Teoria współbieżności

Sprawozdanie z laboratorium 6 – Zastosoawnie teorii śladów do szeregowania wątków współbieżnej eliminacji Gaussa

Autor: Gabriel Cyganek

Zadanie polega na wykonaniu następujących etapów dla macierzy o rozmiarze N:

a) Proszę zlokalizować niepodzielne czynności wykonywane przez algorytm, nazwać je oraz zbudować alfabet w sensie teorii śladów

Macierz NxN:

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,N} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N,1} & M_{N,2} & \cdots & M_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Uproszczona macierz NxN z wektorem wyrazów wolnych:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,N} & y_1 = M_{1,N+1} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,N} & y_2 = M_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{N,1} & M_{N,2} & \cdots & M_{N,N} & y_N = M_{N,N+1} \end{array}\right]$$

Niepodzielne czynności wykonywane przez algorytm:

$A_{k,i}$ – znalezienie mnożnika dla wiersza i do odejmowania go od k-tego wiersza: $m_{k,i} = \frac{M_{k,i}}{M_{i,i}}$

$B_{k,j,i}$ – pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik – do odejmowania od k-tego wiersza: $n_{k,j,i} = M_{i,j} * m_{k,i}$

$C_{k,j,i}$ – odjęcie j-tego elementu wiersza i od wiersza k: $M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,j,i}$

Alfabet w sensie teorii śladów:

$$\Sigma = \{A_{k,i} \mid 1 \le i \le N, i < k \le N\} \cup \{B_{k,j,i} \mid 1 \le i < N, i \le j \le N+1, i < k \le N\} \\ \cup \{C_{k,j,i} \mid 1 \le i < N, i \le j \le N+1, i < k \le N\}$$

b) Proszę skonstruować relację (nie) zależności dla alfabetu opisującego algorytm eliminacji Gaussa

Relacja zależności:

$D_1 = \{(A_{k,i}, B_{k,j,i}) \mid A_{k,i}, B_{k,j,i} \in \Sigma\}$ – aby przemnożyć j-ty element wiersza i przez mnożnik $m_{k,i}$ najpierw należy wyznaczyć ten mnożnik

$D_2 = \{(B_{k,j,i}, C_{k,j,i}) | B_{k,j,i}, C_{k,j,i} \in \Sigma\}$ – aby odjąć j-ty element wiersza i od wiersza k należy najpierw przemnożyć j-ty element wiersza k przez $m_{k,i}$

$D_3 = \{ C_{k_1,j_1,i_1}, A_{k_2,i_2} | C_{k_1,j_1,i_1}, A_{k_2,i_2} \in \Sigma \ \wedge \mathrm{j}_1 = \mathrm{i}_2 \wedge (\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 \vee \mathrm{k}_1 = \mathrm{i}_2)\}$ – aby wyznaczyć m_{k_2,i_2} należy najpierw odjąć j_1 element wierszu i_1 od wiersza k_1, gdzie indeksy operacji C i A spełniają podane wyżej warunki (wcześniej muszą zajść wszystkie operacje modyfikujące wiersze k_2 i i_2)

$D_4 = \{(C_{k,j,i_1}, C_{k,j,i_2}) | C_{k,j,i_1}, C_{k,j,i_2} \in \Sigma\}$ – odejmowanie wierszy i_1 i i_2 od wiersza k jest zależne

$D_5 = \{(C_{k_1,j,i_1}, B_{k_2,j,i_2}) | C_{k_1,j,i_1}, B_{k_2,j,i_2} \in \Sigma \ \wedge k_1 = i_2\}$ – operacje związane z odejmowaniem elementów danego wiersza od innego są zależne od operacji wymnażania elementów tego wiersza przez odpowiedni mnożnik

$D = sym\{\{D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5\}^+\} \cup I_\Sigma$

Relacja niezależności:

Na podstawie relacji zależności: $I = \Sigma^2 - D$

c) Proszę przedstawić algorytm eliminacji Gaussa w postaci ciągu symboli alfabetu

Przykładowy algorytm odejmowania wiersza i od k:

1. Wykonanie $A_{k,i}$: znalezienie $m_{k,i} = \frac{M_{k,i}}{M_{i,i}}$
2. Wykonanie w pętli:

for $(j = i; j \leq N + 1; j = j + 1)$ {	
$n_{k,j,i} = M_{i,j} * m_{k,i}$	*(wykonanie $B_{k,j,i}$)*
$M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,j,i}$	*(wykonanie $C_{k,j,i}$)*
}	

Sprowadza się to do ciągu operacji: $A_{k,i}, B_{k,i,i}, C_{k,i,i}, B_{k,i+1,i}, C_{k,i+1,i}, \dots, B_{k,N+1,i}, C_{k,N+1,i}$

Algorytm eliminacji Gaussa w postaci ciągu symboli alfabetu:

Niech $Subtr_{k,i}$ będzie oznaczało odjęcie i-tego wiersza od wiesza k. Zatem $Subtr_{k,i} = A_{k,i}, B_{k,i,i}, C_{k,i,i}, B_{k,i+1,i}, C_{k,i+1,i}, \dots, B_{k,N+1,i}, C_{k,N+1,i}$ dla zdefiniowanych wcześniej operacji.

Algorytm eliminacji Gaussa ma wtedy postać:

$$Subtr_{2,1}, Subtr_{3,1}, Subtr_{4,1}, \dots, Subtr_{N,1}, Subtr_{3,2}, Subtr_{4,2}, \dots, Subtr_{N,N-1}$$

d) Proszę wygenerować graf zależności Diekerta

Graf zależności Diekerta:

Graf zależności Diekerta będzie składał się z sumowanych zbiorów zależności (podobnie jak przy tworzeniu relacji zależności) bezpośrednich między operacjami. Zbiory te będą identyfikować krawędzie tego grafu.

$$E_1 = \{(A_{k,i}, B_{k,j,i}) | A_{k,i}, B_{k,j,i} \in \Sigma\}$$

$$E_2 = \{(B_{k,j,i}, C_{k,j,i}) | B_{k,j,i}, C_{k,j,i} \in \Sigma\}$$

$$E_3 = \{ (C_{k_1,j_1,i_1}, A_{k_2,i_2}) | C_{k_1,j_1,i_1}, A_{k_2,i_2} \in \Sigma \land \mathrm{j}_1 = \mathrm{i}_2 \land (\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 \lor \mathrm{k}_1 = \mathrm{i}_2) \land \mathrm{i}_2 = i_1 + 1\}$$

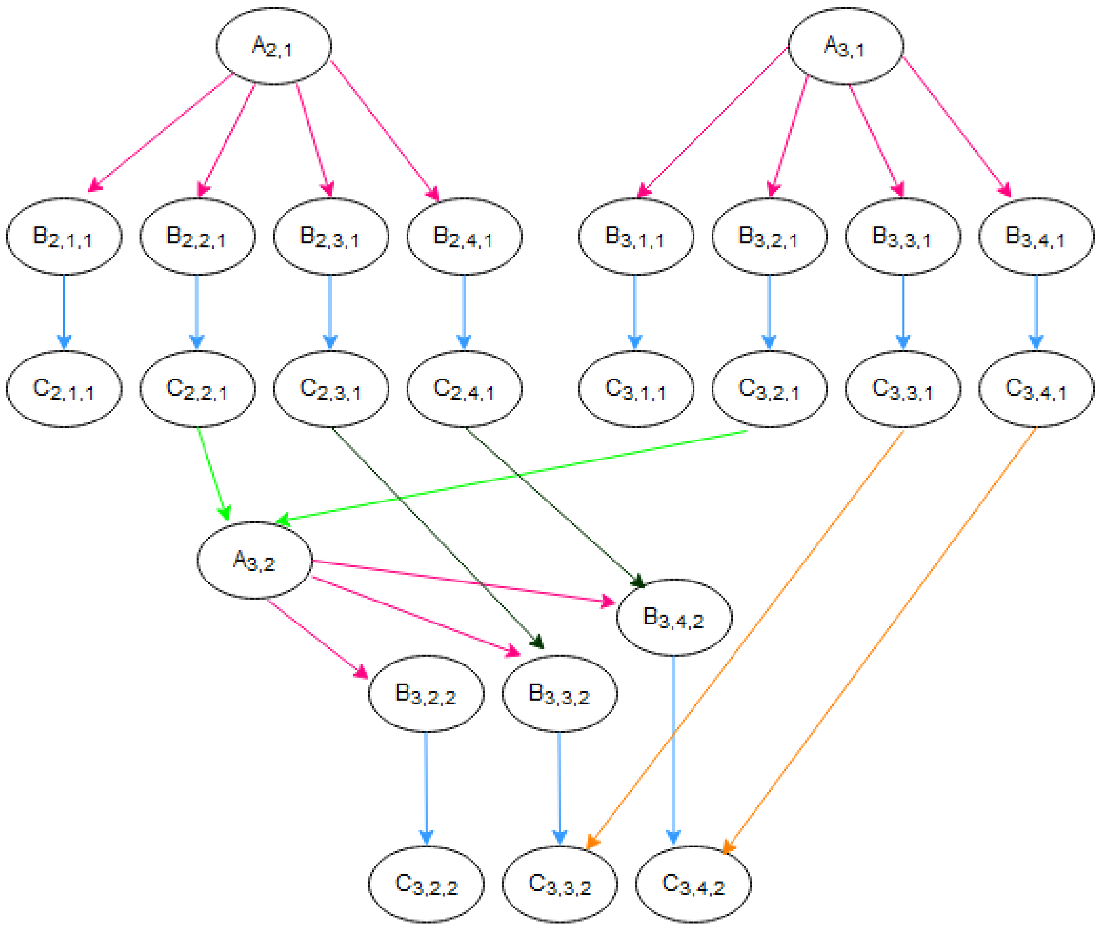
$$E_4 = \{(C_{k,j,i_1}, C_{k,j,i_2}) | C_{k,j,i_1}, C_{k,j,i_2} \in \Sigma \land \mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_1 + 1 \land \mathrm{i}_2 \neq j\}$$

$$E_5 = \{(C_{k_1,j,i_1}, B_{k_2,j,i_2}) | C_{k_1,j,i_1}, B_{k_2,j,i_2} \in \Sigma \land i_2 = k_1 \land i_2 = i_1 + 1 \land i_2 \neq j\}$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$$

Przykład grafu Diekerta dla macierzy o rozmiarze $N = 3$ z zaznaczeniem podzbiorów, z których pochodzą poszczególne krawędzie:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$$



e) Proszę przekształcić ciąg symboli opisujący algorytm do postaci normalnej Foaty

Postać normalna Foaty:

Skorzystam z notacyjnego zapisu FNF.

Niech:

$F_{Ai} = [\{A_{k,i} | i < k \leq N\}]$

$F_{Bi} = [\{B_{k,j,i} | i < k \leq N \wedge i < j \leq N + 1\}]$

$F_{Ci} = [\{A_{k,j,i} | i < k \leq N \wedge i < j \leq N + 1\}]$

dla $i \in \{1,2, \dots, N - 1\}$.

Wtedy: $FNF = F_{A1} F_{B1} F_{C1} F_{A2} F_{B2} F_{C2} \dots F_{A(N-1)} F_{B(N-1)} F_{C(N-1)}$

f) Proszę zaprojektować i zaimplementować równoległy algorytm eliminacji Gaussa

Algorytm został zaimplementowany w języku Java z zachowaniem automatycznej kompilacji maven. Jako parametr wejściowy programu należy podać ścieżkę do pliku wejściowego w formacie zgodnym z podanym w instrukcji zadania. Po zakończeniu programu tworzony jest plik wyjściowy zgodny z formatem podanym w instrukcji o nazwie „solved_output.txt” do którego zapisany jest wynik.