



Manual de Usuario NumInt

Versión 1.0

Escrito por:

- Gabriel Chacón
- Daniel Rayo
- Anthony Montero
- Ricardo Borbón

Análisis Numérico para Ingeniería

Noviembre, 2023

Índice de Contenidos

| | |
|---|---|
| 1. Configuración Inicial | 2 |
| 1.1. ¿Qué es NumInt? | 2 |
| 2. Funciones Implementadas | 3 |
| 2.1. Regla del Trapecio Compuesta | 3 |
| 2.2. Regla de Simpson Compuesta | 4 |
| 2.3. Cuadratura Gaussiana Compuesta | 4 |
| 2.4. Regla del Trapecio Compuesta Iterativa | 5 |
| 2.5. Regla de Simpson Compuesta Iterativa | 6 |
| 2.6. Cuadratura Gaussiana Compuesta Iterativa | 7 |
| 2.7. Método de Romberg | 7 |

1. Configuración Inicial

1.1. ¿Qué es NumInt?

Esta librería consiste en un esfuerzo por implementar diferentes formas de aproximar la solución de integrales definidas de funciones para el ambiente de programación Octave. Contiene métodos tanto simples como avanzados

2. Funciones Implementadas

2.1. Regla del Trapecio Compuesta

El método del trapecio compuesto es una técnica numérica utilizada para aproximar el valor de una integral definida. Se basa en dividir el intervalo de integración en varios subintervalos y aplicar la regla del trapecio en cada uno de ellos. Luego, se suma el área de todos los trapecios resultantes para obtener una estimación más precisa del valor de la integral.

`I=trapecio_compuesto(f,a,b,N);`

Donde f es la función que deseamos integrar, a es el límite inferior de la integral, b es el límite superior de la integral y N es la cantidad de subintervalos que queremos que realice el método.

Fórmula matemática de la regla del trapecio es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(b + B) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Fórmula matemática de la regla del trapecio compuesto es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Donde $h=(a-b) / 2$

Ejemplo de uso

Para realizar podemos realizar lo siguiente en el entorno de Octave

Ventana de comandos

```
>> f = '(log(asin(x)))/(log(x))';  
>> a=0.1;  
>> b=0.9;  
>> N=20;  
>> I=trapecio_compuesto(f,a,b,N);  
>> I  
I = 0.5952  
>>
```

2.2. Regla de Simpson Compuesta

El método de Simpson compuesto es una técnica numérica utilizada para aproximar el valor de una integral definida. Este método es una mejora del método de Simpson simple y se basa en la idea de dividir el intervalo de integración en varios subintervalos y aplicar la regla de Simpson en cada uno de ellos.

$$\frac{b-a}{6} \left(f_n(a) + 4 f_n\left(\frac{a+b}{2}\right) + f_n(b) \right)$$

De esta forma se aplica la fórmula de Simpson anterior a cada subintervalo y posteriormente se suman hasta obtener la suma de todos los subintervalos, recreando la integral general del intervalo original.

Ejemplo de uso:

```
>> simpson_compuesto('x^2',2,3,10)  
ans = 6.3333  
>> |
```

Esto donde: el primer parámetro es la función como cadena, el segundo es el límite inferior de la integral, el tercero es el límite superior y el ultimo hace referencia a la cantidad de puntos.

2.3. Cuadratura Gaussiana Compuesta

La cuadratura gaussiana compuesta es un método numérico utilizado para aproximar el valor de una integral definida al dividir el intervalo de integración en varios subintervalos y aplicar la regla de cuadratura gaussiana en cada uno de ellos. A diferencia de la regla del trapecio, la cuadratura gaussiana utiliza nodos y pesos específicos para mejorar la precisión de la aproximación.

El método comienza eligiendo un número inicial de subintervalos. Luego, aplica la regla de cuadratura gaussiana compuesta en cada uno de estos subintervalos. La regla de cuadratura gaussiana establece que la integral de una función se puede aproximar como la

suma ponderada de los valores de la función en nodos específicos, multiplicados por pesos asociados a esos nodos.

Después de calcular la aproximación inicial de la integral, se evalúa el error entre esta aproximación y el valor exacto de la integral. Si el error es aceptable, el proceso se considera completo. Sin embargo, si la precisión deseada no se ha alcanzado, se considera aumentar el número de subintervalos y se repite el procedimiento. Este proceso iterativo continúa hasta que se logra la precisión deseada.

La convergencia del método depende de la función que se esté integrando y de la elección adecuada del número de subintervalos, así como de la elección de los nodos y pesos para la cuadratura gaussiana.

Ejemplo:

```
>> f = '(log(asin(x)))/(log(x))';  
>> a=0.1;  
>> b=0.9;  
>> N=20;  
>> I = gaussiana_compuesta(f,a,b,N);  
>> I  
I = 0.5952
```

2.4. Regla del Trapecio Compuesta Iterativa

El método del trapecio compuesto es una técnica numérica utilizada para aproximar el valor de una integral definida. Este método divide el intervalo de integración en varios subintervalos y aplica la regla del trapecio en cada uno de ellos. La regla del trapecio establece que el área bajo una curva se puede aproximar como la suma de áreas de trapecoides formados por los puntos de la curva y los lados del trapecio.

Cuando se menciona "iterativo" en relación con el método del trapecio compuesto, generalmente se refiere a la repetición del proceso con una mayor cantidad de subintervalos para mejorar la precisión de la aproximación.

El procedimiento iterativo implica los siguientes pasos:

Se elige un número inicial de subintervalos.

Se aplica la regla del trapecio compuesto para aproximar la integral en esos subintervalos.

Se calcula el error entre la aproximación actual y el valor exacto de la integral.

Si el error es aceptable, se considera la aproximación suficientemente precisa y se completa el proceso.

De lo contrario, se aumenta el número de subintervalos y se repiten los pasos 2-4.

Este proceso se repite hasta que se alcanza la precisión deseada.

Cuanto mayor sea el número de subintervalos, mayor será la precisión de la aproximación, pero también se incrementará el costo computacional.

La convergencia del método depende de la función que se esté integrando y de la elección adecuada del número de subintervalos.

Fórmula matemática:

$$\text{Aproximación} = h \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

a y b son los límites inferior y superior del intervalo de integración, respectivamente.

h es la longitud de cada subintervalo, dada por $h=(b-a)/n$ donde n es el número de subintervalos.

x_i son los puntos en los que se evalúa la función dentro de cada subintervalo, dados por $x_i=a+i \cdot h$ para $i=1,2,\dots,n-1$.

$f(x_i)$ son los valores de la función $f(x)$ evaluada en los puntos x_i .

Ejemplo de uso:

Para realizar podemos realizar lo siguiente en el entorno de Octave

```
>> f = '(log(asin(x)))/(log(x))';  
>> a=0.1;  
>> b=0.9;  
>> tol=1e-6;  
>> iterMax=2500;  
>> I=trapezio_compuesto_iterativo(f,a,b,tol,iterMax);  
>> I  
I = 0.5996  
>>
```

2.5. Regla de Simpson Compuesta Iterativa

La regla de Simpson compuesta iterativa es otro método muy parecido al método de Simpson compuesto, con la diferencia de que lo que no limita a seguir aproximando de una forma más precisa es una tolerancia o las iteraciones máximas. De esta forma va a ejecutar el mismo método de Simpson compuesto donde cada iteración lo hará con un punto más que en la iteración pasada, de esta forma el error va a disminuir cada iteración.

Ejemplo de uso:

```
>> simpson_compuesto_iterativa('x^2',2,3,1e-6,200)  
ans = 6.3333  
>> |
```

De esta forma: el primer parametro es la cadena de la funcion, el segunda parametro es el limite inferior de la integral, el tercero es el limite superior de la integral, el cuarto es la tolerancia y el quinto es la cantidad de iteraciones maximas que se quieren permitir.

2.6. Cuadratura Gaussiana Compuesta Iterativa

El método de la cuadratura gaussiana compuesta iterativa es una técnica numérica empleada para estimar el valor de una integral definida. Al igual que el método del trapecio compuesto, divide el intervalo de integración en varios subintervalos y aplica la regla de cuadratura gaussiana en cada uno de ellos.

La regla de cuadratura gaussiana establece que la integral de una función se puede aproximar como la suma ponderada de los valores de la función en ciertos puntos denominados nodos, multiplicados por pesos asociados a esos nodos.

Cuando se menciona "iterativo" en relación con el método de la cuadratura gaussiana compuesta, usualmente se refiere a la repetición del proceso con una mayor cantidad de subintervalos para mejorar la precisión de la aproximación.

El procedimiento iterativo implica los siguientes pasos:

1. Se elige un número inicial de subintervalos.
2. Se aplica la regla de cuadratura gaussiana compuesta para aproximar la integral en esos subintervalos utilizando nodos y pesos específicos.
3. Se calcula el error entre la aproximación actual y el valor exacto de la integral.
4. Si el error es aceptable, se considera la aproximación suficientemente precisa y se completa el proceso. De lo contrario, se aumenta el número de subintervalos y se repiten los pasos 2-4.
5. Este proceso se repite hasta que se alcanza la precisión deseada. Cuanto mayor sea el número de subintervalos, mayor será la precisión de la aproximación, pero también se incrementará el costo computacional.

Ejemplo:

```
>> f = '(log(asin(x)))/(log(x))';
>> a=0.1;
>> b=0.9;
>> tol=1e-6;
>> iterMax=2500;
>> I = gaussiana_compuesta_iterativa(f,a,b,tol,iterMax)
I = 0.5996
>> |
```

2.7. Método de Romberg

Este método calcula una aproximación problema inicial de la integral definida de una función utilizando como base la regla del trapecio compuesta y un método llamado extrapolación de Richardson para optimizar aproximaciones.

res = romberg(func, a, b, k)

Donde func es la función que deseamos integrar, a es el límite inferior de la integral, b es el límite superior de la integral y k es la cantidad de iteraciones que queremos que realice el método, entre mayor sea el número de k, mejor será la aproximación.

El método genera el resultado deseado usando una matriz triangular inferior de tamaño k donde la primera columna se genera utilizando la siguiente fórmula de la regla del trapecio compuesta:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

Donde a y b son los límites de integración, h es la longitud de cada subintervalo, definida como $h = (b - a) / n$, donde n es el número de subintervalos y por último x_1, x_2, \dots, x_{n-1} son los puntos dentro de cada subintervalo.

El resto de las columnas de la matriz triangular se obtiene de la implementación del método de extrapolación de Richardson. Para ello aplicamos la siguiente fórmula a las posiciones dentro y debajo de la diagonal principal.

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1} (R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}), \quad \text{para } k = j, j + 1$$

La idea básica es realizar varias aproximaciones con diferentes niveles de precisión (usando regla del trapecio compuesto) y luego combinar estas aproximaciones con la extrapolación para obtener un resultado más preciso.

De esta forma, el resultado en la posición (k,k) contiene la aproximación más cercana y la que presentaremos al usuario como el resultado de la función.

Ejemplos de uso

Si deseamos aproximar el resultado de la siguiente integral definida

$$\int_{0.1}^{0.9} \log_x(\arcsin(x)) dx$$

Para realizar podemos realizar lo siguiente en el entorno de Octave

```
>> func = @(x) log(asin(x))/log(x);
>> a = 0.1;
>> b = 0.9;
>> k = 10;
>> res = romberg(func,a,b,k)
res = 8.9193e-04
```

En el ejemplo anterior, definimos los parámetros antes de utilizar la función del método de Romberg, pero también podemos colocarlos directamente a la hora de llamar la función, como en el siguiente ejemplo en donde queremos resolver:

$$\int_1^5 (x + 1)dx$$

Para realizarlo todo en una sola línea de código, insertamos lo siguiente

```
>> res = romberg(@(x) x+1,1,5,20)
res = 16
```