

MOwNiT – temat 4

**Aproksymacja średniokwadratowa
wielomianami algebraicznymi
oraz trygonometryczna**

Gabriel Cyganek

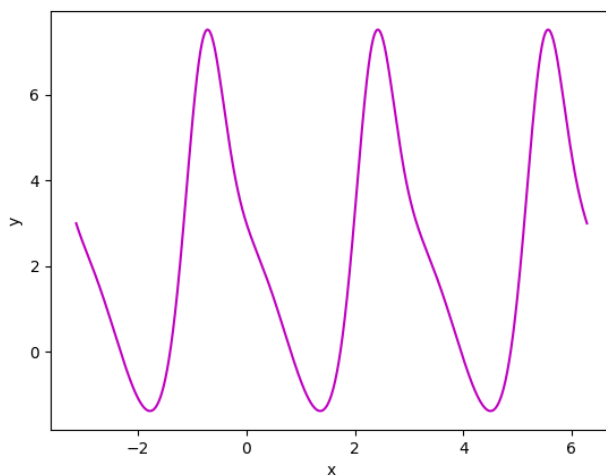
Dane techniczne

Do napisania programu wykonującego zadanie wykorzystałem język Python. Aby rozwiązać układ równań dla układów funkcji bazowych będących ciągami jednomianów użyłem biblioteki *numpy* (funkcja *linalg.solve*), która przydała się także do różnych operacji na tabelach, do rysowania wykresów biblioteki *matplotlib*, a do obliczania wartości różnych funkcji matematycznych biblioteki *math*. Wykonywanie programu odbywało się na systemie Windows 10 x64 na komputerze z procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz.

Polecenie

Aproksymacja średniokwadratowa funkcji $f(x) = e^{-2*\sin(2x)} + 2 * \cos(2x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$ wielomianami algebraicznymi oraz funkcjami trygonometrycznymi.

Dla obu metod zastosowano aproksymację dla od 3 do 75 punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych o liczności między 3, a 21. Pominięto przypadki, gdzie liczba funkcji bazowych była większa od liczby punktów dyskretyzacji. Do wyznaczania funkcji aproksymujących i rysowania wykresów funkcji użyto 900 punktów równoodległych.



Wykres 1. Funkcja $f(x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Błędy aproksymacji

Do sprawdzenia dokładności aproksymacji użyłem błędu wyliczonego jako maksymalna różnica między wartością funkcji aproksymowanej, a wartością funkcji aproksymującej oznaczonego w tabelach jako błąd maksymalny oraz błędu średniokwadratowego obliczonego jako pierwiastek ze średniej wartości różnicy między tymi wartościami podniesionymi do kwadratu. W obu

przypadkach brałem pod uwagę 900 punktów równoodległych na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi – algorytm postępowania

Do aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi użyłem układów funkcji bazowych składających się z ciągów jednomianów

$$\varphi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots, m$$

Funkcją aproksymowaną jest nasza funkcja $f(x)$ zadana na zbiorze dyskretnym $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Nasza funkcja aproksymująca jest postaci: $F(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$

Szukamy takich współczynników a_j , aby otrzymać:

$$\min \underbrace{\sum_{i=0}^m [f(x_i) - F(x_i)]^2}_{H(a_0, a_1, \dots, a_m)}$$

W tym celu tworzymy układ normalny na podstawie warunku $\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, \dots, m \rightarrow$ układ $m + 1$ równań liniowych o $m + 1$ niewiadomych

$$\sum_{i=0}^n \left[f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right]^2 * x_i^k = 0 \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n x_i^{j+k} \right) * a_j = \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^k$$

Tworzymy macierz, po rozwiązaniu której dostaniemy współczynniki a_j

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & & \ddots & & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum f(x_i) x_i \\ \vdots \\ \sum f(x_i) x_i^m \end{pmatrix}$$

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi – rezultaty

MAX – błąd maksymalny

ŚR – błąd średniokwadratowy

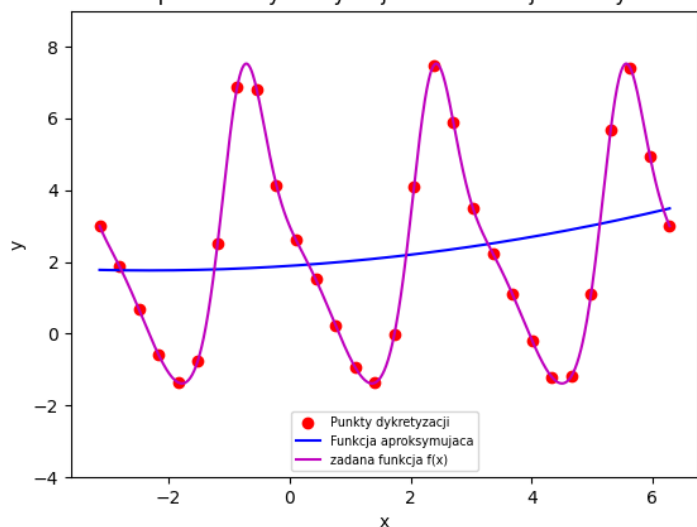
Liczba funkcji bazowych	3		6		9		12	
Liczba punktów	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR
3	8.394E+00	3.606E+00						
6	5.336E+00	2.875E+00	1.407E+01	5.421E+00				
9	5.262E+00	2.836E+00	5.976E+00	2.743E+00	1.364E+01	3.478E+00		
12	5.651E+00	2.792E+00	6.036E+00	2.715E+00	8.989E+00	2.295E+00	1.400E+01	3.343E+00
15	5.650E+00	2.791E+00	5.642E+00	2.681E+00	6.145E+00	1.848E+00	7.265E+00	1.640E+00
18	5.653E+00	2.790E+00	5.609E+00	2.676E+00	4.834E+00	1.742E+00	2.482E+00	9.923E-01
21	5.670E+00	2.789E+00	5.603E+00	2.673E+00	4.326E+00	1.712E+00	2.083E+00	9.251E-01
24	5.683E+00	2.789E+00	5.587E+00	2.670E+00	4.073E+00	1.695E+00	2.102E+00	9.200E-01
27	5.692E+00	2.788E+00	5.573E+00	2.667E+00	4.058E+00	1.682E+00	2.107E+00	9.190E-01
30	5.699E+00	2.788E+00	5.561E+00	2.665E+00	4.052E+00	1.670E+00	2.109E+00	9.185E-01
33	5.705E+00	2.788E+00	5.551E+00	2.664E+00	4.045E+00	1.660E+00	2.111E+00	9.181E-01
36	5.710E+00	2.788E+00	5.542E+00	2.662E+00	4.037E+00	1.651E+00	2.112E+00	9.177E-01
39	5.714E+00	2.788E+00	5.534E+00	2.661E+00	4.030E+00	1.644E+00	2.112E+00	9.174E-01
42	5.717E+00	2.788E+00	5.527E+00	2.660E+00	4.022E+00	1.637E+00	2.113E+00	9.171E-01
45	5.720E+00	2.788E+00	5.521E+00	2.659E+00	4.015E+00	1.631E+00	2.113E+00	9.169E-01
48	5.722E+00	2.788E+00	5.515E+00	2.658E+00	4.008E+00	1.626E+00	2.113E+00	9.166E-01
51	5.725E+00	2.788E+00	5.510E+00	2.658E+00	4.001E+00	1.621E+00	2.114E+00	9.164E-01
54	5.726E+00	2.788E+00	5.506E+00	2.657E+00	3.995E+00	1.617E+00	2.114E+00	9.162E-01
57	5.728E+00	2.788E+00	5.502E+00	2.657E+00	3.990E+00	1.613E+00	2.114E+00	9.160E-01
60	5.730E+00	2.788E+00	5.498E+00	2.656E+00	3.984E+00	1.610E+00	2.114E+00	9.158E-01
63	5.731E+00	2.788E+00	5.494E+00	2.656E+00	3.979E+00	1.607E+00	2.114E+00	9.156E-01
66	5.732E+00	2.788E+00	5.491E+00	2.656E+00	3.975E+00	1.604E+00	2.114E+00	9.155E-01
69	5.733E+00	2.788E+00	5.488E+00	2.655E+00	3.971E+00	1.602E+00	2.114E+00	9.153E-01
72	5.734E+00	2.788E+00	5.486E+00	2.655E+00	3.967E+00	1.599E+00	2.114E+00	9.152E-01
75	5.735E+00	2.787E+00	5.483E+00	2.655E+00	3.963E+00	1.597E+00	2.114E+00	9.151E-01

Tabela 1. Błędy aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji aproksymującej, gdzie zastosowano układ funkcji bazowych zawierających 3, 6, 9 oraz 12 funkcji będącymi ciągami jednomianów

Liczba funkcji bazowych	15		18		21	
Liczba punktów	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR
15	2.469E+02	5.783E+01				
18	3.758E+01	8.208E+00	1.463E+02	2.342E+01		
21	1.137E+01	2.414E+00	5.531E+01	1.014E+01	1.965E+02	3.126E+01
24	6.058E+00	1.330E+00	1.846E+01	3.168E+00	1.017E+02	1.417E+01
27	3.769E+00	1.006E+00	9.253E+00	1.513E+00	9.807E+00	1.744E+00
30	2.677E+00	9.028E-01	4.853E+00	1.003E+00	4.866E+00	8.960E-01
33	2.102E+00	8.666E-01	4.202E+00	8.129E-01	4.495E+00	8.591E-01
36	1.941E+00	8.520E-01	2.761E+00	6.954E-01	3.158E+00	5.619E-01
39	1.957E+00	8.453E-01	2.195E+00	6.429E-01	3.113E+00	5.313E-01
42	1.969E+00	8.419E-01	1.979E+00	6.152E-01	4.169E+00	8.589E-01
45	1.978E+00	8.399E-01	1.653E+00	6.019E-01	1.087E+00	4.670E-01
48	1.984E+00	8.387E-01	1.497E+00	5.927E-01	1.395E+00	4.369E-01
51	1.988E+00	8.379E-01	1.445E+00	5.884E-01	4.209E+01	7.153E+00
54	1.991E+00	8.373E-01	1.380E+00	5.852E-01	2.274E+00	6.918E-01
57	1.994E+00	8.368E-01	1.365E+00	5.839E-01	1.323E+00	5.018E-01
60	1.996E+00	8.363E-01	1.388E+00	5.814E-01	9.990E-01	4.080E-01
63	1.997E+00	8.359E-01	1.396E+00	5.806E-01	2.485E+00	4.825E-01
66	1.998E+00	8.355E-01	1.391E+00	5.798E-01	1.461E+01	3.036E+00
69	1.998E+00	8.352E-01	1.389E+00	5.790E-01	9.865E-01	4.127E-01
72	1.999E+00	8.349E-01	1.396E+00	5.784E-01	1.206E+00	4.904E-01
75	1.999E+00	8.346E-01	1.392E+00	5.780E-01	7.885E-01	3.431E-01

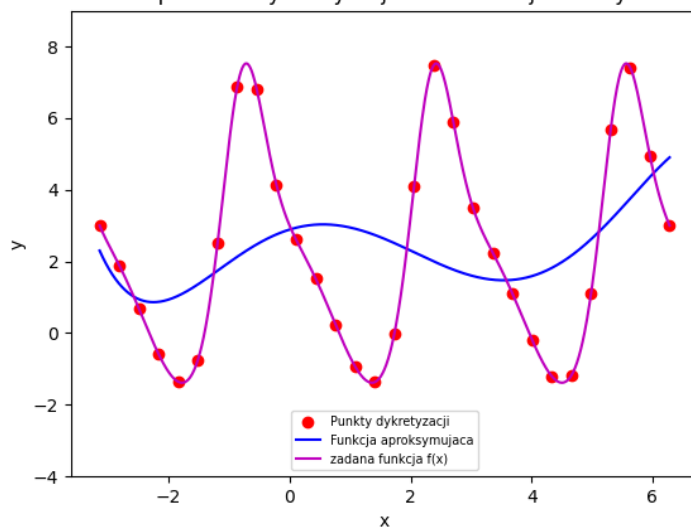
Tabela 2. Błędy aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji aproksymującej, gdzie zastosowano układ funkcji bazowych zawierających 15, 18, 21 funkcji będącymi ciągami jednomianów

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretyzacji oraz 3 funkcji bazowych



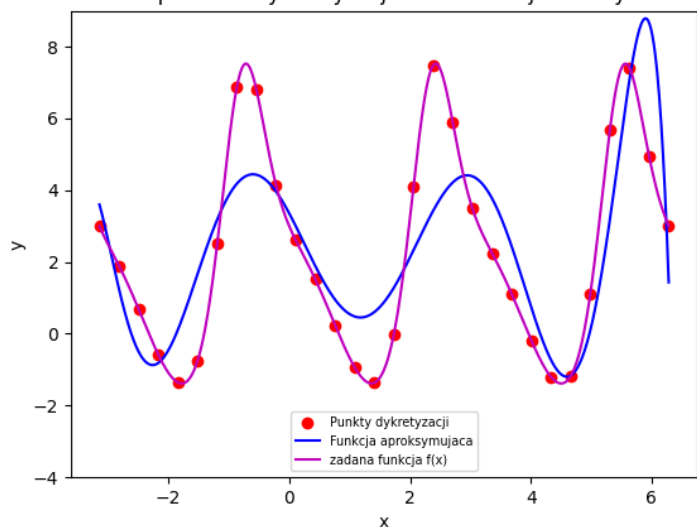
Wykres 2. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 3 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretyzacji oraz 6 funkcji bazowych



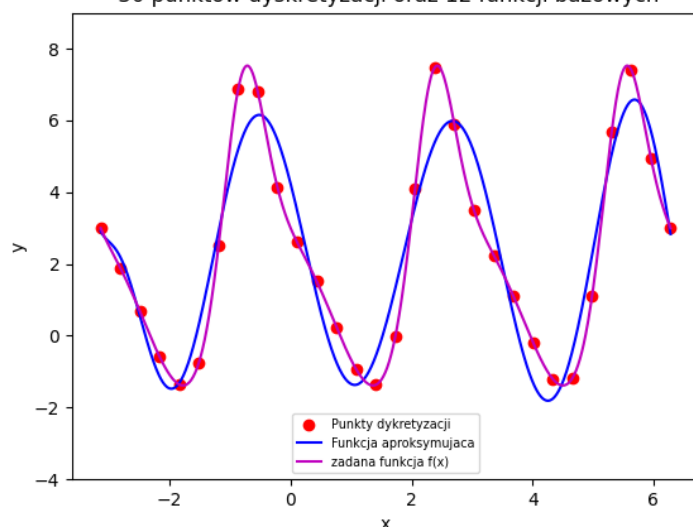
Wykres 3. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 6 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretyzacji oraz 9 funkcji bazowych



Wykres 4. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 9 f. bazowych.

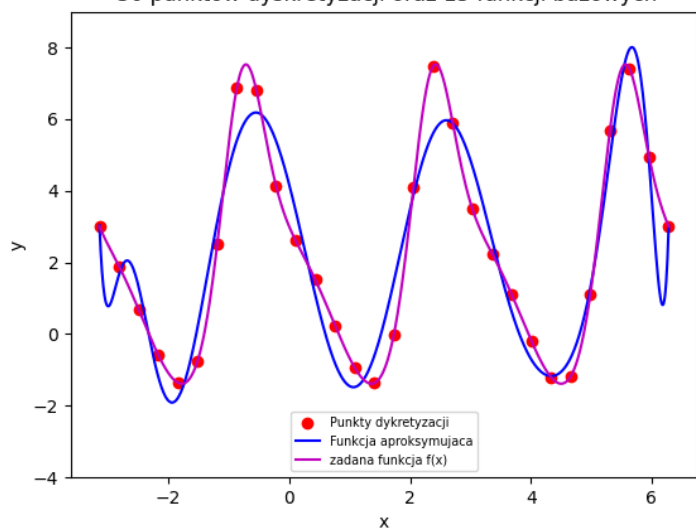
Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretyzacji oraz 12 funkcji bazowych



Wykres 5. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 12 f. bazowych

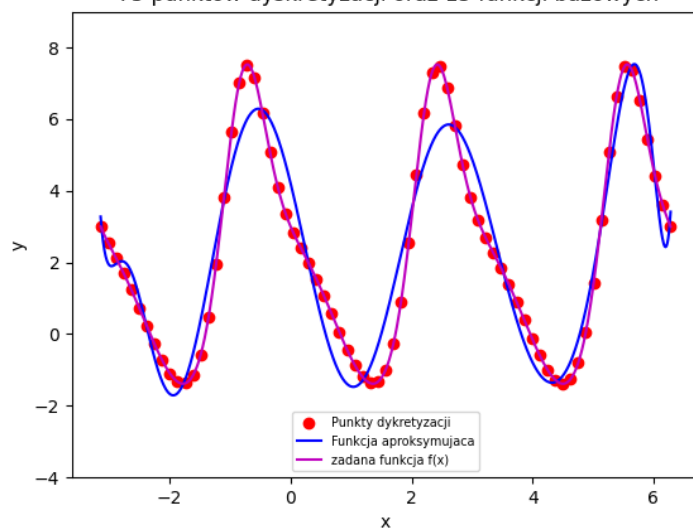
Uwaga 1. Zarówno dla 3, 6, 9 jak i 12 f. bazowych funkcje aproksymujące nie zmieniają się znacznie dla większej liczby badanych punktów dyskretyzacji od tych pokazanych na powyższych wykresach.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretizacji oraz 15 funkcji bazowych



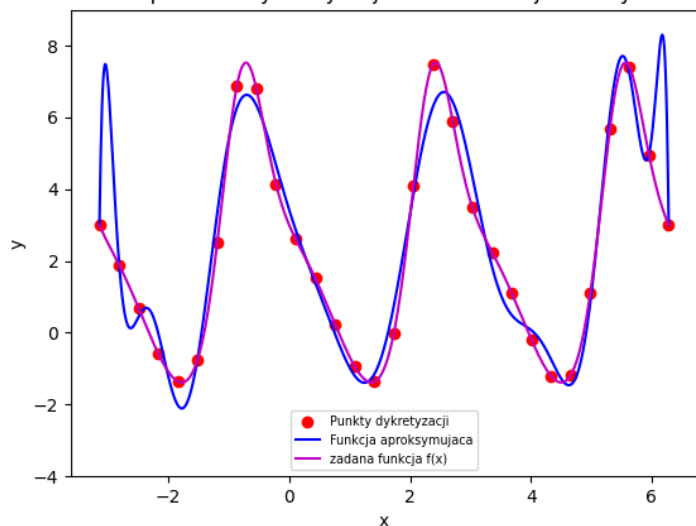
Wykres 6. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretizacji oraz 15 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 75 punktów dyskretizacji oraz 15 funkcji bazowych



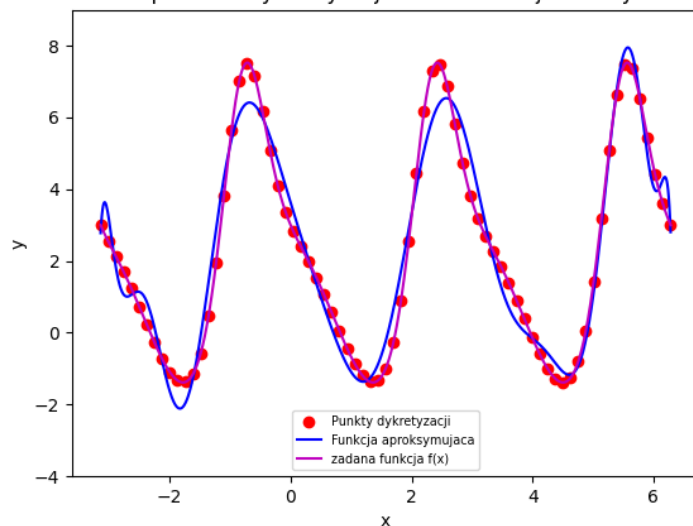
Wykres 7. Aproksymacja dla 75 punktów dyskretizacji oraz 15 f. bazowych

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretizacji oraz 18 funkcji bazowych



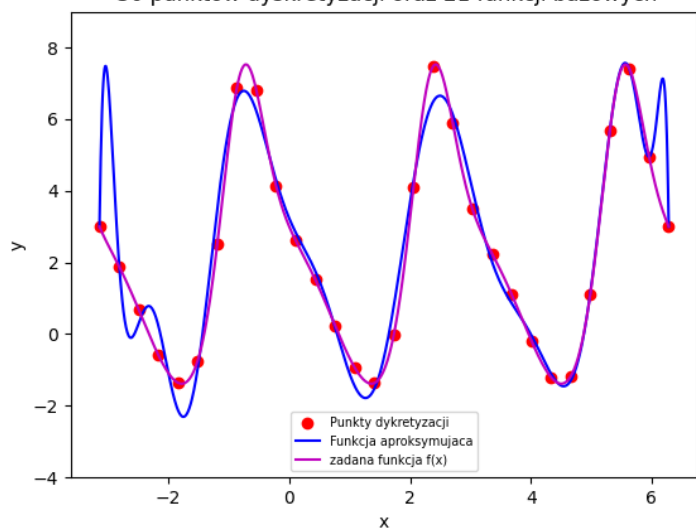
Wykres 8. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretizacji oraz 18 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 75 punktów dyskretizacji oraz 18 funkcji bazowych



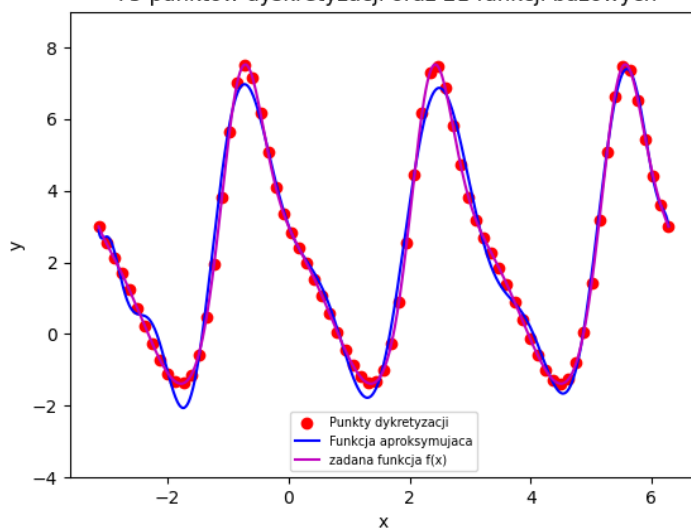
Wykres 9. Aproksymacja dla 75 punktów dyskretizacji oraz 18 f. bazowych

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 30 punktów dyskretyzacji oraz 21 funkcji bazowych



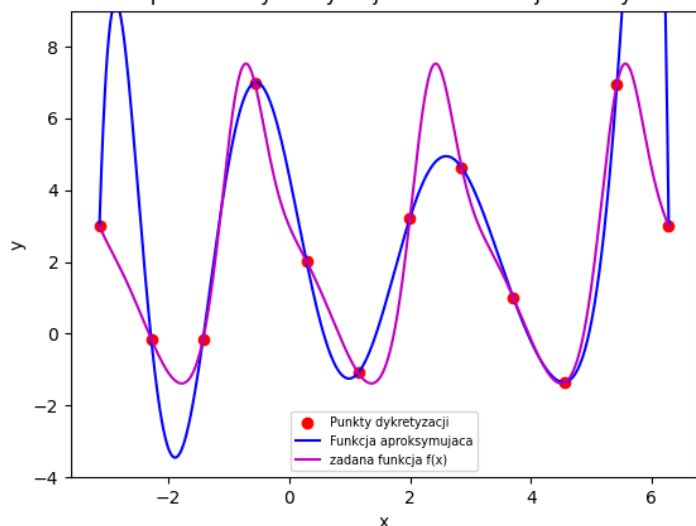
Wykres 10. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 21 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 75 punktów dyskretyzacji oraz 21 funkcji bazowych



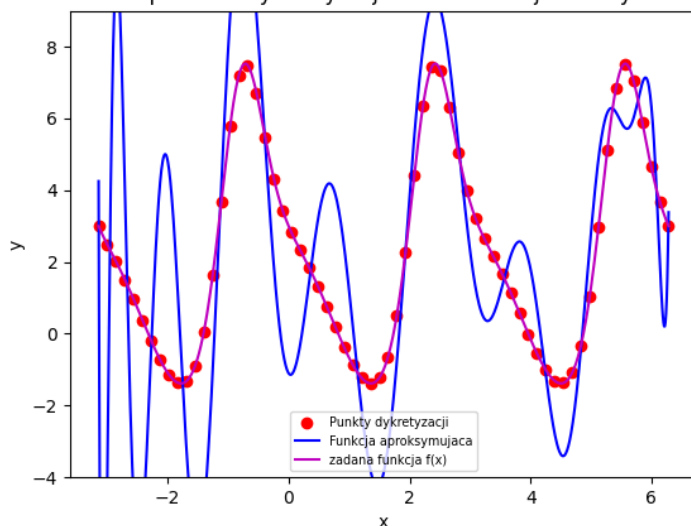
Wykres 11. Aproksymacja dla 75 punktów dyskretyzacji oraz 21 f. bazowych

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 12 punktów dyskretyzacji oraz 12 funkcji bazowych



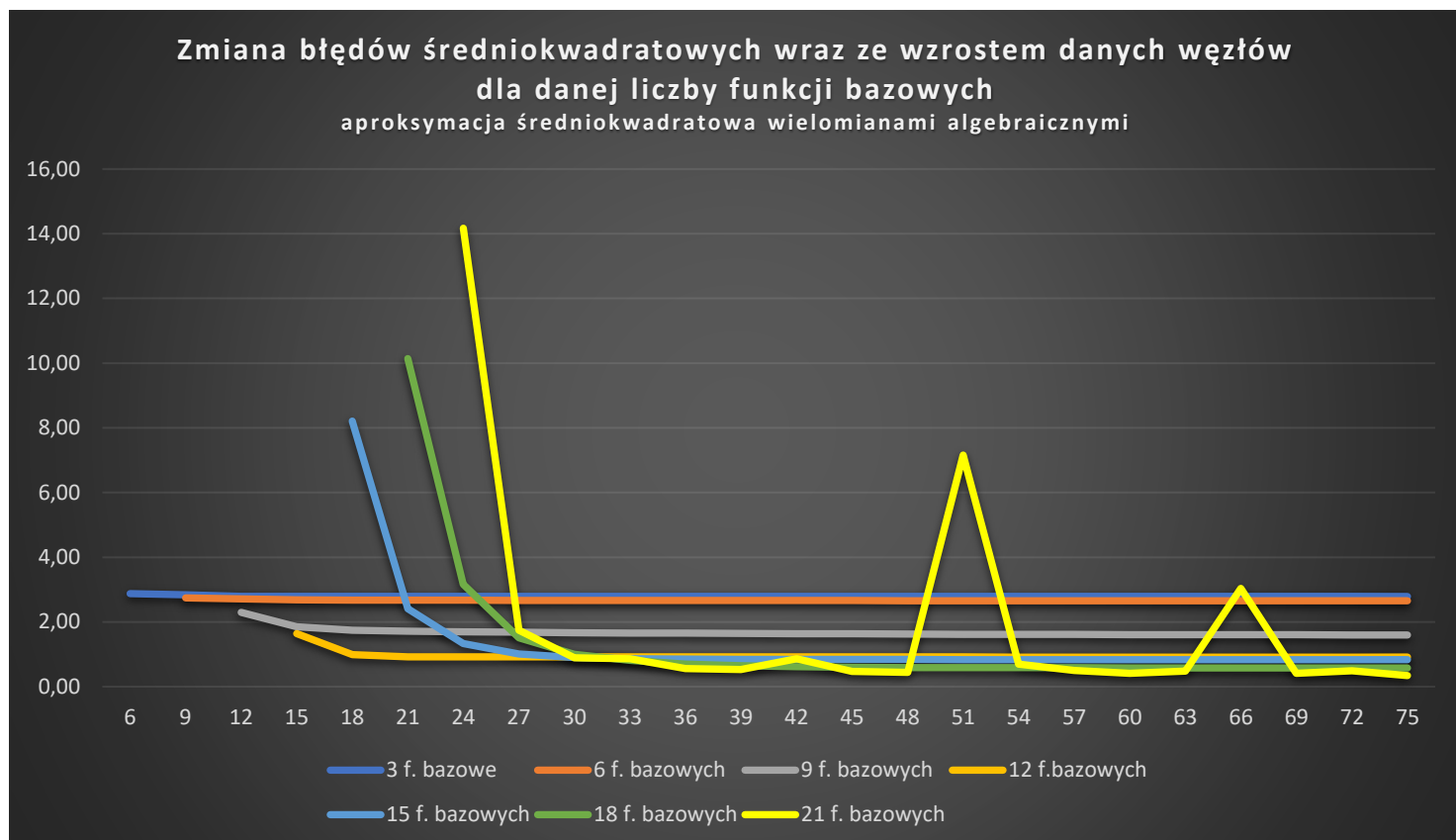
Wykres 12. Aproksymacja dla 12 punktów dyskretyzacji oraz 12 f. bazowych.

Aproksymacja średniokwadratowa z użyciem jednomianów i 66 punktów dyskretyzacji oraz 21 funkcji bazowych



Wykres 13. Aproksymacja dla 66 punktów dyskretyzacji oraz 21 f. bazowych

Uwaga 2. Na **Wykresie 12.** widać dobrze, że aproksymacja wielomianem o stopniu o 1 mniejszym od liczby badanych punktów jest interpolacją. Na **Wykresie 13.** widać potwierdzenie problemów występujących w aproksymacji dla 21 f. bazowych, czyli duże odchylenia spowodowane złym uwarunkowaniem rozwiązywanego układu równań. Ten problem uwidacznia się także w **Tabeli 2.** dla 51 punktów dyskretyzacji dla tej liczby f. bazowych, widać to dobrze na **Wykresie 14,** gdzie dla 51 i 66 węzłów błędy średniokwadratowe mają pokaźne wzrosty wartości.



Wykres 14. Zmiana błędów średniokwadratowych biorąc pod uwagę rosnącą liczbę węzłów dla różnych liczb f. bazowych



Wykres 15. Zmiana błędów średniokwadratowych dla 75 węzłów biorąc pod uwagę rosnącą liczbę f. bazowych wg tabel 1. i 2.

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi – wnioski

Niezależnie od liczby funkcji w układzie funkcji bazowych dla liczby punktów dyskretyzacji równych, bądź niewiele większych od liczby tych funkcji otrzymujemy niezbyt dokładne aproksymacje. Jednakże wraz ze wzrostem liczby węzłów otrzymujemy coraz to dokładniejsze funkcje aproksymujące, choć tak jak na początku ta dokładność poprawia się znacznie, tak potem zmienia się minimalnie i to nie zawsze na lepsze jeśli chodzi o błędy maksymalne, choć błędy średniokwadratowe wraz ze wzrostem liczby tych punktów maleją zawsze dla zbadanych przypadków (poza wyjątkowymi sytuacjami dla 21 funkcji bazowych, co zostało omówione w **Uwadze 2.**). Widać to w **Tabeli 1.** oraz **Tabeli 2.**, zwłaszcza dla liczby funkcji w układzie funkcji bazowych równej 3, gdzie błędy średniokwadratowe są niemalże identyczne w przedziale punktów dyskretyzacji 12-75, czy analogicznie dla 6 funkcji bazowych i 18-75 punktów, a także na **Wykresie 14.** W **Uwadze 1.** zaznaczono właśnie te niewielkie różnice funkcji aproksymujących dla małej liczby funkcji bazowych. Dla większej liczby funkcji bazowych różnice błędów średniokwadratowych są bardziej znaczące, jednak nadal zachodzi spadek zmiany dokładności wraz ze wzrostem badanych punktów dyskretyzacji.

Dla różnej liczby funkcji bazowych zauważamy, że im jest ich więcej, tym otrzymujemy lepszą dokładność funkcji aproksymującej, natomiast dla mniejszej liczby funkcji bazowych otrzymujemy lepsze wygładzenie błędów. Można to zaobserwować porównując chociażby **Wykres 3.** oraz **Wykres 10.**

Dokładność dla danej liczby węzłów przy rosnącej liczbie funkcji bazowych również rośnie. Widać to dobrze dla 75 węzłów na **Wykresie 15.**

Korzystając z tego sposobu aproksymacji udało się otrzymać dosyć dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej dla przynajmniej 12 funkcji bazowych oraz 30 punktów dyskretyzacji. Zwiększenie obu tych danych powoduje jeszcze lepszą dokładność, chociaż należy uważać na zbyt duży stopień wielomianu aproksymującego ze względu na pojawiające się błędy.

Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna – algorytm postępowania

Do aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej użyłem układów funkcji bazowych składających się z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1, & Q_1(z) &= \sin(z), & Q_2(z) &= \cos(z), \\ Q_3(z) &= \sin(2z), & Q_4(z) &= \cos(2z), & \dots \end{aligned}$$

Gdzie $z \in [-\pi, \pi]$ w związku z czym wyznaczając funkcję $F(x)$ aproksymującą $f(x)$ dokonałem transformacji przedziału aproksymacji $[-\pi, 2\pi]$ do przedziału $[-\pi, \pi]$.

Funkcja $F(x)$ o okresie 2π została wyznaczona iteracyjnie korzystając z następujących wzorów dla przedziału $[-\pi, \pi]$:

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + a_m \cos(mx) + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos(kx_j), \quad k = 0, 1, \dots, m$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin(kx_j), \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

Gdzie m to stopień wielomianu trygonometrycznego F_m (jest $2m$ współczynników do wyznaczenia), a n to liczba danych węzłów.

Do transformacji przedziału aproksymacji $[-\pi, 2\pi]$ do przedziału $[-\pi, \pi]$

użyto wzoru: $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}$

Źródło: „[Numerical Analysis](#)” Richard L. Burder, J. Douglas Faires - Chapter 8.5, Theorem 8.13 (strona 543)

Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna – rezultaty

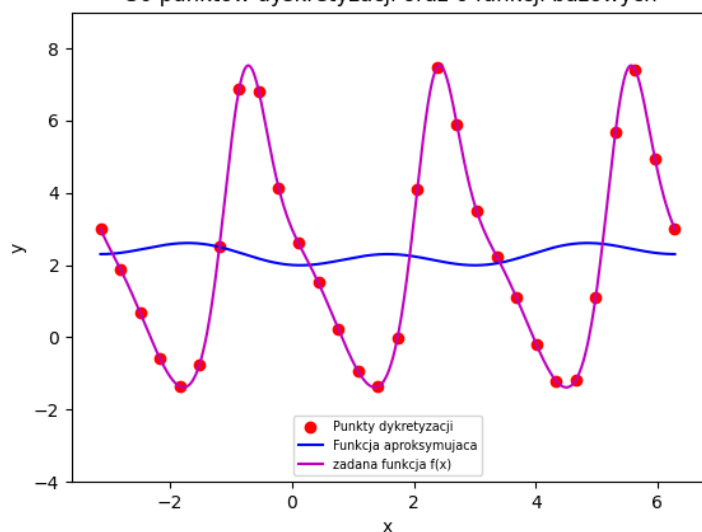
Liczba funkcji bazowych	6		8		10		12	
Liczba punktów	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR
9	5.875E+00	2.728E+00	6.865E+00	3.399E+00				
12	5.758E+00	3.066E+00	7.981E+00	3.347E+00	3.171E+00	1.282E+00		
15	5.598E+00	3.048E+00	7.961E+00	3.297E+00	2.631E+00	1.179E+00	2.597E+00	9.600E-01
18	5.532E+00	2.979E+00	7.744E+00	3.268E+00	2.458E+00	1.120E+00	2.232E+00	8.705E-01
21	5.492E+00	2.957E+00	7.665E+00	3.253E+00	2.400E+00	1.095E+00	2.193E+00	9.212E-01
24	5.461E+00	2.943E+00	7.612E+00	3.242E+00	2.340E+00	1.079E+00	2.103E+00	9.253E-01
27	5.437E+00	2.931E+00	7.568E+00	3.234E+00	2.294E+00	1.068E+00	2.025E+00	9.270E-01
30	5.417E+00	2.922E+00	7.533E+00	3.227E+00	2.257E+00	1.059E+00	1.985E+00	9.313E-01
33	5.402E+00	2.914E+00	7.505E+00	3.222E+00	2.227E+00	1.053E+00	1.980E+00	9.358E-01
36	5.389E+00	2.908E+00	7.481E+00	3.218E+00	2.202E+00	1.048E+00	1.975E+00	9.402E-01
39	5.378E+00	2.903E+00	7.461E+00	3.215E+00	2.181E+00	1.045E+00	1.972E+00	9.443E-01
42	5.368E+00	2.899E+00	7.444E+00	3.212E+00	2.163E+00	1.042E+00	1.968E+00	9.481E-01
45	5.360E+00	2.895E+00	7.429E+00	3.209E+00	2.147E+00	1.039E+00	1.966E+00	9.517E-01
48	5.353E+00	2.892E+00	7.415E+00	3.207E+00	2.133E+00	1.037E+00	1.963E+00	9.550E-01
51	5.347E+00	2.889E+00	7.404E+00	3.205E+00	2.121E+00	1.036E+00	1.961E+00	9.580E-01
54	5.341E+00	2.886E+00	7.394E+00	3.204E+00	2.111E+00	1.034E+00	1.959E+00	9.608E-01
57	5.336E+00	2.884E+00	7.384E+00	3.202E+00	2.101E+00	1.033E+00	1.958E+00	9.634E-01
60	5.331E+00	2.882E+00	7.376E+00	3.201E+00	2.092E+00	1.032E+00	1.956E+00	9.658E-01
63	5.327E+00	2.880E+00	7.369E+00	3.200E+00	2.084E+00	1.031E+00	1.955E+00	9.680E-01
66	5.324E+00	2.879E+00	7.362E+00	3.199E+00	2.077E+00	1.030E+00	1.953E+00	9.701E-01
69	5.320E+00	2.877E+00	7.356E+00	3.198E+00	2.071E+00	1.030E+00	1.952E+00	9.720E-01
72	5.317E+00	2.876E+00	7.350E+00	3.197E+00	2.065E+00	1.029E+00	1.951E+00	9.738E-01
75	5.314E+00	2.875E+00	7.345E+00	3.196E+00	2.059E+00	1.029E+00	1.950E+00	9.755E-01

Tabela 3. Błędy aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji aproksymujących o stopniach kolejno 3, 4, 5, 6 (czyli dla 6, 8, 10, 12 f. bazowych w układzie bazowym)

Liczba funkcji bazowych	14		16		18		20	
Liczba punktów	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR	MAX	ŚR
15	4.287E+00	1.398E+00						
18	3.978E+00	1.352E+00	1.949E+00	7.333E-01				
21	3.714E+00	1.334E+00	1.660E+00	6.271E-01	1.823E+00	6.833E-01	2.141E+00	7.138E-01
24	3.591E+00	1.333E+00	1.518E+00	5.686E-01	1.682E+00	5.960E-01	1.839E+00	6.225E-01
27	3.497E+00	1.336E+00	1.401E+00	5.255E-01	1.542E+00	5.483E-01	1.682E+00	5.710E-01
30	3.419E+00	1.338E+00	1.306E+00	4.918E-01	1.427E+00	5.121E-01	1.549E+00	5.318E-01
33	3.355E+00	1.342E+00	1.228E+00	4.653E-01	1.335E+00	4.831E-01	1.440E+00	5.003E-01
36	3.301E+00	1.345E+00	1.164E+00	4.440E-01	1.260E+00	4.597E-01	1.351E+00	4.750E-01
39	3.256E+00	1.348E+00	1.110E+00	4.268E-01	1.196E+00	4.407E-01	1.277E+00	4.543E-01
42	3.218E+00	1.351E+00	1.064E+00	4.126E-01	1.142E+00	4.250E-01	1.214E+00	4.372E-01
45	3.184E+00	1.354E+00	1.024E+00	4.008E-01	1.095E+00	4.120E-01	1.160E+00	4.229E-01
48	3.155E+00	1.357E+00	9.897E-01	3.909E-01	1.055E+00	4.009E-01	1.113E+00	4.108E-01
51	3.129E+00	1.359E+00	9.592E-01	3.824E-01	1.020E+00	3.916E-01	1.072E+00	4.005E-01
54	3.106E+00	1.361E+00	9.321E-01	3.752E-01	9.881E-01	3.835E-01	1.036E+00	3.917E-01
57	3.086E+00	1.363E+00	9.079E-01	3.690E-01	9.601E-01	3.766E-01	1.004E+00	3.840E-01
60	3.091E+00	1.365E+00	8.861E-01	3.636E-01	9.352E-01	3.706E-01	9.759E-01	3.774E-01
63	3.096E+00	1.367E+00	8.667E-01	3.589E-01	9.128E-01	3.653E-01	9.505E-01	3.716E-01
66	3.100E+00	1.369E+00	8.490E-01	3.548E-01	8.923E-01	3.607E-01	9.274E-01	3.665E-01
69	3.103E+00	1.371E+00	8.328E-01	3.512E-01	8.737E-01	3.566E-01	9.062E-01	3.620E-01
72	3.107E+00	1.372E+00	8.180E-01	3.480E-01	8.566E-01	3.530E-01	8.872E-01	3.580E-01
75	3.110E+00	1.373E+00	8.044E-01	3.451E-01	8.412E-01	3.498E-01	8.699E-01	3.544E-01

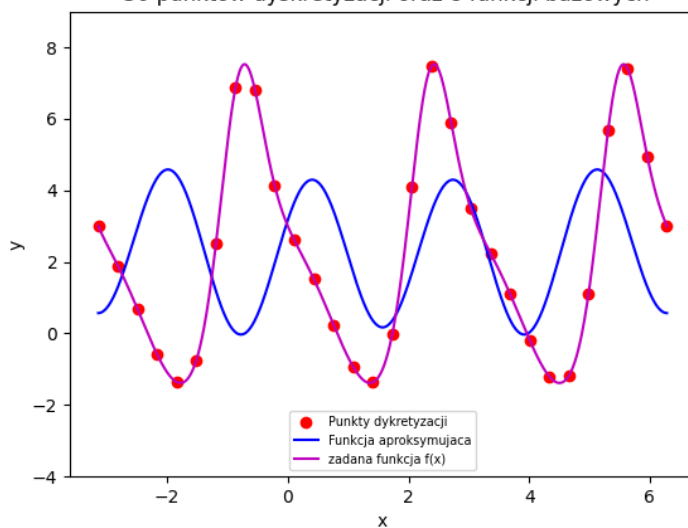
Tabela 4. Błędy aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji aproksymujących o stopniach kolejno 7, 8, 9, 10 (czyli dla 14, 16, 18, 20 f. bazowych w układzie bazowym)

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktów dyskretyzacji oraz 6 funkcji bazowych



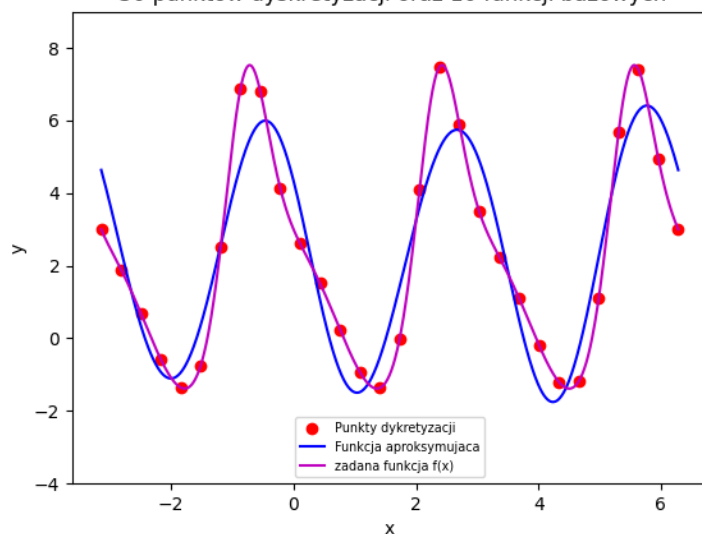
Wykres 16. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 6 f. bazowych.

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktów dyskretyzacji oraz 8 funkcji bazowych



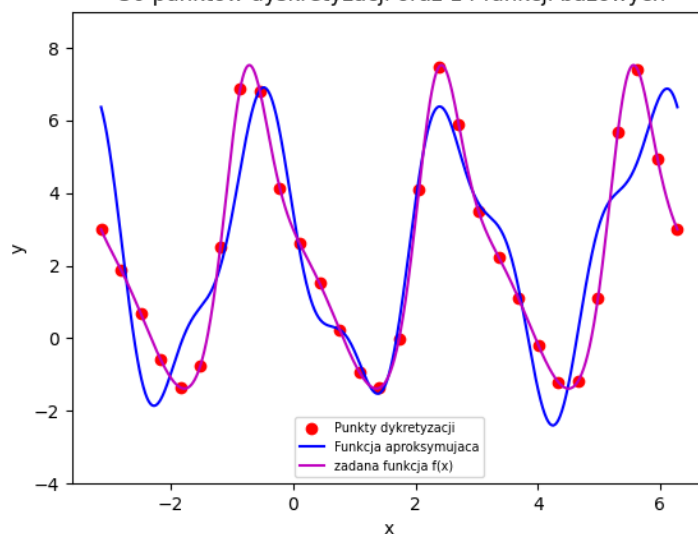
Wykres 17. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 8 f. bazowych

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktów dyskretyzacji oraz 10 funkcji bazowych



Wykres 18. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 10 f. bazowych.

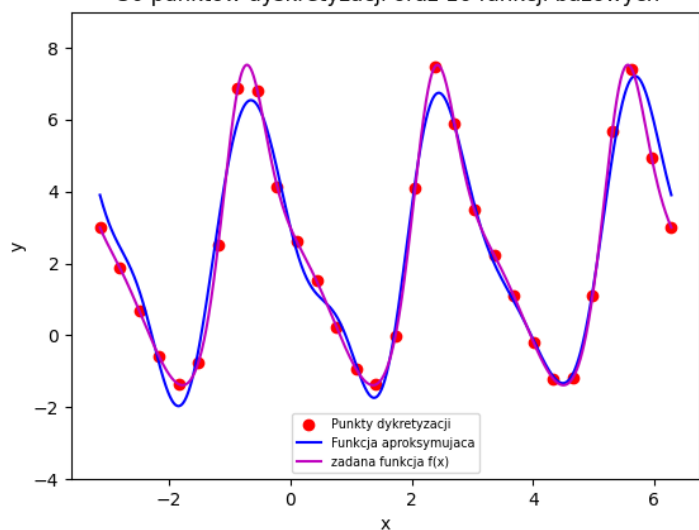
Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktów dyskretyzacji oraz 14 funkcji bazowych



Wykres 19. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 14 f. bazowych

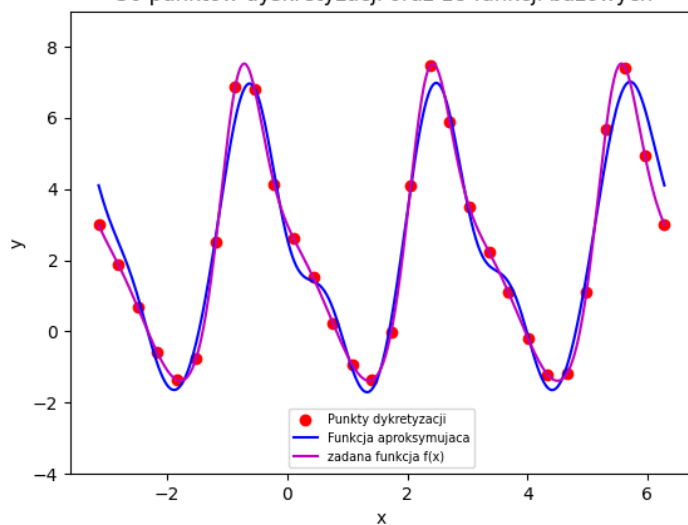
Wykresy przedstawionych wyżej wielomianów o danej liczbie f. bazowych nie zmieniają się znacznie wraz ze wzrostem liczby węzłów, ponadto dla 12 f. bazowych wykres jest bardzo podobny do wykresu dla 10 f. bazowych.

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktow dyskretyzacji oraz 16 funkcji bazowych



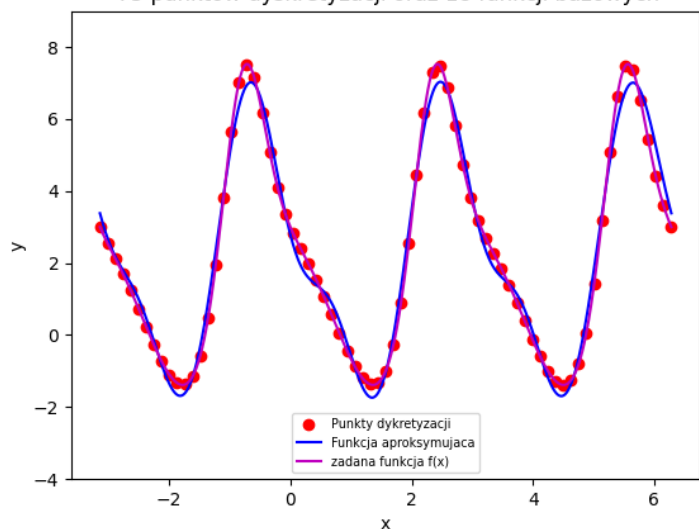
Wykres 20. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 16 f. bazowych.

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 30 punktow dyskretyzacji oraz 18 funkcji bazowych



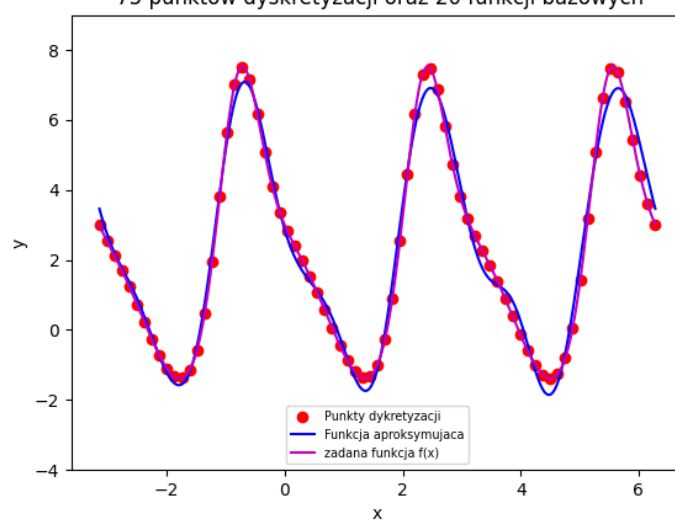
Wykres 21. Aproksymacja dla 30 punktów dyskretyzacji oraz 18 f. bazowych

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 75 punktow dyskretyzacji oraz 18 funkcji bazowych

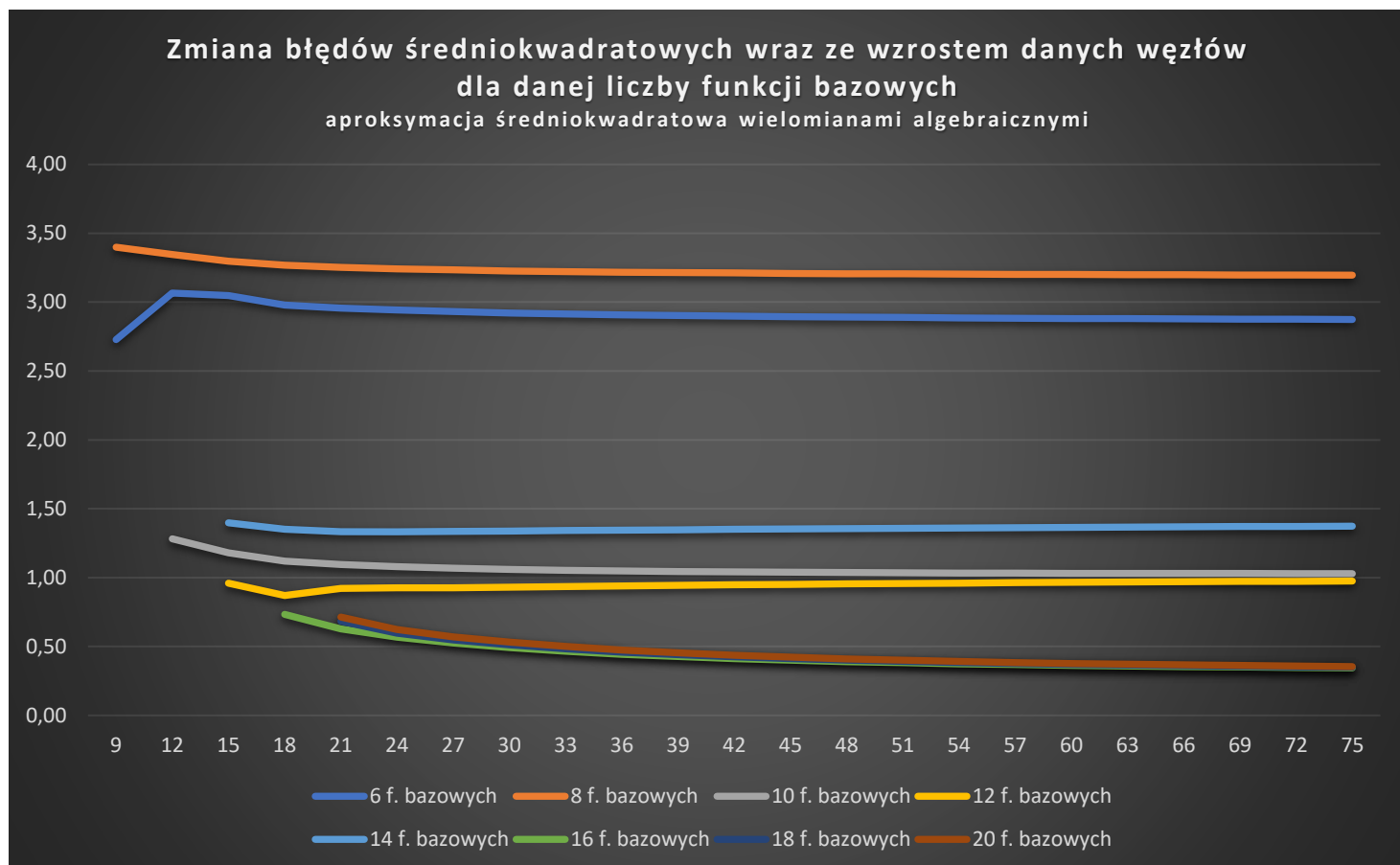


Wykres 22. Aproksymacja dla 75 punktów dyskretyzacji oraz 18 f. bazowych.

Aproksymacja sredniokwadratowa z f trygonometrycznych i 75 punktow dyskretyzacji oraz 20 funkcji bazowych



Wykres 23. Aproksymacja dla 75 punktów dyskretyzacji oraz 20 f. bazowych



Wykres 24. Zmiana błędów średniokwadratowych biorąc pod uwagę różną liczbę węzłów dla różnych liczb f. bazowych



Wykres 25. Zmiana błędów średniokwadratowych dla 75 węzłów biorąc pod uwagę rosnącą liczbę f. bazowych

Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna – wnioski

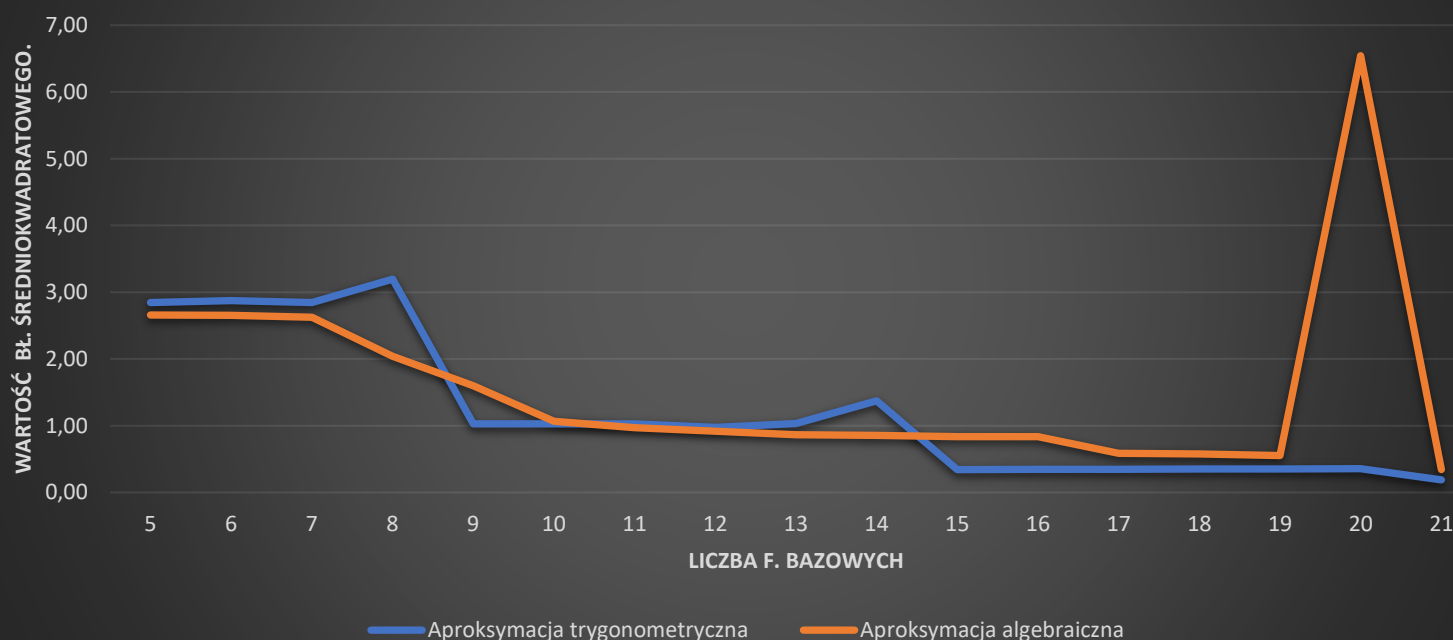
Dla aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej dla większości przypadków pozostaje prawdziwe stwierdzenie użyte we wnioskach aproksymacji z użyciem wielomianów algebraicznych, że zwiększenie badanych punktów dyskretyzacji dla tej samej liczby funkcji bazowych powoduje ciągłe zwiększenie dokładności aproksymacji, chociaż wraz ze wzrostem branych pod uwagę punktów różnice w dokładności są coraz mniejsze. Widać to dobrze na **Wykresie 24.**, jednak są tam również widoczne odstępstwa od tego stwierdzenia, zwłaszcza dla 14 f. bazowych, co można zauważyć też na **Wykresie 19.**

Przypadki aproksymacji dla 14 f. bazowych oraz 8 f. bazowych psują także tendencję spadkową błędu średniokwadratowego dla stałej liczby węzłów i wzrastającej liczby f. bazowych, prezentuje to **Wykres 25.**

Mniejsza liczba funkcji bazowych powoduje lepsze wygładzenie błędów aproksymacji, a większa ich liczba pozwala na dokładniejsze przybliżenie funkcji aproksymowanej, widać to na wykresach **16.** oraz **21.**

Porównanie sposobów aproksymacji średniokwadratowej

Porównanie błędów średniokwadratowych dla 75 węzłów wraz ze wzrostem liczby f. bazowych dla obu aproksymacji



Wykres 26. Zmiana błędów średniokwadratowych dla 75 węzłów biorąc pod uwagę rosnącą liczbę f. bazowych – porównanie aproksymacji

Do stworzenia powyższego wykresu użyłem błędów średniokwadratowych aproksymacji z tabel **1.**, **2.**, **3.** i **4.** dla 75 węzłów oraz tych wyliczonych dodatkowo, które się tam nie znajdują. Dla aproksymacji trygonometrycznej użyłem poniższego wzoru, aby uzyskać nieparzystą liczbę f. bazowych:

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Tak więc wzór na wielomian trygonometryczny aproksymujący różni się od tego pokazanego wcześniej w sekcji przedstawiającej algorytm postępowania tylko dodaniem $b_m \sin(mx)$ do wielomianu. Wzory na współczynniki a_k oraz b_k pozostają takie same.

Analizując stworzony **Wykres 26.** można stwierdzić, że obie te aproksymacje dla różnych danych mają gorsze i lepsze rezultaty. Dla małej liczby f. bazowych to aproksymacja algebraiczna jest minimalnie lepsza, następnie dla 10-13 węzłów różnice są minimalne, a od 15 węzłów to aproksymacja trygonometryczna wydaje się lepszym wyborem dla badanej funkcji, zwłaszcza biorąc pod uwagę błędy pojawiające się od ~20 f. bazowych dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi, które mogą wynikać z uwarunkowania rozwiązywanego układu równań.

Dodatkowo do 20 funkcji bazowych aproksymacja wielomianami algebraicznymi zachowuje tendencję spadkową błędu średniokwadratowego dla rosnącej liczby funkcji bazowych i stałej liczby węzłów bez żadnych odstępstw, a aproksymacja trygonometryczna posiada dwie wartości funkcji bazowych, dla których ta tendencja spadkowa błędu jest zachwiana.

Podsumowanie

Wybór metody aproksymacji w dużej mierze zależy od dostępnych danych oraz od wzoru funkcji, którą chcemy zbadać. Można założyć, że dla funkcji, która jest złożona z funkcji trygonometrycznych aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna będzie lepszym wyborem, zwłaszcza dla większej liczby funkcji bazowych.

Prawdopodobnie gdyby badana w tym sprawozdaniu funkcja była bliższa wielomianowi aproksymującemu w aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi, to ona zdecydowanie lepiej przybliżałaby zadaną

funkcję, choć należałoby uważać na błędy występujące przy większej liczbie funkcji bazowych.

Bibliografia

1. Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2020/21
2. [„Numerical Analysis” Richard L. Burder, J. Douglas Faires](#)