

MOwNiT – temat 3

**Interpolacja funkcjami sklejanymi
drugiego i trzeciego stopnia**

Gabriel Cyganek

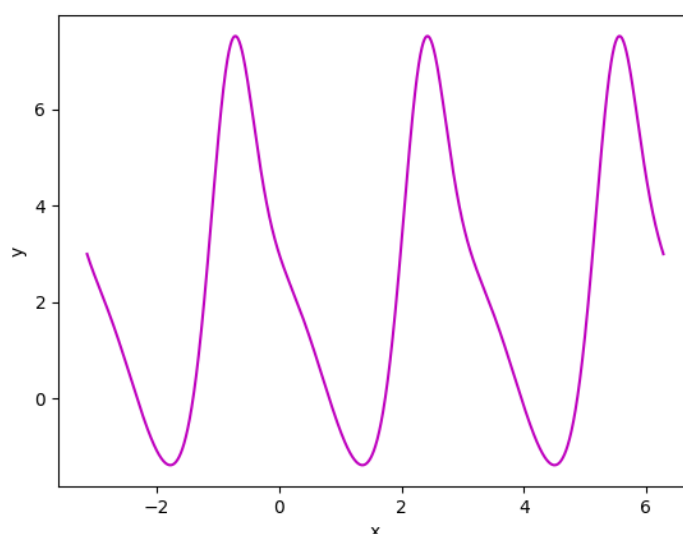
Dane techniczne

Do napisania programu wykonującego zadanie wykorzystałem język Python. Do rysowania wykresów użyłem funkcji *pyplot* z biblioteki *matplotlib*, a do wyliczenia wartości funkcji matematycznych funkcji z biblioteki *math*. Wykonywanie programu odbywało się na systemie Windows 10 x64 na komputerze z procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz.

Polecenie

Interpolacja funkcji $f(x) = e^{-2\sin(2x)} + 2 * \cos(2x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$ funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych.

Dla obu metod zastosowano interpolację dla od 3 do 100 węzłów równoodległych oraz różnych warunków brzegowych zaprezentowanych w dalszej części sprawozdania.



Wykres 1. Funkcja $f(x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Błędy interpolacji

Do sprawdzenia dokładności interpolacji użyłem błędu wyliczonego jako maksymalna różnica między wartością funkcji interpolowanej, a wartością wielomianu interpolującego oznaczonego w tabelach jako błąd maksymalny oraz błędu średniokwadratowego obliczonego jako pierwiastek ze średniej wartości różnicy między tymi wartościami podniesionymi do kwadratu. W obu przypadkach brałem pod uwagę 900 punktów równoodległych na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Interpolacja funkcjami sklejanymi drugiego stopnia – algorytm postępowania

Mając danych $n + 1$ węzłów otrzymamy n wielomianów $Q(x)$ stopnia drugiego takich, że:

- $Q_k(x_k) = Q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
- $Q_0(x_0) = f(x_0)$ oraz $Q_{n-1}(x_n) = f(x_n)$
- $Q'_k(x_k) = Q'_{k-1}(x_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Z powyższych danych otrzymujemy $3n - 1$ równania, podczas gdy mamy $3n$ niewiadomych (dla każdego wielomianu $Q_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k$ mamy trzy współczynniki do wyliczenia). Aby otrzymać ostatnie równanie potrzebne do wyznaczenia współczynników wielomianów, skorzystamy z warunków brzegowych:

1. $Q''_0(x_0) = 0$
2. $Q''_{n-1}(x_n) = 0$
3. $Q'_0(x_0) = f'(x_0) = -4$
4. $Q'_{n-1}(x_n) = f'(x_n) = -4$

Wartości w 3. i 4. otrzymujemy podstawiając $-\pi$ i kolejno 2π do wzoru na pochodną funkcji $f(x)$, czyli: $f'(x) = -4 * e^{-2*\sin(2x)} * \cos(2x) - 4 * \sin(2x)$

Warunki brzegowe 1. i 2. oznaczają, że wielomiany brzegowe są funkcjami liniowymi.

Do wyznaczenia wartości funkcji interpolującej korzystam ze wzoru:

$$Q_i(x) = \frac{(z_{i+1} - z_i)}{2(x_{i+1} - x_i)} * (x - x_i)^2 + z_i * (x - x_i) + f(x_i)$$
$$Q'_i(x_{i+1}) = z_{i+1}, \quad Q'_i(x_i) = z_i$$

Dla którego najpierw wyliczam:

$$z_{i+1} = -z_i + 2 * \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{dla } 0 \leq i \leq n - 1$$

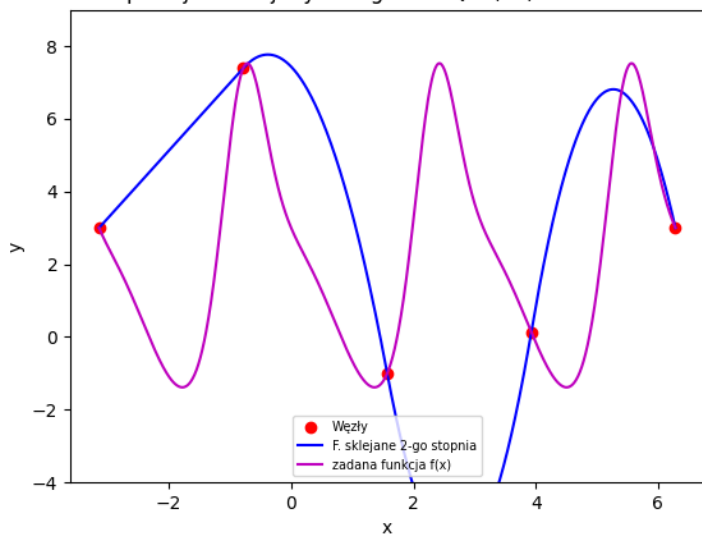
Gdzie z_0 determinuje warunek brzegowy.

Interpolacja funkcjami sklejanymi drugiego stopnia – rezultaty

| Liczba węzłów | $Q_0''(x_0) = 0$ | | $Q_{n-1}''(x_n) = 0$ | | $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ | | $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ | |
|---------------|------------------|-----------|----------------------|-----------|-----------------------|-----------|---------------------------|-----------|
| | MAX | ŚR_KWADR | MAX | ŚR_KWADR | MAX | ŚR_KWADR | MAX | ŚR_KWADR |
| 3 | 8.987E+00 | 3.695E+00 | 8.587E+00 | 3.662E+00 | 1.030E+01 | 4.073E+00 | 1.429E+01 | 6.016E+00 |
| 4 | 4.525E+00 | 2.935E+00 | 4.525E+00 | 2.935E+00 | 7.478E+00 | 3.488E+00 | 7.478E+00 | 3.947E+00 |
| 5 | 1.330E+01 | 5.487E+00 | 1.194E+01 | 5.013E+00 | 1.656E+01 | 7.018E+00 | 1.136E+01 | 4.971E+00 |
| 6 | 1.470E+01 | 5.230E+00 | 1.392E+01 | 7.076E+00 | 1.621E+01 | 5.639E+00 | 1.665E+01 | 8.732E+00 |
| 7 | 1.640E+01 | 6.777E+00 | 9.168E+00 | 3.646E+00 | 1.583E+01 | 6.419E+00 | 1.173E+01 | 4.703E+00 |
| 8 | 1.259E+01 | 5.871E+00 | 1.271E+01 | 5.180E+00 | 1.234E+01 | 5.712E+00 | 1.076E+01 | 4.072E+00 |
| 9 | 7.303E+00 | 2.913E+00 | 7.609E+00 | 3.091E+00 | 7.168E+00 | 2.837E+00 | 6.359E+00 | 2.414E+00 |
| 10 | 4.176E+00 | 1.581E+00 | 4.717E+00 | 2.436E+00 | 4.085E+00 | 1.543E+00 | 4.085E+00 | 2.057E+00 |
| 11 | 5.504E+00 | 2.255E+00 | 5.601E+00 | 2.287E+00 | 5.429E+00 | 2.231E+00 | 5.429E+00 | 2.231E+00 |
| 12 | 5.548E+00 | 2.526E+00 | 7.754E+00 | 3.933E+00 | 5.618E+00 | 2.566E+00 | 7.886E+00 | 4.022E+00 |
| 13 | 1.588E+01 | 6.346E+00 | 1.610E+01 | 7.478E+00 | 1.595E+01 | 6.388E+00 | 1.641E+01 | 7.679E+00 |
| 14 | 3.790E+00 | 1.712E+00 | 5.449E+00 | 2.739E+00 | 3.859E+00 | 1.751E+00 | 5.855E+00 | 3.011E+00 |
| 15 | 3.722E+00 | 1.378E+00 | 3.207E+00 | 1.196E+00 | 3.652E+00 | 1.349E+00 | 3.652E+00 | 1.349E+00 |
| 16 | 2.663E+00 | 1.116E+00 | 2.142E+00 | 1.072E+00 | 2.593E+00 | 1.082E+00 | 2.592E+00 | 1.308E+00 |
| 17 | 3.364E+00 | 1.471E+00 | 2.855E+00 | 1.195E+00 | 3.295E+00 | 1.431E+00 | 3.294E+00 | 1.430E+00 |
| 18 | 5.474E+00 | 2.469E+00 | 5.202E+00 | 2.238E+00 | 5.405E+00 | 2.428E+00 | 5.618E+00 | 2.479E+00 |
| 19 | 1.778E-01 | 8.449E-02 | 5.441E-01 | 3.107E-01 | 1.572E-01 | 7.955E-02 | 1.572E-01 | 7.955E-02 |
| 20 | 4.351E+00 | 1.933E+00 | 4.710E+00 | 2.201E+00 | 4.417E+00 | 1.973E+00 | 4.348E+00 | 1.981E+00 |
| 25 | 2.464E+00 | 9.100E-01 | 2.794E+00 | 1.372E+00 | 2.407E+00 | 8.769E-01 | 2.555E+00 | 1.213E+00 |
| 30 | 4.974E-01 | 2.069E-01 | 7.296E-01 | 3.562E-01 | 5.449E-01 | 2.354E-01 | 5.681E-01 | 2.492E-01 |
| 35 | 1.376E-01 | 4.476E-02 | 2.101E-01 | 9.452E-02 | 1.018E-01 | 3.707E-02 | 1.018E-01 | 3.707E-02 |
| 40 | 8.439E-02 | 2.381E-02 | 1.546E-01 | 7.025E-02 | 7.256E-02 | 2.019E-02 | 7.261E-02 | 1.924E-02 |
| 45 | 5.188E-02 | 1.541E-02 | 1.136E-01 | 5.719E-02 | 4.998E-02 | 1.401E-02 | 4.998E-02 | 1.401E-02 |
| 50 | 3.867E-02 | 1.376E-02 | 8.103E-02 | 4.370E-02 | 2.674E-02 | 8.704E-03 | 3.084E-02 | 9.202E-03 |
| 55 | 2.612E-02 | 1.173E-02 | 6.079E-02 | 3.431E-02 | 2.005E-02 | 6.312E-03 | 2.005E-02 | 6.312E-03 |
| 60 | 2.318E-02 | 1.040E-02 | 4.738E-02 | 2.784E-02 | 1.457E-02 | 4.643E-03 | 1.445E-02 | 4.645E-03 |
| 65 | 1.911E-02 | 9.283E-03 | 3.806E-02 | 2.303E-02 | 1.087E-02 | 3.534E-03 | 1.087E-02 | 3.534E-03 |
| 70 | 1.596E-02 | 8.340E-03 | 3.120E-02 | 1.935E-02 | 8.428E-03 | 2.753E-03 | 8.385E-03 | 2.757E-03 |
| 75 | 1.381E-02 | 7.526E-03 | 2.600E-02 | 1.648E-02 | 6.632E-03 | 2.192E-03 | 6.632E-03 | 2.192E-03 |
| 80 | 1.199E-02 | 6.824E-03 | 2.217E-02 | 1.420E-02 | 5.305E-03 | 1.773E-03 | 5.295E-03 | 1.774E-03 |
| 85 | 1.062E-02 | 6.209E-03 | 1.893E-02 | 1.235E-02 | 4.285E-03 | 1.456E-03 | 4.285E-03 | 1.456E-03 |
| 90 | 9.384E-03 | 5.672E-03 | 1.641E-02 | 1.084E-02 | 3.489E-03 | 1.211E-03 | 3.586E-03 | 1.212E-03 |
| 95 | 8.439E-03 | 5.197E-03 | 1.442E-02 | 9.589E-03 | 2.950E-03 | 1.019E-03 | 2.950E-03 | 1.019E-03 |
| 100 | 7.611E-03 | 4.779E-03 | 1.273E-02 | 8.541E-03 | 2.527E-03 | 8.649E-04 | 2.537E-03 | 8.653E-04 |

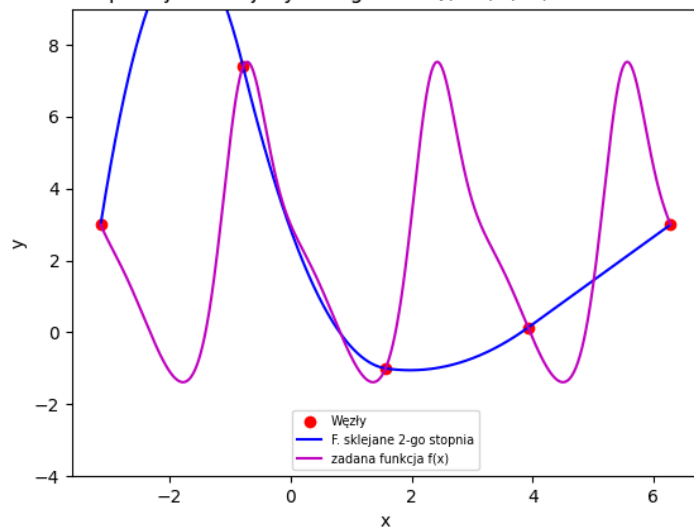
Tabela 1. Tabela przedstawiająca błędy maksymalne (kolumny MAX) oraz błędy średniokwadratowe (kolumny ŚR_KWADR) interpolacji funkcjami sklejanymi drugiego stopnia dla czterech różnych warunków brzegowych.

Interpolacja f. sklejanyimi 2-go st. - $Q_0''(x_0) = 0$ - 5 wezlow



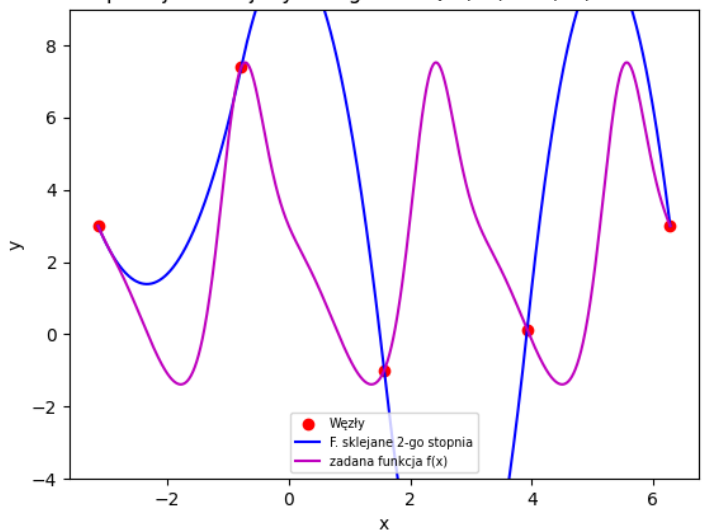
Wykres 2. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = 0$

Interpolacja f. sklejanyimi 2-go st. - $Q_{n-1}''(x_n) = 0$ - 5 wezlow



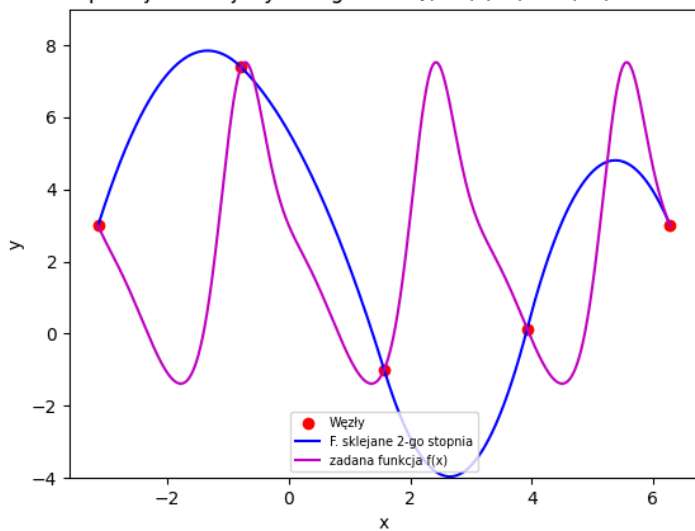
Wykres 3. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyimi 2-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ - 5 wezlow



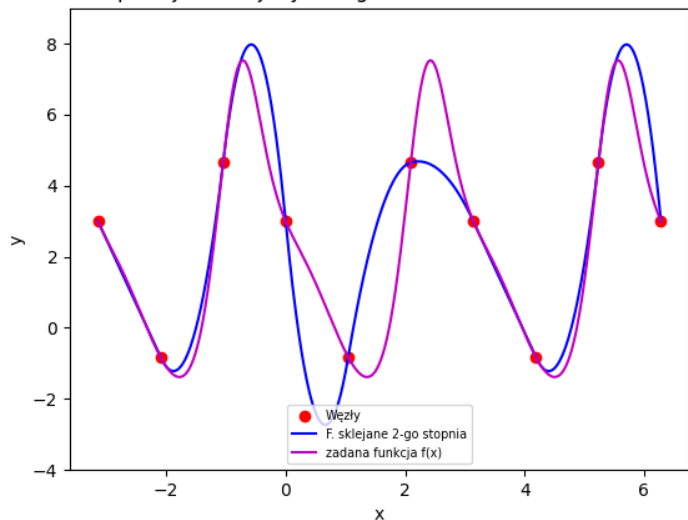
Wykres 4. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$

Interpolacja f. sklejanyimi 2-go st. - $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ - 5 wezlow



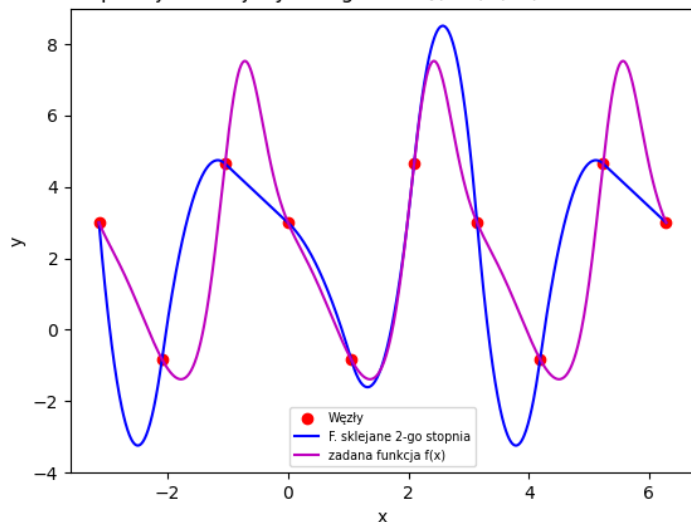
Wykres 5. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_0''(x_0) = 0$ - 10 wezlow



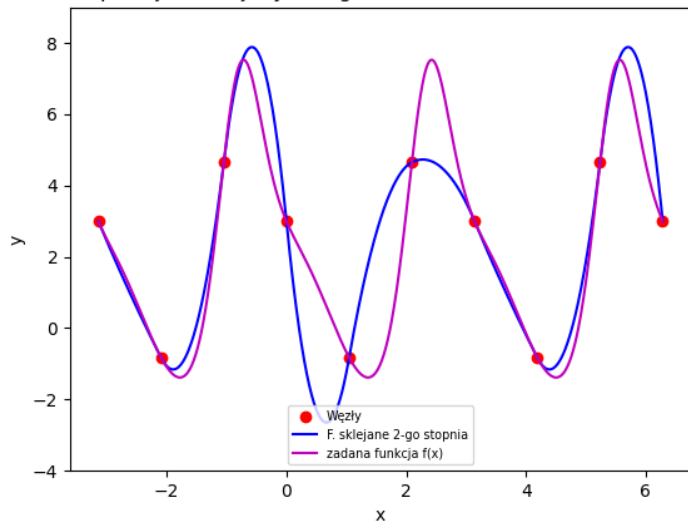
Wykres 6. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_{n-1}''(x_n) = 0$ - 10 wezlow



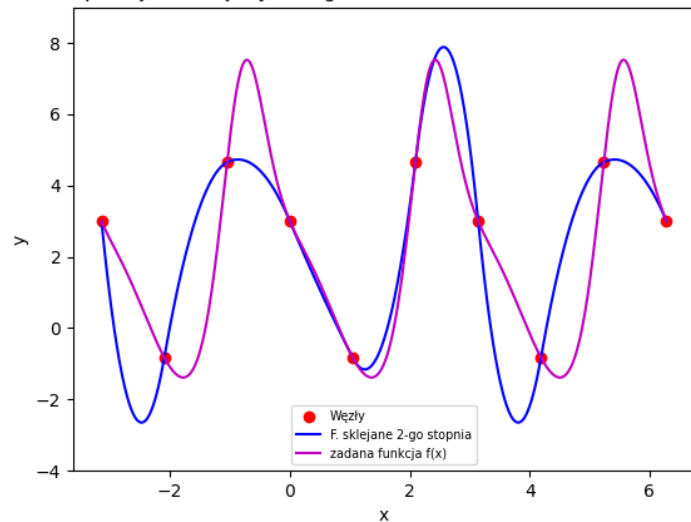
Wykres 7. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ - 10 wezlow



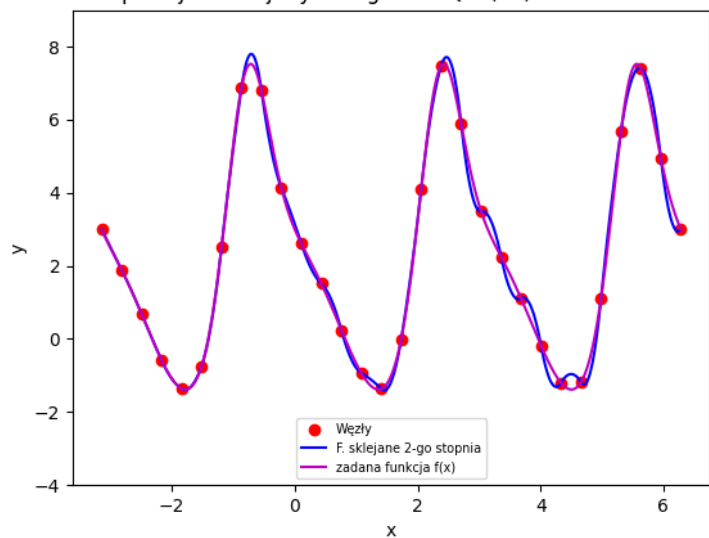
Wykres 8. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ - 10 wezlow



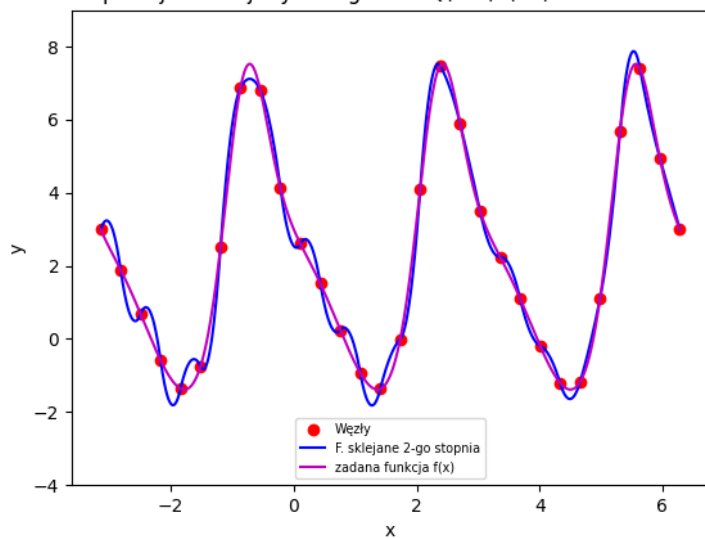
Wykres 9. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_0''(x_0) = 0$ - 30 węzłów



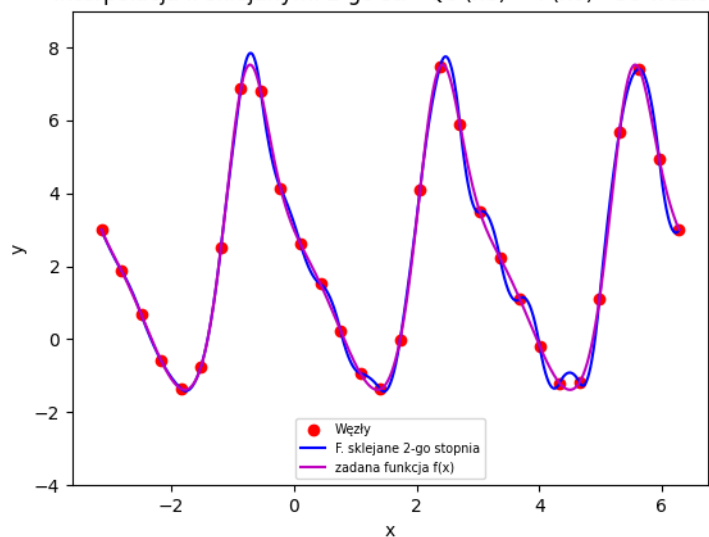
Wykres 10. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_{n-1}''(x_n) = 0$ - 30 węzłów



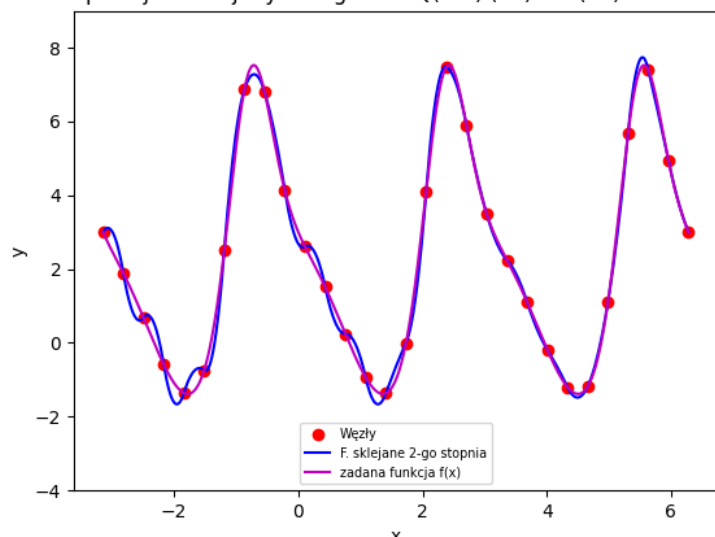
Wykres 11. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ - 30 węzłów



Wykres 12. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$

Interpolacja f. sklejanyymi 2-go st. - $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ - 30 węzłów



Wykres 13. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Interpolacja funkcjami sklejanymi drugiego stopnia – wnioski

Porównując błędy interpolacji na podstawie **Tabeli 1.** dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = 0$ oraz analogicznego warunku z prawej strony możemy zauważyć, że błędy te nie różnią się znacząco, jednak to warunek brzegowy lewostronny jest dokładniejszy, pomijając mniejsze liczby węzłów (3 – 7), gdzie nie można tego jednoznacznie określić.

Inaczej wygląda to dla warunku brzegowego $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ oraz analogicznego warunku z prawej strony, gdzie, zwłaszcza dla większych niż 9 liczb węzłów, błędy interpolacji różnią się w niewielkim stopniu, a często są identyczne. Nie można też na podstawie otrzymanych błędów powiedzieć, że któryś z tych warunków powoduje lepszą dokładność funkcji interpolującej dla jakiegoś ciągłego zbioru liczb przedziałów, niż drugi.

Porównując oba rodzaje warunków brzegowych można stwierdzić, że do liczby węzłów $n = 35$ żaden z warunków nie ma znaczącej przewagi w dokładności interpolacji nad innymi, jednak powyżej tej liczby najdokładniejsza jest już interpolacja dla warunków $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ i $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$. Błędy dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = 0$ mimo, że są większe, to nie znacząco, jednak można już zauważyć dosyć dużą różnicę dokładności dla warunku $Q_{n-1}''(x_n) = 0$.

Różnice między stosowanymi warunkami brzegowymi są również widoczne na wykresach, gdzie widać (zwłaszcza na **Wykresie 2.**, **Wykresie 3.**, **Wykresie 4.**, **Wykresie 5.**) różnice między warunkami stosowanymi na prawym i na lewym brzegu, kiedy znaczenie ma kształt funkcji na tych brzegach, a także różnice w rodzajach tych warunków brzegowych. Stosując warunek $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ widzimy, że funkcja interpolowana na lewym brzegu bardziej przypomina funkcję $f(x)$, niż stosując warunek $Q_0''(x_0) = 0$, gdzie funkcja sklejana na tym brzegu jest funkcją liniową. Może to powodować większe różnice w dokładności dla funkcji o dużej liczbie oscylacji na brzegu, zwłaszcza takich o dużej amplitudzie.

Dla wszystkich tych warunków brzegowych błędy interpolacji maleją wraz ze wzrostem liczby przedziałów, jednak zdarzają się takie przypadki, jak dla liczby węzłów $n = 19$ (**Tabela 1.**), gdzie błędy te ulegają znacznemu zmniejszeniu w porównaniu do ogólnego trendu. Są to jednak tylko rzadkie odstępstwa od normy, choć wskazują, że funkcja interpolowana może mieć pewne rozkłady

węzłów, dla których interpolacja funkcjami sklejanymi działa szczególnie dobrze w porównaniu do innych liczb węzłów, które nie różnią się znacząco.

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia – algorytm postępowania

Mając danych $n + 1$ węzłów otrzymamy n wielomianów $Q(x)$ trzeciego stopnia takich, że:

- $Q_k(x_k) = Q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
- $Q_0(x_0) = f(x_0)$ oraz $Q_{n-1}(x_n) = f(x_n)$
- $Q'_k(x_k) = Q'_{k-1}(x_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
- $Q''_k(x_k) = Q''_{k-1}(x_k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Z powyższych danych otrzymujemy $4n - 2$ równań, podczas gdy mamy $4n$ niewiadomych (dla każdego wielomianu $Q_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k$ mamy cztery współczynniki do wyliczenia). Aby otrzymać ostatnie 2 równania potrzebne do wyznaczenia współczynników wielomianów, skorzystamy z warunków brzegowych:

1. $Q''_0(x_0) = Q''_{n-1}(x_n) = 0$ (natural cubic spline)
2. $Q'_0(x_0) = f'(x_0)$ oraz $Q'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$ (clamped cubic spline)

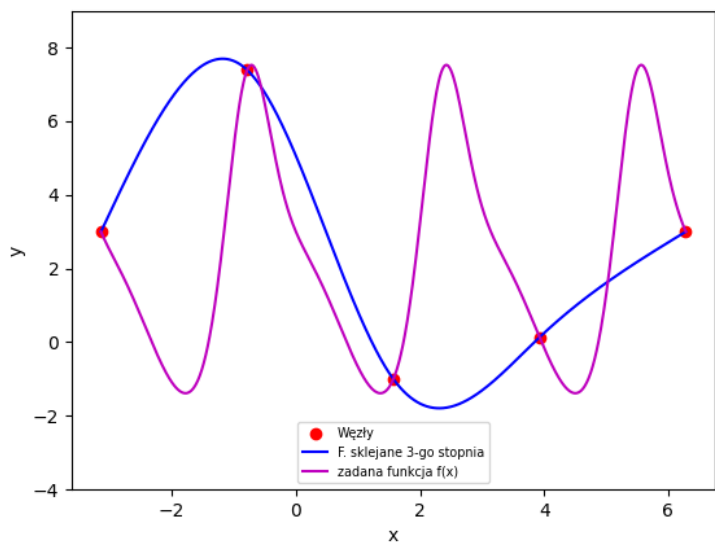
Współczynniki wielomianów $Q_k(x)$ dla $k = 0, 1, \dots, n - 1$ obliczam iteracyjnie korzystając z algorytmu przedstawionego w książkę [R. L. Burden, J. D. Faires „Numerical Analysis”, 9th ed.](#) – Chapter 3 Algorithm 3.4 dla warunku brzegowego 1. oraz Chapter 3 Algorithm 3.5 dla warunku brzegowego 2.

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia – rezultaty

| Liczba węzłów | $Q_0''(x_0) = Q_{n-1}''(x_n) = 0$ | | $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ oraz $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ | |
|---------------|-----------------------------------|-----------|---|-----------|
| | MAX | ŚR_KWADR | MAX | ŚR_KWADR |
| 3 | 8.341E+00 | 3.542E+00 | 1.011E+01 | 4.238E+00 |
| 4 | 4.525E+00 | 2.935E+00 | 6.106E+00 | 3.033E+00 |
| 5 | 9.302E+00 | 4.226E+00 | 9.907E+00 | 3.844E+00 |
| 6 | 7.803E+00 | 3.464E+00 | 6.559E+00 | 2.900E+00 |
| 7 | 7.492E+00 | 2.937E+00 | 6.298E+00 | 2.541E+00 |
| 8 | 5.940E+00 | 1.921E+00 | 4.780E+00 | 1.648E+00 |
| 9 | 4.156E+00 | 1.632E+00 | 3.699E+00 | 1.501E+00 |
| 10 | 2.831E+00 | 1.454E+00 | 2.832E+00 | 1.427E+00 |
| 11 | 3.576E+00 | 1.218E+00 | 3.565E+00 | 1.236E+00 |
| 12 | 2.924E+00 | 1.017E+00 | 2.928E+00 | 1.026E+00 |
| 13 | 1.277E+00 | 4.449E-01 | 9.209E-01 | 3.935E-01 |
| 14 | 1.990E+00 | 6.832E-01 | 1.988E+00 | 6.283E-01 |
| 15 | 1.746E+00 | 5.666E-01 | 1.744E+00 | 4.985E-01 |
| 16 | 1.343E+00 | 4.723E-01 | 9.493E-01 | 4.023E-01 |
| 17 | 1.180E+00 | 3.975E-01 | 1.018E+00 | 3.338E-01 |
| 18 | 1.054E+00 | 3.295E-01 | 9.109E-01 | 2.760E-01 |
| 19 | 9.119E-01 | 3.668E-01 | 8.472E-01 | 3.371E-01 |
| 20 | 7.325E-01 | 2.198E-01 | 6.413E-01 | 1.889E-01 |
| 25 | 1.570E-01 | 4.185E-02 | 8.628E-02 | 3.473E-02 |
| 30 | 1.176E-01 | 3.070E-02 | 1.206E-01 | 3.041E-02 |
| 35 | 5.713E-02 | 1.381E-02 | 5.713E-02 | 1.338E-02 |
| 40 | 2.598E-02 | 7.252E-03 | 2.559E-02 | 6.549E-03 |
| 45 | 1.777E-02 | 4.350E-03 | 1.524E-02 | 3.536E-03 |
| 50 | 1.447E-02 | 2.886E-03 | 9.300E-03 | 2.073E-03 |
| 55 | 1.193E-02 | 2.062E-03 | 5.898E-03 | 1.298E-03 |
| 60 | 9.998E-03 | 1.554E-03 | 3.870E-03 | 8.564E-04 |
| 65 | 8.486E-03 | 1.217E-03 | 2.636E-03 | 5.893E-04 |
| 70 | 7.320E-03 | 9.808E-04 | 1.848E-03 | 4.196E-04 |
| 75 | 6.330E-03 | 8.074E-04 | 1.395E-03 | 3.074E-04 |
| 80 | 5.560E-03 | 6.761E-04 | 1.048E-03 | 2.307E-04 |
| 85 | 4.938E-03 | 5.740E-04 | 7.374E-04 | 1.767E-04 |
| 90 | 4.393E-03 | 4.929E-04 | 6.234E-04 | 1.377E-04 |
| 95 | 3.914E-03 | 4.274E-04 | 4.938E-04 | 1.090E-04 |
| 100 | 3.507E-03 | 3.737E-04 | 3.916E-04 | 8.745E-05 |

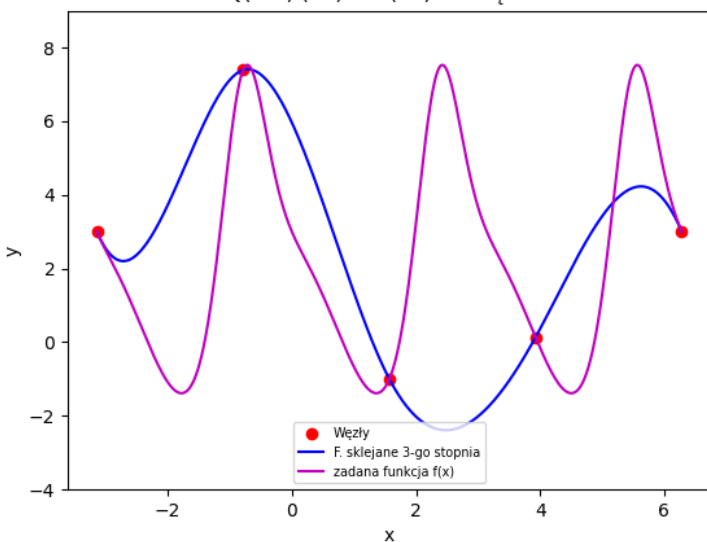
Tabela 2. Tabela przedstawiająca błędy maksymalne (kolumny MAX) oraz błędy średniokwadratowe (kolumny ŚR_KWADR) interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia dla dwóch różnych warunków brzegowych.

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q(n-1)''(x_n) = Q_0''(x_0) = 0$
- 5 węzłów



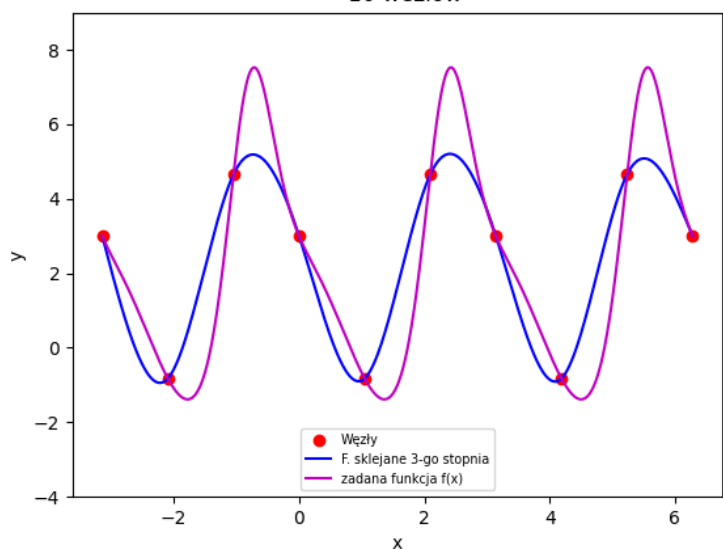
Wykres 14. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$,
 $Q(n-1)'(x_n) = f'(x_n)$ - 5 węzłów



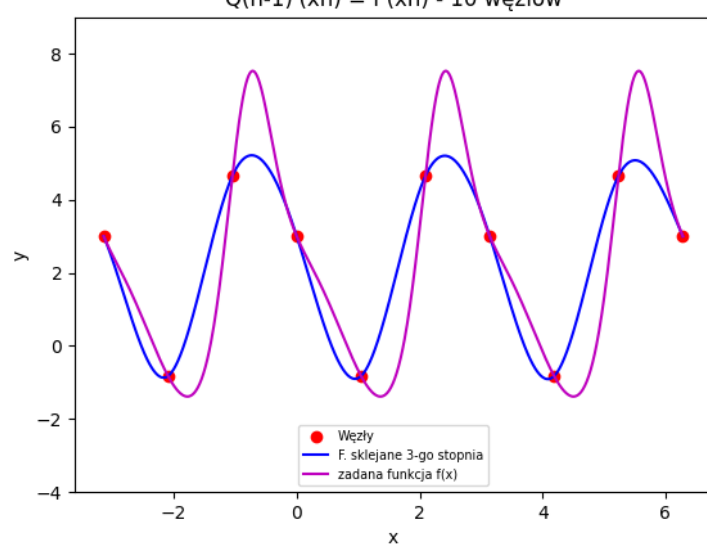
Wykres 15. Interpolacja dla 5 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$, $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q(n-1)''(x_n) = Q_0''(x_0) = 0$
- 10 węzłów



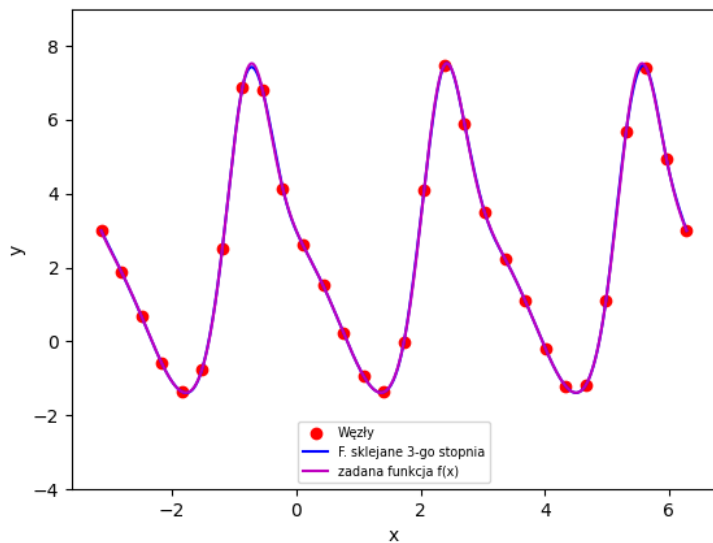
Wykres 16. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$,
 $Q(n-1)'(x_n) = f'(x_n)$ - 10 węzłów



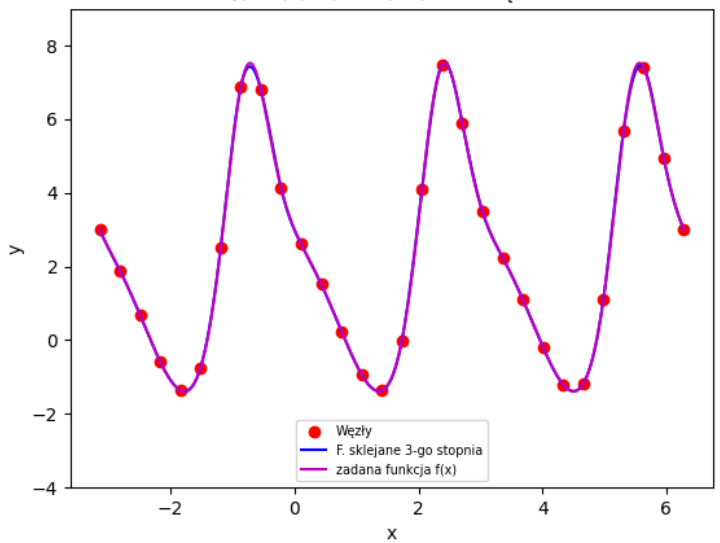
Wykres 17. Interpolacja dla 10 węzłów dla warunku brzegowego $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$, $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q(n-1)''(x_n) = Q_0''(x_0) = 0$
- 30 węzłów



Wykres 18. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0''(x_0) = Q_{n-1}''(x_n) = 0$

Interpolacja f. sklejanyymi 3-go st. - $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$,
 $Q(n-1)'(x_n) = f'(x_n)$ - 30 węzłów



Wykres 19. Interpolacja dla 30 węzłów dla warunku brzegowego $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$,
 $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Interpolacja funkcjami sklejanyymi trzeciego stopnia – wnioski

Zarówno dla warunków brzegowych $Q_0''(x_0) = Q_{n-1}''(x_n) = 0$ jak i dla $Q_0'(x_0) = f'(x_0)$ oraz $Q_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$ otrzymujemy dobre przybliżenie już dla 25 węzłów interpolacji, co widać w **Tabeli 3**. Nieznaczną przewagę przy pominięciu mniejszej liczby węzłów (3-7 oraz 12) jeśli chodzi o dokładność ma drugi zestaw warunków brzegowych, która zwiększa się już cały czas wraz ze wzrostem liczby węzłów.

Różnica na wykresach między tymi warunkami brzegowymi jest widoczna głównie przy małej liczbie węzłów, przy samych brzegach, co widać porównując **Wykres 14.** i **Wykres 15.** oraz już nieznacznie na lewym brzegu na **Wykresie 16.** i **Wykresie 17.** Natomiast przy większej liczbie węzłów na wykresach **18.** i **19.** nie da się zauważyć żadnej różnicy.

Porównanie interpolacji funkcjami drugiego i trzeciego stopnia

Warto zauważyć, że interpolowanie funkcjami sklejanyymi trzeciego rzędu zyskują względnie dobrą dokładność już dla 20 węzłów, podczas gdy podobne błędy interpolacji dla funkcji sklejanych drugiego rzędu występują dopiero dla 30 węzłów (porównanie błędów w **Tabeli 2.** i **Tabeli 3.**). Jest to dosyć duża różnica, która wynika z własności wielomianów drugiego i trzeciego stopnia. Funkcje sklejane trzeciego stopnia mają ciągłą drugą pochodną, co pomaga w otrzymaniu bardziej wygładzonej funkcji interpolującej. Widać to zwłaszcza

porównując wykresy **Wykres 10.**, **Wykres 11.**, **Wykres 12.**, **Wykres 13.** do wykresów **Wykres 18.**, **Wykres 19.** Stosowanie funkcji sklejanych drugiego stopnia powoduje większe oscylacje przy przechodzeniu z jednego przedziału stworzonego przez węzły interpolacji do kolejnego.

Podsumowanie

Interpolacja funkcjami sklejanymi pozwala na uniknięcie efektu Runge’go, który był widoczny przy interpolacji Lagrange’a oraz Hermite’a dla węzłów równoodległych. To, czy powinniśmy użyć do interpolacji funkcji sklejanych drugiego, czy trzeciego stopnia zależy w dużej mierze od rezultatów, które chcemy uzyskać. Funkcje sklejane trzeciego stopnia pozwolą na dokładniejsze przybliżenie funkcji interpolowanej przy mniejszej liczbie węzłów niż funkcje sklejane drugiego stopnia. Dla obu tych możliwości możemy dobrać odpowiednie warunki brzegowe, które też mają wpływ na dokładność interpolacji, jednak różnice w błędach albo nie wskazują jednoznacznie na wybór któregoś z warunków, albo mają znaczenie dopiero przy większej liczbie przedziałów, na które dzielimy dziedzinę funkcji interpolowanej.

Bibliografia

1. Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2020/21
2. [Ward Cheney, David Kincaid „Numerical Mathematics and Computing. Sixth Edition”](#) - Chapter 9
3. [R. L. Burden, J. D. Faires „Numerical Analysis”, 9th ed.](#) – Chapter 3 Algorithm 3.4 oraz Chapter 3 Algorithm 3.5