

MOwNiT – lab 2 i 3

**Interpolacja Lagrange’a (wzory Lagrange’a i Newtona) i
Hermite’a (na podstawie wzoru Newtona)**

Gabriel Cyganek

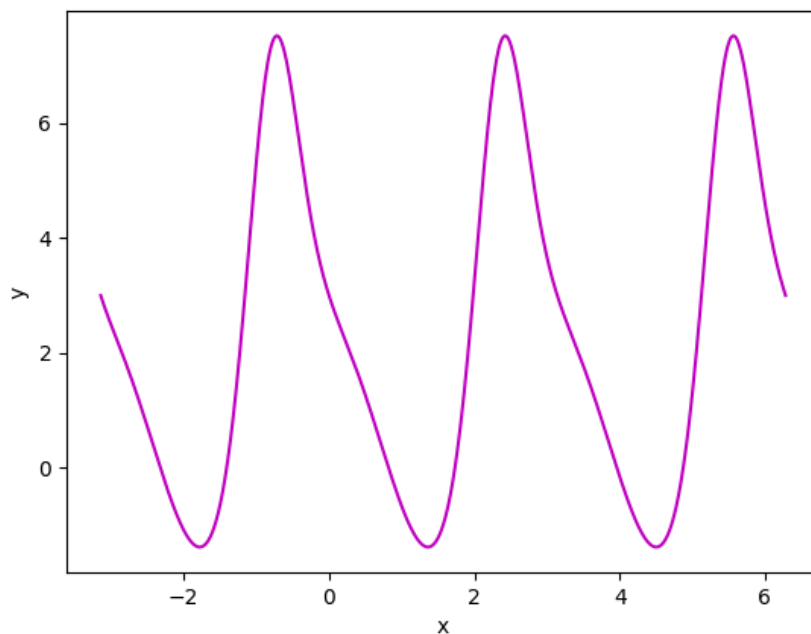
Dane techniczne

Do napisania programu wykonującego zadanie wykorzystałem język Python, używając biblioteki *math* do uzyskania liczby pi oraz funkcji $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\exp(x)$, *numpy* do pomocy przy efektywnym wykorzystywaniu struktury listy, w tym do uproszczenia zapisu wyliczenia wartości wielomianu Lagrange'a w danym punkcie, *matplotlib* do wykonywania wykresów otrzymanych wielomianów oraz zadanej funkcji.

Wykonywanie programu odbywało się na systemie Windows 10 x64 na komputerze z procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ CPU @ 2.50GHz.

Polecenie

Interpolacja funkcji $f(x) = e^{-2*\sin(2x)} + 2 * \cos(2x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$ (f7 dla $m = 2, k = 2$) wzorami Lagrange'a i Newtona z wykorzystaniem różnej liczby (od 2 do 75) węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa.



Wykres 1. Zadana funkcja $f(x)$ na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Błędy interpolacji

Do porównania dokładności sposobów interpolacji użyłem błędu wyliczonego jako maksymalna różnica między wartością funkcji interpolowanej, a wartością wielomianu interpolującego oznaczonego w tabelach jako błąd maksymalny oraz błędu średniokwadratowego obliczonego jako pierwiastek ze średniej wartości różnicy między tymi wartościami podniesionymi do kwadratu. W obu przypadkach brałem pod uwagę 900 punktów równoodległych na przedziale $[-\pi, 2\pi]$

Węzły Czebyszewa

Węzły Czebyszewa x_k wyznaczylem ze wzoru, gdzie dla dowolnego przedziału $[a, b]$ otrzymujemy n węzłów:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) * \cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

Interpolacja Lagrange'a – wzory:

$P_n(x)$ – wielomian interpolujący dla $n + 1$ węzłów interpolacji stopnia n

$f(x_k)$ – wartość funkcji interpolowanej w k -tym węźle interpolacji

a) Wzór Lagrange'a:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) * f(x_k)$$

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

b) Wzór Newtona – metoda ilorazów różnicowych:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] * (x - x_0) * \dots * (x - x_{k-1})$$

Gdzie ilorazy różnicowe są współczynnikami otrzymanego wielomianu i są tworzone w następujący sposób:

1. Zerowy iloraz różnicowy względem x_i : $f[x_i] = f(x_i)$
2. Pierwszy iloraz różnicowy: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
3. Gdy są określone ilorazy aż do $(k - 1)$, czyli

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] \text{ i } f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]$$

to wtedy k -ty iloraz różnicowy dany jest wzorem:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Ilorazy różnicowe obliczam w programie korzystając z powyższych wzorów oraz tablicy ilorazów różnicowych.

Interpolacja Hermite'a – wzory:

Dla funkcji $f(x)$ szukamy wielomianu $P_n(x)$ stopnia co najwyżej n dla $k + 1$ danych węzłów takiego, że:

$P_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, k$ oraz $j = 0, 1, \dots, m_i$, gdzie m_i to krotność węzłów. W tym sprawozdaniu przedstawiony został przypadek dla $m_i = 2$ dla wszystkich węzłów interpolacyjnych.

Niech:

- $s(i)$ to suma krotności pierwszych i węzłów, $i = 0, 1, \dots, k$
- $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$
- $p_{s(0)}(x) = 1$
- $p_{s(i)+j}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}} (x - x_i)^j$

Wtedy wzór dla $P_n(x)$ jest następujący:

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l * p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{s(i)+j} * p_{s(i)+j}(x)$$

Gdzie współczynniki b_l obliczam tworząc tablicę ilorazów różnicowych, jak w metodzie Newtona, z dodaniem dla każdego węzła wiersza zawierającego wartość pochodnej funkcji. Przykład dla 3 węzłów interpolacji i $m_i = 2$ dla każdego z tych węzłów.

x_0	$f(x_0)$					
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$...		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, \dots, x_2]$

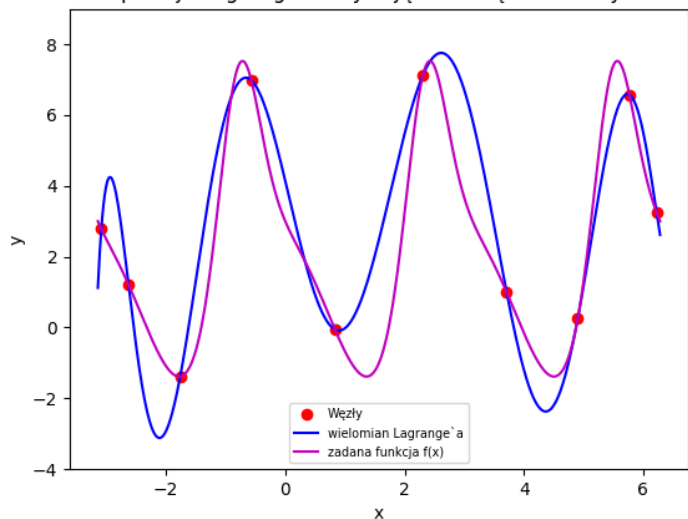
Na czerwono pokolorowałem przekątną tabeli, której kolejne wyrazy stanowią współczynniki b_l użyte w powyższym wzorze.

Interpolacja Lagrange'a – wyniki

Liczba węzłów	Błąd interpolacji dla węzłów Czebyszewa		Błąd interpolacji dla węzłów równoodległych	
	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	8.651E+00	3.988E+00	4.525E+00	2.935E+00
3	8.786E+00	3.881E+00	8.394E+00	3.606E+00
4	5.047E+00	2.925E+00	4.525E+00	2.935E+00
5	9.355E+00	3.687E+00	1.082E+01	4.865E+00
6	8.425E+00	3.512E+00	1.407E+01	5.421E+00
7	9.567E+00	3.557E+00	1.430E+01	4.972E+00
8	5.929E+00	2.777E+00	1.947E+01	5.781E+00
9	6.315E+00	2.093E+00	1.364E+01	3.478E+00
10	3.646E+00	1.549E+00	9.130E+00	2.900E+00
11	4.311E+00	1.340E+00	2.792E+01	7.435E+00
12	3.269E+00	1.285E+00	1.400E+01	3.343E+00
13	2.840E+00	1.167E+00	1.273E+02	3.389E+01
14	3.314E+00	1.157E+00	3.530E+01	8.762E+00
15	3.201E+00	1.133E+00	2.615E+02	6.148E+01
16	3.059E+00	1.079E+00	2.008E+02	3.412E+01
17	2.063E+00	7.816E-01	3.546E+02	6.683E+01
18	2.372E+00	7.299E-01	8.285E+02	1.515E+02
19	1.241E+00	4.940E-01	2.067E+02	4.352E+01
20	1.611E+00	4.568E-01	2.502E+03	4.797E+02
21	1.000E+00	3.689E-01	8.798E+02	1.393E+02
22	1.024E+00	3.514E-01	5.171E+03	9.316E+02
23	1.158E+00	3.375E-01	4.992E+03	6.806E+02
24	8.347E-01	3.199E-01	7.283E+03	1.236E+03
25	9.404E-01	3.054E-01	1.747E+04	2.583E+03
26	5.823E-01	2.313E-01	7.589E+03	1.065E+03
27	6.763E-01	2.159E-01	4.589E+04	7.046E+03
28	3.881E-01	1.402E-01	1.795E+04	2.255E+03
29	4.559E-01	1.279E-01	9.106E+04	1.384E+04
30	2.272E-01	8.825E-02	9.449E+04	1.118E+04
31	2.885E-01	8.454E-02	1.299E+05	2.007E+04
32	2.585E-01	7.690E-02	3.002E+05	3.782E+04
33	2.100E-01	7.305E-02	1.645E+05	1.964E+04
34	2.270E-01	6.986E-02	7.368E+05	9.614E+04
35	1.418E-01	5.479E-02	2.753E+05	3.083E+04
36	1.550E-01	5.111E-02	1.422E+06	1.890E+05
37	8.963E-02	3.335E-02	1.442E+06	1.511E+05
38	1.047E-01	3.035E-02	2.073E+06	2.875E+05
39	4.438E-02	1.908E-02	4.402E+06	4.855E+05
40	6.500E-02	1.806E-02	2.858E+06	3.072E+05
45	3.108E-02	9.968E-03	2.931E+07	3.679E+06
50	7.788E-03	2.554E-03	2.457E+08	2.635E+07
55	3.109E-03	1.156E-03	1.440E+09	1.352E+08
60	1.309E-03	3.812E-04	6.168E+09	4.998E+08
65	4.882E-04	1.564E-04	1.521E+10	1.115E+09
70	1.187E-04	4.086E-05	8.227E+10	6.003E+09
75	3.532E-05	1.363E-05	6.070E+11	5.449E+10

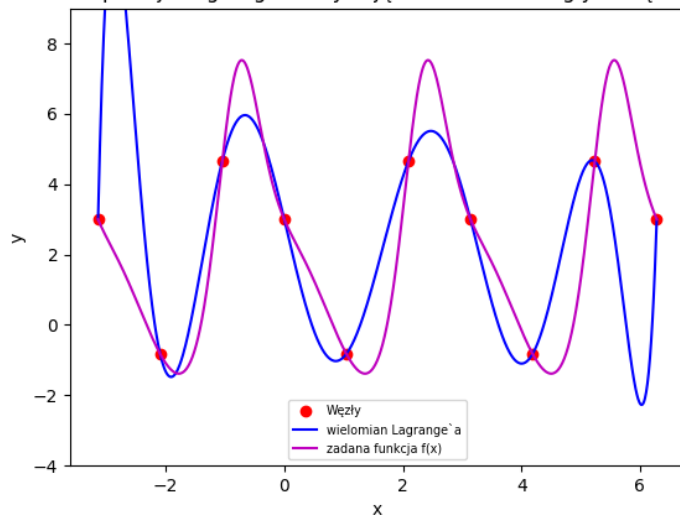
Tabela 1. Błędy interpolacji dla wzoru Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a używająca 10 węzłów Czebyszewa



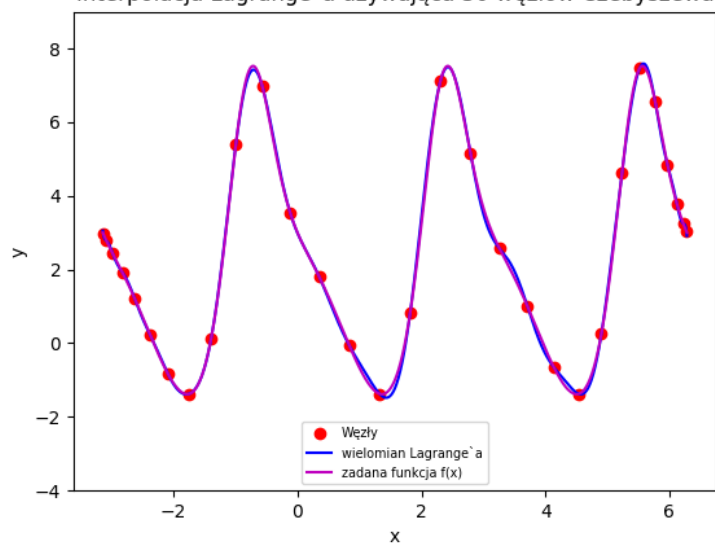
Wykres 2. Interpolacja Lagrange'a dla 10 węzłów Czebyszewa

Interpolacja Lagrange'a używająca 10 równoodległych węzłów



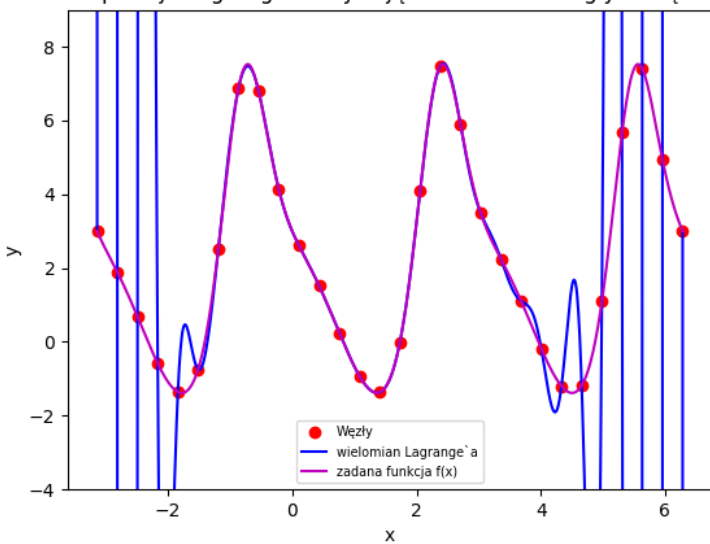
Wykres 3. Interpolacja Lagrange'a dla 10 węzłów równoodległych

Interpolacja Lagrange'a używająca 30 węzłów Czebyszewa

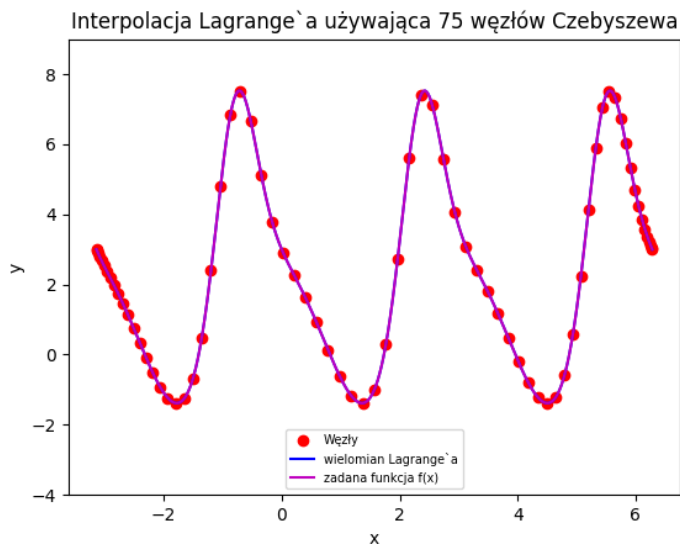


Wykres 4. Interpolacja Lagrange'a dla 30 węzłów Czebyszewa

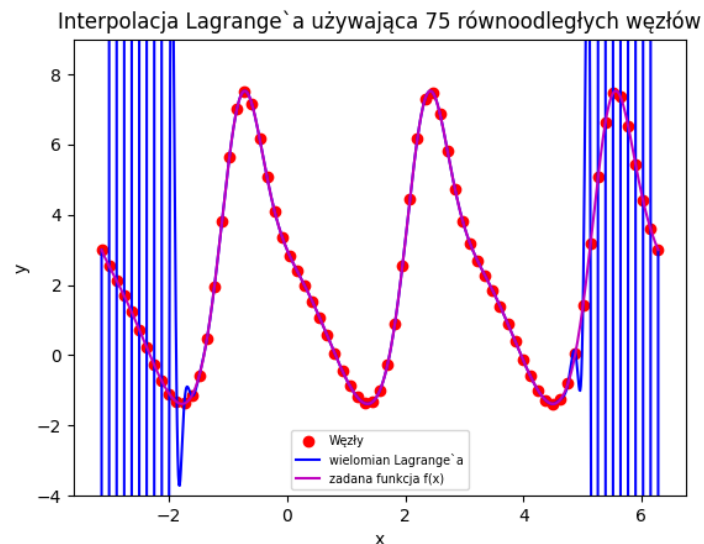
Interpolacja Lagrange'a używająca 30 równoodległych węzłów



Wykres 5. Interpolacja Lagrange'a dla 30 węzłów równoodległych



Wykres 6. Interpolacja Lagrange'a dla 75 węzłów Czebyszewa



Wykres 7. Interpolacja Lagrange'a dla 75 węzłów równoodległych

Interpolacja Lagrange'a – wnioski

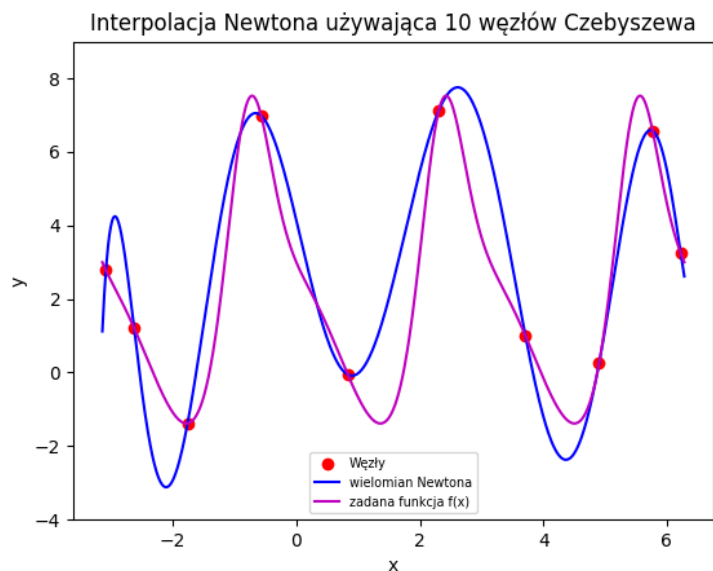
Dla węzłów Czebyszewa otrzymywane błędy interpolacji zmniejszają się wraz ze wzrostem stopnia otrzymywanego wielomianu Lagrange'a. Jak widać na **Wykresie 4.**, dla 30 węzłów Czebyszewa, niemalże pokrywa on już funkcję interpolowaną. Ze wszystkich otrzymanych wielomianów najmniejszy błąd ma ten o 75 węzłach Czebyszewa. Jest on widoczny na **Wykresie 6.** i jego wykres jest całkowicie pokryty przez wykres funkcji interpolowanej, zatem to on najlepiej przybliża funkcję dla interpolacji Lagrange'a.

Problemy z dokładnością ma natomiast wielomian Lagrange'a dla węzłów równoodległych. Nie udało mi się znaleźć wykresu na którym udałoby mu się dostatecznie zbliżyć do wykresu funkcji interpolowanej, gdyż już przy małej liczbie węzłów interpolacji można zauważyć efekt Runge'go. Jest on szczególnie widoczny na **Wykresie 5.** oraz **Wykresie 7.**, gdzie dla porównania na **Wykresie 4.** oraz **Wykresie 6.** dla tej samej liczby węzłów, ale Czebyszewa, wielomiany Lagrange'a osiągają wysoką dokładność. Efekt ten można także zauważyć na **Tabeli 1.**, gdzie wielomiany Lagrange'a dla dużej liczby węzłów równoodległych mają bardzo duże błędy. Warto też zauważyć, że na umieszczonych wyżej wykresach dla węzłów równoodległych z dobrze widocznym efektem Runge'go wartości wielomianów interpolacyjnych odbiegają znacznie od wartości funkcji interpolowanej tylko na końcach przedziałów, a w jego środku dokładność przybliżenia do funkcji interpolowanej zwiększa się wraz z liczbą węzłów interpolacji.

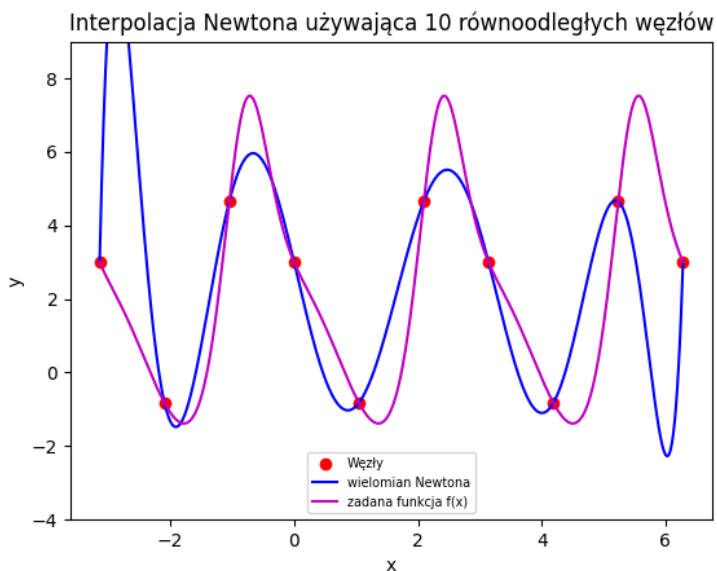
Interpolacja Lagrange’a wzorem Newtona – wyniki

Liczba węzłów	Błąd interpolacji dla węzłów Czebyszewa		Błąd interpolacji dla węzłów równoodległych	
	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	8.651E+00	3.988E+00	4.525E+00	2.935E+00
3	8.786E+00	3.881E+00	8.394E+00	3.606E+00
4	5.047E+00	2.925E+00	4.525E+00	2.935E+00
5	9.355E+00	3.687E+00	1.082E+01	4.865E+00
6	8.425E+00	3.512E+00	1.407E+01	5.421E+00
7	9.567E+00	3.557E+00	1.430E+01	4.972E+00
8	5.929E+00	2.777E+00	1.947E+01	5.781E+00
9	6.315E+00	2.093E+00	1.364E+01	3.478E+00
10	3.646E+00	1.549E+00	9.130E+00	2.900E+00
11	4.311E+00	1.340E+00	2.792E+01	7.435E+00
12	3.269E+00	1.285E+00	1.400E+01	3.343E+00
13	2.840E+00	1.167E+00	1.273E+02	3.389E+01
14	3.314E+00	1.157E+00	3.530E+01	8.762E+00
15	3.201E+00	1.133E+00	2.615E+02	6.148E+01
16	3.059E+00	1.079E+00	2.008E+02	3.412E+01
17	2.063E+00	7.816E-01	3.546E+02	6.683E+01
18	2.372E+00	7.299E-01	8.285E+02	1.515E+02
19	1.241E+00	4.940E-01	2.067E+02	4.352E+01
20	1.611E+00	4.568E-01	2.502E+03	4.797E+02
21	1.000E+00	3.689E-01	8.798E+02	1.393E+02
22	1.024E+00	3.514E-01	5.171E+03	9.316E+02
23	1.158E+00	3.375E-01	4.992E+03	6.806E+02
24	8.347E-01	3.199E-01	7.283E+03	1.236E+03
25	9.404E-01	3.054E-01	1.747E+04	2.583E+03
26	5.823E-01	2.313E-01	7.589E+03	1.065E+03
27	6.763E-01	2.159E-01	4.589E+04	7.046E+03
28	3.881E-01	1.402E-01	1.795E+04	2.255E+03
29	4.559E-01	1.279E-01	9.106E+04	1.384E+04
30	2.272E-01	8.825E-02	9.449E+04	1.118E+04
31	2.885E-01	8.454E-02	1.299E+05	2.007E+04
32	2.585E-01	7.690E-02	3.002E+05	3.782E+04
33	2.100E-01	7.305E-02	1.645E+05	1.964E+04
34	2.270E-01	6.986E-02	7.368E+05	9.614E+04
35	1.418E-01	5.478E-02	2.753E+05	3.083E+04
36	1.550E-01	5.116E-02	1.422E+06	1.890E+05
37	8.963E-02	3.349E-02	1.442E+06	1.511E+05
38	1.047E-01	3.067E-02	2.073E+06	2.875E+05
39	2.804E-01	2.906E-02	4.402E+06	4.855E+05
40	4.535E-01	4.790E-02	2.858E+06	3.072E+05
45	4.524E+01	2.941E+00	2.931E+07	3.679E+06
50	2.213E+03	1.537E+02	2.457E+08	2.635E+07
55	3.109E-03	5.310E+03	1.440E+09	1.352E+08
60	5.279E+06	3.061E+05	6.174E+09	5.001E+08
65	2.083E+08	1.489E+07	1.585E+10	1.131E+09
70	7.453E+09	4.339E+08	8.227E+10	6.273E+09
75	6.822E+11	3.848E+10	1.074E+12	8.342E+10

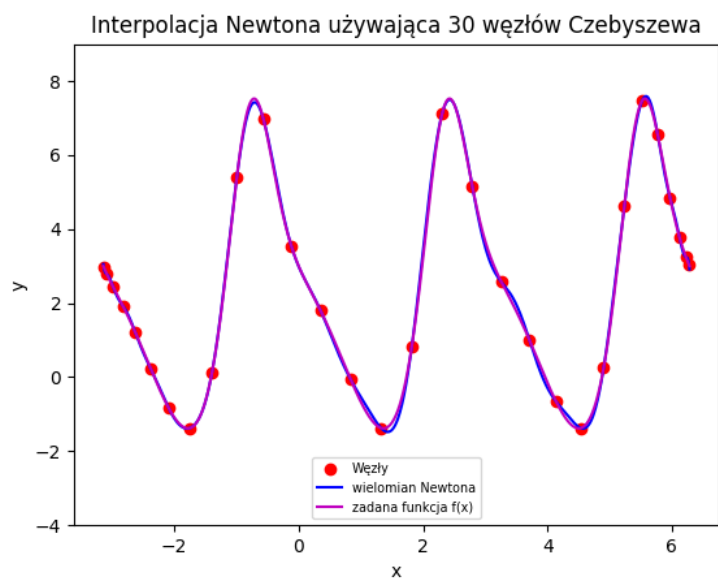
Tabela 2. Błędy interpolacji dla wzoru Newtona



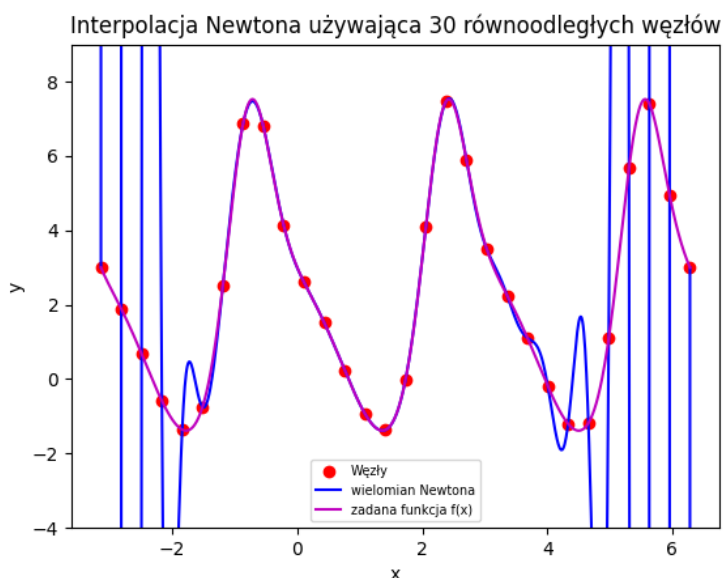
Wykres 8. Interpolacja wzorem Newtona dla 10 węzłów Czebyszewa



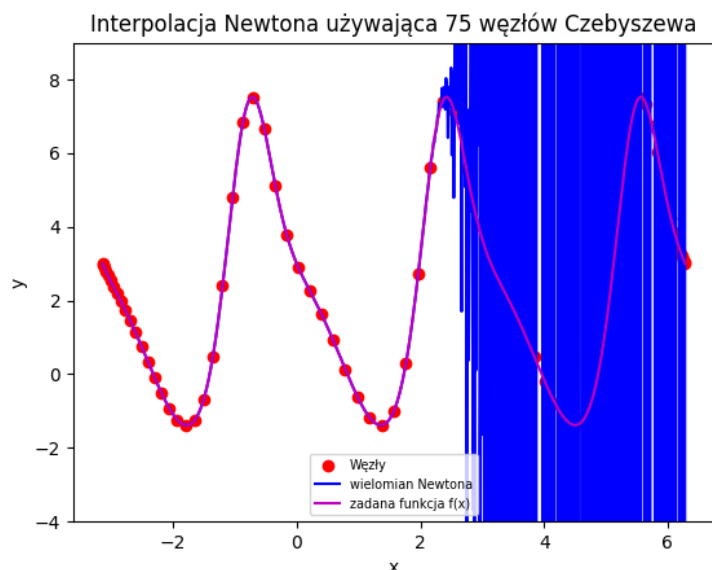
Wykres 9. Interpolacja wzorem Newtona dla 10 węzłów równoodległych



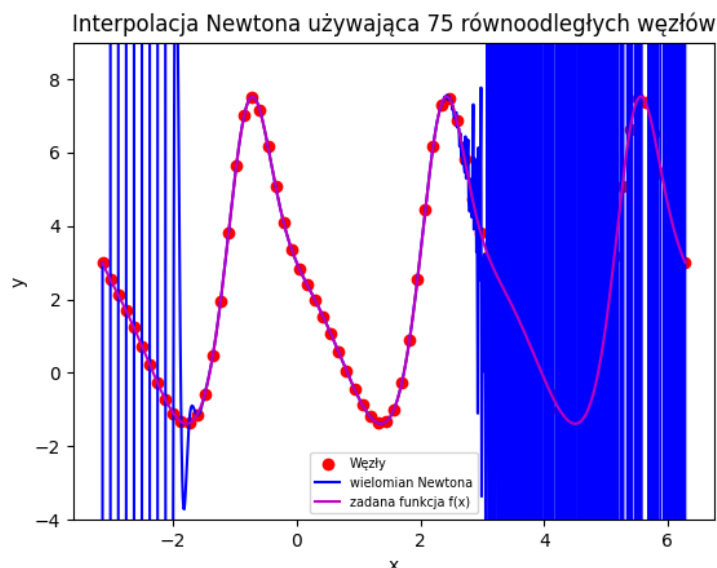
Wykres 10. Interpolacja wzorem Newtona dla 30 węzłów Czebyszewa



Wykres 11. Interpolacja wzorem Newtona dla 30 węzłów równoodległych



Wykres 12. Interpolacja wzorem Newtona dla 75 węzłów Czebyszewa



Wykres 13. Interpolacja wzorem Newtona dla 75 węzłów równoodległych

Interpolacja Lagrange'a wzorem Newtona – wnioski

Otrzymane błędy interpolacji do 40 węzłów interpolacji nie różnią się od otrzymanych błędów dla interpolacji wielomianem Lagrange'a. Interpolacja dla węzłów Czebyszewa nadal jest do tej liczby węzłów coraz dokładniejsza wraz ze wzrostem liczby węzłów, natomiast interpolacja dla węzłów równoodległych ponownie skutkuje efektem Runge'go już przy 10-ciu węzłach. Przykładowe wielomiany Newtona dla węzłów Czebyszewa są widoczne na **Wykresie 8.**, **Wykresie 10.** oraz **Wykresie 12.**, a dla węzłów równoodległych na **Wykresie 9.**, **Wykresie 11** oraz **Wykresie 13.**

Od 40-tu węzłów interpolacyjnych Czebyszewa uwidaczniają się błędy arytmetyki przy wyliczaniu coraz większej liczby współczynników wielomianu Newtona, co powoduje odbieganie wartości tego wielomianu od wartości funkcji interpolowanej. Widać to zarówno na prawej stronie badanego przedziału funkcji na **Wykresie 12.** jak i w **Tabeli 2.**, gdzie błąd interpolacji od 40 węzłów Czebyszewa do 75 węzłów Czebyszewa zwiększa się aż o $\approx 10^{12}$. Błędy arytmetyki nie są aż tak widoczne przy błędach interpolacji dla wielomianu Newtona dla węzłów równoodległych, gdzie przy 40 węzłach mamy już i tak wysoki błąd interpolacji spowodowany efektem Runge'go, jednak na prawej stronie badanego przedziału funkcji na **Wykresie 13.** widać, że również tam występują i jeszcze bardziej zmniejszają dokładność wielomianu interpolującego, chociaż tylko z jednej strony, pozostawiając nadal widoczny przedział, gdzie wielomian Newtona dokładnie przybliża funkcję interpolowaną.

Porównanie interpolacji wzorem Newtona oraz wzorem Lagrange'a

Liczba węzłów	Błąd interpolacji dla interpolacji wzorem Lagrange'a				Błąd interpolacji dla interpolacji wzorem Newtona			
	Błąd maksymalny		Błąd średniokwadratowy		Błąd maksymalny		Błąd średniokwadratowy	
	Węzły Czebyszewa	Węzły równo-odległe	Węzły Czebyszewa	Węzły równo-odległe	Węzły Czebyszewa	Węzły równo-odległe	Węzły Czebyszewa	Węzły równo-odległe
35	1.418E-01	2.753E+05	5.479E-02	3.083E+04	1.418E-01	2.753E+05	5.478E-02	3.083E+04
36	1.550E-01	1.422E+06	5.111E-02	1.890E+05	1.550E-01	1.422E+06	5.116E-02	1.890E+05
37	8.963E-02	1.442E+06	3.335E-02	1.511E+05	8.963E-02	1.442E+06	3.349E-02	1.511E+05
38	1.047E-01	2.073E+06	3.035E-02	2.875E+05	1.047E-01	2.073E+06	3.067E-02	2.875E+05
39	4.438E-02	4.402E+06	1.908E-02	4.855E+05	2.804E-01	4.402E+06	2.906E-02	4.855E+05
40	6.500E-02	2.858E+06	1.806E-02	3.072E+05	4.535E-01	2.858E+06	4.790E-02	3.072E+05
45	3.108E-02	2.931E+07	9.968E-03	3.679E+06	4.524E+01	2.931E+07	2.941E+00	3.679E+06
50	7.788E-03	2.457E+08	2.554E-03	2.635E+07	2.213E+03	2.457E+08	1.537E+02	2.635E+07
55	3.109E-03	1.440E+09	1.156E-03	1.352E+08	5.947E+04	1.440E+09	5.310E+03	1.352E+08
60	1.309E-03	6.168E+09	3.812E-04	4.998E+08	5.279E+06	6.174E+09	3.061E+05	5.001E+08
65	4.882E-04	1.521E+10	1.564E-04	1.115E+09	2.083E+08	1.585E+10	1.489E+07	1.131E+09
70	1.187E-04	8.227E+10	4.086E-05	6.003E+09	7.453E+09	8.227E+10	4.339E+08	6.273E+09
75	3.532E-05	6.070E+11	1.363E-05	5.449E+10	6.822E+11	1.074E+12	3.848E+10	8.342E+10

Tabela 3. Porównanie błędów interpolacji dla wzoru Lagrange'a oraz wzoru Newtona

Błędy interpolacji dla wzorów Newtona oraz Lagrange'a są identyczne do 35 węzłów interpolacji. Następnie przy wzorze Newtona pojawiają się błędy arytmetyki widoczne w **Tabeli 3.** oraz na **Wykresie 12.** i **Wykresie 13.**, gdzie z ich powodu błędy zaczynają rosnąć w szybkim tempie. Błędy interpolacji dla wzoru Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa cały czas maleją, a dla wzoru Newtona rosną do tego stopnia, że przy 75-ciu węzłach Czebyszewa różnica między błędami maksymalnymi wynosi w przybliżeniu 10^{16} . Różnica błędu interpolacji nie jest aż tak znacząca w przypadku węzłów równoodległych. Od 60-ciu do 70-ciu węzłów widać niewielkie różnice, a dopiero przy 75-ciu węzłach pojawia się zauważalna zmiana na niekorzyść interpolacji wielomianem Newtona. To zjawisko można wytłumaczyć tym, że błędy arytmetyki nasilają się ze wzrostem liczby węzłów i przy pewnej ich liczbie wpływają na błąd interpolacji silniej w połączeniu z efektem Runge'go widocznym już przy znacznie niższej liczbie węzłów.

Interpolacja Hermite'a

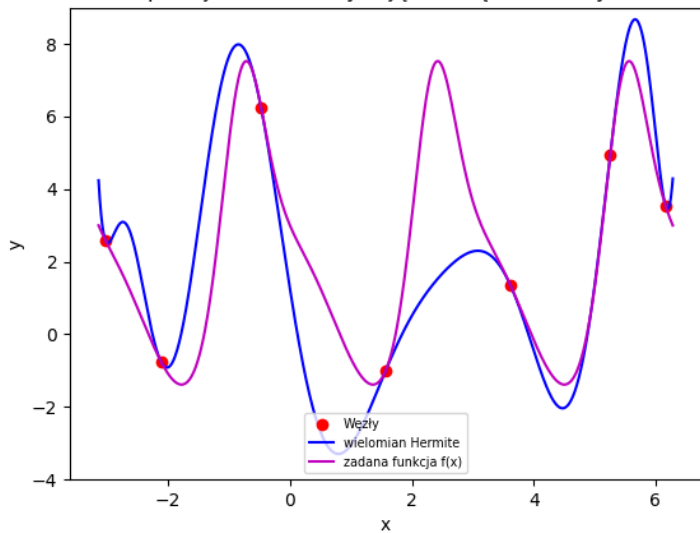
Interpolacja wykonana na podstawie wzoru Newtona. Dla każdego węzła korzystano z wartości funkcji oraz wartości pierwszej pochodnej funkcji w danym węźle. Wartości pochodnej funkcji zostały obliczone w programie dla wyznaczonego ręcznie wzoru pochodnej:

$$f'(x) = -4 * e^{-2*\sin(2x)} * \cos(2x) - 4 * \sin(2x)$$

Liczba węzłów	Błąd interpolacji dla interpolacji Hermite'a			
	Węzły Czebyszewa		Węzły równoodległe	
	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	1.672E+01	7.952E+00	8.025E+00	3.866E+00
3	1.229E+01	5.824E+00	1.304E+01	5.576E+00
4	1.058E+01	3.475E+00	1.116E+01	4.482E+00
5	6.759E+00	2.332E+00	8.601E+00	2.732E+00
6	5.738E+00	2.539E+00	1.920E+01	5.387E+00
7	6.027E+00	2.188E+00	4.504E+00	1.894E+00
8	6.257E+00	2.089E+00	4.796E+01	1.258E+01
9	4.172E+00	1.264E+00	1.465E+02	3.102E+01
10	2.284E+00	7.739E-01	5.225E+02	1.282E+02
11	1.929E+00	6.014E-01	1.170E+03	2.781E+02
12	1.698E+00	5.838E-01	1.789E+03	3.886E+02
13	1.069E+00	3.899E-01	1.670E+03	3.774E+02
14	6.664E-01	2.451E-01	1.910E+03	3.400E+02
15	4.045E-01	1.559E-01	1.127E+04	1.665E+03
16	4.885E-01	1.316E-01	3.967E+04	6.144E+03
17	4.544E-01	1.214E-01	1.029E+05	1.683E+04
18	3.082E-01	8.861E-02	2.103E+05	3.518E+04
19	1.771E-01	5.259E-02	3.328E+05	5.705E+04
20	7.288E-01	5.651E-02	4.454E+05	6.914E+04
21	3.336E+00	2.604E-01	4.720E+05	5.700E+04
22	8.024E+00	6.733E-01	1.632E+06	1.898E+05
23	1.213E+02	7.132E+00	5.648E+06	6.871E+05
24	3.273E+02	2.490E+01	1.392E+07	1.781E+06
25	1.253E+03	1.083E+02	2.786E+07	3.700E+06
26	1.542E+04	9.323E+02	4.492E+07	6.309E+06
27	2.236E+04	1.610E+03	6.456E+07	8.555E+06
28	2.429E+05	1.273E+04	7.923E+07	8.180E+06
29	1.019E+06	5.575E+04	1.235E+08	1.288E+07
30	4.352E+06	3.368E+05	4.904E+08	4.938E+07
31	3.717E+07	1.944E+06	1.286E+09	1.347E+08
32	7.575E+07	4.962E+06	2.713E+09	2.859E+08
33	6.544E+08	3.491E+07	5.573E+09	5.509E+08
34	2.746E+09	1.857E+08	8.785E+09	8.401E+08
35	7.779E+09	4.546E+08	2.561E+10	1.725E+09
36	5.013E+10	3.938E+09	6.031E+10	5.487E+09
37	1.527E+11	1.103E+10	5.424E+11	3.319E+10
38	9.920E+11	5.206E+10	2.867E+12	1.914E+11

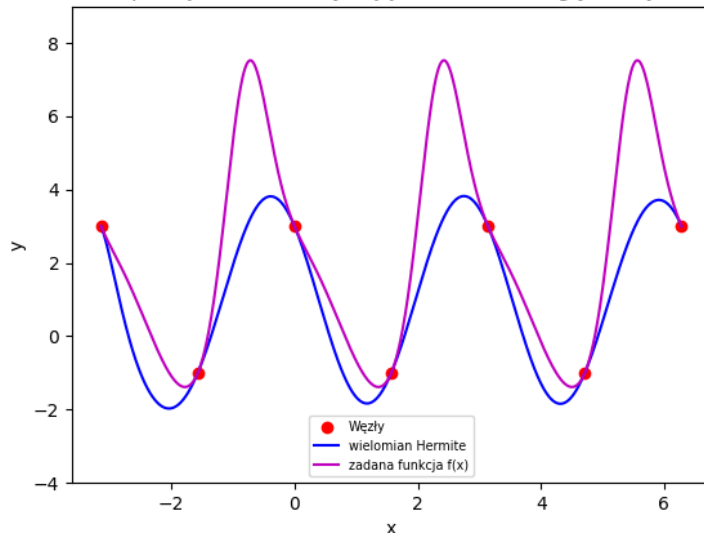
Tabela 4. Błędy interpolacji Hermite'a dla poszczególnych rozmieszczeń węzłów interpolacji

Interpolacja Hermite używająca 7 węzłów Czebyszewa



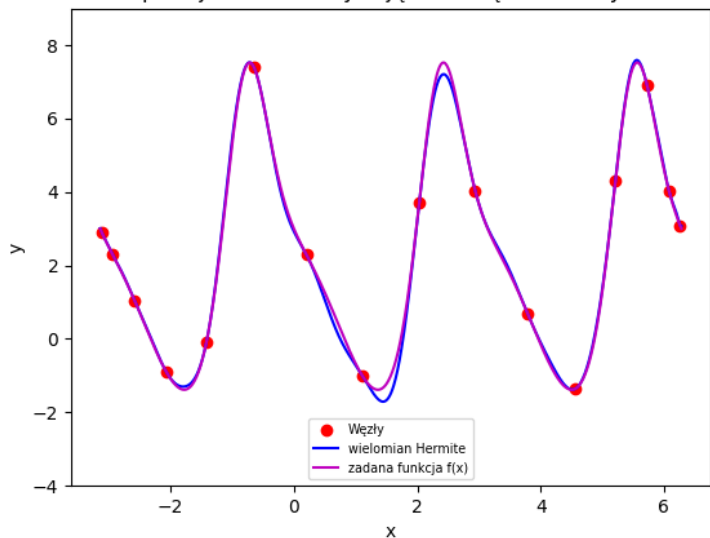
Wykres 14. Interpolacja Hermite'a dla 7 węzłów Czebyszewa

Interpolacja Hermite używająca 7 równoodległych węzłów



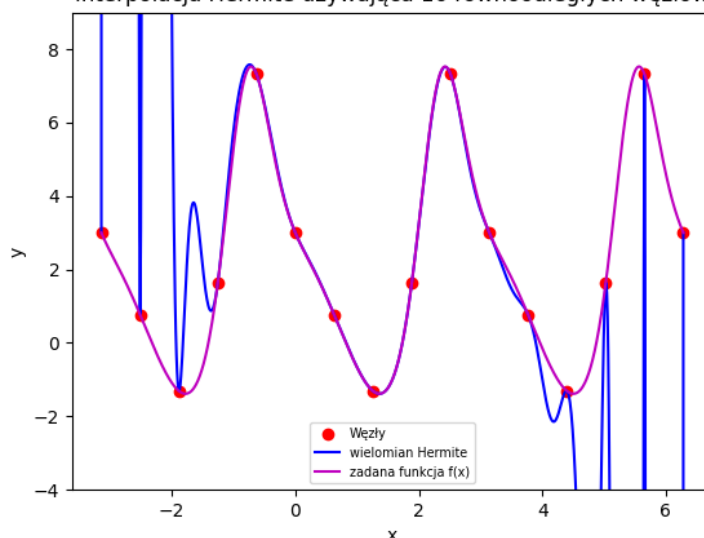
Wykres 15. Interpolacja Hermite'a dla 7 węzłów równoodległych

Interpolacja Hermite używająca 16 węzłów Czebyszewa

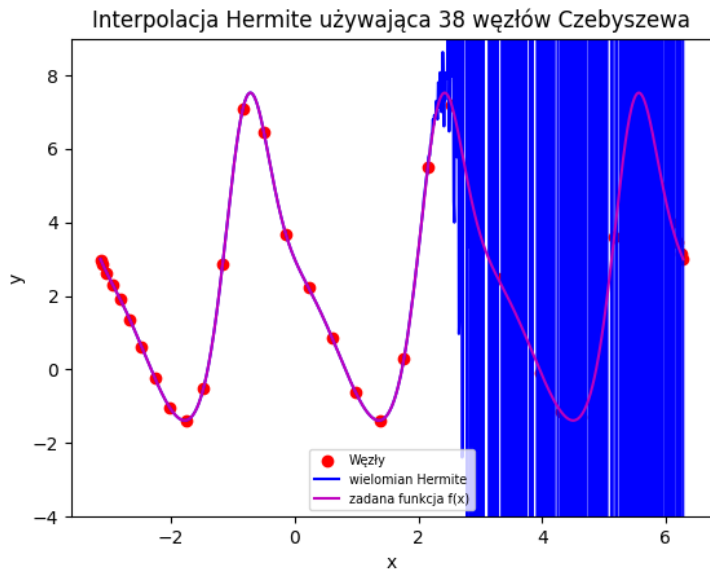


Wykres 16. Interpolacja Hermite'a dla 16 węzłów Czebyszewa

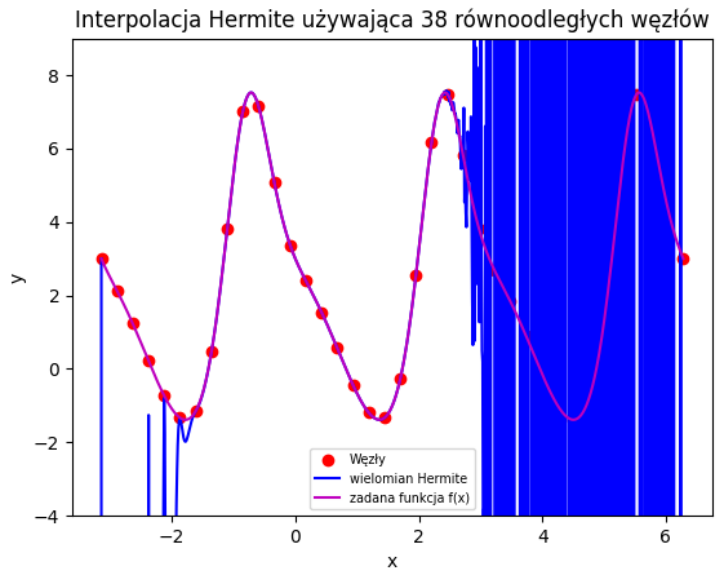
Interpolacja Hermite używająca 16 równoodległych węzłów



Wykres 17. Interpolacja Hermite'a dla 16 węzłów równoodległych



Wykres 18. Interpolacja Hermite'a dla 38 węzłów Czebyszewa



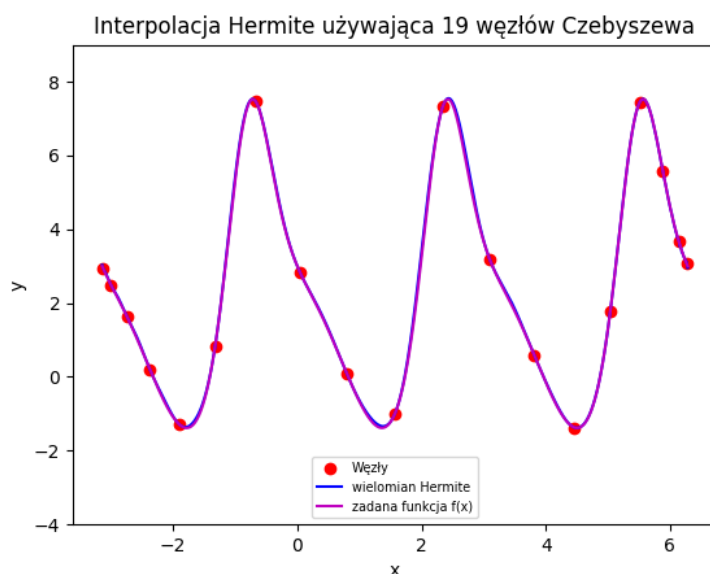
Wykres 19. Interpolacja Hermite'a dla 38 węzłów równoodległych

Interpolacja Hermite'a – wnioski

Tworząc wielomiany Hermite'a dla węzłów Czebyszewa otrzymaliśmy dosyć dokładne przybliżenie przy 14-20 węzłach, do których widoczny w **Tabeli 4.** jest stały spadek błędów interpolacji. Najdokładniejszy wielomian otrzymano dla 19 węzłów. Używając większej liczby węzłów napotykamy na błędy arytmetyki widoczne dobrze na **Wykresie 18.** oraz **Wykresie 19.**, zatem błędy interpolacji zaczynają znacząco rosnąć.

Dla węzłów równoodległych nie otrzymujemy satysfakcjonującego przybliżenia. Najdokładniejszy wielomian dla 7 węzłów (widoczny na **Wykresie 15.**) ma i tak duży błąd maksymalny równy 4,504 jak widać w **Tabeli 4.** Od 8 węzłów w górę błędy interpolacji zwiększają się, widoczny jest efekt Runge'go, a od 20 węzłów, podobnie jak dla interpolacji dla węzłów Czebyszewa, otrzymujemy błędy arytmetyki powodujące również, że na krańcach przedziałów wielomian nie przechodzi przez wszystkie węzły interpolujące. Jest to dobrze widoczne na **Wykresie 19.**, gdzie z prawej strony widoczne są katastrofalne zaburzenia, a z lewej strony przedziału wielomian nie osiąga żądanych wartości dla wszystkich węzłów interpolacji. Nadal natomiast wielomian jest dokładny dla środka przedziału. Na **Wykresie 18.**, gdzie mamy taką samą liczbę węzłów, ale Czebyszewa, katastrofalne błędy arytmetyki również widoczne są po prawej stronie przedziału, jednak po lewej stronie wielomian jest dokładny i przechodzi przez węzły interpolacji, tak jak i w środku badanego przedziału.

Warto zauważyć też, że interpolacja Hermite’a dla węzłów równoodległych jest dokładniejsza względem interpolacji dla węzłów Czebyszewa tylko dla 2 i 7 węzłów.



Wykres 20. Najdokładniejszy wielomian Hermite’a dla 19 węzłów Czebyszewa

Interpolacja Hermite’a i interpolacja Lagrange’a wzorem Newtona – porównanie

Porównując obie te metody interpolacji zauważam, że dla n węzłów interpolacji wielomian Hermite’a ma $2n - 1$ stopni, a wielomian Newtona $n - 1$ stopni.

Stopień wielomianu interpolującego	Błędy maksymalne dla interpolacji Hermite’a		Błędy maksymalne dla interpolacji Lagrange’a wzorem Newtona	
	Węzły Czebyszewa	Węzły równoodległe	Węzły Czebyszewa	Węzły równoodległe
5	1.229E+01	1.304E+01	8.425E+00	1.407E+01
9	6.759E+00	8.601E+00	3.646E+00	9.130E+00
15	6.257E+00	4.796E+01	3.059E+00	2.008E+02
19	2.284E+00	5.225E+02	1.611E+00	2.502E+03
25	1.069E+00	1.670E+03	5.823E-01	7.589E+03
29	4.045E-01	1.127E+04	2.272E-01	9.449E+04
35	3.082E-01	2.103E+05	1.550E-01	1.422E+06
39	7.288E-01	4.454E+05	4.535E-01	2.858E+06
45	1.213E+02	5.648E+06	1.605E+02	5.585E+07
49	1.253E+03	2.786E+07	2.213E+03	2.457E+08
55	2.429E+05	7.923E+07	1.691E+05	5.649E+08

Tabela 5. Błędy maksymalne interpolacji Hermite’a i Lagrange’a wzorem Newtona biorąc pod uwagę stopień wielomianu interpolującego

Dla wszystkich przypadków przedstawionych w **Tabeli 5**. Interpolacja Hermite’a jest dokładniejsza dla węzłów równoodległych. Dla węzłów Czebyszewa to interpolacja Lagrange’a wzorem Newtona ma przewagę w kwestii dokładności, jednak różnice są

względnie niewielkie. Dla obu metod interpolacji zachodzi efekt Runge’go oraz błędy arytmetyki dla podobnego stopnia wielomianu interpolującego. Najdokładniejsze wielomiany interpolacji Hermite’a (**Tabela 3.** 19 węzłów) oraz Newtona (**Tabela 2.** 38 węzłów) mają niemalże identyczne błędy.

Liczba węzłów	Błędy maksymalne dla interpolacji Hermite’a		Błędy maksymalne dla interpolacji Lagrange’a wzorem Newtona	
	Węzły Czebyszewa	Węzły równoodległe	Węzły Czebyszewa	Węzły równoodległe
2	1.672E+01	8.025E+00	8.651E+00	4.525E+00
3	1.229E+01	1.304E+01	8.786E+00	8.394E+00
4	1.058E+01	1.116E+01	5.047E+00	4.525E+00
5	6.759E+00	8.601E+00	9.355E+00	1.082E+01
6	5.738E+00	1.920E+01	8.425E+00	1.407E+01
7	6.027E+00	4.504E+00	9.567E+00	1.430E+01
8	6.257E+00	4.796E+01	5.929E+00	1.947E+01
9	4.172E+00	1.465E+02	6.315E+00	1.364E+01
10	2.284E+00	5.225E+02	3.646E+00	9.130E+00
11	1.929E+00	1.170E+03	4.311E+00	2.792E+01
12	1.698E+00	1.789E+03	3.269E+00	1.400E+01
13	1.069E+00	1.670E+03	2.840E+00	1.273E+02
14	6.664E-01	1.910E+03	3.314E+00	3.530E+01
15	4.045E-01	1.127E+04	3.201E+00	2.615E+02
16	4.885E-01	3.967E+04	3.059E+00	2.008E+02
17	4.544E-01	1.029E+05	2.063E+00	3.546E+02
18	3.082E-01	2.103E+05	2.372E+00	8.285E+02
19	1.771E-01	3.328E+05	1.241E+00	2.067E+02
20	7.288E-01	4.454E+05	1.611E+00	2.502E+03
21	3.336E+00	4.720E+05	1.000E+00	8.798E+02
22	8.024E+00	1.632E+06	1.024E+00	5.171E+03
23	1.213E+02	5.648E+06	1.158E+00	4.992E+03
24	3.273E+02	1.392E+07	8.347E-01	7.283E+03
25	1.253E+03	2.786E+07	9.404E-01	1.747E+04

Tabela 5. Błędy maksymalne interpolacji Hermite’a i Lagrange’a wzorem Newtona biorąc pod uwagę liczbę węzłów interpolacji

Na podstawie **Tabeli 5** można zauważyć, że błędy interpolacji dla tej samej liczby węzłów dla obu metod są dosyć różne. Wynika to z przytoczonego wcześniej faktu, że interpolujące wielomiany otrzymane interpolacją Hermite’a oraz Lagrange’a korzystają z różnej liczby informacji o funkcji, a zatem te wielomiany mają różne stopnie. Z tego powodu Interpolacja Hermite’a jest dokładniejsza dla mniejszej liczby węzłów (9 – 20), jednak dla więcej niż 20 węzłów zdecydowanie lepszym wyborem jest interpolacja Lagrange’a wzorem Newtona, gdzie dokładność jest dobra dla 20-40 węzłów, podczas gdy błędy interpolacji Hermite’a dla tej liczby węzłów wzrastają pod wpływem pojawiających się błędów arytmetyki. Wnioskując z otrzymanych wyników można założyć, że obie te metody interpolacji mają przedziały dobrej dokładności dla różnej liczby węzłów, z czego warto skorzystać przy wyborze metody interpolacji.

Podsumowanie

Zarówno interpolacja Lagrange'a (dla wzoru Lagrange'a i wzoru Newtona) jak i Hermite'a na podstawie wzoru Newtona jest w stanie dla węzłów Czebyszewa dokładnie przybliżyć funkcję interpolowaną, jednak to wielomian Lagrange'a jest najbardziej stabilny i zwiększa swoją dokładność wraz ze zwiększającą się liczbą węzłów interpolacji. Dodatkowo każda z podanych metod ma swoje przedziały liczby węzłów dla których ta dokładność jest największa, choć przekroczenie jej dla wzoru Newtona oraz interpolacji Hermite'a na wzorze Newtona wyklucza stosowność ich używania poprzez pojawienie się błędów arytmetyki. Efekt Runge'go powoduje, że wszystkie te sposoby interpolacji nie są dostatecznie dobrą metodą na przybliżanie funkcji dla węzłów równoodległych dla większej liczby węzłów.

Wybór metody interpolacji zależy od tego, jakie posiadamy informacje o funkcji oraz tego, dla jakiej liczby węzłów i jakiego rodzaju chcemy jej użyć. Interpolacja Hermite'a może być przydatna, jeśli nie mamy danej wartości funkcji w wielu punktach, ale za to znamy też wartości pochodnej funkcji w tych punktach. Interpolacja wzorem Newtona dodatkowo w przeciwieństwie do wzoru Lagrange'a daje nam możliwość dodania kolejnego węzła interpolacji bez powtarzania wszystkich obliczeń na nowo.

Bibliografia

1. Metody obliczeniowe w nauce i technice – wykłady AGH 2020/21
2. [Interpolacja Lagrange'a](#)
3. [Wzór Newtona](#)
4. [Interpolacja Hermite'a](#)
5. [Węzły Czebyszewa](#)