



中国研究生创新实践系列大赛  
“华为杯”第十八届中国研究生  
数学建模竞赛

学 校 南京航空航天大学

---

参赛队号 21102870035

---

1.林佳金

---

队员姓名 2.张顺

---

3.凌莉芸

---

# 中国研究生创新实践系列大赛

## “华为杯”第十八届中国研究生

### 数学建模竞赛

#### 题 目 航空公司机组优化排班问题

#### 摘 要：

机组排班是在遵守管理当局的机组适航条例和保证航班计划飞行任务的正常完成的条件下，通过科学合理地排班，降低机组人力资源成本。本文考虑到机组排班的合理性、公平性和有效性，构造了航班连接网络并根据网络建立了基于点边的**多目标优化模型**。该模型能显示表达赛题给出的航班衔接和飞行员工作限制等约束。对于大规模的问题，本文基于机组排班的特点和所建立的数学模型的结构设计了加速求解的策略，极大地降低了计算时间。

问题一中考虑了常规的时空衔接约束和首尾基地约束。为了简化航班连接约束，本文依据航班信息构造了航班对集合并基于航班连接网络建立了网络流模型。模型中考虑到了航班配置数、乘机次数和替补资格使用数等指标，同时需要满足时空衔接和基地约束。在模型求解的预处理上，本文通过分析模型的结构去掉了冗余约束，极大地降低了问题的规模。在求解方法上，本文采用标量化的方法以处理该多目标问题，获取 **Pareto-最优解**。计算实验表明，数据集 A 能在 0.7 分钟内得到满足所有航班配置要求的排班方案，此时乘机人次为 8，无人使用替补资格；针对数据集 B，采用分段策略处理，每段长度三到四天，结果表明不满足配置航班数为 35。

问题二考虑了机组排班中执勤相关的成本、公平性和时间约束。为处理累计执勤和飞行用时的容量约束，本文建立了**非线性整数规划模型**。在模型的预处理阶段，本文借助线性化技术将二次变量代换为一次变量，同时引进与被替换变量关联的线性约束以得到与原模型等价的**混合整数线性规划模型**。在模型的求解阶段，基于数据集中航班普遍为中短航程的特点，本文采用“暂不考虑、求解、检验”的策略，结合调整权重处理飞行时间约束，显著地节省了计算用时。数值实验表明，数据集 A 在 9 分钟内得到 Pareto-最优解，其中不满足配置航班数为 0，总体乘机人次为 22，替补资格使用次数为 23；对于数据集 B，不满足配置航班数为 76。针对数据集 A，我们还给出了权重比例的灵敏度分析。

问题三考虑了与任务环相关的成本、公平性和时间限制。在模型上，沿用线性化技术处理建立的非线性模型。在模型的求解阶段，进一步使用“暂不考虑、求解、检验”的策略处理违反概率小的约束。数值实验表明，数据集 A 可以在 16 分钟得到 Pareto-最优解，其中不满足配置航班数为 4，总体乘机人次为 1，替补资格使用次数为 15；数据集 B 中不满足配置的航班数为 152 个。

总体而言，我们的模型可以有效地处理机组排班问题，对于小规模数据能够给出满意的解；对于较大规模数据，能够在较短的时间内给出一个可以接受的解。

关键词：机组排班；多目标规划；Pareto-最优；混合整数线性规划；线性化技术（RLT）

## 目录

1. 问题重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 问题提出.....	4
2. 模型的假设.....	4
3. 符号说明.....	5
4. 问题一分析与求解.....	7
4.1. 问题分析.....	7
4.2. 问题求解.....	8
(1) 数据处理.....	8
(2) 建立优化模型.....	10
4.3. 模型的有效性和复杂度分析.....	12
4.4. 数值结果分析.....	13
5. 问题二分析与求解.....	15
5.1. 问题分析.....	15
5.2. 问题求解.....	15
(1) 数据处理.....	15
(2) 建立优化模型.....	15
5.3. 模型有效性和复杂度分析.....	17
5.4. 算法设计.....	19
5.5. 数值结果分析.....	19
6. 问题三分析与求解.....	22
6.1. 问题分析.....	22
6.2. 问题求解.....	22
(1) 数据处理.....	22
(2) 建立优化模型.....	23
6.3. 模型有效性和复杂度分析.....	24
7. 模型评价.....	27
7.1. 模型优点.....	27
7.2. 模型缺点.....	27
7.3. 展望.....	27
8 参考文献.....	28

## 1. 问题重述

### 1.1 问题背景

机组排班（Crew scheduling problem）是整个航空公司在生产计划制定流程中的一个重要环节，在遵守适航条例且满足机组意愿的条件下科学合理地安排机组以保证航班计划飞行任务的正常完成，并尽可能降低机组人力资源成本对航空公司的运营是至关重要的。目前我国大多数航空公司的机组排班主要依赖于手工完成，具有效率低下、不适用于大型航空公司机组排班需要等缺点。因此，建立快速和高效的排班方法、技术和路线，实现降低航空公司成本、提高机组管理信息化水平变得尤为重要[1]。

机组排班问题是运筹学与航空规划交叉研究领域中的一类重要的研究课题。在过去的近 20 年，学者们关于该问题提出了许多成熟的优化模型和求解算法[2-4]。考虑到机组排班问题的规模大、周期长、复杂性高，通常将其分为两个子问题：机组任务配对问题（Crew pairing problem）和机组人员指派问题（Crew rostering problem）。在计算机排班系统中，为实现人力资源成本的最小化，一般是结合网络流模型（Network Flow）和列生成法（Column Generation）[5-10]求解。虽然列生成法具有模型简单、易于处理各种复杂约束以及计算性能好等优点，但由于模型本身缺乏各种规章约束参数的显性表达，一般的灵敏度分析方法并不适用。此外，对于一些不完整的任务环问题，两阶段子问题不能很好地求解。对于一般问题，该方法也会缩小其优化空间使得所求最优解实为次优解。因此，我们希望建立线性优化模型，明确表达飞行时间、执勤时间、休息时间等约束，将航班直接分配给机组人员。

### 1.2 问题提出

- 问题一：两套检测数据分别提供了单基地和多基地的各类数据，基于这些相关性数据与已知的假设条件，建立满足多个目标和约束要求的线性规划模型。
- 问题二：在问题一的研究基础上引入执勤的概念，进一步给定每个机组人员每单位的执勤成本。模型的目标还需考虑总执勤成本和各机组人员间执勤时长这两个目标函数，同时增加相应的约束条件。
- 问题三：在问题一和问题二的基础上，给定每个机组人员每单位的任务环成本，编制排班计划。模型目标需要额外考虑总任务环成本和平衡各机组人员间任务环时长，并进一步满足相应的约束要求。

## 2. 模型的假设

1. 假设航班规划阶段已完成，机型分配已结束，机组人员数量及资格的需求已明确，可用机组人员已确定；
2. 假定具备替补资格的飞行员其主要资格是正机长；
3. 假定每个航班都是唯一的；
4. 假定所有机组人员排班周期开始时的初始位置和结束时的终点位置都在其基地，并对排班周期进行适当延展；
5. 假设机组人员之间可以任意组合；
6. 假设允许存在因为无法满足最低机组资格配置而不能起飞的航班；
7. 假设不满足最低机组资格配置的航班不能配置任何机组人员；
8. 假设机组人员可以乘机摆渡，乘机机组人员的航段时间计入执勤时间，但不计入飞行时间；

9. 针对问题 2 模型，假定每个机组人员的每单位小时执勤成本给定；  
10. 针对问题 3 模型，假定每个机组人员的每单位小时任务环成本给定。

### 3. 符号说明

表 1 模型中用到的符号含义

符号	含义
$k$	飞行员编号
$JD$	基地编号
$i$ (或 $j$ )	航班编号
$(i, j)$	航班 $i$ 与航班 $j$ 相连接，记为航班对 $(i, j)$
$(0, j)$	从虚拟源点出发的航班（记为航班 0）与航班 $j$ 构成的航班对
$L$	所有航班构成的集合
$CF$	所有飞行员构成的集合
$CF_1$	只具有正机长资格的所有飞行员构成的集合
$CF_2$	只具有副机长资格的所有飞行员构成的集合
$CF_3$	具有替补资格的所有飞行员构成的集合
$B$	所有航班对 $(i, j)$ 构成的集合
$B_1$	同一天起飞且满足航班连接条件的所有航班对构成的集合
$B_2$	隔一天起飞且满足航班连接条件的所有航班对构成的集合
$B_3$	隔两天及以上起飞且满足航班连接条件的所有航班对构成的集合
$B_s^{JD}$	所有在基地 $JD$ 起飞的航班对 $(0, j)$ 构成的集合
$B_e^{JD}$	所有到达基地 $JD$ 的航班对 $(i, 0)$ 构成的集合
$y_{ik}^C$	飞行员 $k$ 是否作为正机长在航班 $i$ 上执行飞行任务
$y_{ik}^F$	飞行员 $k$ 是否作为副机长在航班 $i$ 上执行飞行任务
$y_{ik}^{DH}$	飞行员 $k$ 是否在航班 $i$ 上执行乘机任务
$z_i$	航班 $i$ 是否满足机组人员最低配置
$x_{ij}^k$	飞行员 $k$ 是否在航班对 $(i, j)$ 上执行任务
$v_{ik}$	飞行员 $k$ 在执行完航班 $i$ 后在当次执勤中总飞行时长
$\phi_{ik}$	飞行员 $k$ 在执行完航班 $i$ 后在当次执勤中总执勤时长
$\varphi_{ik}$	飞行员 $k$ 在执行完航班 $i$ 后总执勤时长
$\psi_k$	飞行员 $k$ 在执行完所有任务后总执勤时长

$y_{ij}^{fk}$	飞行员 $k$ 是否顺序执行航班对 $(i, j)$ 且在航班 $j$ 上执行飞行任务
$s_k$	飞行员执勤时长偏离度
$n_i^C$	航班 $i$ 需要正机长最低人数
$n_i^F$	航班 $i$ 需要副机长最低人数
$t_i^d$	航班 $i$ 起飞时间
$t_i^a$	航班 $i$ 到达时间
$A_i^d$	航班 $i$ 起飞机场
$A_i^a$	航班 $i$ 到达机场
$\lambda_i$	航班 $i$ 的飞行时长
$t_{iR}^d$	每个航班 $i$ 起飞日历日
$t_{iR}^a$	每个航班 $i$ 降落日历日
$c_k^P$	飞行员 $k$ 任每单位小时任务环成本

## 4. 问题一分析与求解

### 4.1. 问题分析

机组排班问题是航空公司运营管理工作中的重要内容之一，也是普遍认为难以解决的问题。由于机组排班可能会涉及成千上万条的航段分配，同时还必须满足许多复杂的工作规则，如：限制机组人员的飞行时长以保障飞行安全，机组人员权益等，因此航空公司制定合理的排班计划变得尤为重要。

问题一的目的是在尽可能多的航班满足机组配置的同时，要求机组人员总体乘机次数和使用替补资格尽可能的少，即为一个多目标线性整数规划问题。目前，国内外已有的研究大多选择建立集合分割模型（Set-Partitioning Model）[11-13]或多商品网络流模型（Multi-commodity Network Flow Model）[14-17]来刻画该问题。由于本赛题考虑到可以不满足航班最低配置、同一个航班允许执行任务的机组人员超出最低配置要求等实际情况的发生，因而难以建立集合分割模型求解。此外，根据文献调研发现基于航班连接网络图来解决机组排班问题是一种有效的方法[18-19]。我们可以根据问题的实际目标和约束要求生成一张航班连接网络图 $G$ ，如图1所示。在整个网络中建立虚拟源（汇）点以满足机组人员从基地机场出发并回到基地机场的要求，节点 $i_j$ 代表第 $i_j$ 个航班，节点间的有向弧代表两个航班满足相连接条件可以形成一个航班对。

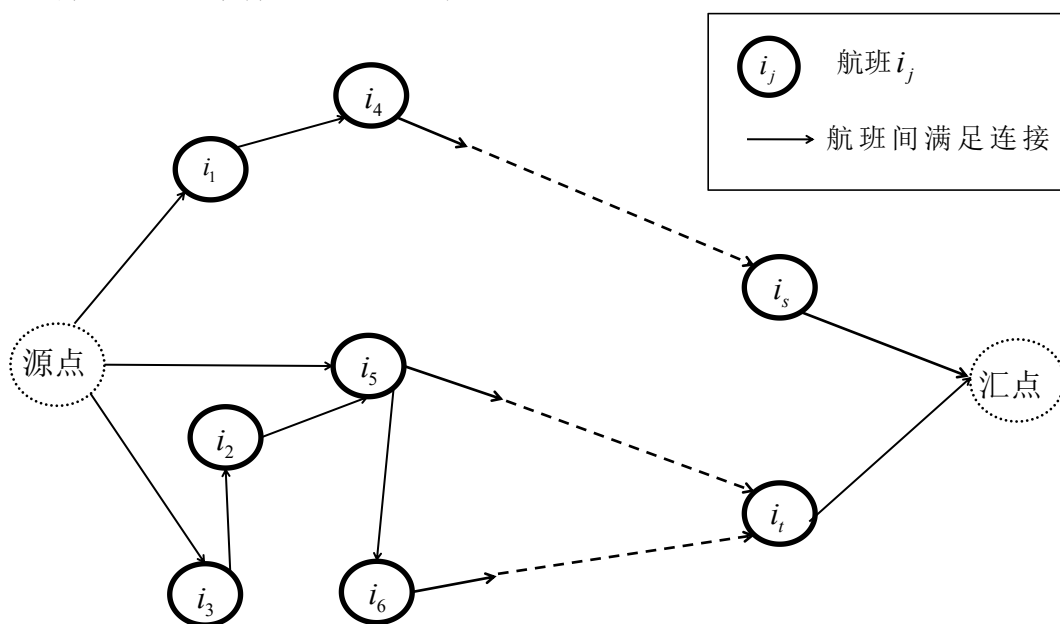


图1 航班连接网络图 $G$

（上图仅为示意图，虚线部分表示图中有大量点边已被省略。）

基于航班连接网络图，我们可以构造一个网络流模型来求解问题一。在下一节，我们将首先对附件中提供的两套检测数据进行预处理，然后给出目标函数和飞行时间、执勤时间、休息时间等约束的显示表达式，最后建立问题一的模型。在数值实验部分，将进一步验证该模型的有效性。



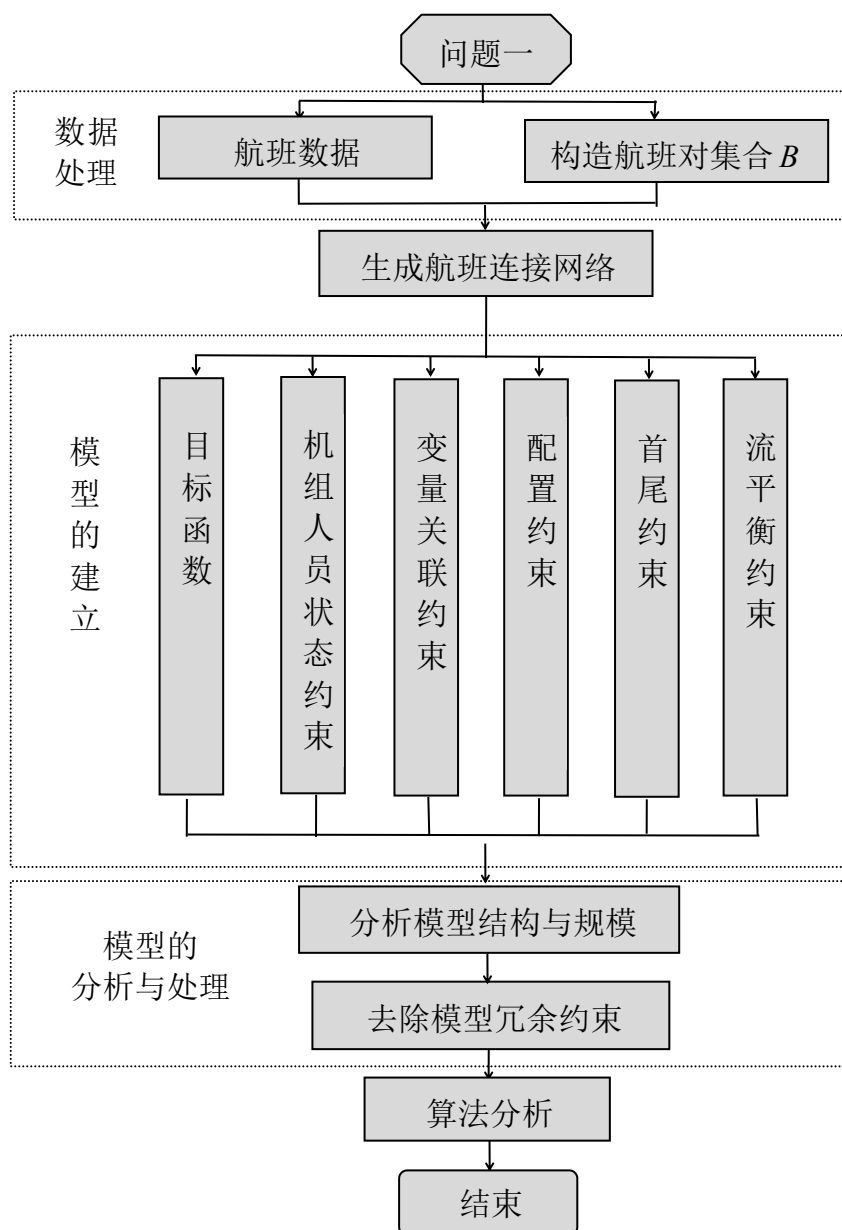


图 2 问题一求解思路及方法

## 4.2. 问题求解

问题一中航班  $i$  与航班  $j$  的连接组合规模庞大，为有效求解机组排班问题，我们对数据进行预处理。

### (1) 数据处理

- 对附件中两套检测数据内提供的所有机组人员的信息依据资格配置进行分类，其中只具有正机长资格的机组人员划分为第 1 类，只具有副机长资格的机组人员划分为第 2 类，既具有正机长资格又具有副机长资格的机组人员划分为第 3 类。
- 将两套检测数据的计划周期时刻计数统一为分钟计数，计划周期开始时间为 0，计划起飞(降落)时间为

$$t_i^d = (\text{DptrDate} - \min \text{DptrDate}) * 1440 + \text{DptrTime},$$

$$t_i^a = (\text{ArrvDate} - \min \text{DptrDate}) * 1440 + \text{ArrvTime},$$

其中  $\text{DptrTime}$  和  $\text{ArrvTime}$  均换算为分钟计数，例如10:10为 610 分钟。

- 由于航班连接约束较为复杂，若直接加入相关约束将大大提升问题的规模和复杂度，因此需要对航班进行数据处理以寻找满足连接条件的航班对，并构造航班对集合  $B$ 。航班对  $(i, j) \in B$  当且仅当满足下面两个条件：

1.  $t_i^d - t_i^a \geq \min CT$ ,

2.  $A_i^d = A_i^a$ .

基于上述充分必要性条件，可以生成一张航班时空网络图，如图 3 所示。

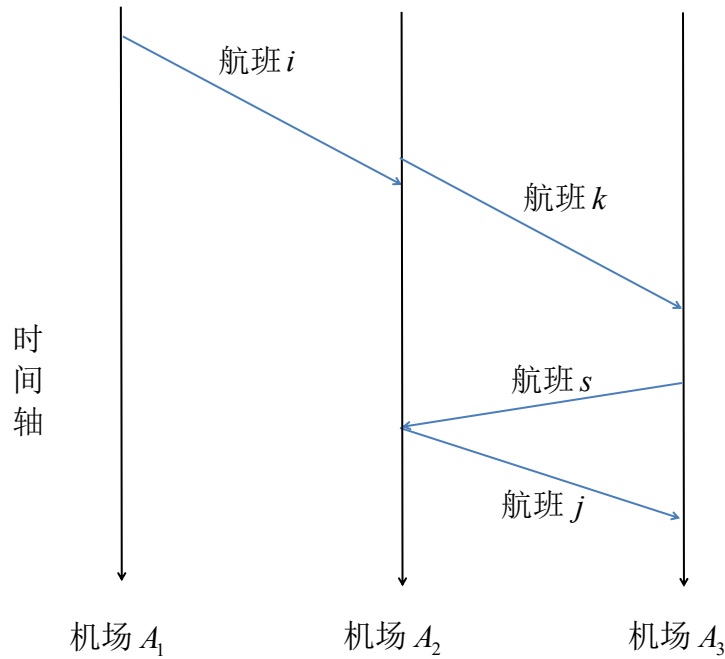


图 3 航班时空网络示意图

根据图 3，我们可以清晰的构造出航班对集合  $B$ ，如表 2 所示。

表 2 构造集合  $B$  的示例

航班对	是否在集合 $B$ 中	原因
$(i, j)$	是	满足时间连接约束与地点连接约束
$(i, k)$	否	不满足时间连接约束
$(i, s)$	否	不满足地点连接约束
$(k, s)$	是	满足时间连接约束与地点连接约束

类似地，我们可以构造出所有在基地  $JD$  起飞的航班对  $(0, j)$  构成的集合  $B_s^{JD}$ ，和所有在基地  $JD$  到达的航班对  $(i, 0)$  构成的集合  $B_e^{JD}$ 。

## (2) 建立优化模型

针对问题一中三个目标函数和三类约束条件建立模型，我们需要引进新的变量并给出不违反飞行规则的关联约束。

➤ 首先，我们引入**五类变量**：

$z_i$ ：0-1 变量。若航班  $i$  满足机组人员最低配置，则  $z_i = 0$ ；否则  $z_i = 1$ 。

$y_{ik}^C$ ：0-1 变量。若飞行员  $k$  在航班  $i$  上作为正机长执行飞行任务，则  $y_{ik}^C = 1$ ；否则  $y_{ik}^C = 0$ 。

$y_{ik}^F$ ：0-1 变量。若飞行员  $k$  在航班  $i$  上作为副机长执行飞行任务，则  $y_{ik}^F = 1$ ；否则  $y_{ik}^F = 0$ 。

$y_{ik}^{DH}$ ：0-1 变量。若飞行员  $k$  在航班  $i$  上执行乘机任务，则  $y_{ik}^{DH} = 1$ ；否则  $y_{ik}^{DH} = 0$ 。

$x_{ij}^k$ ：0-1 变量。若飞行员  $k$  在航班对  $(i, j)$  上执行任务，则  $x_{ij}^k = 1$ ；否则  $x_{ij}^k = 0$ 。

➤ 其次，根据问题一的要求建立三个**目标函数**：

**第一目标**：①所有航班不满足机组配置的总和：

$$f_1 = \sum_{i \in L} z_i;$$

**第二目标**：④所有执行乘机任务的机组人员的总乘机次数：

$$f_4 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF} y_{ik}^{DH};$$

**第三目标**：⑦具有替补资格的机组人员作为副机长执行飞行任务的总和：

$$f_7 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF_3} y_{ik}^F.$$

➤ 然后，考虑到航空公司实际排班情况，给出相应的**五类约束条件**：

### A. 机组人员状态约束

$$y_{ik}^C + y_{ik}^{DH} \leq 1, \quad \forall k \in CF_1, \forall i \in L, \quad (1)$$

$$y_{ik}^F + y_{ik}^{DH} \leq 1, \quad \forall k \in CF_2, \forall i \in L, \quad (2)$$

$$y_{ik}^C + y_{ik}^F + y_{ik}^{DH} \leq 1, \quad \forall k \in CF_3, \forall i \in L. \quad (3)$$

本赛题中所有机组人员的执行任务分为三类：1、正机长飞行任务，2、副机长飞行任务、3、乘机任务。机组人员状态约束是指每一个飞行员  $k$  在航班  $i$  上至多承担一种执行任务。当飞行员不在航班  $i$  上时，显然满足上述约束；否则，给出相应的约束限制：式(1)只具有正机长资格的飞行员  $k$  在航班  $i$  上只能执行正机长飞行任务或者乘机任务，飞行员不同时承担两种任务；式(2)只具有副机长资格的飞行员  $k$  在航班  $i$  上只能执行副机长飞行任务或者乘机任务，飞行员不同时承担两种任务；式(3)具有替补资格的飞行员  $k$  在航班  $i$  上可以执行正机长飞行任务、副机长飞行任务或者乘机任务，飞行员只能承担一种任务。

### B. 变量关联约束

根据变量  $y_{ik}^F$ ， $y_{ik}^C$ ， $y_{ik}^{DH}$  和  $x_{ij}^k$  的定义可知， $x_{ij}^k$  是一条由飞行员  $k$  执行任务的路径，路

径上每个航段具体执行的任务种类由  $y_{ik}^F$ ,  $y_{ik}^C$ ,  $y_{ik}^{DH}$  决定。具体地, 对于每类飞行员可以生成下面变量关联约束:

$$x_{ij}^k \leq y_{ik}^C + y_{ik}^F + y_{ik}^{DH}, \quad \forall k \in CF_3, \forall (i, j) \in B, \quad (4)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{jk}^C + y_{jk}^F + y_{jk}^{DH}, \quad \forall k \in CF_3, \forall (i, j) \in B, \quad (5)$$

$$y_{ik}^C + y_{ik}^F + y_{ik}^{DH} = \sum_{j:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_3, \forall i \in L, \quad (6)$$

$$y_{jk}^C + y_{jk}^F + y_{jk}^{DH} = \sum_{i:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_3, \forall j \in L. \quad (7)$$

式(4)-(7)是针对具有替补资格飞行员建立的约束, 其中式(4)和式(5)表示对于每个飞行员构造的路径中每个航班都需要飞行员执行任务, 式(6)和式(7)表示每个安排任务的航班都必须有相应的前序航班和后续航班。类似地, 针对只具有正机长资格的飞行员也可以建立变量关联约束(8)-(11), 其含义与式(4)-(7)类似。

$$x_{ij}^k \leq y_{ik}^C + y_{ik}^{DH}, \quad \forall k \in CF_1, \forall (i, j) \in B, \quad (8)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{jk}^C + y_{jk}^{DH}, \quad \forall k \in CF_1, \forall (i, j) \in B, \quad (9)$$

$$y_{ik}^C + y_{ik}^{DH} = \sum_{j:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_1, \forall i \in L, \quad (10)$$

$$y_{jk}^C + y_{jk}^{DH} = \sum_{i:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_1, \forall j \in L. \quad (11)$$

同样, 针对只具有副机长资格飞行员可以建立约束(12)-(15), 其含义与式(4)-(7)类似。

$$x_{ij}^k \leq y_{ik}^F + y_{ik}^{DH}, \quad \forall k \in CF_2, \forall (i, j) \in B, \quad (12)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{jk}^F + y_{jk}^{DH}, \quad \forall k \in CF_2, \forall (i, j) \in B, \quad (13)$$

$$y_{ik}^F + y_{ik}^{DH} = \sum_{j:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_2, \forall i \in L, \quad (14)$$

$$y_{jk}^F + y_{jk}^{DH} = \sum_{i:(i,j) \in B} x_{ij}^k, \quad \forall k \in CF_2, \forall j \in L, \quad (15)$$

### C. 首尾约束

$$\sum_{j:(0,j) \in B_s^{JD}} x_{0j}^k = 1, \quad \forall k \in CF, \forall (0, j) \in B, \quad (16)$$

$$\sum_{j:(j,0) \in B_e^{JD}} x_{j0}^k = 1, \quad \forall k \in CF, \forall (j, 0) \in B. \quad (17)$$

首尾约束要求每位机组人员初始从基地出发并最终回到基地, 式(16)代表从基地机场出发, 式(17)代表回到基地机场。

### D. 配置约束

$$\sum_{k \in CF_1 \cup CF_3} y_{ik}^C + n_i^C z_i = n_i^C, \quad \forall i \in L, \quad (18)$$

$$\sum_{k \in CF_2 \cup CF_3} y_{ik}^F + n_i^F z_i = n_i^F, \quad \forall i \in L, \quad (19)$$

$$\sum_{k \in CF_3} y_{ik}^{DH} \leq N(1 - z_i), \quad \forall i \in L, \quad (20)$$

其中,  $N$  是每趟航班上最多的乘机人数。根据赛题要求, 每个航班都有给定的最低机组资

格配置，满足这些要求的约束即为配置约束。本文允许存在不满足最低机组配置的航班（即  $z_i = 1$ ），但该类航班上不能配置任何机组人员（即  $y_{ik}^C = y_{ik}^F = y_{ik}^{DH} = 0$ ）。式(18)-(19)是执行飞行任务的机组人员的配置约束，式(20)是执行乘机任务的机组人员的配置约束。

#### E. 流平衡约束

$$\sum_{i:(i,j) \in B} x_{ij}^k = \sum_{s:(j,s) \in B} x_{js}^k, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF. \quad (21)$$

本模型基于多商品网络流模型，对于每一个航班均需满足流平衡约束，即每个航班节点流入流量等于流出流量，且对于每位机组人员有且仅有一个流入流出，否则无流入流出。

#### 4. 3. 模型的有效性和复杂度分析

通过 4.2 节中各模块的显示表达与分析，给出线性规划模型(LP1):

$$\begin{aligned} & \min f_1 \\ & \min f_4 \\ & \min f_7 \\ & \text{s.t. (1)-(21),} \\ \text{LP1:} \quad & x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in B, \quad (22) \\ & z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in L, \quad (23) \\ & y_{ik}^C \in \{0,1\}, \quad \forall i \in L, \forall k \in CF_1, \quad (24) \\ & y_{ik}^F \in \{0,1\}, \quad \forall i \in L, \forall k \in CF_2, \quad (25) \\ & y_{ik}^{DH} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in L, \forall k \in CF_3. \quad (26) \end{aligned}$$

LP1 是一个多目标优化模型，但在大多数情况下该模型的目标值集合中不含有最小元，即问题不含有最优解和最优值[20]。在这种情况下，可以通过找到函数值集合的极小元来得到模型 LP1 的一个 Pareto-最优解。

标量化技术是寻找多目标优化问题 Pareto-最优解的常见技术之一，我们可以利用该技术求解线性规划模型 LP1 的 Pareto-最优。具体地，将 LP1 模型转化为

$$\begin{aligned} \text{LP2:} \quad & \min a_1 f_1 + a_4 f_4 + a_7 f_7 \\ & \text{s.t. (1)-(26),} \end{aligned}$$

这是一个单目标优化问题，可以采用分支定界、割平面法等常见方法求解。

本节以检测数据 A 作为范例，检测数据 B 可按照类似计算方法。对于 A 套数据，LP2 模型中有 5 类整数变量和 21 类约束条件。通过数据处理易知航班对集合 B 中约有 6000 个元素，则变量  $x_{ij}^k$  约有 120000 个。由  $y_{ik}^C$ 、 $y_{ik}^F$ 、 $y_{ik}^{DH}$  及  $z_i$  定义知，前两类变量个数不超过  $42 \times 206$  个，第三类变量个数不超过  $21 \times 206$  个，而变量  $z_i$  有 206 个。因此，变量的规模约为 140000 个。式(1)-(3)中约束个数共有  $21 \times 206$  个，式(4)-(5)中约束个数均为  $6 \times 6000$  个，式(6)-(7)中约束个数均为  $6 \times 206$  个，式(8)-(9)中约束个数均为  $5 \times 6000$  个，式(10)-(11)中约束个数均为  $5 \times 206$  个，式(12)-(13)中约束个数均为  $10 \times 6000$  个，式(14)-(15)中约束个数均为  $10 \times 206$  个，共计约束个数：264978 个。显然，LP2 模型具有规模大、运行时间长及求解困难等缺点。通过对模型检查发现，若式(6)成立，则必有式(4)成立。类似地，式(7)、(10)、(11)、(14)和(15)均有相似结论，从而可以通过去除冗余约束来降低问题的规模。因此，我

们得到问题一的一个更简洁的模型：

$$\begin{aligned} \text{LP3:} \quad & \min a_1 f_1 + a_4 f_4 + a_7 f_7 \\ & \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11), (14) - (15), (22) - (26).} \end{aligned}$$

LP3 模型中有 9 类约束条件，这些约束条件明确表达了飞行时间、执勤时间及休息时间等约束。虽然该模型变量规模与 LP2 相同约为 140000 个，但是这 9 类约束条件的总约束个数约 13000 个，仅占 LP2 模型总约束个数的 4.9%。这大大降低了问题一的求解规模，减少了计算时间和计算复杂度，具体见表 3 与表 4。在下一节，我们将从数值计算方面进一步验证该模型的有效性。

表 3 三个模型间的比较

问题	模型特点
LP1	多目标优化模型：约束繁多，一定能够满足问题要求，但模型可能很难求解或需要花费大量时间进行求解
LP2	线性整数规划：约束繁多，问题规模与 LP1 相同，能够使用求解器或现有算法求解，但求解时间可能较长
LP3	线性整数规划：满足问题要求的同时大量减少冗余约束，能够利用求解器在较短时间内求解

表 4 LP2 和 LP3 规模比较

约束种类	约束个数	LP2 中是否有此约束	LP3 中是否有此约束
(1)-(3)	4326	有	有
(4)-(5)	36000	有	无
(6)-(7)	1236	有	有
(8)-(9)	30000	有	无
(10)-(11)	1030	有	有
(12)-(13)	60000	有	无
(14)-(15)	2060	有	有
总约束个数		134652	8652

#### 4. 4. 数值结果分析

利用常见的分支定界、割平面等优化方法对线性规划模型 LP3 求解，可以得到检验数表 A 在计划周期内的最优排班结果。而选择合理高效的优化算法对线性规划问题的求解是至关重要的。CPLEX 是用于求解线性规划、混合整数规划及二次规划等问题的一类高性能数学规划求解器。因此，我们可以使用 CPLEX 中功能强大的算法，对问题一进行数学建模和求解。在整个数值实验过程中，CPLEX 的各项求解参数均为默认设置。

表 5-6 是 A 套数据在不同标量化模型参数下得到的航班排班信息结果，其中  $r_1$  和  $r_2$  分

别代表目标函数  $f_1, f_4, f_7$  中系数  $a_1, a_4, a_7$  间的比值, 即  $r_1 = a_1 / a_4$ ,  $r_2 = a_1 / a_7$ 。在实验中, 假定  $a_1$  恒等于 100,  $r_2$  最小取值为 1。观察表 1 可知, 对问题 1 构造的多目标优化模型有两个 Pareto-最优解, 分别记为解 1 和解 2。解 1 对应的不满足配置航班数为 0, 它是关于不满足配置数的最优解; 解 2 对应的机组人员总乘机数为 0, 它是关于总乘机数的最优解; 两个解对应的替补资格使用次数都为 0, 因此它们都是关于替补资格的最优解。根据问题一的目标函数要求, 我们应该优先满足目标①: 尽可能多的航班满足机组配置。因此选择解 1 作为最优解, 此时满足所有航班的机组配置, 机组人员总乘机 8 次, 没有使用替补资格, 程序运行时间 44.05 秒, 约 0.73 分钟。问题一的最优结果全部列于表 6 所示。

**表 5 A 组数据在不同标量化模型参数下得到的结果**

指标	$r_1 = 10, \forall r_2 \geq 1$	$\forall r_1 \geq 2.5, r_2 = 100$	$\forall r_1 \leq 2, r_2 = 100$
不满足机组配置航班数 (个)	0	0	4
满足机组配置航班数 (个)	206	206	202
机组人员总体乘机次数 (个)	8	8	0
替补资格使用次数 (个)	0	0	0

**表 6 问题一的 A 组数据最终结果**

指标	结果
不满足机组配置航班数 (个)	0
满足机组配置航班数 (个)	206
机组人员总体乘机次数 (个)	8
替补资格使用次数 (个)	0
程序运行分钟数 (分钟)	0.73

**表 7 问题一的 B 组数据最终结果**

指标	结果
不满足机组配置航班数 (个)	35
满足机组配置航班数 (个)	13919
机组人员总体乘机次数 (个)	57
替补资格使用次数 (个)	12
程序运行分钟数 (分钟)	12.98

## 5. 问题二分析与求解

### 5.1. 问题分析

在问题一的研究基础上，考虑机组人员总执勤成本和机组人员间执勤时长这两方面内容。注意到赛题要求依据编号次序满足目标，即依次满足①→②→④→⑤→⑦。每个目标函数的重要程度随标号次序呈递减趋势。由于考虑到新的目标函数，相应的约束条件也发生改变：1、增加部分变量约束；2、增加飞行时间约束；3、增加执勤时间约束。注意到新增的飞行时间约束和执勤约束中出现了二次约束条件，因此问题二本质上是一个二次混合整数规划问题，求解十分困难。采用 Reformulation Linearization Technique (RLT) 技术[21] 可以将二次约束线性化，把问题转化为一个混合整数线性模型，从而降低问题的求解难度。

### 5.2. 问题求解

针对问题二，每位飞行员顺序执行的两个航班任务可以分为两大类：1、两个航班任务在同一天内执行，即它们在同一个执勤任务内；2、两个航班任务不在同一天内执行，但在相邻的两个执勤任务内。根据这两类航班任务对构造集合  $B_1$  和  $B_2$  以保证每位机组人员每天至多只能执行一个执勤。

#### (1) 数据处理

- 航班连接约束集合  $B_1$  和  $B_2$ 。与问题一中集合  $B$  处理相类似，我们需要对连接约束分别进行数据筛选处理以寻找满足某些特定连接条件的航班对，以此来构造航班对集合  $B_1$  和  $B_2$ 。具体地，给出构造航班对集合的充分必要条件：
  - ① 航班对  $(i, j) \in B_1$  当且仅当下述条件成立，即
    - 1)  $t_i^d - t_i^a \geq \min CT$ ,
    - 2)  $A_i^d = A_i^a$ ,
    - 3)  $\lambda_i + \lambda_j \leq \text{MaxBlk}$ ,
    - 4)  $t_i^d - t_i^a \leq \text{MaxDP}$ ,
    - 5) 航班  $i$  与航班  $j$  在同一天起飞。
  - ② 航班对  $(i, j) \in B_2$  当下述条件成立，即
    - 1)  $t_j^a - t_i^d \geq \text{MinRest}$ ,
    - 2)  $A_i^d = A_j^a$ ,
    - 3) 航班  $i$  与航班  $j$  在隔一天起飞。
- 航班连接约束集合  $B_s^{JD}$ 、 $B_e^{JD}$  和  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_s^{JD} \cup B_e^{JD}$  的构造方法同问题一，不再赘述。

#### (2) 建立优化模型

由于问题二引进执勤概念，相应的模型需要引进新的变量并给出不违反飞行规则的关联约束。

➤ 首先，我们考虑下面四类新增变量：

$v_{ik}$ ：连续变量。飞行员  $k$  在执行完航班  $i$  后在当次执勤中总飞行时长；

$\phi_{ik}$ ：连续变量。飞行员  $k$  在执行完航班  $i$  后在当次执勤中总执勤时长；



$\varphi_{ik}$ : 连续变量。飞行员  $k$  在执行完航班  $i$  后总执勤时长;  
 $\psi_k$ : 连续变量。飞行员  $k$  在执行完所有任务后总执勤时长;  
 $y_{ij}^{kf}$ : 0-1 变量。若飞行员  $k$  顺序执行航班对  $(i, j) \in B$  且在航班  $j$  上执行飞行任务, 则  $y_{ij}^{kf} = 1$ ; 否则  $y_{ij}^{kf} = 0$ 。

➤ 其次, 根据问题二的要求给出**五个目标函数**:

**第一目标**: ①所有航班不满足机组配置的总和:

$$f_1 = \sum_{i \in L} z_i,$$

**第二目标**: ②机组人员的总体执勤成本:

$$f_2 = \sum_{k \in CF} c_k \psi_k,$$

**第三目标**: ④所有执行乘机任务的机组人员的总乘机次数:

$$f_4 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF} y_{ik}^{DH},$$

**第四目标**: ⑤机组人员之间的执勤时长偏离度:

$$f_5 = \sum_{k \in CF} s_k,$$

其中  $s_k$  是飞行员  $k$  的执勤时长偏离度。

**第五目标**: ⑦具有替补资格的机组人员作为副机长执行飞行任务的总和:

$$f_7 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF_3} y_{ik}^F.$$

➤ 然后, 根据问题二的要求考虑下面**五类新增约束**:

#### A. 变量关联约束

$$y_{ij}^{fk} \leq y_{jk}^C + y_{jk}^F, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_3, \quad (27)$$

$$y_{ij}^{fk} \leq x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_3, \quad (28)$$

$$y_{ij}^{fk} + 1 \geq y_{jk}^C + y_{jk}^F + x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_3, \quad (29)$$

$$y_{ij}^{fk} \leq y_{jk}^C, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_1, \quad (30)$$

$$y_{ij}^{fk} \leq x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_1, \quad (31)$$

$$y_{ij}^{fk} + 1 \geq y_{jk}^C + x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_1, \quad (32)$$

$$y_{ij}^{fk} \leq y_{jk}^F, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_2, \quad (33)$$

$$y_{ij}^{fk} \leq x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_2, \quad (34)$$

$$y_{ij}^{fk} + 1 \geq y_{jk}^F + x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF_2, \quad (35)$$

式(27)-(35)是基于执勤概念对具有不同资格的飞行员建立的关联约束。式(27)-(29)指出具有替补资格的飞行员  $k$  在航班  $(i, j)$  上执行任务 (即  $y_{ij}^{fk} = 1$ ) 时满足变量间的相互关系。类似地, 式(30)-(32)(或式(33)-(35))指出只具有正(副)机长资格的飞行员  $k$  在航班  $(i, j)$  上执行任务时满足的变量相互关系。

#### B. 飞行时间约束

$$(v_{ik} + \lambda_j) y_{ij}^{fk} = v_{jk} y_{ij}^{fk}, \quad \forall j: (i, j) \in B_1 \cup B_e^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (36)$$

$$v_{jk} y_{ij}^{fk} = \lambda_j y_{ij}^{fk}, \quad \forall j : (i, j) \in B_2 \cup B_s^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (37)$$

$$0 \leq v_{ik} \leq \text{MaxBlk}, \quad \forall i \in L \cup \{0\}, \quad \forall k \in CF, \quad (38)$$

问题二提出每次执勤的飞行时间最多不超过  $\text{MaxBlk}$  分钟的要求。式(36)-(37)给出了每位飞行员每次执勤的飞行时长，式(38)保证了飞行时长不超过  $\text{MaxBlk}$  分钟。类似地，式(39)-(41)的建立保证了每次执勤的时长不超过  $\text{MaxDP}$  分钟，记为执勤时间约束。

### C. 执勤时间约束

$$\sum_{i:(i,j) \in B_1} (\phi_{ik} + t_j^a - t_i^a) x_{ij}^k = \phi_{jk} x_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \quad \forall k \in CF, \quad (39)$$

$$\phi_{jk} x_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall j : (i, j) \in B_2, \quad \forall k \in CF, \quad (40)$$

$$0 \leq \phi_{ik} \leq \text{MaxDP}, \quad \forall i \in L, \quad \forall k \in CF, \quad (41)$$

此外，对于问题二还需要增加以下两类辅助约束以便于明确表示目标函数。

### D. 累计执勤时长约束

$$(\phi_{ik} + (t_j^d - t_i^a)) x_{ij}^k = \phi_{jk} x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1, \quad \forall k \in CF, \quad (42)$$

$$\phi_{jk} x_{ij}^k = (\phi_{ik} + \lambda_j) x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_2 \cup B_s^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (43)$$

$$\phi_{0k} y_{j0}^k = \phi_{0k} x_{j0}^k, \quad \forall (j, 0) \in B_e^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (44)$$

$$\psi_k = \sum_j \phi_{0k} y_{j0}^k, \quad \forall (j, 0) \in B_e^{JD} \quad (45)$$

### E. 偏离度约束

$$-s_k \leq \psi_k - \frac{1}{|CF|} \sum_{k \in CF} \psi_k \leq s_k, \quad \forall k \in CF, \quad (46)$$

$$s_k \geq 0, \quad \forall k \in CF. \quad (47)$$

## 5.3. 模型有效性和复杂度分析

通过 5.2 节中各模块的介绍，给出非线性规划模型(NLP1):

$$\begin{aligned} & \min f_1 \\ & \min f_2 \\ & \min f_4 \\ \text{NLP1: } & \min f_5 \\ & \min f_7 \\ & \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11),} \\ & \quad (14) - (15), (22) - (47), \\ & \quad y_{ij}^{kf} \in \{0,1\}, \quad \forall k \in CF, \quad \forall (i, j) \in B. \end{aligned} \quad (48)$$

NLP1 是一个多目标优化模型，可以利用标量化技术寻找该问题的 Pareto-最优。具体地，将模型转化为

$$\begin{aligned}
& \min a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_4 f_4 + a_5 f_5 + a_7 f_7 \\
\text{NLP2:} \quad & \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11),} \\
& (14) - (15), (22) - (48).
\end{aligned}$$

虽然 NLP2 是一个单目标优化问题，但由于式(36)和式(39)是二次约束，使得该问题的求解十分困难。因此，我们可以采用 RLT 技术将二次约束进行线性化处理，即通过变量代换的方式将二次变量转化为一次变量，并引进相关等价性约束以保证问题的正确性。具体地，假设  $\alpha_{ij}^k = v_{ik} y_{ij}^{fk}$ ， $\bar{\alpha}_{ij}^k = v_{jk} y_{ij}^{fk}$ ， $\beta_{ij}^k = \phi_{ik} x_{ij}^k$ ， $\bar{\beta}_{ij}^k = \phi_{jk} x_{ij}^k$ ， $\eta_{ij}^k = \varphi_{ik} x_{ij}^k$ ， $\bar{\eta}_{ij}^k = \varphi_{jk} x_{ij}^k$ ，则飞行时间约束(36)-(38)等价于：

$$\alpha_{ij}^k + \lambda_j y_{ij}^{fk} = \bar{\alpha}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_e^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (49)$$

$$\bar{\alpha}_{ij}^k = \lambda_j y_{ij}^{fk}, \quad \forall (i, j) \in B_2 \cup B_s^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (50)$$

$$0 \leq \alpha_{ij}^k \leq \text{MaxBlk} \cdot y_{ij}^{fk}, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF, \quad (51)$$

$$0 \leq \bar{\alpha}_{ij}^k \leq \text{MaxBlk} \cdot y_{ij}^{fk}, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF, \quad (52)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in B} \bar{\alpha}_{ij}^k = \sum_{i:(j,i) \in B} \alpha_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \quad (53)$$

执勤时间约束(39)-(41)等价于：

$$\beta_{ij}^k + (t_j^a - t_i^a) x_{ij}^k = \bar{\beta}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1, \quad \forall k \in CF, \quad (54)$$

$$\bar{\beta}_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_2 \cup B_s^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (55)$$

$$\bar{\beta}_{j0}^k = \beta_{j0}^k, \quad \forall (j, 0) \in B_e^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (56)$$

$$0 \leq \beta_{ij}^k \leq \text{MaxDP} \cdot x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \quad \forall k \in CF, \quad (57)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in B} \bar{\beta}_{ij}^k = \sum_{i:(j,i) \in B} \beta_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \quad (58)$$

累计执勤时长约束(42)-(45)等价于：

$$\eta_{ij}^k + (t_j^a - t_i^a) x_{ij}^k = \bar{\eta}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1, \quad \forall k \in CF, \quad (59)$$

$$\bar{\eta}_{ij}^k = \eta_{ij}^k + \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_2 \cup B_s^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (60)$$

$$\bar{\eta}_{j0}^k = \eta_{j0}^k, \quad \forall (j, 0) \in B_e^{JD}, \quad \forall k \in CF, \quad (61)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in B} \bar{\eta}_{ij}^k = \sum_{i:(j,i) \in B} \eta_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \quad \forall k \in CF, \quad (62)$$

$$\psi_k = \sum_j \eta_{j0}^k, \quad \forall k \in CF. \quad (63)$$

根据上述线性化变量约束(49)-(63)，建立问题二的简洁模型：

$$\begin{aligned}
& \min a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_4 f_4 + a_5 f_5 + a_7 f_7 \\
\text{NLP3:} \quad & \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11), (14) - (15),} \\
& (22) - (35), (46) - (48), (49) - (63).
\end{aligned}$$

NLP3 模型中有 6 类整数变量和 35 类约束条件。通过数据处理易知航班对集合  $B$  中约有 6000 个元素，则所有整数变量的规模约 260000 个。式(27)-(35)中约束个数共有 378000 个，式(46)-(47)中约束个数共有 126042 个，式(49)-(63)中约束个数共有 760759 个，共计约

束个数：1025801 个。虽然 NLP3 是一个混合整数线性规划问题，但该模型仍具有规模大、运行时间长以及求解困难等缺点。在下一节数值分析中，我们提出一种简单高效的算法解决该问题。

#### 5.4. 算法设计

虽然 RLT 能将一些具有特定性质或结构的非线性问题等价转化为线性问题，这大大降低了问题的求解难度。但是，在转化的过程中也带来了大量的中间变量和约束，这导致转化后的线性问题的规模相比于原来的约束与变量数目急剧增长。

通过数值实验发现，直接调用 CPLEX 求解转化后的混合整数线性规划问题需耗费大量的时间，完整求解 A 套数据需要 2.8 个小时。测试发现，若不考虑飞行时间相关的约束，仅在 7 分钟内就能产生一解。我们可以验证该解是否满足飞行时间约束，若满足则可以作为 Pareto-最优解；否则，我们可以调整目标⑤的权重，从而间接影响解的飞行时间。上述操作的可行性是基于该目标是尽可能平衡执勤时长，降低了过高飞行时长的出现频率。具体算法流程可以见图\*。上述做法在不失可行性的同时，极大地降低计算用时。

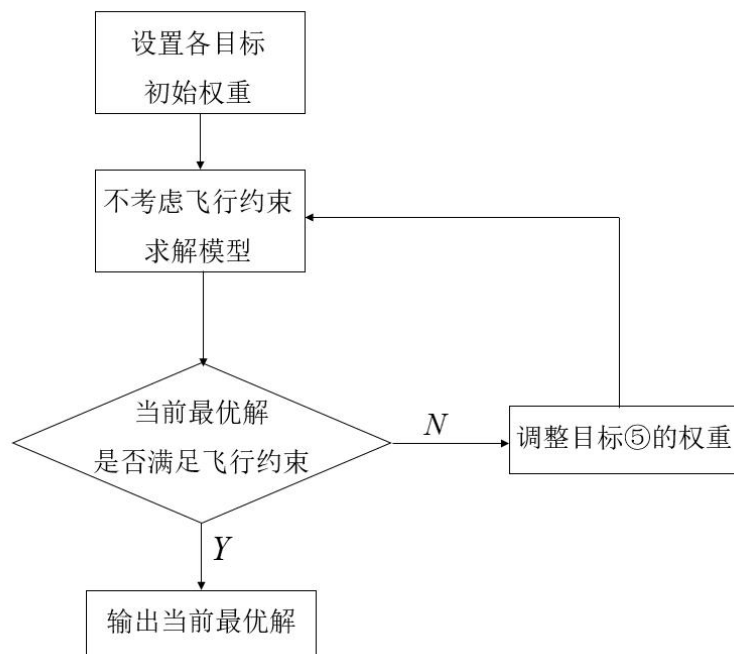


图4 “暂不考虑、求解、检验”策略的示意图

#### 5.5. 数值结果分析

针对 A 组数据的最终结果如表 7 所示，数据表明模型优先满足目标①，且可以找到满足所有航班配置的方案，同时各机组人员的执行时长与飞行时长偏差不大。此外，我们还做了关于目标①和目标⑤的权重比例的灵敏度分析，如图 5 所示。由图可知，随着目标①与目标⑤的权重比值的增大，不满足配置的航班数呈递减趋势。当权重比值超过 4000 时，所有航班都满足配置要求；而飞行员的飞行总时长不随权重比值的增加出现递增趋势。

表 8 问题二的 A 组数据最终结果

指标	结果
不满足机组配置航班数（个）	0
满足机组配置航班数（个）	206
机组人员总体乘机次数（个）	22
替补资格使用次数（个）	23
机组总体利用率	85.86%
最小/平均/最大 一次执勤飞行时长	0 / 2.33 / 5.58
最小/平均/最大 一次执勤执勤时长	1.08 / 2.72 / 8.6
最小/平均/最大 机组人员执勤天数	15 / 15 / 15
总体执勤成本（万元）	54.19
程序运行分钟数（分钟）	8.58

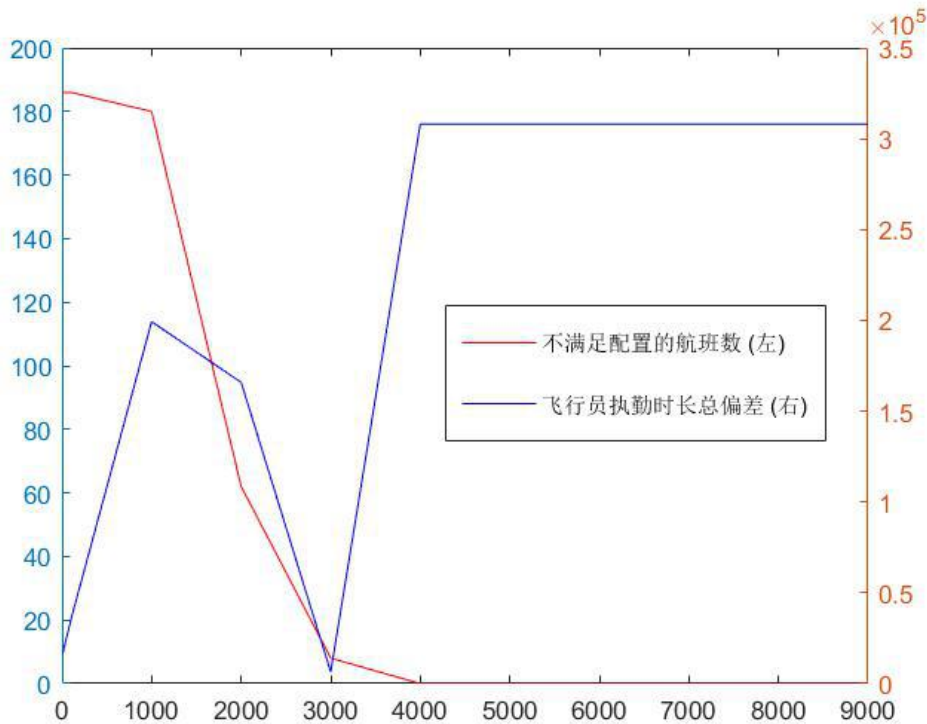


图 5 关于目标①和⑤权重比值的灵敏度分析

针对 B 组数据，在数值实验前期，受限于设备的储存和计算能力，CPLEX 在建立对应于 B 套数据的模型时出现了内存溢出的情况。为降低问题规模，我们采用分阶段处理的策略。首先，31 天的规划周期被划分为若干个小周期，在各个小周期内仅考虑在该周期起飞的航班。接着，调用 CPLEX 求解各个小周期对应的子问题一模型。由于小周期的数目将直接影响求解质量与计算时间：通常小周期数目越多，解的质量越差但总需要的计算时间越短。权衡了两者之间的关系，通过多次测试我们选择了以 3 天为小周期的划分方式。

表 9 问题二的 B 组数据最终结果

指标	结果
不满足机组配置航班数（个）	76
满足机组配置航班数（个）	13878
机组人员总体乘机次数（个）	14
替补资格使用次数（个）	27
机组总体利用率	76.86%
最小/平均/最大 一次执勤飞行时长	0.92/ 2.47 / 5.32
最小/平均/最大 一次执勤执勤时长	1.27 / 2.72 / 5.7
最小/平均/最大 机组人员执勤天数	12 / 14.4 / 16
总体执勤成本（万元）	89.24
程序运行分钟数（分钟）	17.29

## 6. 问题三分析与求解

### 6.1. 问题分析

在问题一和二的研究基础上，进一步增加了任务环时长、休假及连续执勤时间的要求，并考虑机组人员任务环成本。这些要求与问题二相类似，因此可以采用相同方法对其进行分析、建模和求解。

### 6.2. 问题求解

由于问题三中增加了任务环的考虑，每位飞行员顺序执行的两个航班任务可以分为四大类：1、两个航班任务在同一个执勤任务内；2、两个航班任务在两个相邻的执勤任务内，且这两个执勤任务构成了连续执勤（显然，此时两个航班任务在同一个任务环内）；3、两个航班任务在同一个任务环内，但没有构成连续执勤；4、两个航班任务在两个相邻的任务环内。根据上述分类，可以计算不同类别的每个飞行员的任务环工作时长和连续执勤天数。

#### (1) 数据处理

- 航班连接约束集合  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  和  $B_4$ 。根据上述分析知，航班对至少可以分为四类。与问题一（或问题二）中集合  $B$ （或  $B_1$ 、 $B_2$ ）处理相类似，我们需要对连接约束分别进行数据筛选处理以寻找满足某些特定连接条件的航班对，以此来构造航班对集合  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  和  $B_4$ ，其中  $B_4$  还包含两个子集  $B_5$  和  $B_6$ 。与问题一和二不同，在构造这些集合时，需要额外考虑每个航班起飞日历日信息  $t_{iR}^d$  和降落日历日信息  $t_{iR}^a$ 。具体地，根据这些信息给出构造航班对集合的充分必要条件：

① 航班对  $(i, j) \in B_1$  当且仅当下述条件成立：

- 1)  $t_i^d - t_i^a \geq \min CT$ ,
- 2)  $A_i^d = A_i^a$ ,
- 3)  $\lambda_i + \lambda_j \leq \text{MaxBlk}$ ,
- 4)  $t_i^d - t_i^a \leq \text{MaxDP}$ ,
- 5) 航班  $i$  与航班  $j$  在同一天起飞；

② 航班对  $(i, j) \in B_2$  当下述条件成立：

- 6)  $t_j^a - t_i^d \geq \text{MinRest}$ ,
- 7)  $A_i^d = A_j^a$ ,
- 8)  $t_{jR}^d - t_{iR}^d = 1$ ;

③ 航班对  $(i, j) \in B_3$  当下述条件成立：

- 9)  $A_i^d = A_j^a$ ,
- 10)  $t_{jR}^d - t_{iR}^a \geq 3$ ;

④ 航班对  $(i, j) \in B_5$  当下述条件成立：

- 11)  $A_i^d = A_j^a = A^{JD}$ ,
- 12)  $t_{jR}^d - t_{iR}^a \leq 2$ ,

$$13) t_{jR}^d - t_{iR}^d \geq 2;$$

⑤ 航班对  $(i, j) \in B_6$  当下述条件成立:

$$14) A_i^d = A_j^a \neq A^{JD},$$

$$15) t_{jR}^d - t_{iR}^d \geq 2.$$

- 航班连接约束集合  $B_s^{JD}$ 、 $B_e^{JD}$ 、 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_s^{JD} \cup B_e^{JD}$  和  $B_4 = B_5 \cup B_6$  的构造方法同问题一，不再赘述。

## (2) 建立优化模型

问题三引进任务环概念，相应的模型需要引进新的变量并给出不违反飞行规则的关联约束。

➤ 首先，我们考虑**六类新增变量**：

$u_{ik}$ ：连续变量。飞行员  $k$  执行航班  $i$  后当个任务环时长；

$d_{ik}$ ：连续变量。飞行员  $k$  执行航班  $i$  后当个任务环连续执勤天数；

$\mu_{ik}$ ：连续变量。飞行员  $k$  执行航班  $i$  后任务环时长；

$T_k^P$ ：连续变量。飞行员  $k$  任务环总时长；

$m_k$ ：连续变量。飞行员  $k$  任务环总时长偏离度。

➤ 其次，根据问题三的要求给出**七个目标函数**：

**第一目标**：①所有航班不满足机组配置的总和：

$$f_1 = \sum_{i \in L} z_i,$$

**第二目标**：②机组人员的总体执勤成本：

$$f_2 = \sum_{k \in CF} c_k \psi_k,$$

**第三目标**：③机组人员的总体任务环成本最低：

$$f_3 = \sum_{k \in CF} c_k^P T_k^P,$$

**第四目标**：④所有执行乘机任务的机组人员的总乘机次数：

$$f_4 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF} y_{ik}^{DH},$$

**第五目标**：⑤机组人员之间的执勤时长偏离度：

$$f_5 = \sum_{k \in CF} s_k,$$

其中  $s_k$  是飞行员  $k$  的执勤时长偏离度。

**第六目标**：⑥机组人员之间的任务环时长尽可能平衡：

$$f_6 = \sum_{k \in CF} m_k,$$

**第七目标**：⑦具有替补资格的机组人员作为副机长执行飞行任务的总和：

$$f_7 = \sum_{i \in L} \sum_{k \in CF_3} y_{ik}^F.$$

➤ 然后，根据问题三的要求考虑下面**四类新增约束**：

### A. 连续执勤天数约束



$$(d_{ik} + 1)x_{ij}^k = d_{jk}x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_2, \forall k \in CF, \quad (64)$$

$$d_{ik}x_{ij}^k = d_{jk}x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (65)$$

$$d_{jk}x_{ij}^k = x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3 \cup B_4 \cup B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (66)$$

$$0 \leq d_{jk} \leq \text{MaxSuccOn}, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF. \quad (67)$$

式(64)-(66)是计算执行各航班任务后飞行员的连续执勤天数。式(64)说明当飞行员连续执勤时，连续执勤数加 1；式(65)指出飞行员在同一执勤期内执行航班不影响连续执勤数；式(66)保证了飞行员在休息后第一次执行航班任务后连续执勤数为 1；式(67)限制连续执勤的区间。

### B. 任务环时长约束

$$(u_{ik} + t_j^a - t_i^a)x_{ij}^k = u_{jk}x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_2 \cup B_4 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (68)$$

$$u_{jk}x_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3 \cup B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (69)$$

$$0 \leq u_{jk} \leq \text{MaxTAFB}, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF. \quad (70)$$

问题三要求每次执勤的飞行时间最多不超过 MaxTAFB 分钟。式(68)-(69)给出了每位飞行员每次任务环的工作时长，式(70)保证了任务环时长不超过 MaxTAFB 分钟。

### C. 累计任务环时长约束

$$(\mu_{ik} + t_j^a - t_i^a)x_{ij}^k = \mu_{jk}x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_2 \cup B_4 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (71)$$

$$\mu_{jk}x_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (72)$$

$$\mu_{jk}x_{ij}^k = (\mu_{ik} + \lambda_j)x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3, \forall k \in CF, \quad (73)$$

$$T_k^P = \sum_{j:(j,0) \in B_e^{JD}} u_{jk}x_{j0}^k, \quad \forall k \in CF. \quad (74)$$

式(71)-(74)计算出每位飞行员的累计任务环时长，根据这些约束可以简单、快捷的生成目标③。

### D. 任务环时长偏离度约束

$$-m_k \leq T_k^P - \frac{1}{|CF|} \sum_{k \in CF} T_k^P \leq m_k, \quad \forall k \in CF, \quad (75)$$

$$m_k \geq 0, \quad \forall k \in CF. \quad (76)$$

式(75)-(76)给出所有飞行员任务环时长偏离度的一种定义，其中  $m_k$  越大，说明偏离度越大，分配的任务环越不均衡，据此可以生成目标⑥。

## 6.3. 模型有效性和复杂度分析

根据上节内容，我们可以给出关于问题三的优化模型(NLP4):

$$\begin{aligned}
& \min f_1 \\
& \min f_2 \\
& \min f_3 \\
& \min f_4 \\
\text{NLP4: } & \min f_5 \\
& \min f_6 \\
& \min f_7 \\
& \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11), (14) - (15),} \\
& \quad (22) - (35), (46) - (48), (49) - (76).
\end{aligned}$$

NLP4 是一个多目标优化模型，可以利用标量化技术寻找该问题的 Pareto-最优。具体地，将模型转化为

$$\begin{aligned}
& \min a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 + a_5 f_5 + a_6 f_6 + a_7 f_7 \\
\text{NLP5: } & \text{s.t. (1) - (3), (6) - (7), (10) - (11), (14) - (15),} \\
& \quad (22) - (35), (46) - (48), (49) - (76).
\end{aligned}$$

虽然 NLP5 是一个单目标优化问题，但由于多个约束是二次约束，使得该问题的求解十分困难。因此，我们可以采用 RLT 技术将二次约束进行线性化处理，即通过变量代换的方式将二次变量转化为一次变量，并引进相关等价性约束以保证问题的正确性。具体地，引入  $\gamma_{ij}^k = d_{ik} x_{ij}^k$ ,  $\bar{\gamma}_{ij}^k = d_{jk} x_{ij}^k$ ,  $\pi_{ij}^k = u_{ik} x_{ij}^k$ ,  $\bar{\pi}_{ij}^k = u_{jk} x_{ij}^k$ ,  $\xi_{ij}^k = \mu_{ik} x_{ij}^k$ ,  $\bar{\xi}_{ij}^k = \mu_{jk} x_{ij}^k$ , 则连续执勤天数约束(64)-(67)等价于：

$$\gamma_{ij}^k + x_{ij}^k = \bar{\gamma}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_2, \forall k \in CF, \quad (77)$$

$$\gamma_{ij}^k = \bar{\gamma}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (78)$$

$$\bar{\gamma}_{ij}^k = x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3 \cup B_4 \cup B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (79)$$

$$0 \leq \gamma_{ij}^k \leq \text{MaxSuccOn} \cdot x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \forall k \in CF, \quad (80)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in B} \gamma_{ij}^k = \sum_{i:(i,j) \in B} \bar{\gamma}_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF, \quad (81)$$

任务环时长约束(68)-(70)等价于：

$$\pi_{ij}^k + (t_j^a - t_i^a) x_{ij}^k = \bar{\pi}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_2 \cup B_4 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (82)$$

$$\bar{\pi}_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3 \cup B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (83)$$

$$\pi_{ij}^k \leq \text{MaxTAFB} \cdot x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B, \forall k \in CF, \quad (84)$$

$$\sum_{i:(j,i) \in B} \pi_{ij}^k = \sum_{i:(i,j) \in B} \bar{\pi}_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF, \quad (85)$$

累计任务环时长约束(71)-(74)等价于：

$$\xi_{ij}^k + (t_j^a - t_i^a) x_{ij}^k = \bar{\xi}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_1 \cup B_2 \cup B_4 \cup B_e^{JD}, \forall k \in CF, \quad (86)$$

$$\bar{\xi}_{ij}^k = \lambda_j x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_s^{JD}, \forall k \in CF, \quad (87)$$

$$\xi_{ij}^k + \lambda_j x_{ij}^k = \bar{\xi}_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in B_3, \forall k \in CF, \quad (88)$$

$$\sum_{i:(i,j) \in B} \xi_{ij}^k = \sum_{i:(j,i) \in B} \bar{\xi}_{ij}^k, \quad \forall j \in L, \forall k \in CF, \quad (89)$$

$$T_k^P = \sum_{j:(j,0) \in B_e^{JD}} \xi_{j0}^k, \quad \forall k \in CF, \quad (90)$$

根据上述线性化变量约束(49)-(63)，建立问题三的简洁模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_4 f_4 + a_5 f_5 + a_7 f_7 \\ \text{s.t.} \quad & (1)-(3), (6)-(7), (10)-(11), (14)-(15), \\ & (22)-(35), (46)-(48), (49)-(63), (75)-(90). \end{aligned}$$

**NLP6:**

NLP6 模型中有 6 类整数变量和 40 余类约束条件。通过数据处理易知航班对集合  $B$  中约有 6000 个元素，则所有整数变量的规模约 26 万个，约束个数约 165 万个。虽然 NLP6 是一个混合整数线性规划问题，但该模型仍具有规模大、运行时间长以及求解困难等缺点。在下一节数值分析中，我们提出一种简单高效的算法解决该问题。

**表 10 问题三的 A 组数据最终结果**

指标	结果
不满足机组配置航班数（个）	4
满足机组配置航班数（个）	202
机组人员总体乘机次数（个）	1
替补资格使用次数（个）	15
机组总体利用率	76.54%
最小/平均/最大 一次执勤飞行时长	0.34 / 2.2 / 5.42
最小/平均/最大 一次执勤执勤时长	2.7 / 3.89 / 7.12
最小/平均/最大 机组人员执勤天数	12/ 13.4 / 17
一/二/三/四天 任务环数量分布	7/11/13/6
总体执勤成本（万元）	49.27
总体任务环成本（万元）	28.73
程序运行分钟数（分钟）	15.53

**表 11 问题三的 B 组数据最终结果**

指标	结果
不满足机组配置航班数（个）	152
满足机组配置航班数（个）	13802
机组人员总体乘机次数（个）	17
替补资格使用次数（个）	22
机组总体利用率	89.54%
最小/平均/最大 一次执勤飞行时长	0.34 / 2.2 / 5.42
最小/平均/最大 一次执勤执勤时长	2.6 / 3.10 / 8.12
最小/平均/最大 机组人员执勤天数	13/ 13.4 / 18
一/二/三/四天 任务环数量分布	6/10/13/8
总体执勤成本（万元）	49.27
总体任务环成本（万元）	28.73
程序运行分钟数（分钟）	24.53

## 7. 模型评价

### 7.1. 模型优点

1. 通过文献调研以及对赛题认真分析，本文建立一个多目标优化模型。相较于一般的单目标模型，该模型能够通过对标量化乘子的调整，更灵活得体现多个优化目标的优先级。同时，根据不同乘子相对应的最优值可以生成前沿面，能够更好的指导航空公司运营策略以获得更大的利益；

2. 通过对数据的提前处理生成可行的航班对集合能够有效的降低问题规模。在没有提前处理数据的情况下，问题求解时可能会遍历所有的航班对，这是一个相当庞大的数字，经常会拖慢问题求解的速度甚至可能导致问题无解；

3. 对建立的模型再次分析以减少冗余约束/变量是一件很重要的事情。在模型建立过程中，为了保证没有遗漏需要的约束，某些约束可能会从不同的角度重复描述导致问题规模大幅度增加。这种情况会导致问题求解难度增大甚至使问题无解，而对模型的再次分析能够很好的规避这种情况；

4. 问题的规模比较大时，可以适当选取一些启发式算法加速问题的求解。

### 7.2. 模型缺点

1. 在某些情况下，模型的规模会随着航班数量的增加而迅速增大，因此对于大规模规划模型的求解比较困难；

2. 本文建立模型时将所有可以休假的机会都统一认为休假，这与实际不太相符。

### 7.3. 展望

本文的模型中没有考虑航空公司运营过程遭遇突发事件（如恶劣天气导致飞行员不能到达），后续研究中可以考虑加入运营恢复的情况。

## 8 参考文献

- [1] 朱金福等, 航空运输规划, 西安: 西北工业大学出版社, 456-460, 2009.
- [2] Cordeau J F, Stojkovic G, Soumis F, Benders decomposition for simultaneous aircraft routing and crew scheduling. *Transportation Science*, 35(4):375-388, 2001.
- [3] Sergey Shebalov, Diego Klabjan, Robust airline crew pairing: move-up crews, *Transportation Science*, 40(3):300-312, 2006.
- [4] Yildiz B C, Gzara F, Elhedhli S, Airline crew pairing with fatigue: Modeling and analysis, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 74:99-112, 2017.
- [5] Gamache M, Soumis F, Desrosiers M J, A column generation approach for large-scale aircrew rostering problems, *Operations Research*, 47(2):247-263, 1999.
- [6] Yunes T H, Moura A V, Souza C, Hybrid column generation approaches for urban transit crew management problems. *Transportation Science*, 39(2):273-288, 2005.
- [7] Chen S, Shen Y, An improved column generation algorithm for crew scheduling problems. *Journal of Information and Computational Science*, 10(1):175-183, 2013.
- [8] Beasley J E, A dynamic programming based algorithm for the crew scheduling problem, *Computers and Operations Research*, 25(7-8):567-582, 1998.
- [9] Zeren B, Ozkol I, A novel column generation strategy for large scale airline crew pairing problems, *Expert Systems with Applications*, 55:133-144, 2016.
- [10] Schaefer A J, Johnson E L, Kleywegt A J, Nemhauser G L, Airline crew scheduling under uncertainty, *Transportation Science*, 39(3):340-348, 2005.
- [11] Marsten R E, Shepardson F, Exact solution of crew scheduling problems using the set partitioning model: Recent successful applications, *Networks*, 11(2):165-177, 1981.
- [12] Fisher M L, Kedia P, Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics, *Management Science* 36(6): 674-688, 1990.
- [13] Mingozzi A, Boschetti M A, Bianco S R, A set partitioning approach to the crew scheduling problem[J]. *Operations Research*, 47(6):873-888, 1999.
- [14] Barnhart C, Boland N L, Clarke L W, et al., Flight string models for aircraft fleet and routing, *Transportation Science*, 32(3):208-220, 1998.
- [15] Kasirzadeh A, Saddoune M, Sounds F, Airline crew scheduling: models, algorithms, and data sets. *Euro Journal on Transportation and Logistics*, 6(2):111-137, 2017.
- [16] Boland N, Dethridge J, Dumitrescu I, Accelerated label setting algorithms for the elementary resource constrained shortest path problem, *Operations Research Letters*, 34(1):58-68, 2006.
- [17] Mercier A, Cordeau J F, Soumis F, A computational study of Benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem, *Computers and Operations Research*, 32(6):1451-1476, 2005.
- [18] Listes O, Dekker R, A scenario aggregation based approach for determining a robust airline fleet composition, *Transportation Science*, 39(3):367-382, 2005.
- [19] Wen X, Sun X, Sun Y, et al., Airline crew scheduling: Models and algorithms, *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 149(2):102-301, 2021.
- [20] Boyd S, Vandenberghe L, *Convex Optimization*, New York: Cambridge University Press, 45-58, 2004.
- [21] Sherali H D, Tuncbilek C H, A reformulation-convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems. *Journal of Global Optimization*, 7(1):1-31, 1995.