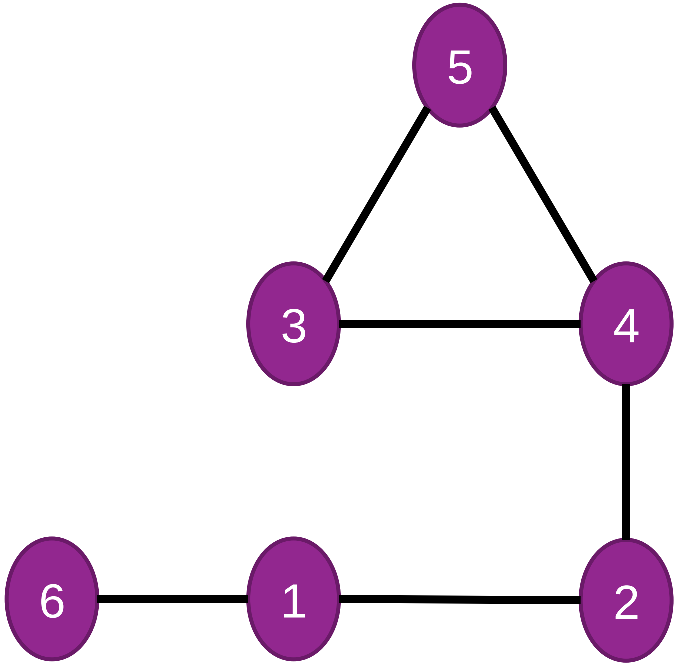
Grafos unicursais

- TEOREMA: um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



Grafos unicursais

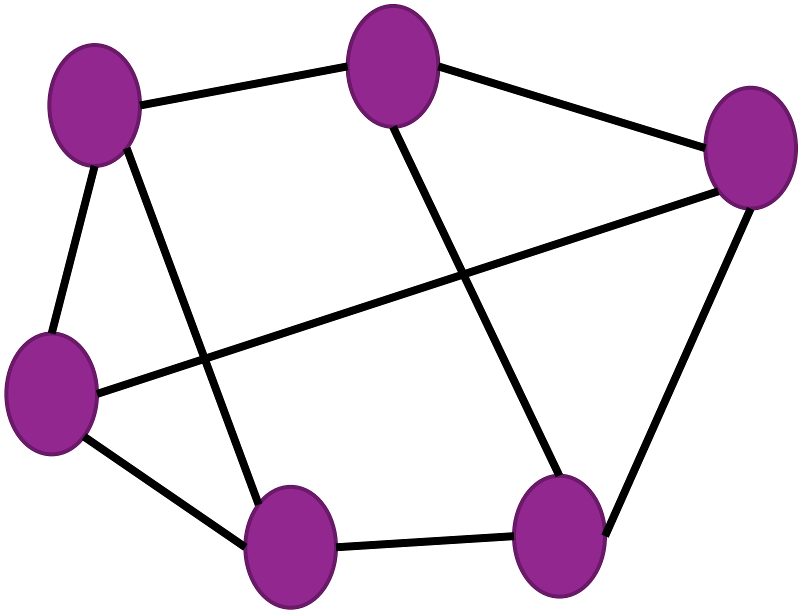
- TEOREMA: um grafo é unicursal se e somente se existem exatamente dois vértices com grau ímpar



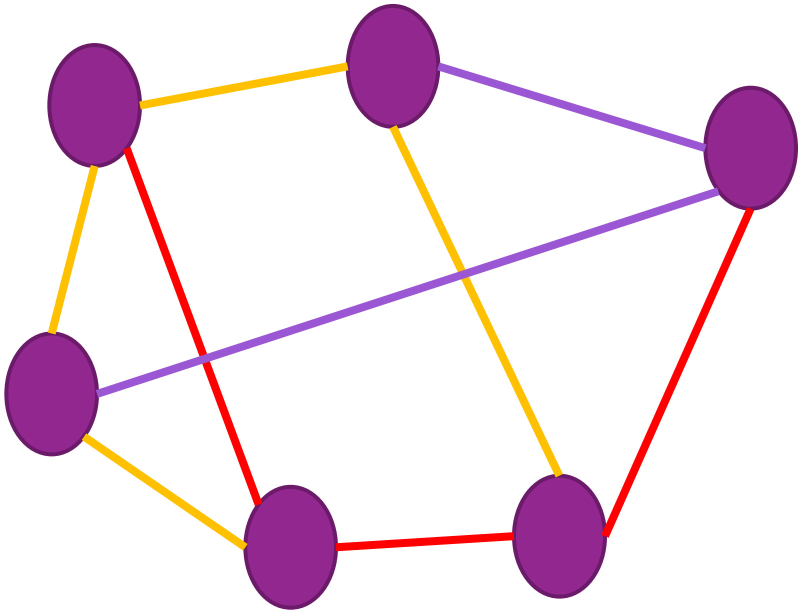
Grafos unicursais

- TEOREMA: Em um grafo conexo G com exatamente 2K vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G

Grafos unicursais



Grafos unicursais

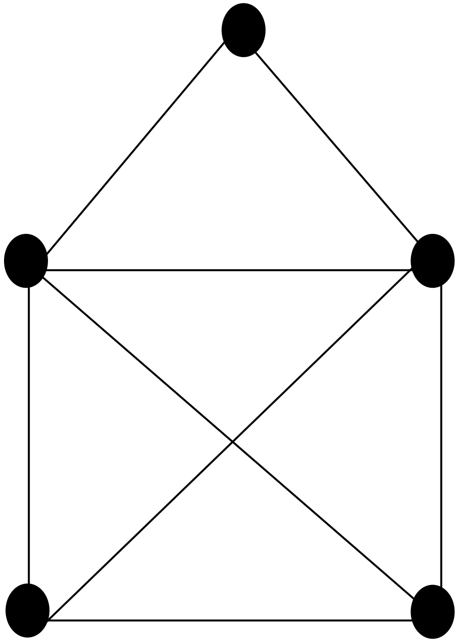


Grafos, em resumo

- Grafo euleriano: todos os vértices de grau par
- Grafo unicursal: dois vértices de grau ímpar
- Grafo qualquer: 2K vértices de grau ímpar *(k-traçável)*

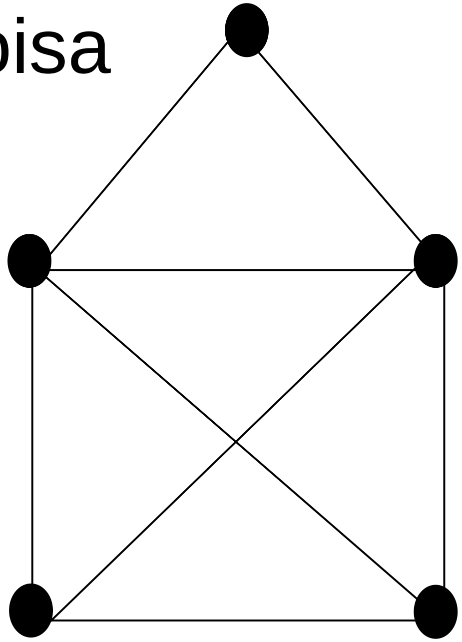
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



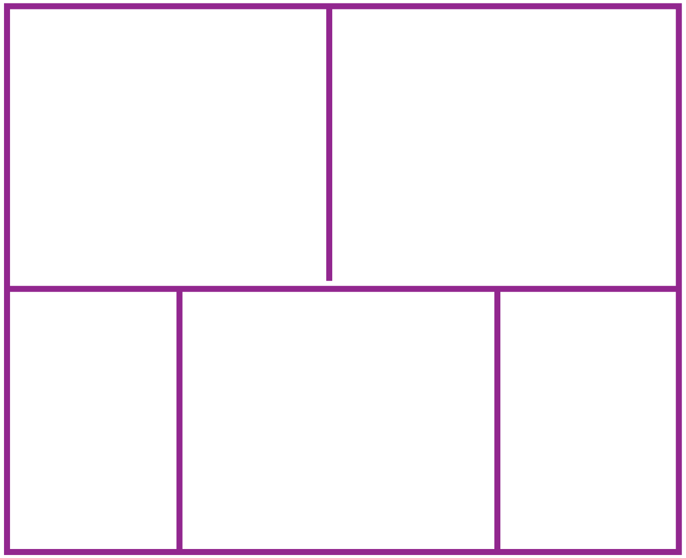
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?
- É possível fazer a mesma coisa terminando no ponto de partida?



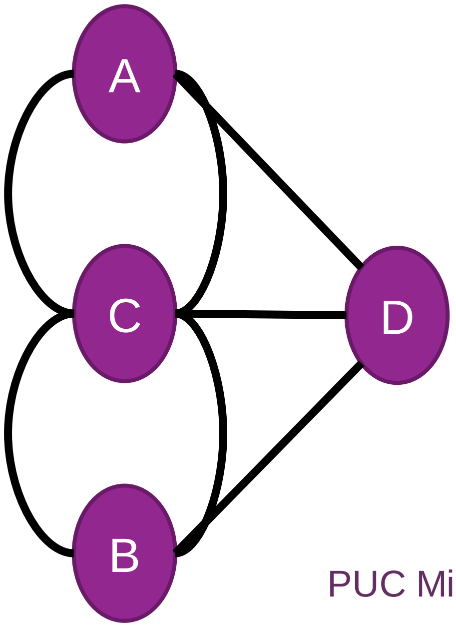
Exercício

- Quantos traços são necessários para traçar o diagrama abaixo? Ou seja, quantas vezes devemos retirar o lápis do papel para fazer o diagrama abaixo (sem retroceder)?



Exercício

- Para o grafo do problema das pontes de Königsberg, qual é o menor número de pontes que devem ser removidas para que o grafo resultante seja unicursal? Quais pontes?
- E se quisermos torná-lo um grafo Euleriano?



OBRIGADO.

Dúvidas?

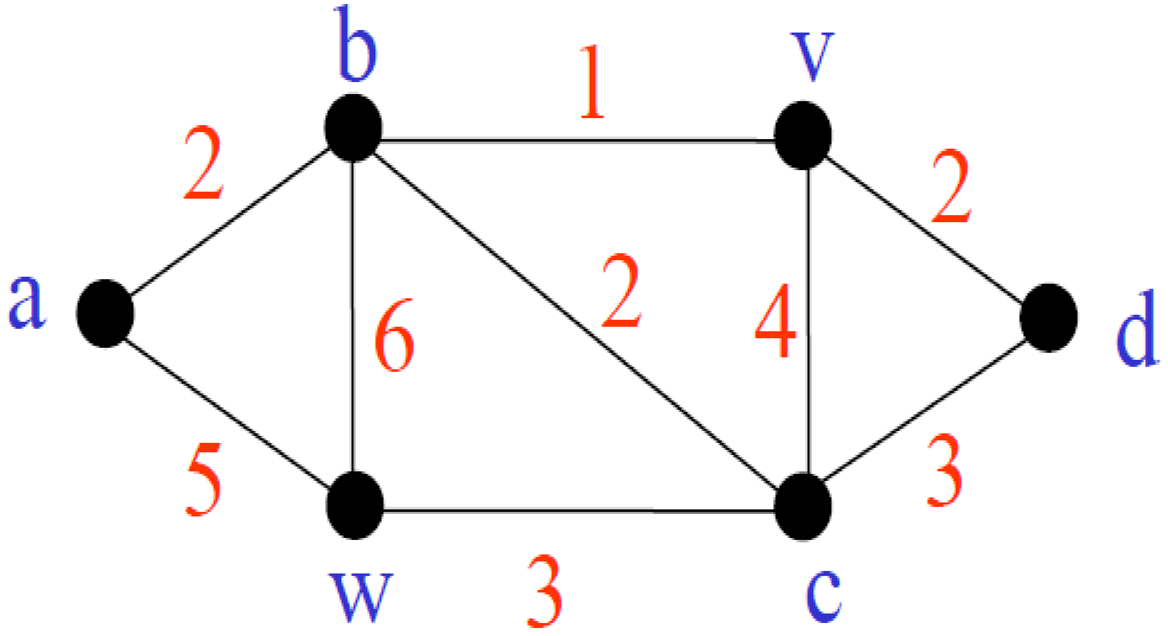
Problema do carteiro chinês

- Um carteiro deseja entregar cartas ao longo de todas as ruas de uma cidade, e retornar ao ponto inicial. Como ele pode planejar as rotas de forma a minimizar o caminho andado?

Problema do carteiro chinês

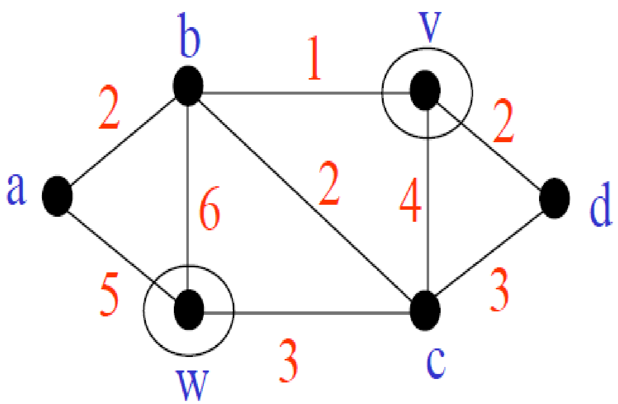
- Um carteiro deseja entregar cartas ao longo de todas as ruas de uma cidade, e retornar ao ponto inicial. Como ele pode planejar as rotas de forma a minimizar o caminho andado?
  - Se o grafo for euleriano, basta percorrer o caminho fechado de Euler
  - Caso contrário, algumas arestas serão percorridas mais de uma vez

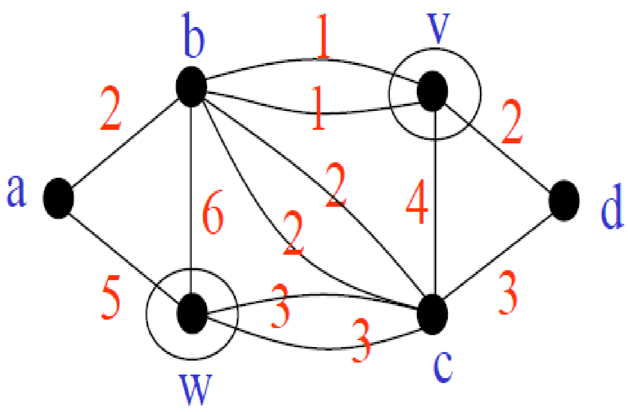
Problema do carteiro chinês



Problema do carteiro chinês

- Identifique os m nós de grau ímpar de G(N,A) (m é sempre par)
- Encontre o "casamento de pares com a mínima distância" desses m nós e identifique os m/2 caminhos mínimos deste "casamento" ótimo
- Adicione estes m/2 caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo G(N,A) contém zero vértices de grau ímpar
- Encontre um ciclo euleriano em G(N,A). Este ciclo é a solução ótima do problema no grafo original G(N,A) e o seu comprimento é igual ao comprimento total das arestas do grafo original mais o comprimento total dos m/2 caminhos mínimos





Exercício

- Qual é o caminho do carteiro chinês para o grafo abaixo?