Lista 1 – Cálculo I
Intro e rudimentos

Questão 1. Vamos definir integral para funções positivas ($f(x) \geq 0$, para todo x) como a seguir

***Definição*:** Dada uma função $f = f(x)$ positiva, a integral $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ é o valor numérico da área abaixo da curva do gráfico de f delimitada pelas assíntotas verticais localizadas em $x = a$ e $x = b$.

Tendo em vista essa definição um tanto rudimentar, calcule as seguintes integrais:

1. $\int_a^b f(x)dx$, onde $a = 0$, $b = 1$, e
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
definida como
$$f(x) = 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

2. $\int_a^b f(x)dx$, onde $a = 0$, $b = 1$ e $f(x) = x$
Para encurtar a notação, podemos escrever simplesmente $\int_0^1 f(x)dx$

3. $\int_0^1 f(x)dx$ para $f(x) = 2 + 3x$

4. $\int_{-1}^1 f(x)dx$ para $f(x) = 2 - x$

5. $\int_0^1 f(x)dx$ para $f(x) = 2 + 3x$

6. $\int_0^r f(x)dx$ para $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

7. $\int_0^2 f(x)dx$ para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \leq 1 \\ 1, & se \quad x > 1 \end{cases}$$

8. $\int_{-a}^a f(x)dx$ para $f(x) = y$ definida implicitamente pela relação
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Note que por mais sofisticado que a notação possa parecer, trata-se no fundo de calcular as áreas embaixo das curvas dadas! Em particular para a última, busque na internet qual a área de uma elipse!)

Questão 2. Calcule a quantidade $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ para as funções a seguir. Se possível, tente escrever o resultado na forma $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = g(x) + r(\Delta x)$, onde $g(x)$ é um termo que não depende da precisão Δx.

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = ax$, onde a é uma constante.
3. $f(x) = x^2$

   ($f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$, então $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Aqui, $g(x) = 2x$ e $r(\Delta x) = \Delta x$)
4. $f(x) = x^3$

   ($f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x\Delta x^2 + 3x^2\Delta x + \Delta x^3 - x^3$)
5. $f(x) = x^4$

   ($f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^4 = (\Delta x)^3(x+\Delta x) = x^4 + 6x^3\Delta x + 4x^2\Delta x^2 + 6x\Delta x^3 + \Delta x^4$)
6. $f(x) = x^5$

   Use o *Triângulo de Pascal*:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

7. $f(x) = x^n$

   Para esse caso geral, use a fórmula geral para $(a+b)^n$.

8. $f(x) = \mathrm{e}^x$

   Observe que $\mathrm{e}^{x+\Delta x} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\Delta x}$ e conclua calculando $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \mathrm{e}^x \cdot \frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

   Usando a sua calculadora científica, calcule a quantidade $\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ para precisões $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta x = 0,0001$, $\Delta x = 0,00000001$. Perceba que à medida que fazemos Δx pequeno, a quantidade $\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ se aproxima de 1.

9. $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, onde λ é uma constante.

10. $f(x) = a^x$.

    (Reduza ao caso anterior, usando o seguinte fato: $a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{\ln a\ x}$)

11. $f(x) = \sqrt{x}$

    $\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{\Delta x}} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2-(\sqrt{\Delta x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{\Delta x})}\right)$