Relatorio Projeto Computacional MAP-5729

Gustavo David Quintero Alvarez, Nº USP: 11350395
Universidade de São Paulo - USP
São Paulo - SP, 23/06/2019

Introdução - Método de Rayleigh-Ritz

Consideremos a seguinte equação diferencial:

$$L(u(x)) := (-k(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) = f(x),\ \forall x \in (0,1),\ u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

onde $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, $k \in C^1[0,1]$ e $q,\ f \in C[0,1]$. O objetivo deste projeto é resolver a equação diferencial dada em (1). Seja V_0 o conjunto de todas as funções $v \in C^2[0,1]$ tais que $v(0) = (1) = 0$. Dada uma solução do problema (1) e $v(x) \in V_0$, é fácil ver que

$$\int_0^1 L(u(x))v(x) = \int_0^1 f(x)v(x).$$

Aplicando integração por partes temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(u(x))v(x) &= -\int_0^1 (k(x)\,u'(x))'v(x) + \int_0^1 q(x)\,u(x)\,v(x) \\ &= \int_0^1 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,u(x)\,v(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^1 (k(x)\,u'(x)\,v'(x) + q(x)\,u(x)\,v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x) \tag{2}$$

Agora, se $u(x) \in V_0$ é uma função satisfazendo a relação anterior, então $u(x)$ é solução do problema (1). Assim, as formulações (1) e (2) são equivalentes. O Método de Rayleigh-Ritz consiste em escolher, dentre todas as funções suficientemente diferenciáveis que satisfazem as condições de fronteira dadas em (1), aquelas que minimizem uma determinada integral. A unicidade da caracterização feita entre as formulações (1) e (2), é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 1. *Sejam $k \in C^1[0,1]$ e $q,\ f \in C[0,1]$ tais que $k(x) > 0$ e $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Uma função $u(x) \in V_0$ é a solução única da equação diferencial*

$$(-k(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) = f(x) \tag{3}$$

se, e somnte se, é a solução única que minimza a integral

$$I(v) = \int_0^1 \left[k(x)(v'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 - 2f(x)\,v(x)\right] dx, \tag{4}$$

onde $v(x) \in V_0$.

Demonstração. Vide Burdem $\square$

Na prova do Teorema anterior, mostra-se que qualquer solução $u(x)$ de (4), também satisfaz a equação (2). Minimizando a integral I, o Método de Rayleigh-Ritz encontra uma aproximação para a solução $u(x)$ do problema em questão sobre um subconjunto de V_0, formado por combinações lineares de certas funções básicas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ linearmente independentes, e satisfazendo $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Sejam $c_1, \ldots, c_n$ tais que $v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)$, então de (4), temos que

$$\begin{aligned} I(v) &= I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right] \\ &= \int_0^1 \left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right] dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Derivando a equação anterior em relação a c_j para cada $j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_j} &= \frac{\partial}{\partial c_j}\int_0^1 \left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial c_j}\left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i(x)\right] dx \\ &= \int_0^1 \left(2\,k(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + 2\,q(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\, \phi_j(x) - 2\,f(x)\, \phi_j(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Logo, como o objetivo é minimizar I, devemos ter, necessáriamente, $\dfrac{\partial I}{\partial c_j} = 0$. Portanto da equação (6), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(k(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + q(x)\sum_{i=1}^{n} c_i \, \phi_i'(x)\, \phi_j(x) - f(x)\, \phi_j(x)\right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (k(x)\, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + q(x)\, \phi_i(x)\, \phi_j(x))dx\right) c_i - \int_0^1 f(x)\, \phi_j(x)\, dx \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (k(x)\, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + q(x)\, \phi_i(x)\, \phi_j(x))dx\right) c_i = \int_0^1 f(x)\, \phi_j(x)\, dx \end{aligned} \tag{7}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Da relação (7) obtemos um sistema linear $A\,c = b$