MOwNiT – temat 6

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

Gabriel Cyganek

Dane techniczne

Do napisania programu wykonującego zadania użyłem języka Python. Wykorzystałem bibliotekę *numpy* do wykonywania operacji na macierzach (funkcja *matmul* do mnożenia macierzy, *linalg.inv* do odwrócenia macierzy), a także do otrzymania liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji (*numpy.single)*. Wykonywanie programu odbywało się na systemie Windows 10 x64 na komputerze z procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz.

Zadanie 1 – algorytm postępowania

Przyjmując macierz $\boldsymbol{A} = \begin{cases} a_{1j} = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \; dla \; i \neq 1 \end{cases}$ gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$ oraz wektor $\boldsymbol{x}$ n-elementowy o elementach równych 1 wyznaczyłem wektor $\boldsymbol{b}$ zgodnie z układem równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Przyjąłem dwie różne precyzje dla znanych wartości macierzy $\boldsymbol{A}$ oraz $\boldsymbol{b}$ – *float* reprezentujący domyślnie liczby zmiennoprzecinkowe w Pythonie, będący typem danych o zapisie 64-bitowym o podwójnej precyzji, a także *numpy.single* będący typem danych 32-bitowym o pojedynczej precyzji.

Błędy algorytmu obliczyłem jako normy euklidesowe oraz normy maximum z różnicy wektora $\boldsymbol{x}$ początkowego oraz $\boldsymbol{x}$ wyznaczonego z układu równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ przy pomocy metody eliminacji Gaussa.

Eksperyment przeprowadziłem dla macierzy o rozmiarach od 3x3 do 30x30, a także 50x50 zapisując istotne wyniki w tym sprawozdaniu.

Współczynnik uwarunkowania macierzy obliczyłem jako

$$cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| * \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

Gdzie za normę macierzy przyjąłem normę maksymalną dla macierzy. Macierz była odwracana funkcją *linalg.inv*.

Zadanie 1 – rezultaty

Rozmiar macierzy	Norma euklidesowa	Norma maksymalna
3	6.564E-06	5.245E-06
4	3.298E-04	2.575E-04
5	4.588E-03	3.178E-03
6	1.995E-01	1.359E-01
7	1.644E+01	1.140E+01
8	1.511E+01	9.927E+00
9	1.448E+01	9.855E+00
10	3.539E+01	2.450E+01
11	3.364E+01	1.962E+01
12	3.282E+02	1.931E+02
13	8.738E+02	5.407E+02
14	1.028E+02	5.657E+01
15	1.084E+02	5.534E+01
20	1.412E+02	6.898E+01
25	6.999E+02	3.202E+02
30	2.767E+03	1.291E+03
50	4.035E+05	1.193E+05

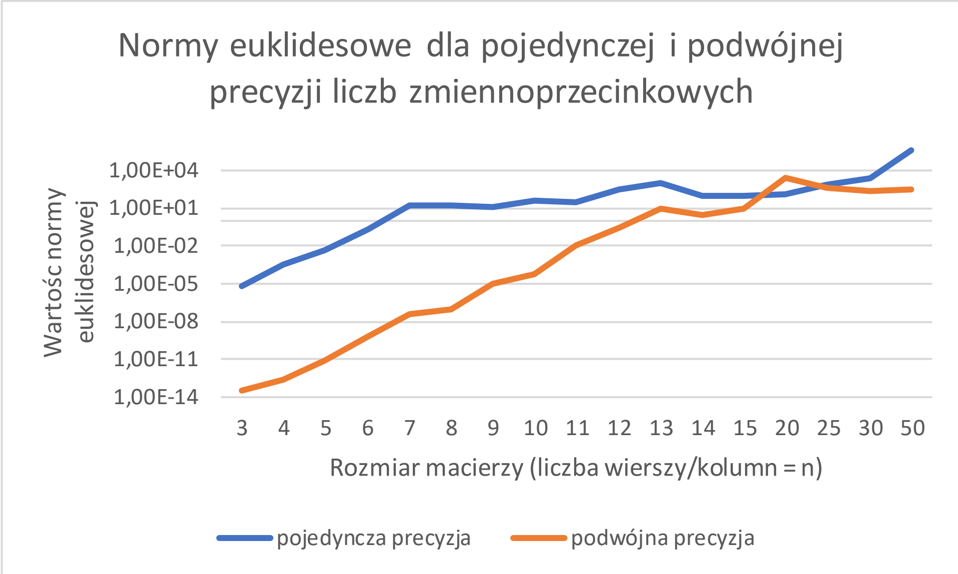
Tabela 1. *Normy uzyskane w zadaniu 1) dla liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji*

Rozmiar macierzy	Norma euklidesowa	Norma euklidesowa
3	3.374E-14	2.698E-14
4	2.305E-13	1.799E-13
5	7.501E-12	5.399E-12
6	6.719E-10	4.604E-10
7	3.659E-08	2.537E-08
8	9.618E-08	6.328E-08
9	8.825E-06	5.440E-06
10	5.466E-05	3.446E-05
11	1.108E-02	6.927E-03
12	2.803E-01	1.677E-01
13	9.629E+00	5.695E+00
14	2.656E+00	1.597E+00
15	9.908E+00	6.048E+00
20	2.607E+03	1.219E+03
25	4.057E+02	1.712E+02
30	2.348E+02	1.285E+02
50	2.703E+02	1.263E+02

Tabela 2. *Normy uzyskane w zadaniu 1) dla liczb zmiennoprzecinkowych podwójnej precyzji*

Rozmiar macierzy	Współczynnik uwarunkowania
3	8.640E+02
4	3.792E+04
5	1.442E+06
6	5.634E+07
7	2.232E+09
8	8.155E+10
9	2.843E+12
10	1.090E+14
11	3.952E+15
12	1.365E+17
13	2.725E+18
14	2.745E+18
15	1.043E+19
20	1.220E+19
25	7.036E+19
30	5.088E+19
50	8.788E+19

Tabela 3. *Współczynniki uwarunkowania macierzy $\boldsymbol{A}$ w zadaniu 1)*



Wykres 1. *Normy euklidesowe w zależności od użytej precyzji, skala logarytmiczna*

Zadanie 1 – wnioski

Porównując ***Tabelę 1.*** i ***2.*** (***Wykres 1.***) można zauważyć, że błędy zaokrągleń dla liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji mocno zaburzają dokładność rozwiązania, przez co przy rozmiarze macierzy $n \geq 6$ błędy są już na tyle duże (przekraczają wartość 0.01), że korzystanie z wyliczonego rozwiązanie okazuje się bezsensowne. Dla podwójnej precyzji otrzymujemy nieco więcej dokładniejszych rozwiązań, jednak przy $n \geq 12$ błąd przekracza wartość 0.01.

Warto jednak zwrócić uwagę na ***Tabelę 3.*** z której wynika bardzo złe uwarunkowanie rozwiązywanego układu równań, co jest głównym powodem otrzymywania tak dużych błędów rozwiązania.

Zadanie 2 – algorytm postępowania

W tym zadaniu przeprowadziłem analogiczny eksperyment jak dla zadania pierwszego, zamieniając tylko macierz $\boldsymbol{A}$ na macierz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} a_{ij} = \frac{2i}{j} \; dla \; j \geq i \\ a_{ij} = a_{ji} \; dla \; j < i \end{cases} \quad \text{gdzie } i, j = 1, \dots, n.$$

Zadanie 2 – rezultaty

Rozmiar macierzy	Norma euklidesowa	Norma maksymalna
3	2.666E-07	2.384E-07
4	9.176E-07	6.557E-07
5	1.438E-06	1.073E-06
6	1.229E-06	6.557E-07
7	1.570E-06	1.132E-06
8	2.904E-06	1.669E-06
9	6.690E-06	4.947E-06
10	5.014E-06	2.980E-06
11	6.587E-06	5.007E-06
12	1.266E-05	8.464E-06
13	1.638E-05	1.204E-05
14	2.478E-05	1.466E-05
15	2.395E-05	1.287E-05
20	4.443E-05	2.146E-05
25	1.543E-04	9.960E-05
30	1.771E-04	9.871E-05
50	7.882E-04	3.530E-04

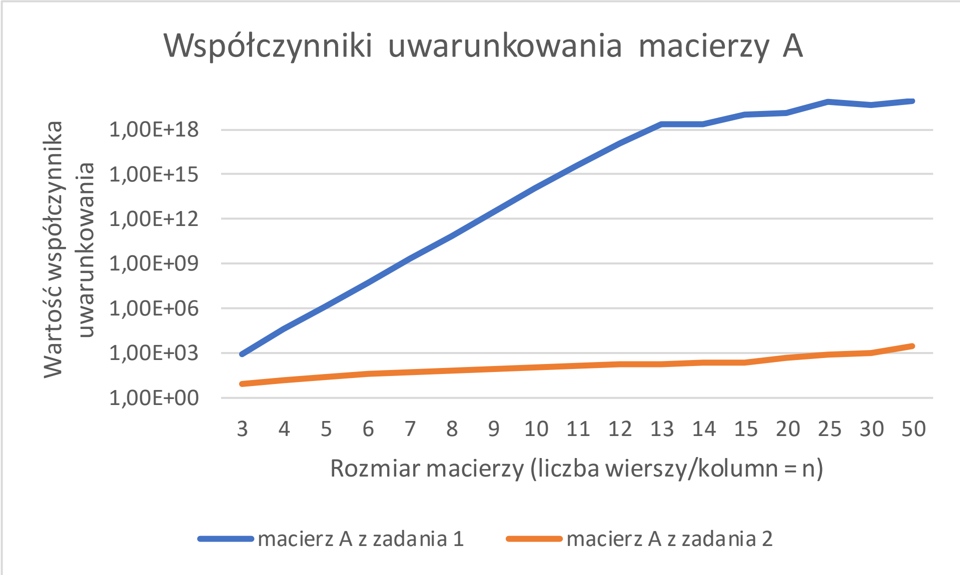
Tabela 4. *Normy rozwiązania układu zadania 2) dla liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji*

Rozmiar macierzy	Norma euklidesowa	Norma maksymalna
3	0.000E+00	0.000E+00
4	1.099E-15	8.882E-16
5	1.409E-15	8.882E-16
6	1.706E-15	1.110E-15
7	9.852E-15	6.661E-15
8	3.267E-15	1.776E-15
9	9.739E-15	7.105E-15
10	8.290E-15	5.107E-15
11	1.413E-14	7.772E-15
12	3.170E-14	2.065E-14
13	2.158E-14	1.044E-14
14	3.886E-14	2.376E-14
15	4.330E-14	2.864E-14
20	1.513E-13	8.482E-14
25	1.228E-13	6.217E-14
30	3.400E-13	1.716E-13
50	1.161E-12	4.748E-13

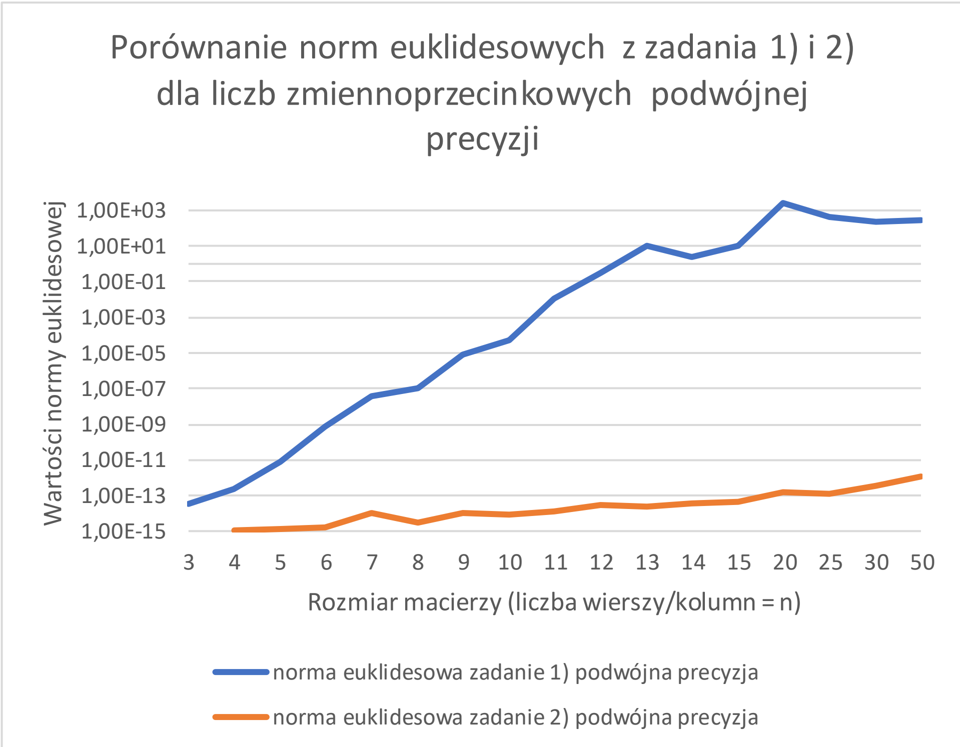
Tabela 5. *Normy rozwiązania układu zadania 2) dla liczb zmiennoprzecinkowych podwójnej precyzji*

Rozmiar macierzy	Współczynnik uwarunkowania
3	8.667E+00
4	1.650E+01
5	2.680E+01
6	3.967E+01
7	5.457E+01
8	7.242E+01
9	9.238E+01
10	1.147E+02
11	1.398E+02
12	1.668E+02
13	1.968E+02
14	2.289E+02
15	2.633E+02
20	4.725E+02
25	7.424E+02
30	1.073E+03
50	3.002E+03

Tabela 6. *Współczynniki uwarunkowania macierzy $\boldsymbol{A}$ w zadaniu 2)*



Wykres 2. *Porównanie współczynników uwarunkowania macierzy* $\boldsymbol{A}$ *z zadania 1) i 2), skala logarytmiczna*



Wykres 3. *Porównanie norm euklidesowych przedstawionych w* ***Tabeli 2.*** oraz ***5.****, skala logarytmiczna*

Zadanie 2 – wnioski

Jak widać na ***Wykresie 2.***, macierz $\boldsymbol{A}$ w zadaniu 2 jest o wiele lepiej uwarunkowana od macierzy z zadania 1. Zmniejsza to znacznie błędy rozwiązań, zarówno dla liczb zmiennoprzecinkowych pojedynczej precyzji, jak i podwójnej (***Tabela 4.*** i ***5.***), gdzie w obu przypadkach otrzymujemy błędy, które nie dyskwalifikują otrzymanych rozwiązań dla żadnej z badanych macierzy.

Nadal jednak podwójna precyzja pozwala na otrzymanie rozwiązań o błędach mniejszych o 8 rzędów wielkości, co jest znaczną różnicą.

Na ***Wykresie 3.*** widać potwierdzenie zmniejszenia się błędów rozwiązań względem zadania 1).

Zadanie 3 – algorytm postępowania

Rozwiązałem zadany układ równań $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, gdzie macierz $\boldsymbol{A}$ była dana wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = -5 * i - 5 \\ a_{i,i+1} = i \\ a_{i,i-1} = \frac{5}{i} \; dla \; i > 1 \\ a_{i,j} = 0 \; dla \; j < i - 1 \; oraz \; j > i + 1 \end{cases}$$

Gdzie $i, j = 1, .., n$, a n liczba kolumn/wierszy w macierzy $\boldsymbol{A}$ (3b dla parametrów $m = 5$, $k = 5$)

Do rozwiązania zadanego układu równań użyłem metody eliminacji Gaussa oraz metody Thomasa dla typu danych *float* w Pythonie (podwójna precyzja).

Otrzymana macierz wg powyższego wzoru jest trójdiagonalna. Do przechowywania jej w napisanym programie użyłem trzech tablic n-elementowych, które reprezentowały odpowiednie diagonale, nie przechowując tym samym pozostałej części macierzy $\boldsymbol{A}$, gdzie są same zera.

Mierząc czas otrzymywania rozwiązań dla obu wspomnianych wyżej metod pominąłem czas tworzenia układu.

Dla obu metod zbadałem przypadki dla rozmiarów macierzy $\boldsymbol{A}$ równych 100, 200, 300, …, 1000. Dokładność obliczeń porównywałem przy pomocy błędów wyznaczonych jako normy euklidesowe oraz maksymalne różnicy wyliczonego oraz początkowego wektora $\boldsymbol{x}$ złożonego z samych jedynek.

Współczynniki uwarunkowania macierzy $\boldsymbol{A}$ obliczałem analogicznie jak w zadaniu 1) i 2).

Przy implementacji algorytmu wzorowałem się na artykule dostępnym na Wikipedii opisującym metodę Thomasa:
https://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm

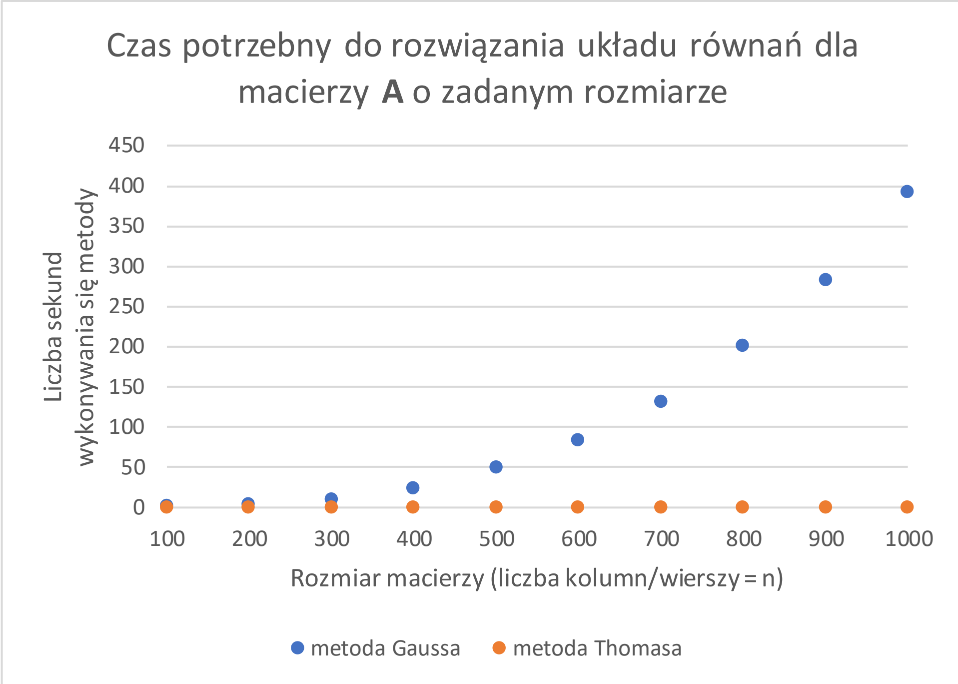
Zadanie 3 – rezultaty

Rozmiar macierzy	Czas wykonywania (metoda Gaussa) [s]	Norma euklidesowa (metoda Gaussa)	Norma maksimum (metoda Gaussa)	Czas wykonywania (metoda Thomasa) [s]	Norma euklidesowa (metoda Thomasa)	Norma maksimum (metoda Thomasa)
100	1.2436425000	1.030E-15	2.220E-16	0.0002062999	1.030E-15	2.220E-16
200	2.8939027000	1.430E-15	2.220E-16	0.0003602999	1.430E-15	2.220E-16
300	9.9979636000	1.864E-15	2.220E-16	0.0005323000	1.864E-15	2.220E-16
400	23.2065295000	2.047E-15	2.220E-16	0.0007811000	2.047E-15	2.220E-16
500	49.8836310999	2.355E-15	2.220E-16	0.0008748999	2.355E-15	2.220E-16
600	83.0619367000	2.551E-15	2.220E-16	0.0010693000	2.551E-15	2.220E-16
700	131.2114140000	2.758E-15	2.220E-16	0.0013615999	2.758E-15	2.220E-16
800	201.2655621999	2.965E-15	2.220E-16	0.0015019000	2.965E-15	2.220E-16
900	283.4149299000	3.168E-15	2.220E-16	0.0017148999	3.168E-15	2.220E-16
1000	391.0601838000	3.356E-15	2.220E-16	0.0017771000	3.356E-15	2.220E-16

Tabela 7. *Porównanie rozwiązań układu* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *metodami Gaussa oraz Thomasa*

Rozmiar macierzy	Współczynnik uwarunkowania macierzy $\boldsymbol{A}$
100	6.551E+01
200	1.311E+02
300	1.967E+02
400	2.624E+02
500	3.280E+02
600	3.936E+02
700	4.592E+02
800	5.248E+02
900	5.904E+02
1000	6.560E+02

Tabela 8. *Współczynniki uwarunkowania macierzy* $\boldsymbol{A}$



Wykres 4. *Porównanie czasu wykonywania się obu metod w zależności od rozmiaru macierzy*

Zadanie 3 – wnioski

Ze względu na przechowywanie w metodzie Thomasa tylko trzech diagonali macierzy $\boldsymbol{A}$ (oraz kolumny wyrazów wolnych $\boldsymbol{b}$) otrzymujemy złożoność pamięciową $O(n)$, która jest lepsza od złożoności pamięciowej $O(n^2)$ występującej w metodzie eliminacji Gaussa.

Jeśli chodzi o złożoność obliczeniową, to również jest ona lepsza w metodzie Thomasa i wynosi $O(n)$, w porównaniu do metody eliminacji Gaussa, która jest równa $O(n^3)$, co uwidacznia się w znaczących różnicach czasowych wykonywania obu metod dla takich samych układów równań w ***Tabeli 7*** oraz na ***Wykresie 4***.

Jedynie dokładność znajdowanych rozwiązań w obu metodach jest identyczna. W związku z tym, że macierz $\boldsymbol{A}$ w tym zadaniu jest o wiele lepiej uwarunkowana (***Tabela 8.***), niż w zadaniach 1) (***Tabela 3.***) oraz 2) (***Tabela 6.***), to otrzymujemy o wiele lepszą dokładność wyliczonego $\boldsymbol{x}$.

Podsumowując, stosując metodę lepiej dopasowaną do rozwiązywanego układu możemy otrzymać znaczną poprawę czasu wykonania nie tracąc na dokładności wyliczanego rozwiązania oraz oszczędzając pamięć.