Análisis Numérico para Ingeniería

Tarea #3 - Pregunta 2 – Grupo 5

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Método de Romberg

Este método numérico se utiliza para aproximar el resultado de una integral definida de la forma:

$$y = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Este método resulta de la unión de dos métodos adicionales, el primero usado para aproximar la solución del problema 1 llamado el método del trapecio y el segundo método se utiliza para mejorar aproximaciones numéricas llamado el método de extrapolación de Richardson.

Esta estrategia de Romberg construye una matriz triangular inferior (ceros arriba de la diagonal principal), en donde la primera columna se calcula utilizando el método del trapecio para generar aproximaciones de y para diferentes cantidades de intervalos.

Este método consiste en dividir el área bajo la curva de la función en segmentos trapezoidales y calcular la suma de las áreas de estos trapezoides para obtener una aproximación de la integral.

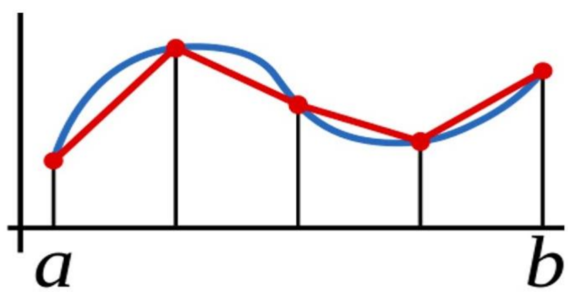

Figura 1. Representación gráfica del funcionamiento del método del trapecio para el cálculo de integrales definidas.

La fórmula básica para la aproximación de la integral usando el método del trapecio se expresa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\big) \tag{2}$$

Donde a y b son los límites de integración, h es la longitud de cada subintervalo, definida como $h = (b-a)/\,n$, donde n es el número de subintervalos y por último $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ son los puntos dentro de cada subintervalo.

Si tomamos T(n) como el método del trapecio para n subintervalos. La primera columna de la matriz de Romberg se construye de la siguiente forma:

Tabla 1. Construcción de la primera columna de la matriz de Romberg utilizando el método del trapecio.

$\boldsymbol{(i,1) = T(2^{i-1})}$
$(1,1) = T(1)$
$(2,1) = T(2)$
$(3,1) = T(4)$
...
$(k,1) = T(2^{k-1})$

En donde i es el número de fila en el que nos encontramos y k es el tamaño de la matriz (este k lo definimos en función de cuantas iteraciones queremos que realice nuestro método de Romberg).

Luego para el resto de las columnas de la matriz, en específico las posiciones en y debajo de la diagonal principal, se utiliza el otro método involucrado; la extrapolación de Richardson

Este método se basa en la observación de que el error en la aproximación numérica tiene una relación sistemática con el tamaño del paso utilizado. Al realizar varias aproximaciones con diferentes tamaños de paso y luego ajustar estos resultados se puede obtener una aproximación más precisa al eliminar términos de error de orden superior.

Utilizando la fórmula característica de este tipo de extrapolación y aplicándola para nuestro problema en específico, logramos obtener la siguiente ecuación para las posiciones restantes de la matriz.

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1}-1}\left(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right), \quad para\ k = j, j+1 \qquad 3$$

Tenemos que observar que esta fórmula depende de valores anteriores por lo tanto las posiciones de la matriz se deben de calcular en orden desde la columna 2 hasta la columna k. El resultado final de la matriz se observa de la siguiente forma:

Tabla 2. Construcción de la primera columna de la matriz de Romberg utilizando el método del trapecio.

$T(1)$	0	0	...	0
$T(2)$	$R_{2,2}$	0	...	0
$T(4)$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	...	0
...	...	...	...	...
$T(2^{(k-1)})$	$R_{k,2}$	$R_{k,3}$	...	$R_{k,k}$

La idea básica es realizar varias aproximaciones con diferentes niveles de precisión (usando regla del trapecio compuesto) y luego combinar estas aproximaciones con la extrapolación para obtener un resultado más preciso. De esta forma, el resultado en la posición (k, k) contiene la aproximación más cercana y la que presentaremos el resultado final.

Ejemplos

Si queremos calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{-3}^{3} \ln(4x^2 + 4)\, dx$$

Utilizando un valor de k = 4. Es decir, queremos que la matriz construida sea de tamaño k por k. La matriz en cuestión se construiría de la siguiente forma.

$T(1)$	0	0	0
$T(2)$	$R_{2,2}$	0	0
$T(4)$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	0
$T(8)$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$

Un ejemplo de cómo se calcularía uno de los valores de la primera columna lo encontramos a continuación.

$$T(1) = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = \frac{b-a}{2}(\ln(4a^2 + 4) - \ln(4b^2 + 4))$$

$$T(1) = \frac{3+3}{2}(\ln(4 * (-3)^2 + 4) - \ln(4 * \ 3^2 + 4))$$

$$T(1) = 22.1333$$

El resto de los valores de la primera columna los calculamos de manera análoga al valor anterior. Una vez finalizado, actualizamos la tabla con los valores

22.1333	0	0	0
15.2255	$R_{2,2}$	0	0
15.3076	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$	0
15.1853	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$

Para los valores restantes de la tabla, utilizamos la fórmula 3 de la extrapolación de Richardson. Igual que en el paso anterior mostraremos el cálculo para una de las casillas, en específico el valor de $R_{2,2}$

$$R_{2,2} = R_{2,2-1} + \frac{1}{4^{2-1} - 1}\big(R_{2,2-1} - R_{2-1,2-1}\big)$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{4-1}\left(R_{2,1} - R_{1,1}\right)$$

$$R_{2,2} = 15.2255 + \frac{1}{4-1}(15.2255 - 22.1333)$$

$$R_{2,2} = 12.9229$$

El resto de los valores de la tabla se obtienen de forma análoga al cálculo anterior, cabe resaltar que debemos ir completando las columnas por orden, de izquierda a derecha y de arriba abajo para no tener problemas. La matriz final es:

22.1333	0	0	0
15.2255	12.9229	0	0
15.3076	15.3350	15.4958	0
15.1853	15.1445	15.1318	15.1261

Y ya en este punto lo ultimo que queda es tomar la aproximación ubicada en la última posición de la diagonal principal, en este caso $R_{4,4}$ y reportarlo como el resultado del método de Romberg.