

**MOwNiT – temat 7**

**Rozwiązywanie układów równań  
liniowych metodami iteracyjnymi**

Gabriel Cyganek

## Dane techniczne

Do napisania programu wykonującego zadania użyłem języka Python. Wykorzystałem bibliotekę *numpy* do wykonywania operacji na macierzach (funkcja *matmul* do mnożenia macierzy, *linalg.norm* do wyliczania normy euklidesowej oraz *linalg.eigvals* do wyznaczania wartości własnych macierzy iteracji). Wykonywanie programu odbywało się na systemie Windows 10 x64 na komputerze z procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz.

## Zadanie 1 – algorytm postępowania

Mając dany układ równań liniowych  $Ax_{perm} = b$ , gdzie macierz  $A$  dana jest wzorem:

$$A = \begin{cases} a_{i,i} = 10 \\ a_{i,j} = \frac{1}{|i-j|+5} \text{ dla } i \neq j \end{cases}$$

Oraz  $x_{perm}$  to  $n$ -elementowy wektor złożony z samych jedynek wyznaczyłem wektor  $b$ .

Następnie metodą Jacobiego rozwiązywałem układ równań  $Ax = b$  podstawiając za  $b$  wyznaczony wyżej wektor i przyjmując za niewiadomą wektor  $x$ .

Przyjmowałem kryteria stopu realizowane funkcją *numpy.linalg.norm()* obliczającą pierwiastek z sum kwadratów elementów macierzy/wektorów:

- $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$
- $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

gdzie  $x^{(i)}$  to wektor rozwiązania  $x$  dla  $i$ -tej iteracji. Za  $\rho$  przyjmowałem wartości 1E-2, 1E-4, 1E-6, 1E-8, 1E-10, 1E-12, 1E-14.

Obliczenia wykonywałem dla różnych rozmiarów układu  $n = 5, 10, 15, \dots, 50$  oraz 100, 200, 300, 400, 500

Używałem różnych wektorów początkowych  $x^{(0)}$ : złożone z samych 1, 10, 100, 1000, -10, -100 lub -1000, a także wektora złożonego naprzemiennie z -1000 i 1000.

Dokładność otrzymywanych rozwiązań badałem obliczając normę euklidesową różnicy otrzymanego rozwiązania  $x$  oraz  $x_{perm}$  (funkcją *numpy.linalg.norm*) i oznaczam w tabelach jako „Błąd  $x$  wyliczonego”

## Zadanie 1 – rezultaty i wnioski

Metoda Jacobiego dla różnych wektorów początkowych  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}$ , rozmiaru macierzy  $n = 50$  oraz obu kryteriów stopu.

Elementy wektora początkowego	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
10	21	1.534E-09
100	23	1.645E-09
1000	25	1.619E-09
-1	20	1.091E-09
-10	21	1.874E-09
-100	23	1.678E-09
-1000	25	1.622E-09
Naprzemiennie {-1000, 1000}	19	1.747E-09

**Tabela 1.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o rozmiarze  $n = 50$ , zmiennego wektora  $x^0$ ,  $\rho=10^{-8}$ , kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Elementy wektora początkowego	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
10	22	4.789E-10
100	24	5.138E-10
1000	26	5.056E-10
-1	21	3.408E-10
-10	22	5.854E-10
-100	24	5.241E-10
-1000	26	5.066E-10
Naprzemiennie {-1000, 1000}	20	5.457E-10

**Tabela 2.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o rozmiarze  $n = 50$ , zmiennego wektora  $x^0$ ,  $\rho=10^{-8}$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Na podstawie **Tabel 1. i 2.** można wywnioskować, że stosowanie różnych wektorów początkowych  $x^0$  ma wpływ na otrzymywane wyniki. Im większe różnice elementów wektora początkowego od elementów zadanego rozwiązania  $x$ , tym więcej iteracji potrzebuje metoda Jacobiego przy wektorach  $x^0$  złożonych z takich samych elementów. Przy  $x^0$  złożonym naprzemiennie z 1000 i -1000 liczba iteracji okazała się być najmniejsza, a otrzymany błąd rozwiązania nie różni się znacząco od tych otrzymanych w pozostałych badanych przypadkach. Dla kryterium stopu przyrostowego otrzymałem zwykle o 1-2 iteracje mniej niż dla kryterium residualnego. Metoda Jacobiego potrafi być minimalnie szybciej zbieżna dla kryterium przyrostowego, choć otrzymywane błędy przy jego stosowaniu są zwykle o jeden rząd większe. Wybór kryterium stopu zależy zatem od tego, czy zależy nam na mniejszej liczbie iteracji, czy większej dokładności rozwiązania.

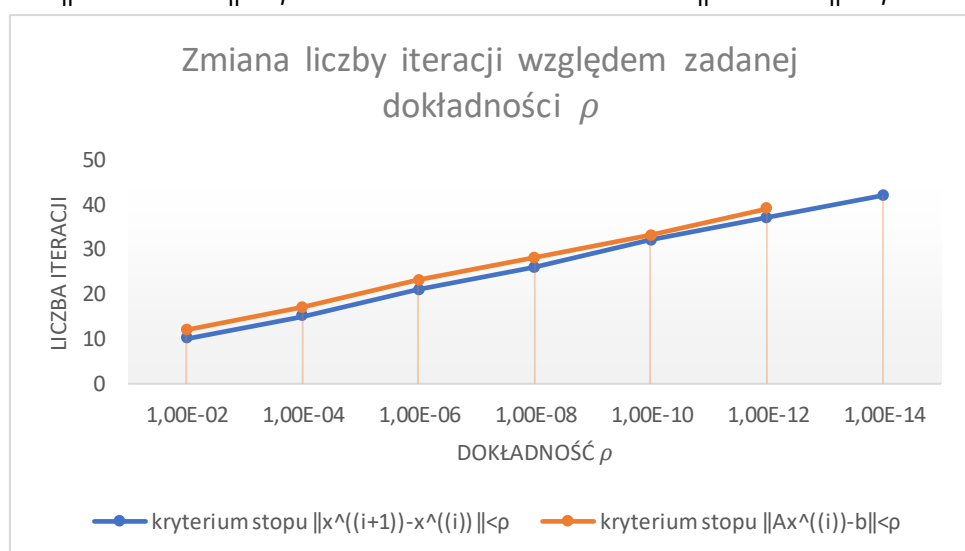
**Metoda Jacobiego dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ , różnych dokładności  $\rho$ , rozmiaru macierzy  $n = 100$  oraz obu kryteriów stopu.**

$\rho$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
1.000E-02	10	1.966E-03
1.000E-04	15	2.772E-05
1.000E-06	21	1.666E-07
1.000E-08	26	2.348E-09
1.000E-10	32	1.412E-11
1.000E-12	37	1.983E-13
1.000E-14	42	3.771E-15

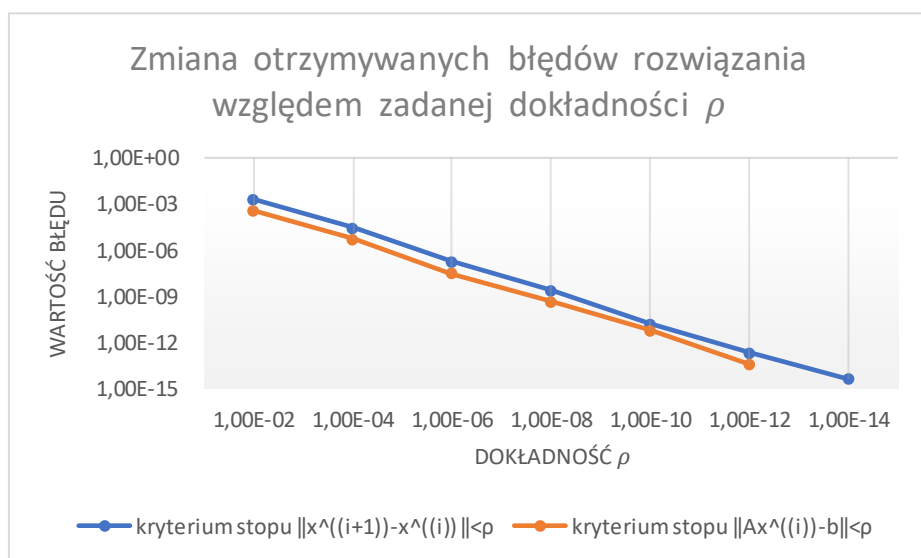
**Tabela 3.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o rozmiarze  $n = 100$ , zerowego wektora  $x^0$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

$\rho$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
1.000E-02	12	3.575E-04
1.000E-04	17	5.039E-06
1.000E-06	23	3.029E-08
1.000E-08	28	4.270E-10
1.000E-10	33	6.018E-12
1.000E-12	39	3.518E-14
1.000E-14	Nie zbiega	===

**Tabela 4.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o rozmiarze  $n = 100$ , zerowego wektora  $x^0$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$



**Wykres 1.** Zmiana liczby iteracji względem zadanej dokładności  $\rho$  na podstawie Tabel 3. i 4.



**Wykres 2.** Zmiana otrzymywanych błędów rozwiązania względem zadanej dokładności  $\rho$  na podstawie Tabel 3. i 4., skala logarytmiczna

Tym razem analizując **Tabele 3. i 4.** (przedstawione także na **Wykresach 1. i 2.**) widać wyraźne różnice pomiędzy stosowanym kryteriami stopu dla początkowego wektora  $x^0$  zerowego. Dla zbadanych przypadków kryterium stopu przyrostowe okazało się mniej wymagające, przez co potrzebuje 1-2 iteracji mniej w porównaniu do drugiego kryterium, ale przez to wynik ma błędy względem prawdziwego rozwiązania  $x$  większe o jeden rząd wielkości. Dla  $\rho = 1E-14$  kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$  okazuje się zbyt wymagające, nie pozwala na uzyskanie rozwiązania.

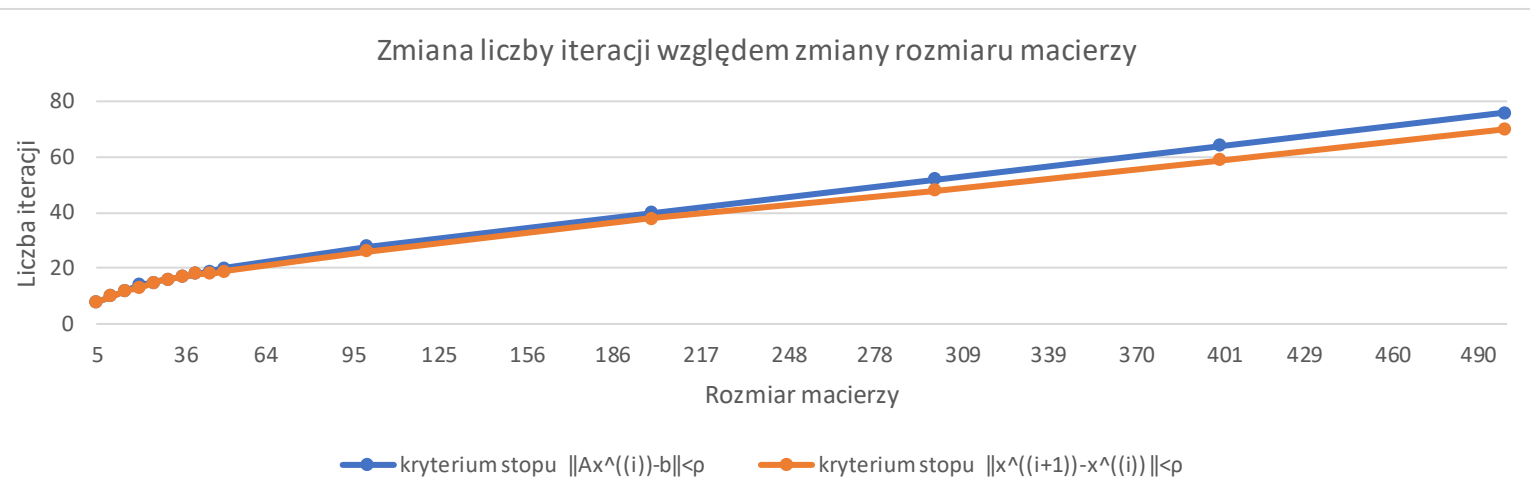
**Metoda Jacobiego dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}$ , różnych rozmiarów macierzy  $n$  i obu kryteriów stopu.**

Rozmiar macierzy	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
5	8	3.016E-10
10	10	8.979E-10
15	12	5.676E-10
20	13	1.299E-09
25	15	4.151E-10
30	16	5.514E-10
35	17	6.236E-10
40	18	6.356E-10
45	18	2.038E-09
50	19	1.747E-09
100	26	2.348E-09
200	38	1.982E-09
300	48	3.028E-09
400	59	2.854E-09
500	70	3.357E-09

**Tabela 5.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Rozmiar macierzy	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
5	8	3.016E-10
10	10	8.979E-10
15	12	5.676E-10
20	14	2.400E-10
25	15	4.151E-10
30	16	5.514E-10
35	17	6.236E-10
40	18	6.356E-10
45	19	6.036E-10
50	20	5.457E-10
100	28	4.270E-10
200	40	6.010E-10
300	52	4.661E-10
400	64	4.184E-10
500	76	4.836E-10

**Tabela 6.** Wyniki działania metody Jacobiego dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$



**Wykres 3.** Zmiana liczby iteracji względem zmiany rozmiaru macierzy na podstawie **Tabel 5. i 6.**

Z **Tabel 5. i 6.** (oraz **Wykresu 3.** na ich podstawie) można wywnioskować, że metoda Jacobiego dla obu kryteriów stopu przy identycznej dokładności  $\rho$  oraz tym samym wektorze początkowym  $x^0$  zachowuje się bardzo podobnie dla mniejszych rozmiarów macierzy ( $n \leq 50$ ). Wtedy poza nielicznymi wyjątkami otrzymujemy taką samą liczbę iteracji i te same błędy otrzymywanego rozwiązania. Tymi wyjątkami są przypadki, gdzie dla kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$  otrzymujemy o jedną iterację mniej, ale tracąc przy tym nieco na dokładności. Widać to na przykład porównując otrzymane rezultaty w tych tabelach dla  $n = 20$ . Dla większych rozmiarów macierzy kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$  jest ponownie zauważalnie bardziej wymagające, dla  $n = 500$  potrzebuje 6 iteracji więcej względem drugiego kryterium do uzyskania pożądanego rozwiązania, ale rekompensuje ten dodatkowy koszt dokładniejszym otrzymywanym rozwiązaniem.

Czasy wykonania metody Jacobiego dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}$ , różnych rozmiarów macierzy  $n$  i obu kryteriów stopu.

Rozmiar macierzy	Czas wykonania [s]	Liczba iteracji
100	0.1205031	26
200	0.6787164	38
300	1.9425378	48
400	4.7400543	59
500	7.5989236	70
600	13.0222674	82
700	20.8966678	96
800	33.1610252	111
900	48.7237264	129
1000	71.5336308	149

**Tabela 7.** Czas wykonywania metody Jacobiego dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Rozmiar macierzy	Czas wykonania [s]	Liczba iteracji
100	0.1445680	28
200	0.7233751	40
300	2.3692252	52
400	4.9374052	64
500	9.3310242	76
600	15.1153466	89
700	24.023032	104
800	36.4800694	121
900	50.5514024	141
1000	76.3811867	164

**Tabela 8.** Czas wykonywania metody Jacobiego dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Czasy wykonywania się metody Jacobiego (**Tabele 7. i 8.**) dla kryterium przyrostowego są krótsze niż dla kryterium residualnego. Widać to zwłaszcza dla większych rozmiarów macierzy. Wpływ na to ma na pewno fakt, że dla kryterium residualnego potrzebujemy zauważalnie większej liczby iteracji. Może to wynikać też z faktu, że stosując kryterium residualne przy każdej iteracji sprawdzamy to kryterium, które w związku z tym, że mnożymy macierz przez wektor, a następnie odejmujemy dwa wektory od siebie jest obliczeniowo bardziej złożone od kryterium przyrostowego, gdzie mamy tylko różnicę wektorów.

## Zadanie 2 – algorytm postępowania

Dla metody Jacobiego otrzymujemy macierz iteracji  $M = D^{-1}(L + U)$ , gdzie:

$$D = \begin{cases} d_{i,j} = 0 & \text{dla } i \neq j \\ d_{i,i} = a_{i,i} \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} l_{i,j} = 0 & \text{dla } i \geq j \\ l_{i,j} = a_{i,j} & \text{dla } i < j \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} u_{i,j} = 0 & \text{dla } i \leq j \\ u_{i,j} = a_{i,j} & \text{dla } i > j \end{cases}$$

Dla  $a_{i,j}$  będącymi elementami macierzy  $A$ .

Promień spektralny macierzy, to największy z modułów wartości własnych danej macierzy.

Dla macierzy iteracji badanych układów równań liniowych obliczałem promień spektralny wyznaczając wartości własne każdej z nich funkcją *numpy.linalg.eigvals*, a następnie biorąc wartość największego modułu z tych wartości własnych.

Macierz  $D^{-1}$  obliczałem przez podniesienie do potęgi  $-1$  wszystkich wartości na głównej przekątnej macierzy  $D$ .

## Zadanie 2 – rezultaty i wnioski

**Promienie spektralne macierzy iteracji o różnych rozmiarach  $n$  dla metody Jacobiego**

Rozmiar macierzy	Promień spektralny
5	5.838E-02
10	1.110E-01
15	1.516E-01
20	1.847E-01
25	2.129E-01
30	2.373E-01
35	2.590E-01
40	2.784E-01
45	2.961E-01
50	3.123E-01
100	4.264E-01
200	5.506E-01
300	6.264E-01
400	6.811E-01
500	7.240E-01
2042	9.999E-01
2043	1.000E+00

**Tabela 9.** Promienie spektralne dla macierzy iteracji o różnych rozmiarach

Promień spektralny macierzy iteracji dla zbadanych przypadków był zawsze mniejszy od 1, co było warunkiem zbieżności metody Jacobiego dla dowolnego wektora początkowego  $x^0$ . Biorąc pod uwagę trend wzrostowy promienia spektralnego względem rozmiaru macierzy można wywnioskować, że dla jeszcze większych rozmiarów macierzy  $n$  metoda Jacobiego niekoniecznie musi być zbieżna. Warunek wystarczający zbieżności związany z wartością promienia spektralnego macierzy iteracji rzeczywiście nie jest spełniony dla  $n \geq 2043$ . Widać, że promień spektralny rośnie znacząco dla mniejszych wartości  $n$ , a potem zmienia się w coraz mniejszym stopniu.



### Zadanie 3 – algorytm postępowania

Eksperyment przeprowadzałem analogicznie jak w zadaniu 1 z takimi samymi parametrami, stosując metodę kolejnych nadrelaksacji SOR. Ponadto doбираłem różne wartości  $\omega = 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 1.6, 1.8$ , chociaż w większości przypadków w tabelach ukazane są rezultaty dla  $\omega = 0.5, 1, 1.5$ , gdyż stwierdziłem, że najlepiej będzie porównać wyniki dla wartości ze środka przedziału  $(0, 2)$ , poza którym metoda SOR niekoniecznie musi być zbieżna oraz dla środków podprzedziałów  $(0, 1)$  oraz  $(1, 2)$  na które dzieli przedział  $(0, 2)$  wartość 1.

Macierz iteracji w metodzie kolejnych nadrelaksacji SOR:

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} + \omega \mathbf{U}]$$

Gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{cases} d_{i,j} = 0 & \text{dla } i \neq j \\ d_{i,i} = a_{i,i} \end{cases}$$

$$\mathbf{L} = \begin{cases} l_{i,j} = 0 & \text{dla } i \geq j \\ l_{i,j} = a_{i,j} & \text{dla } i < j \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = \begin{cases} u_{i,j} = 0 & \text{dla } i \leq j \\ u_{i,j} = a_{i,j} & \text{dla } i > j \end{cases}$$

Przy wyliczaniu  $(\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1}$  zastosowałem funkcję `numpy.linalg.inv` do odwracania macierzy.

### Zadanie 3 – rezultaty i wnioski

Metoda SOR dla różnych wektorów początkowych  $x^0$ ,  $\omega = \{0.5, 1, 1.5\}$ , dokładności  $\rho = 10^{-8}E$ , rozmiaru macierzy  $n = 50$  oraz obu kryteriów stopu.

Elementy wektora początkowego	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
10	1	11	8.716E-11
100	1	12	1.074E-10
1000	1	13	9.578E-11
Naprzemiennie {-1000, 1000}	1	12	3.828E-11
10	0.5	29	9.707E-09
100	0.5	33	6.493E-09
1000	0.5	36	8.087E-09
Naprzemiennie {-1000, 1000}	0.5	41	5.577E-09
10	1.5	40	2.502E-09
100	1.5	44	2.465E-09
1000	1.5	48	2.419E-09
Naprzemiennie {-1000, 1000}	1.5	42	2.113E-09

**Tabela 10.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n = 50$ , zmiennego wektora  $x^0$ ,  $\rho=10^{-8}E$ , kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Elementy wektora początkowego	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
10	1	11	8.716E-11
100	1	12	1.074E-10
1000	1	13	9.578E-11
Naprzemiennie {-1000, 1000}	1	11	7.412E-10
10	0.5	33	5.903E-10
100	0.5	36	8.014E-10
1000	0.5	40	5.011E-10
Naprzemiennie {-1000, 1000}	0.5	44	7.258E-10
10	1.5	42	7.427E-10
100	1.5	46	7.673E-10
1000	1.5	50	7.362E-10
Naprzemiennie {-1000, 1000}	1.5	44	6.098E-10

**Tabela 11.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n = 50$ , zmiennego wektora  $x^0$ ,  $\rho=10^{-8}E$ , kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Stosowanie wektorów  $x^0$  wypełnianych coraz bardziej odległymi wartościami od wartości wektora zadanego - kolejno samymi 10, 100 i 100 - powoduje wzrost liczby iteracji dla każdej wartości  $\omega$ , natomiast wektor  $x^0$  wypełniony naprzemiennie -1000 i 1000 daje dobre wyniki dla  $\omega = 1$  i  $\omega = 1.5$ , ale już dla  $\omega = 0.5$  otrzymane rezultaty są najgorsze ze wszystkich zaprezentowanych dla tej  $\omega$  przypadków. Dla  $\omega = 1$  otrzymujemy najmniejszą liczbę iteracji oraz najmniejsze błędy rozwiązania. W przybliżeniu trzy razy większych liczb iteracji potrzeba dla  $\omega = 0.5$ , a jeszcze więcej dla  $\omega = 1.5$ . Te zależności zachodzą dla

obu kryteriów stopu, jednak dla kryterium residualnego można zauważyć, że dla  $\omega = 0.5$  oraz  $\omega = 1.5$  błędy wychodzą mniejsze, ale dla nieco większej liczby iteracji. Różne wektory początkowe mają wpływ na otrzymywane rezultaty.

**Metoda SOR dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ ,  $\omega = \{0.5, 1, 1.5\}$ , różnych dokładności  $\rho$ , rozmiaru macierzy  $n = 100$  oraz obu kryteriów stopu.**

$\rho$	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
1.000E-02	1	5	6.098E-04
1.000E-04	1	7	4.401E-06
1.000E-06	1	9	8.674E-08
1.000E-08	1	12	7.582E-11
1.000E-10	1	13	1.054E-11
1.000E-12	1	16	1.387E-14
1.000E-14	1	18	2.041E-15
1.000E-02	0.5	8	4.700E-03
1.000E-04	0.5	14	4.666E-05
1.000E-06	0.5	20	6.045E-07
1.000E-08	0.5	26	8.553E-09
1.000E-10	0.5	33	6.312E-11
1.000E-12	0.5	39	9.677E-13
1.000E-14	0.5	46	7.861E-15
1.000E-02	1.5	15	2.400E-03
1.000E-04	1.5	23	2.373E-05
1.000E-06	1.5	31	2.590E-07
1.000E-08	1.5	39	2.959E-09
1.000E-10	1.5	47	3.468E-11
1.000E-12	1.5	56	2.345E-13
1.000E-14	1.5	65	3.946E-15

**Tabela 12.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n = 100$ , zerowego wektora  $x^0$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

$\rho$	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
1.000E-02	1	5	6.098E-04
1.000E-04	1	7	4.401E-06
1.000E-06	1	10	9.931E-09
1.000E-08	1	11	8.801E-10
1.000E-10	1	14	1.463E-12
1.000E-12	1	16	1.387E-14
1.000E-14	1	Nie zbiega	===
1.000E-02	0.5	11	4.390E-04
1.000E-04	0.5	17	5.230E-06
1.000E-06	0.5	23	7.135E-08
1.000E-08	0.5	30	5.145E-10
1.000E-10	0.5	36	7.794E-12
1.000E-12	0.5	43	6.045E-14
1.000E-14	0.5	Nie zbiega	===
1.000E-02	1.5	17	7.660E-04
1.000E-04	1.5	25	7.778E-06
1.000E-06	1.5	34	4.922E-08
1.000E-08	1.5	42	5.608E-10
1.000E-10	1.5	50	6.508E-12
1.000E-12	1.5	58	7.677E-14
1.000E-14	1.5	Nie zbiega	===

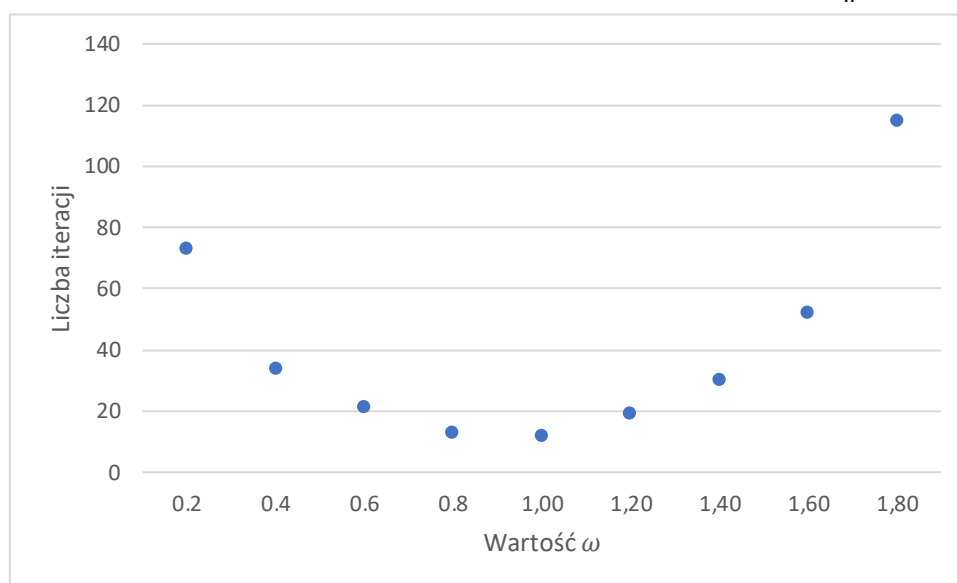
**Tabela 13.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n = 100$ , zerowego wektora  $x^0$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Ponownie najlepsze wyniki otrzymujemy dla  $\omega = 1$  i najgorsze dla  $\omega = 1.5$ , a różnica liczby iteracji między różnymi  $\omega$  zwiększa się wraz ze wzrostem zadanej dokładności  $\rho$  na korzyść  $\omega = 1$ . Podobnie jest z błędami otrzymywanego rozwiązania, jednak różnice nie są już tak duże. Kryterium residualne zwiększa liczbę iteracji poprawiając błędy otrzymywanego rozwiązania, chociaż dla każdego zbadanego  $\omega$  przy dokładności  $\rho = 1.000E - 14$  metoda SOR nie zbiegała do rozwiązania, kryterium okazało się zbyt wymagające przy tak dużej dokładności. (**Tabela 12., 13.**)

**Metoda SOR dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ , różnych  $\omega$ , dokładności  $\rho = 10E-8$ , rozmiaru macierzy  $n = 100$  oraz przyrostowego kryterium stopu**

$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
0.2	73	3.419E-08
0.4	34	1.419E-08
0.6	21	2.987E-09
0.8	13	8.935E-10
1	12	7.582E-11
1.2	19	1.498E-09
1.4	30	3.164E-09
1.6	52	3.121E-09
1.8	115	4.341E-09

**Tabela 14.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n = 100$ , zerowego wektora  $x^0$ , różnych  $\omega$ , dokładności  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$



**Wykres 4.** Zmiana liczby iteracji względem zmiany wartości  $\omega$  na podstawie **Tabeli 14.**

Rezultaty zapisane w **Tabeli 14.** potwierdzają, że metoda kolejnych nadrelaksacji SOR dla zadanego układu równań działa najlepiej dla  $\omega = 1$ . Im większą  $\omega$  wybierzemy, tym gorszą zbieżność otrzymamy. Także błędy rozwiązania zwiększają się o dwa rzędy wielkości. Dla  $\omega < 1$  zbieżność także pogarsza się, ale nie w tak szybkim tempie, jak dla  $\omega > 1$ . Dla  $\omega = 0.2$  otrzymujemy największy błąd rozwiązania.

**Metoda SOR dla zerowego wektora początkowego  $x^0$ ,  $\omega = \{0.5, 1, 1.5\}$ , dokładności  $\rho = 10E-8$ , różnych rozmiarów macierzy  $n$  oraz obu kryteriów stopu**

Rozmiar macierzy	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
5	1	6	2.761E-12
10	1	7	3.242E-11
25	1	9	2.439E-11
50	1	10	1.572E-10
100	1	12	7.582E-11
200	1	13	4.764E-10
300	1	14	5.630E-10
400	1	15	3.864E-10
500	1	15	1.149E-09
5	0.5	27	5.709E-09
10	0.5	26	9.533E-09
25	0.5	25	9.220E-09
50	0.5	26	8.894E-09
100	0.5	26	8.553E-09
200	0.5	26	8.294E-09
300	0.5	26	8.171E-09
400	0.5	26	8.095E-09
500	0.5	26	8.042E-09
5	1.5	30	3.143E-09
10	1.5	32	1.914E-09
25	1.5	34	2.347E-09
50	1.5	36	2.977E-09
100	1.5	39	2.959E-09
200	1.5	43	2.384E-09
300	1.5	45	2.766E-09
400	1.5	47	2.388E-09
500	1.5	48	2.859E-09

**Tabela 15.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Rozmiar macierzy	$\omega$	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
5	1	5	7.795E-10
10	1	7	3.242E-11
25	1	8	7.425E-10
50	1	10	1.572E-10
100	1	11	8.801E-10
200	1	13	4.764E-10
300	1	14	5.630E-10
400	1	15	3.864E-10
500	1	16	2.140E-10
5	0.5	30	6.603E-10
10	0.5	30	5.686E-10
25	0.5	30	5.578E-10
50	0.5	30	5.349E-10
100	0.5	30	5.145E-10
200	0.5	30	4.991E-10
300	0.5	30	4.919E-10
400	0.5	29	9.824E-10
500	0.5	29	9.760E-10
5	1.5	32	7.862E-10
10	1.5	33	9.705E-10
25	1.5	36	6.496E-10
50	1.5	39	5.076E-10
100	1.5	42	5.608E-10
200	1.5	46	4.961E-10
300	1.5	48	6.151E-10
400	1.5	50	5.696E-10
500	1.5	52	4.504E-10

**Tabela 16.** Wyniki działania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Dla  $\omega = 1$  i  $\omega = 1.5$  liczba iteracji wzrasta wraz ze zwiększaniem rozmiaru macierzy, natomiast dla  $\omega = 0.5$  utrzymuje się cały czas na podobnym poziomie. Dla kryterium przyrostowego najmniejsze błędy otrzymujemy dla  $\omega = 1$ , nieco większe dla  $\omega = 1.5$  i największe dla  $\omega = 0.5$ . Dla kryterium residualnego nie da się wskazać  $\omega$  dla której otrzymamy najmniejsze błędy rozwiązania, jednak dla tego kryterium są one mniejsze dla  $\omega = 0.5$  i  $\omega = 1.5$ , niż dla kryterium przyrostowego. Kryterium residualne wymaga także dla tych wartości  $\omega$  większej liczby iteracji. Dla  $\omega = 1$  nie da się wskazać, które

kryterium jest szybciej zbieżne lub ma mniejsze błędy rozwiązania. Zwykle gdy jedno z nich pozwala na szybszą zbieżność, to powoduje także większe błędy rozwiązania. (**Tabele 15. i 16.**)

**Promienie spektralne dla macierzy iteracji metody SOR o różnych rozmiarach  $n$  oraz  $\omega = \{0.5, 1, 1.5\}$**

Rozmiar macierzy	$\omega$	Promień spektralny
100	1	2.342E-01
200	1	3.513E-01
300	1	4.335E-01
400	1	4.985E-01
500	1	5.530E-01
1000	1	7.482E-01
100	0.5	6.771E-01
200	0.5	7.380E-01
300	0.5	7.774E-01
400	0.5	8.070E-01
500	0.5	8.308E-01
1000	0.5	9.100E-01
100	1.5	5.065E-01
200	1.5	5.066E-01
300	1.5	5.066E-01
400	1.5	5.066E-01
500	1.5	5.066E-01
1000	1.5	5.066E-01

**Tabela 17.** Promienie spektralne dla macierzy iteracji o różnych rozmiarach i różnych  $\omega$

Wnioskując z **Tabeli 17.** zarówno dla  $\omega = 0.5$  jak i  $\omega = 1$  otrzymujemy promienie spektralne macierzy iteracji o wartościach zwiększających się wraz ze zwiększaniem rozmiaru tej macierzy, jednakże im większy ten rozmiar, tym mniejsze różnice pomiędzy kolejnymi wyliczonymi promieniami spektralnymi. Dla  $\omega = 1.5$  promień spektralny jest niemalże taki sam dla  $n = 100$  jak i dla  $n = 1000$  i jest on mniejszy niż dla  $\omega = 1$  i  $n = 500$  oraz  $\omega = 0.6$  i  $n = 100$ . Można zatem przypuszczać, że dla  $\omega = 0.5$  przy ciągłym zwiększaniu rozmiaru macierzy warunek wystarczający zbieżności metody SOR związany z promieniem spektralnym tej macierzy przestanie być spełniany najszybciej, a następnie to samo wydarzy się dla  $\omega = 1$ .

## Porównanie metody kolejnych nadrelaksacji SOR oraz metody Jacobiego

Rozmiar macierzy	Czas wykonania [s]	Liczba iteracji
100	0.0554314	12
200	0.2353727	13
300	0.5687876	14
400	1.0896238	15
500	1.7124107	15
600	2.6033220	16
700	3.5645957	16
800	4.8605141	17
900	6.1920269	17
1000	8.2891646	17

**Tabela 18.** Czas wykonywania metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$ ,  $\omega = 1$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

Rozmiar macierzy	Średni czas jednej iteracji [s] (met. Jacobiego)	Średni czas jednej iteracji [s] (met. SOR)
100	0.0046347	0.0046192
200	0.0178609	0.0181055
300	0.0404695	0.0406276
400	0.0803399	0.0726415
500	0.1085560	0.1141607
600	0.1588081	0.1627076
700	0.2176736	0.2227872
800	0.2987479	0.2859125
900	0.3777033	0.3642368
1000	0.4800914	0.4875979

**Tabela 19.** Średnie czasy pojedynczych iteracji dla metody Jacobiego oraz metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładności  $\rho = 10E-8$ ,  $\omega = 1$  oraz kryterium stopu  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

W **Tabeli 18.** podane są czasy dla metody SOR dla wartości  $\omega = 1$  dla której otrzymywałem najlepsze wyniki działania jeśli chodzi o zbieżność i błędy rozwiązania. Porównując średnie czasy pojedynczych iteracji tej metody do tych z metody Jacobiego (z **Tabeli 7.**) dla takich samych danych jeśli chodzi o rozmiary macierzy, dokładność i kryterium stopu w **Tabeli 19.** nie można jednoznacznie stwierdzić, dla której z tych metod pojedyncza iteracja wykonuje się szybciej.



$\rho$	Metoda SOR ( $\omega = 1$ )		Metoda Jacobiego	
	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
1.000E-02	5	6.098E-04	10	1.966E-03
1.000E-04	7	4.401E-06	15	2.772E-05
1.000E-06	9	8.674E-08	21	1.666E-07
1.000E-08	12	7.582E-11	26	2.348E-09
1.000E-10	13	1.054E-11	32	1.412E-11
1.000E-12	16	1.387E-14	37	1.983E-13
1.000E-14	18	2.041E-15	42	3.771E-15

**Tabela 20.** Rozwiązania dla metody Jacobiego oraz metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o rozmiarze  $n=100$ , zerowego wektora  $x^0$ , różnych dokładnościach  $\rho$  oraz kryterium stopu

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$$

Rozmiar macierzy	Metoda SOR ( $\omega = 1$ )		Metoda Jacobiego	
	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego	Iteracje	Błąd $x$ wyliczonego
5	6	2.761E-12	8	3.016E-10
10	7	3.242E-11	10	8.979E-10
25	9	2.439E-11	15	4.151E-10
50	10	1.572E-10	19	1.747E-09
100	12	7.582E-11	26	2.348E-09
200	13	4.764E-10	38	1.982E-09
300	14	5.630E-10	48	3.028E-09
400	15	3.864E-10	59	2.854E-09
500	15	1.149E-09	70	3.357E-09

**Tabela 21.** Rozwiązania dla metody Jacobiego oraz metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla macierzy o różnych rozmiarach, zerowego wektora  $x^0$ , dokładnościach  $\rho = 10E-8$  oraz kryterium stopu

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$$

Z **Tabeli 20.** i **Tabeli 21.** wynika, że metoda SOR dla wartości  $\omega = 1$ , dla której otrzymywane były najkorzystniejsze wyniki działa lepiej niż metoda Jacobiego. Błędy rozwiązania są dla niej zwykle mniejsze o jeden rząd wielkości, a jeszcze większe różnice można zauważyć porównując liczbę iteracji dla obu metod.

Biorąc pod uwagę, że średni czas trwania pojedynczej iteracji dla obu metod nie różni się znacząco zdecydowanie lepszym wyborem wydaje się być stosowanie dla zadanego układu równań metody kolejnych nadrelaksacji SOR dla  $\omega = 1$ .