Relatorio Projeto Computacional MAP-5729

Gustavo David Quintero Alvarez, Nº USP: 11350395
Universidade de São Paulo - USP
São Paulo - SP, 24/06/2019

Introdução - Método de Rayleigh-Ritz

Consideremos a seguinte equação diferencial:

$$L(u(x)) := (-k(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) = f(x),\ \forall x \in (0,1),\ u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

onde $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, $k \in C^1[0,1]$ e q, $f \in C[0,1]$. O objetivo deste projeto é resolver a equação diferencial dada em (1). Seja V_0 o conjunto de todas as funções $v \in C^2[0,1]$ tais que $v(0) = (1) = 0$. Dada uma solução do problema (1) e $v(x) \in V_0$, é fácil ver que

$$\int_0^1 L(u(x))v(x) = \int_0^1 f(x)v(x).$$

Aplicando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 L(u(x))v(x) &= -\int_0^1 (k(x)\,u'(x))'v(x) + \int_0^1 q(x)\,u(x)\,v(x)\\ &= \int_0^1 k(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,u(x)\,v(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^1 (k(x)\,u'(x)\,v'(x) + q(x)\,u(x)\,v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x) \tag{2}$$

Agora, se $u(x) \in V_0$ é uma função satisfazendo a relação anterior, então $u(x)$ é solução do problema (1). Assim, as formulações (1) e (2) são equivalentes. O Método de Rayleigh-Ritz consiste em escolher, dentro de todas as funções suficientemente diferenciáveis que satisfazem as condições de fronteira dadas em (1), aquelas que minimizem uma determinada integral. A unicidade da caracterização feita entre as formulações (1) e (2), é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 1. *Sejam $k \in C^1[0,1]$ e q, $f \in C[0,1]$ tais que $k(x) > 0$ e $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Uma função $u(x) \in V_0$ é a solução única da equação diferencial*

$$(-k(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) = f(x) \tag{3}$$

se, e somnte se, é a solução única que minimza a integral

$$I[v] = \int_0^1 \left[k(x)(v'(x))^2 + q(x)(u(x))^2 - 2f(x)\,v(x)\right] dx, \tag{4}$$

onde $v(x) \in V_0$.

Demonstração. Vide Schultz (1973). □

Na prova do Teorema anterior, mostra-se que qualquer solução $u(x)$ de (4), também satisfaz a equação (2). Minimizando a integral I, o Método de Rayleigh-Ritz encontra uma aproximação para a solução $u(x)$ do problema em questão sobre um subconjunto U_n do conjunto de funções contínuas, continuamente diferenciáveis por partes, formado por combinações lineares de certas funções básicas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ linearmente independentes, e satisfazendo $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Sejam $c_1, \ldots, c_n$ tais que $v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)$, então de (4), tem-se que

$$\begin{aligned} I[v] &= I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right] \\ &= \int_0^1 \left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right] dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Derivando a equação anterior em relação a c_j para cada $j = 1, \ldots, n$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_j} &= \frac{\partial}{\partial c_j}\int_0^1 \left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial c_j}\left[k(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\right)^2 q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right)^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i(x)\right] dx \\ &= \int_0^1 \left(2\,k(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + 2\,q(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\, \phi_j(x) - 2\,f(x)\,\phi_j(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Logo, como o objetivo é minimizar I, deve-se ter, necessariamente, $\dfrac{\partial I}{\partial c_j} = 0$. Portanto da equação (6), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(k(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + q(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\, \phi_i'(x)\, \phi_j(x) - f(x)\,\phi_j(x)\right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (k(x)\,\phi_i'(x)\,\phi_j'(x) + q(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x))dx\right) c_i - \int_0^1 f(x)\,\phi_j(x)\,dx \\ \Longrightarrow & \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 (k(x)\,\phi_i'(x)\,\phi_j'(x) + q(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x))dx\right) c_i = \int_0^1 f(x)\,\phi_j(x)\,dx \end{aligned} \tag{7}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Com as equações descritas em (7), obtêm-se um sistema linear $A\,\mathbf{c} = \mathbf{b}$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica dada por

$$A(i,j) = \int_0^1 (k(x)\,\phi_i'(x)\,\phi_j'(x) + q(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x))dx, \quad i,\, j = 1, \ldots, n,$$

$\mathbf{c}^T = (c_1, \ldots, c_n)$ e $\mathbf{b}$ é definido por

$$\mathbf{b_i} = \int_0^1 f(x)\,\phi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Note que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_L = \displaystyle\int_0^1 (k(x)\,\phi_i'(x)\,\phi_j'(x) + q(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x))dx,\ i,\ j = 1,\ldots,n$, define um novo produto interno no espaço das funções contínuas, continuamente diferenciáveis.Assim, o problema de minimizar a integral I é equivalente a resolver um problema quadrados mínimos, e o sistema $A\,\mathbf{c} = \mathbf{b}$ pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_L & \cdots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_L \\ \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle_L & \cdots & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_1, \phi_n \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_n \rangle_L & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,\, \phi_1 \rangle \\ \langle f,\, \phi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f,\, \phi_n \rangle \end{bmatrix}, \tag{8}$$

em que, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual das funções contínuas.

Base de B-Splines

Neste trabalho, foi escolhido o conjunto U_n como sendo o espaço de Splines Lineares e Cúbicos que, na forma geral, são definidos a seguir:

Definição 1. *Dados $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, o espaço de Splines de ordem m e n nós no intervalo $[a, b]$ é dado por $\mathcal{S}_{m,n} = \{s \in C^{m-2}[a, b] \,:\, s\,|_{[x_i,\,x_{i+1}]} = P_i \in \mathcal{P}_{m-1}\}$. Uma base para o espaço $\mathcal{S}_{m,n}$, é dada pelas funções $\{1,\ x,\ x^2, \ldots, x^{m-1},\ (x-x_1)_+^{m-1}, \ldots, (x-x_k)_+^{m-1}\}$, em que*

$$(x - x_i)_+^n = \begin{cases} (x - x_1)^n, & x \geq x_i \\ 0,\ x < x_i \end{cases}.$$

Tal base é chamada de base unilateral.

Note que a dimensão da base unilateral é $m + n$. Assim, o espaço de Splines Lineares $\mathcal{S}_{2,n}^0[0, 1]$ e Splines Cúbicos $\mathcal{S}_{4,n}^0[0, 1]$ com nós uniformemente espaçados, impondo a restrição que se anulem nos extremos do intervalo $[0, 1]$, terão, respectivamente, dimensões n e $n + 2$. Tomando $h = 1/(n + 1)$ e $x_i = i\,h$, para $i = 0, 1, \ldots, n + 1$, tem-se

$$\mathcal{S}_{2,n}^0[0, 1] = \{s \in C[0, 1] \,:\, s(0) = s(1) = 0, \text{ e } s\,|_{[x_i,\,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1\},$$

e

$$\mathcal{S}_{4,n}^0[0, 1] = \{s \in C^2[0, 1] \,:\, s(0) = s(1) = 0, \text{ e } s\,|_{[x_i,\,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3\}.$$

Com o objetivo de tornar esparso o sistema linear (8), considera-se elementos básicos formados por B-Splines, os quais possuem suporte pequeno. Para definir a base de B-Splines, considera-se uma partição estendida (veja Schumaker (2007))

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_m < y_{m+1} < \cdots < y_{m+k} < y_{m+k+1} < \cdots < y_{2m+k}$$

de modo que $y_{i+m} = x_i$ para cada $i = 0, 1, \ldots, k + 1$. Assim, se define

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_i^m(x) = \dfrac{(x - y_i)\mathcal{Q}_i^{m-1}(x) + (y_{i+m} - x)\mathcal{Q}_{i+1}^{m-1}(x)}{y_{i+m} - y_i}, \quad y_i < x < y_{i+m} \\ \\ \mathcal{Q}_i^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{y_{i+1} - y_i}, & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0, & \text{Caso Contrário} \end{cases} \end{cases}. \tag{9}$$

Logo, a base de B-Splines é dada por $\mathcal{B}_i^m(x) = (y_{i+m} - y_i)\mathcal{Q}_i^m(x)$, para cada $i = 0, 1, \ldots, k + 1$.

Metodologia

A seguir, apresenta-se a metodologia utilizada para a resolução do problema (1). Como já foi mencionado, a matriz do sistema linear (8) será esparsa devido ao uso da base dos B-Splines. Note que a interseção entre os interiores dos suportes de dois elementos básicos ϕ_i e ϕ_j será não vazia sempre que $|i-j| \leq m-1$ ($|i-j| \leq 3$ no caso de splines cúbicos e $|i-j| \leq 1$ no caso de splines lineares), e portanto $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ se $|i-j| > m-1$. Assim, a matriz dos sistema linear (8) será uma matriz de banda com $2m-1$ diagonais (ou seja, tridiagonal no caso linear e heptadiagonal no caso cubico). Para a resolução do sistema linear (8), considera-se o Método de Eliminação Gaussiana sem pivotamento (devido a que a matriz do sistema é estritamente diagonal dominante). Além disso, como essa matriz é uma matriz esparsa de banda, a Eliminação Gaussiana foi aplicada a uma matriz auxiliar que contém apenas as diagonais que conformam a banda da matriz, a fim de diminuir a quantidade de memória usada.

O segundo passo para o desenvolvimento deste projeto foi a construção da base de B-Splines com nós uniformemente espaçados no intervalo $[0,1]$. Após a construção da base se estabeleceram as condições de contorno do problema como segue: Para $m=2$ (caso de splines lineares) sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+2}$ os elementos básicos. Então para que as condições de fronteira sejam satisfeitas descarta-se o primeiro e último elemento básico, obtendo-se assim uma nova base de B-Splines Lineares $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ conforme o ilustra a Figura 14

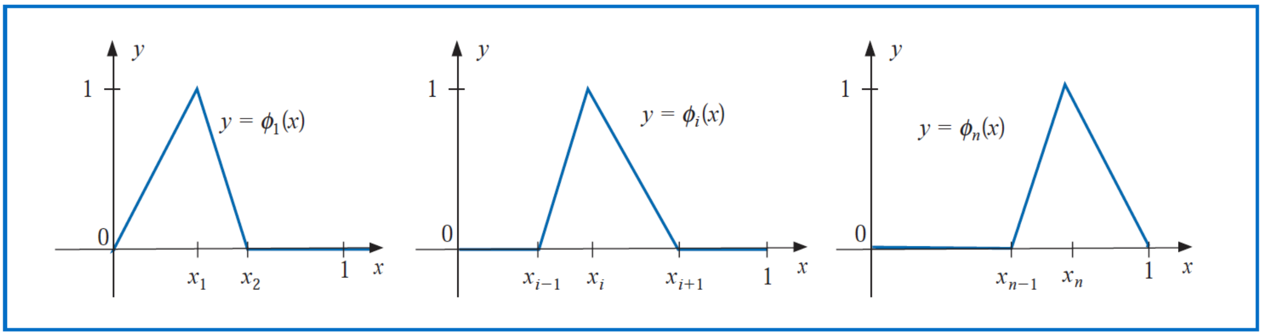


Figura 1: Retirada de Burden (2016)

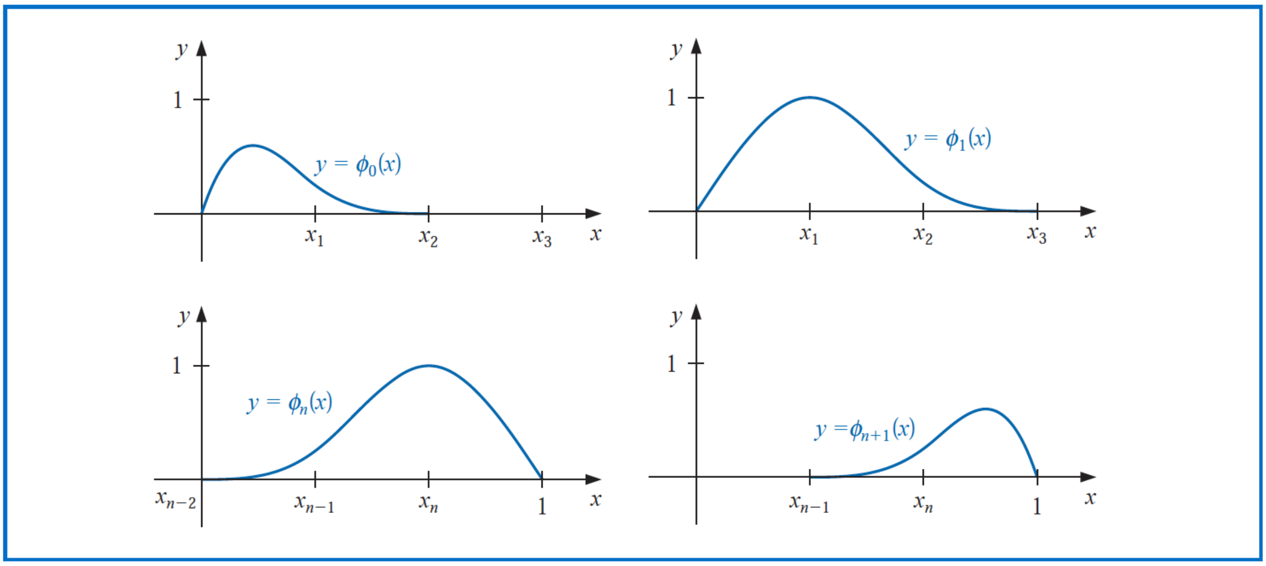


Figura 2: Retirada de Burden (2016)

Para o caso em que $m = 4$ (splines cúbicos), dados os elementos básicos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+4}$, descartam-se os primeiros três B-Splines e os três últimos B-Splines e, a partir deles são construídos 4 novos elementos básicos através das combinações $\phi_2(x) - 4\,\phi_1(x)$, $\phi_3(x) - \phi_1(x)$ e $\phi_{n-1}(x) - 4\,\phi_{n+4}(x)$, $\phi_{n-2}(x) - \phi_{n+4}(x)$. Assim, obtêm-se novos elementos básicos $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n+1}$ conforme o mostra a Figura 2.

Tendo em mãos a base de splines, procede-se à montagem do sistema linear dado em (8). Para tanto, foram necessárias algumas rotinas para a avaliação das integrais dadas pelos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Essas e outra rotinas usadas no desenvolvimento deste trabalho são apresentadas na seguinte Seção.

Rotinas Utilizadas

Nesta Seção são mostradas as rotinas (Subrotinas e Funções) usadas para a resolução do problema proposto. Todas elas foram implementadas na linguagem de programação Fortran 95 com compilador GFortran na versão 6.3.0.

- **GaussBanda:** Esta função tem como objetivo resolver um sistema linear onde a matriz de coeficientes é uma matriz de banda. Os parâmetros de entrada são a matriz de banda, o vetor independente e o número de diagonais da matriz. Esta função retorna um vetor com a solução do sistema linear.

- **Horner:** O algoritmo de Horner é utilizado para a avaliação de polinômios e suas respectivas derivadas. Esta função recebe um polinômio em forma de vetor. Por exemplo, se o polinômio for $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, então o vetor fornecido é $[a_0 \;\; a_1 \;\; \cdots \;\; a_n]$. Também tem como parâmetro de entrada o ponto donde se deseja avaliar o polinômio (ou uma determinada derivada) e a ordem da derivada (se a ordem for 0 apenas se deseja conhecer o valor do polinômio no ponto dado). Esta função retorna o valor avaliado.

- **Fatorial:** Esta função, como seu nome o indica, calcula o fatorial de um número natural dado.

- **Norma:** Recebe como parâmetros de entrada dois vetores u e v, e calcula a norma deles, dada por: $\|u - v\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |u(i) - v(i)|$, em que n é a dimensão dos vetores u e v.

- **ProdPoli:** Esta rotina recebe dois polinômios em forma de vetor (conforme foi indicado em Horner) e faz o produto deles.

- **SomPoli:** Como no caso anterior recebe dois polinômios e retorna a soma deles.

- **Translacao:** Esta função recebe como parâmetro de entrada um polinômio e um valor real a e retorna o polinômio transladado a unidades para a direita (caso $a > 0$) ou a unidades para a esquerda (caso $a < 0$). Esta rotina desempenha uns dos papeis mais importante no desenvolvimento do projeto, pois uma vez construído o primeiro B-Spline, os demais elementos são obtidos por translação dele, devido a que o nós estão uniformemente espaçados.

- **BSplines:** Esta rotina constrói os polinômios definidos em (9), ou seja, basicamente constrói a base de B-Splines. Recebe como parâmetros de entrada a ordem m dos splines e o número de pontos interiores n no intervalo $[0, 1]$. Retorna um arranjo tridimensional contendo todos os polinômios $\mathcal{Q}_i^m$.

- **Particao:** O objetivo desta função é criar uma partição do intervalo $[0, 1]$ e a partição estendida para a construção da base de B-Splines.
- **Romberg:** O Algoritmo de Romberg é utilizado para o calculo aproximado das integrais dadas pelos produtos internos definidos acima. Neste caso, é usado para o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ definido no Método de Rayleigh-Ritz. Recebe como parâmetros de entrada dois B-Splines e os limites inferior e superior da integral definida.
- **Rombergb:** Neste caso, o Algoritmo de Romberg é aplicado para calcular a integral dada pelo produto interno usual. Recebe um B-Spline e os correspondentes limites de integração.
- **ProdIntUsual:** Definição do produto interno usual das funções contínuas.
- **ProdIntL:** Definição do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

Resultados Numéricos

Condições de fronteira homogêneas

Teste 1

Para este experimento sejam $k(x) = 1$, $q(x) = 0$ e $f(x) = \pi^2(\sin \pi x - 9 \sin 3\pi x)$. A solução exata para o problema (1) é dada por $u(x) = \sin \pi x - \sin 3\pi x$. São considerados os valores $n = 7$, 15, 31 e 63.

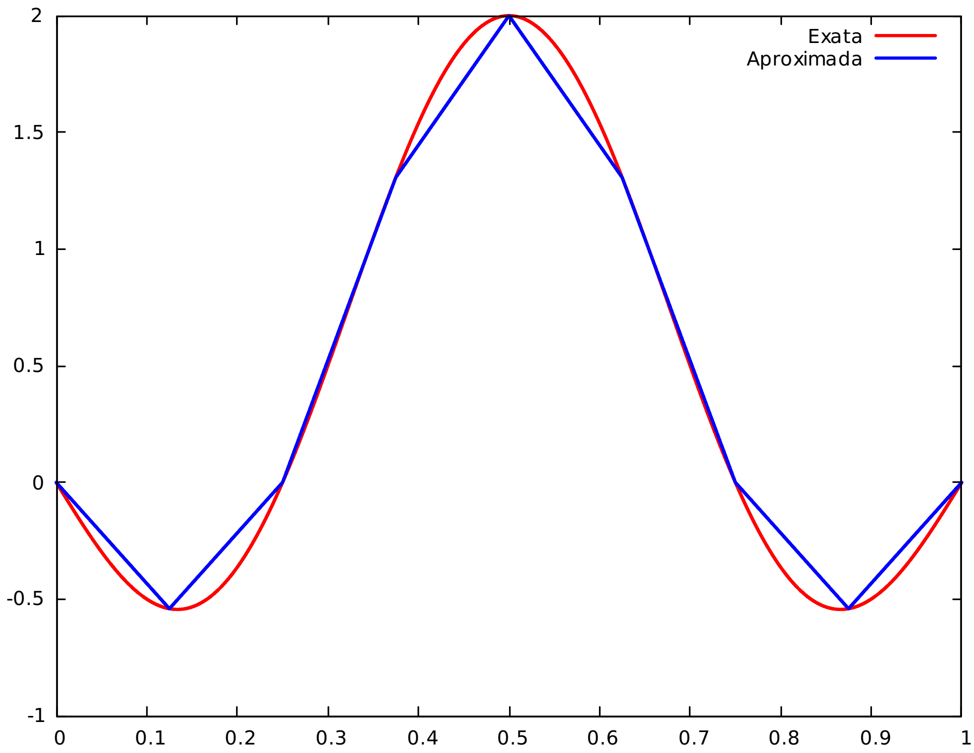


Figura 3: Resultado com Splines Lineares e $n = 7$ para o Teste 1

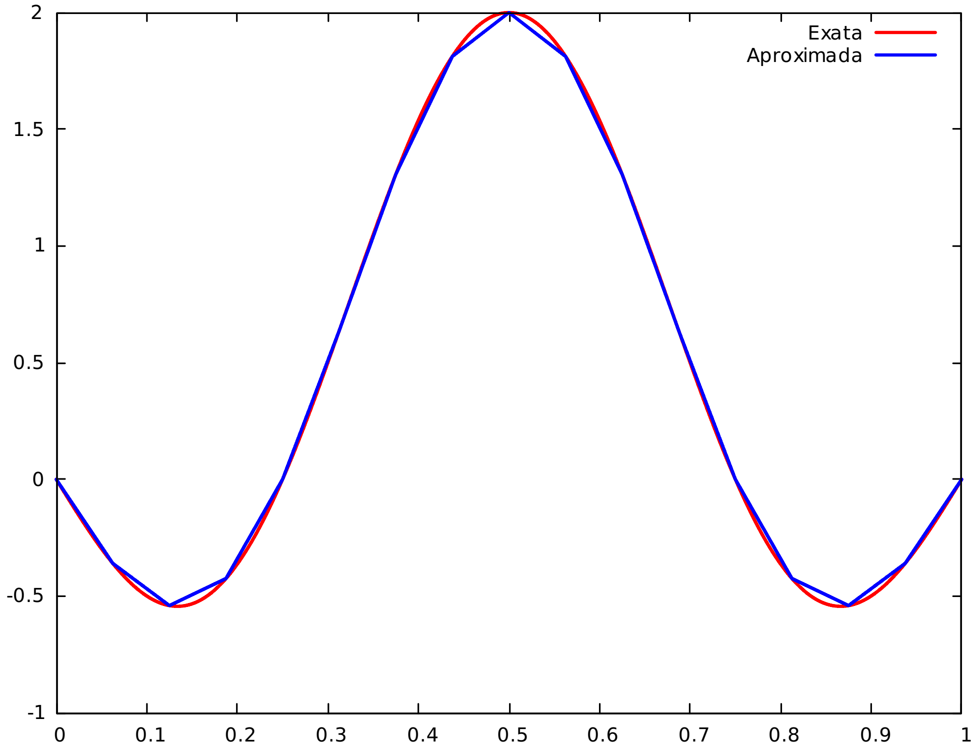


Figura 4: Resultado com Splines Lineares e $n = 15$ para o Teste 1

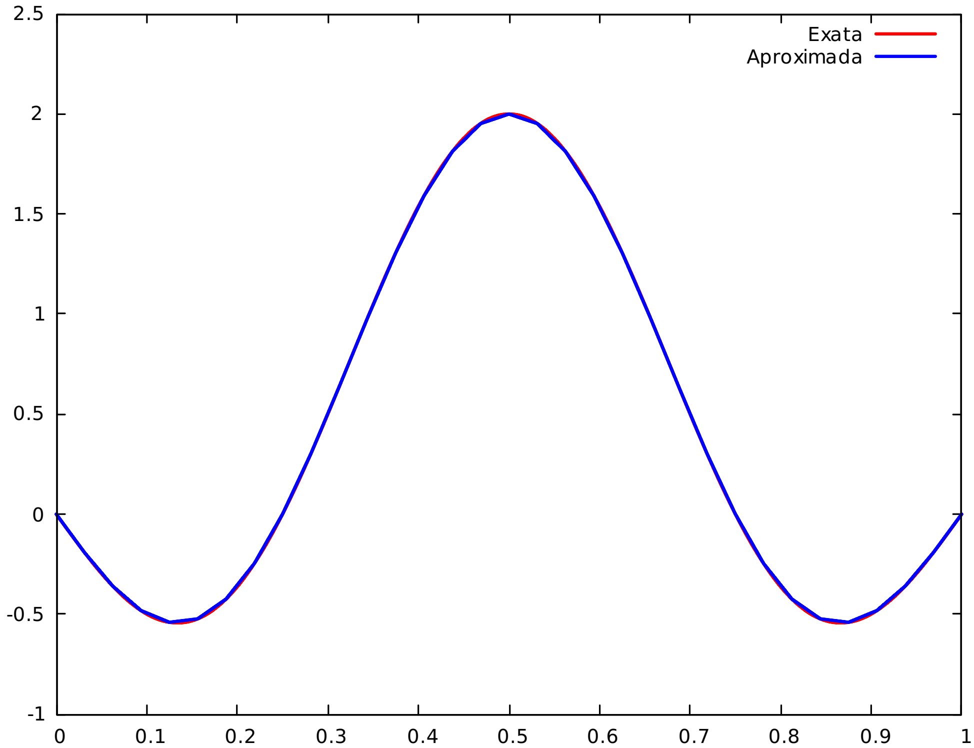


Figura 5: Resultado com Splines Lineares e $n = 31$ para o Teste 1

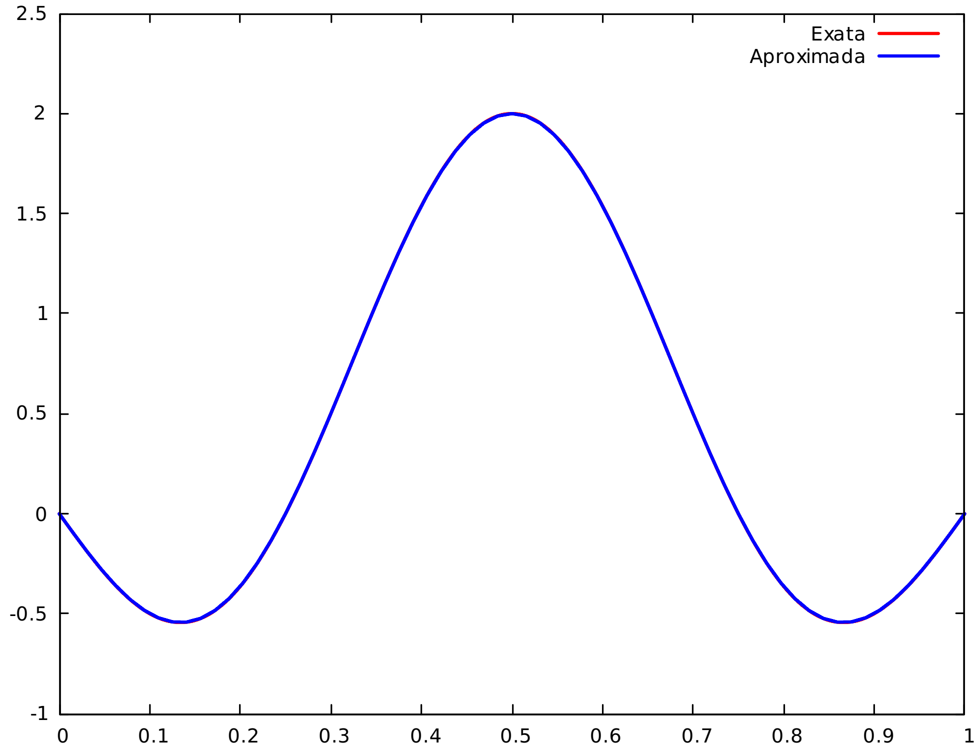
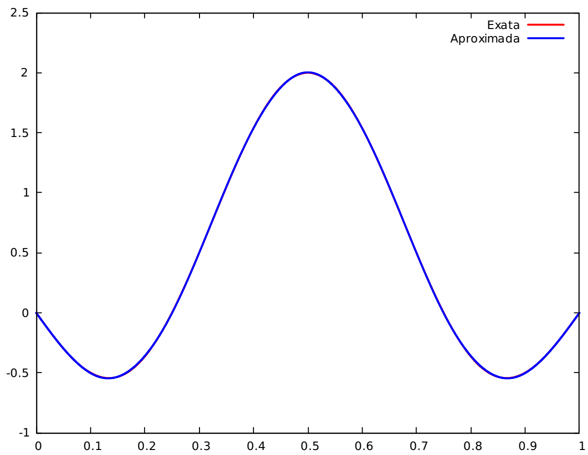
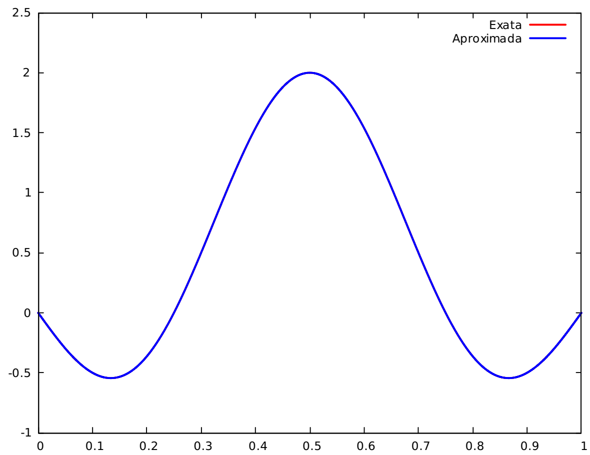


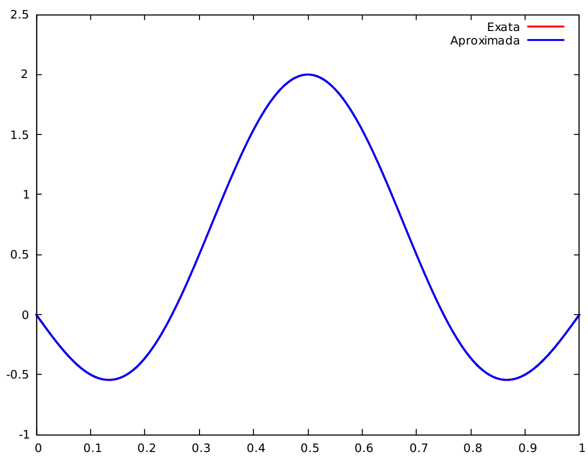
Figura 6: Resultado com Splines Lineares e $n = 63$ para o Teste 1



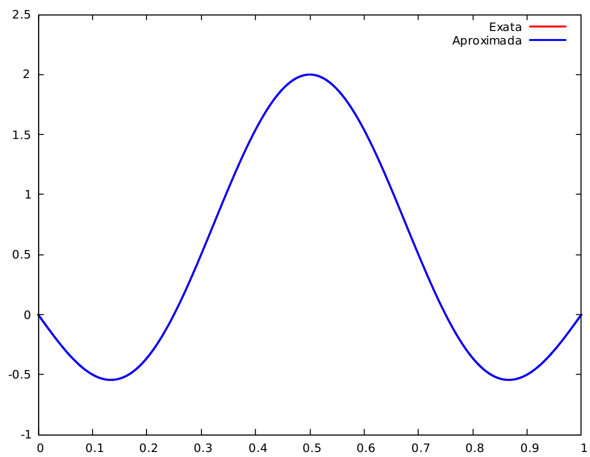
(a) $n = 7$



(b) $n = 15$



(c) $n = 31$



(d) $n = 63$

Figura 7: Resultados com Splines Cúbicos para o Teste 1

As Figuras 3, 4, 5 e 6 mostram os resultados para o caso de Splines Lineares. No caso dos Splines Cúbicos, note que já com $n = 7$ tem-se uma boa aproximação com a solução exata conforme mostra a Figura 7. Na Tabela a seguir, mostra-se o erro e a ordem de convergência do método.

Tabela 1: Error e Ordem de convergência do Método com Splines Lineares e Splines Cúbicos para o Teste 1.

n	**Splines Lineares**		**Splines Cúbicos**	
	Error	Ordem	Error	Ordem
7	0.159513968	-	4.08572184e-3	-
15	4.60059671e-2	3.4672	1.81805261e-4	22.473
31	1.19095291e-2	3.8630	1.07697491e-5	16.881
63	3.00329249e-3	3.9655	6.60525779e-7	16.305

Teste 2

Para este teste, considera-se $k(x) = -1$, $q(x) = \dfrac{\pi^2}{4}$ e $f(x) = \dfrac{\pi^2}{16}\cos\dfrac{\pi}{4}x$. Neste caso, a solução exata do problema (1) é dada por $u(x) = -\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sin\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}x$. As Figuras abaixo mostram os resultados para $n = 7$ e 15. Na Tabela 2, pode-se verificar que se satisfaz a ordem de convergência para os Splines Lineares e Cúbicos para $n = 7$, 15, 31 e 63.

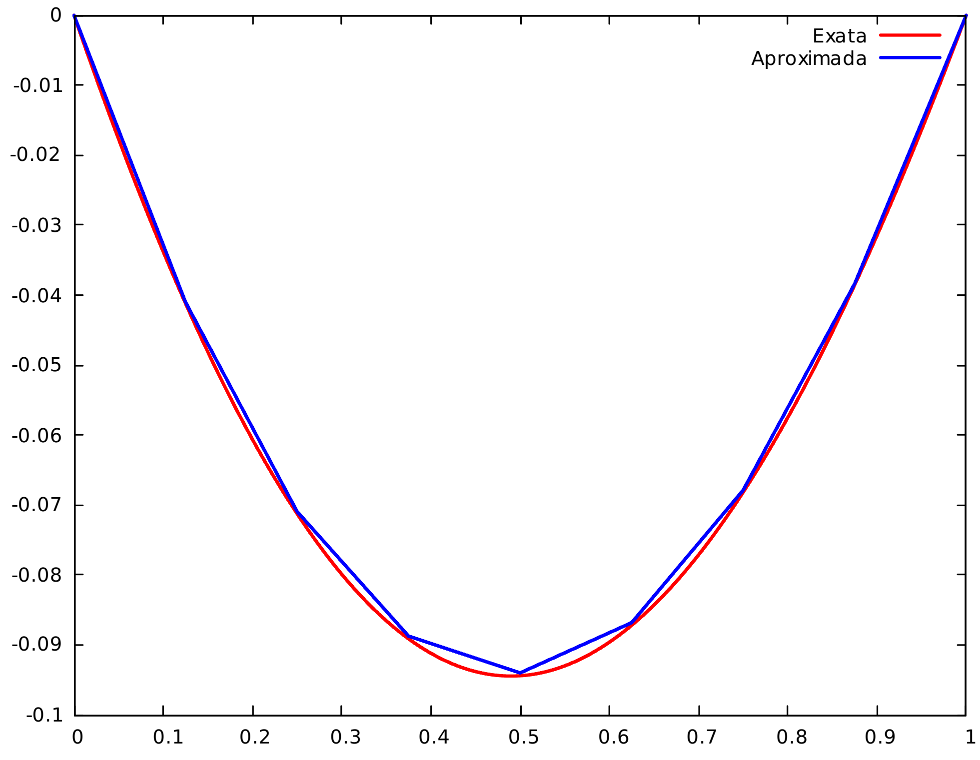


Figura 8: Resultado com Splines Lineares e $n = 7$ para o Teste 2

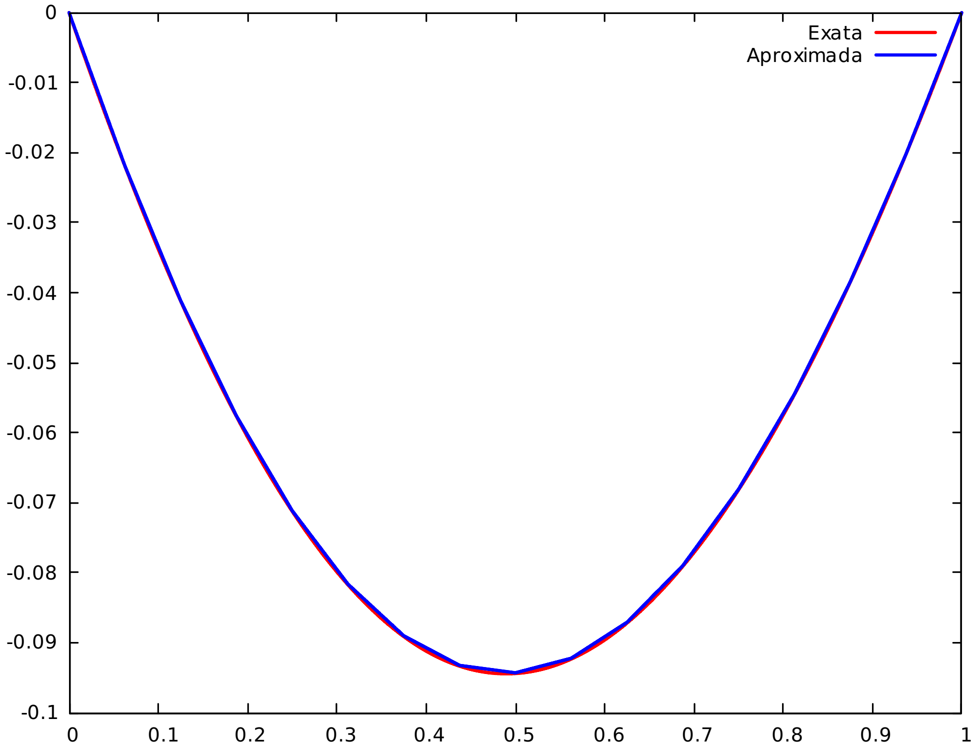
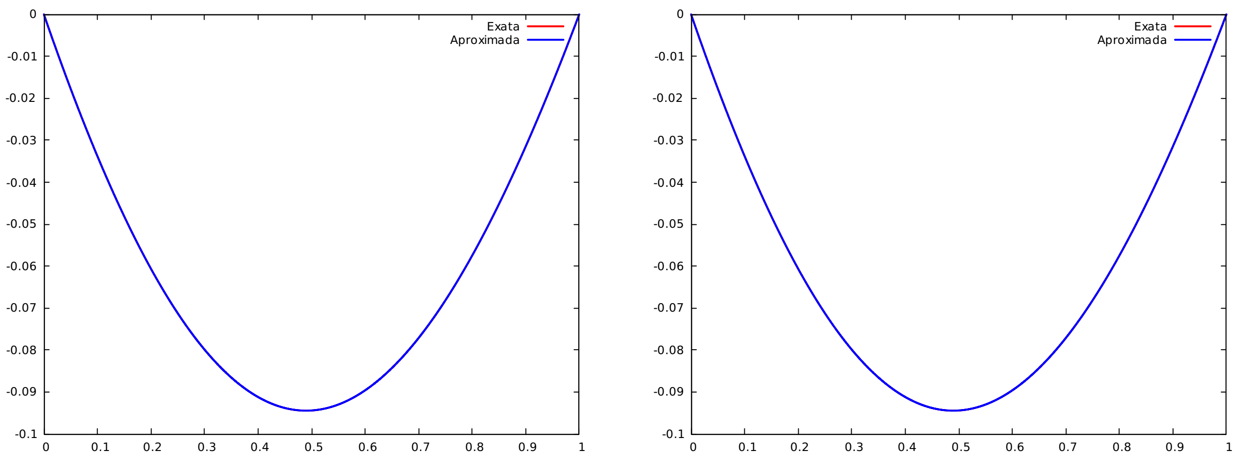


Figura 9: Resultado com Splines Lineares e $n = 15$ para o Teste 2



(a) $n = 7$

(b) $n = 15$

Figura 10: Resultados com Splines Cúbicos para o Teste 2

Tabela 2: Error e Ordem de convergência do Método com Splines Lineares e Splines Cúbicos para o Teste 2.

n	**Splines Lineares**		**Splines Cúbicos**	
	Error	Ordem	Error	Ordem
7	1.97446000e-3	-	8.36689157e-7	-
15	4.95315713e-4	3.9863	5.02801772e-8	16.641
31	1.24068432e-4	3.9923	3.13296430e-9	16.049
63	3.10271653e-5	3,9987	1.95895286e-10	15.993

Condições de fronteira não homogêneas

No caso de ter condições de fronteira não homogêneas, isto é, $u(0) = a$ e $u(1) = b$, em (1), pode-se reduzir este problema ao caso homogêneo resolvendo-se a equação

$$L(v(x)) := f(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) = \hat{f}.$$

Vejamos que, neste caso, $u(x) = v(x) + a + (b-a)x$ é a solução da equação (1) com condições de fronteira $u(0) = a$ e $u(1) = b$. Com efeito, note que $u'(x) = v'(x) + b - a$ e $u''(x) = v''(x)$. Então, $f(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) =$

$$\begin{aligned}
&= (-k(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) \\
&= -k'(x)\,u'(x) - k(x)\,u''(x) + q(x)\,u(x) + (b-a)k'(x) - a\,q(x) - (b-a)x\,q(x) \\
&= -k'(x)(v'(x) + b - a) - k(x)\,v''(x) + q(x)(v(x) + a + (b-a)x) + (b-a)k'(x) - a\,q(x) - \\
&- (b-a)x\,q(x) \\
&= -k'(x)v'(x) - k(x)v''(x) + q(x)v(x) \\
&= \hat{f}.
\end{aligned}$$

Portanto, u é solução do problema (1) com condições de fronteira $u(x) = v(x) + a + (b-a)x$.

Teste 3

Neste experimento considera-se as mesmas funções do Teste 1, com condições de fronteira $u(0) = 1$ e $u(1) = 2$. Note que o erro e a Ordem de convergência do Método são iguais aos obtidos nos Teste 1, conforme o mostra a Tabela 3.

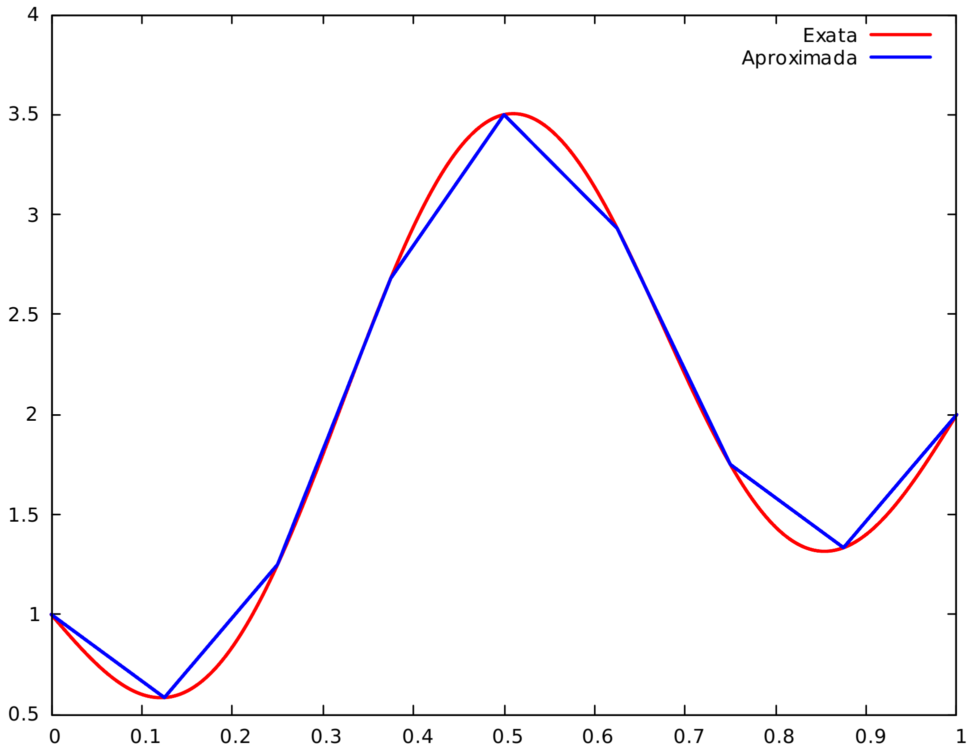


Figura 11: Resultado com Splines Lineares e $n = 7$ para o Teste 3

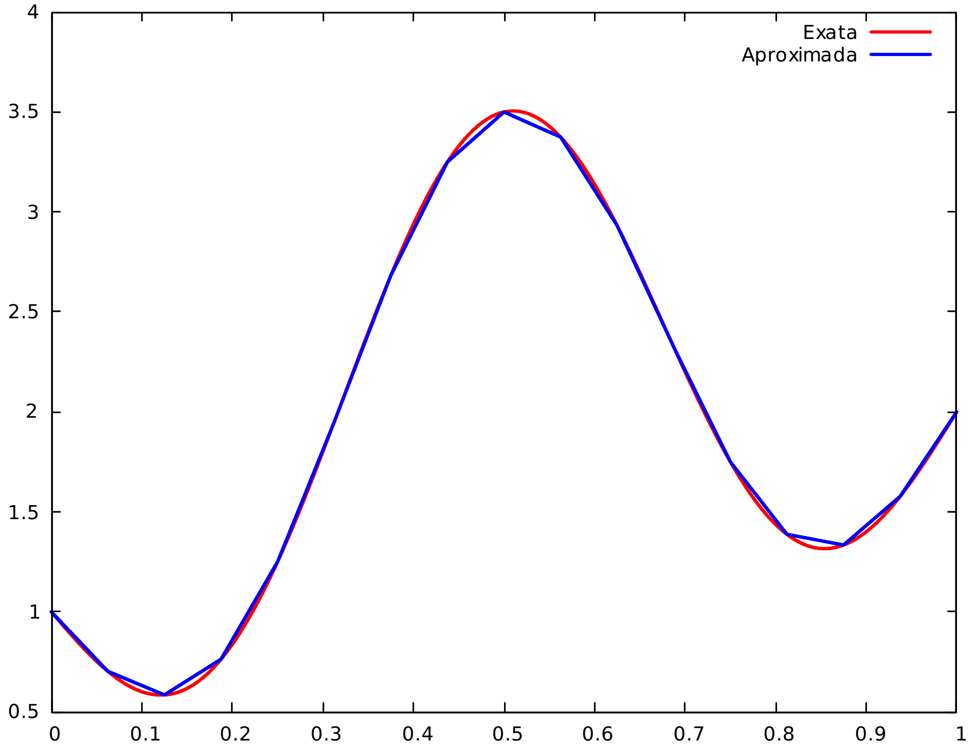


Figura 12: Resultado com Splines Lineares e $n = 15$ para o Teste 3

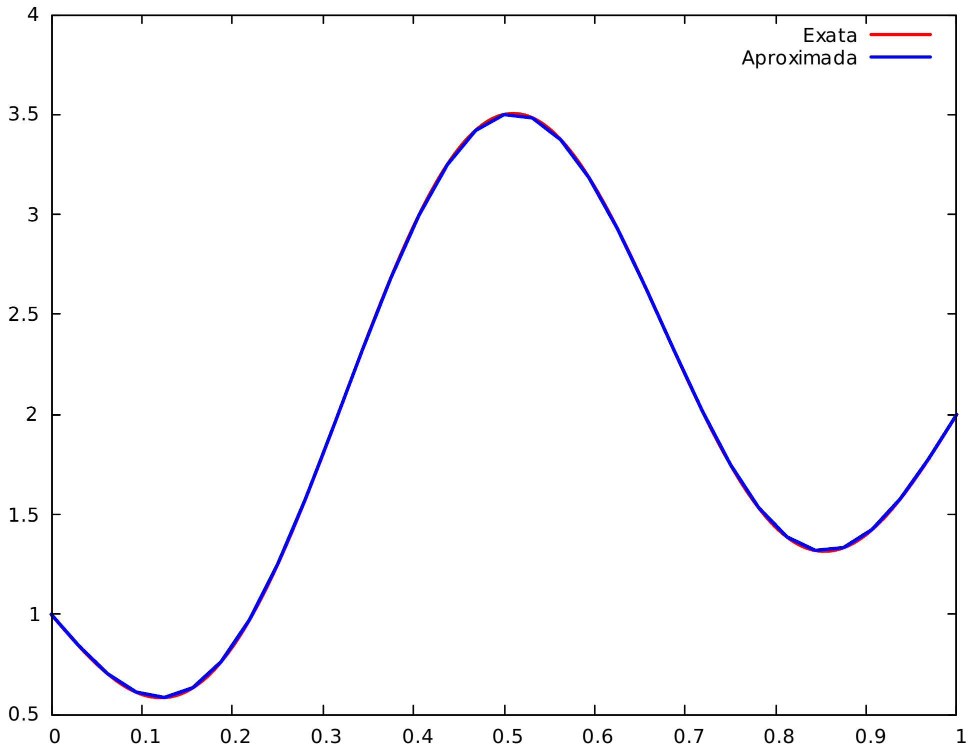


Figura 13: Resultado com Splines Lineares e $n = 31$ para o Teste 3

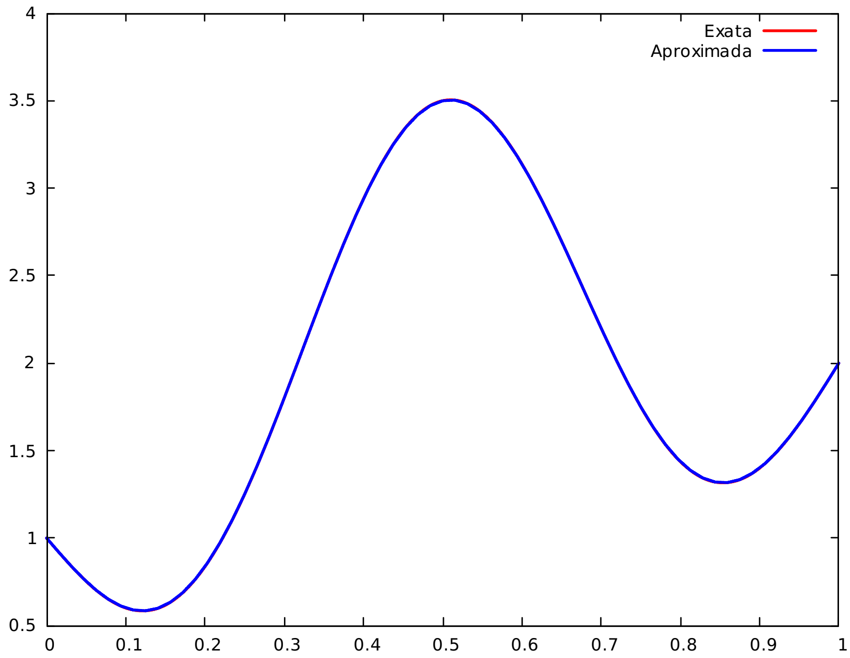


Figura 14: Resultado com Splines Lineares e $n = 63$ para o Teste 3

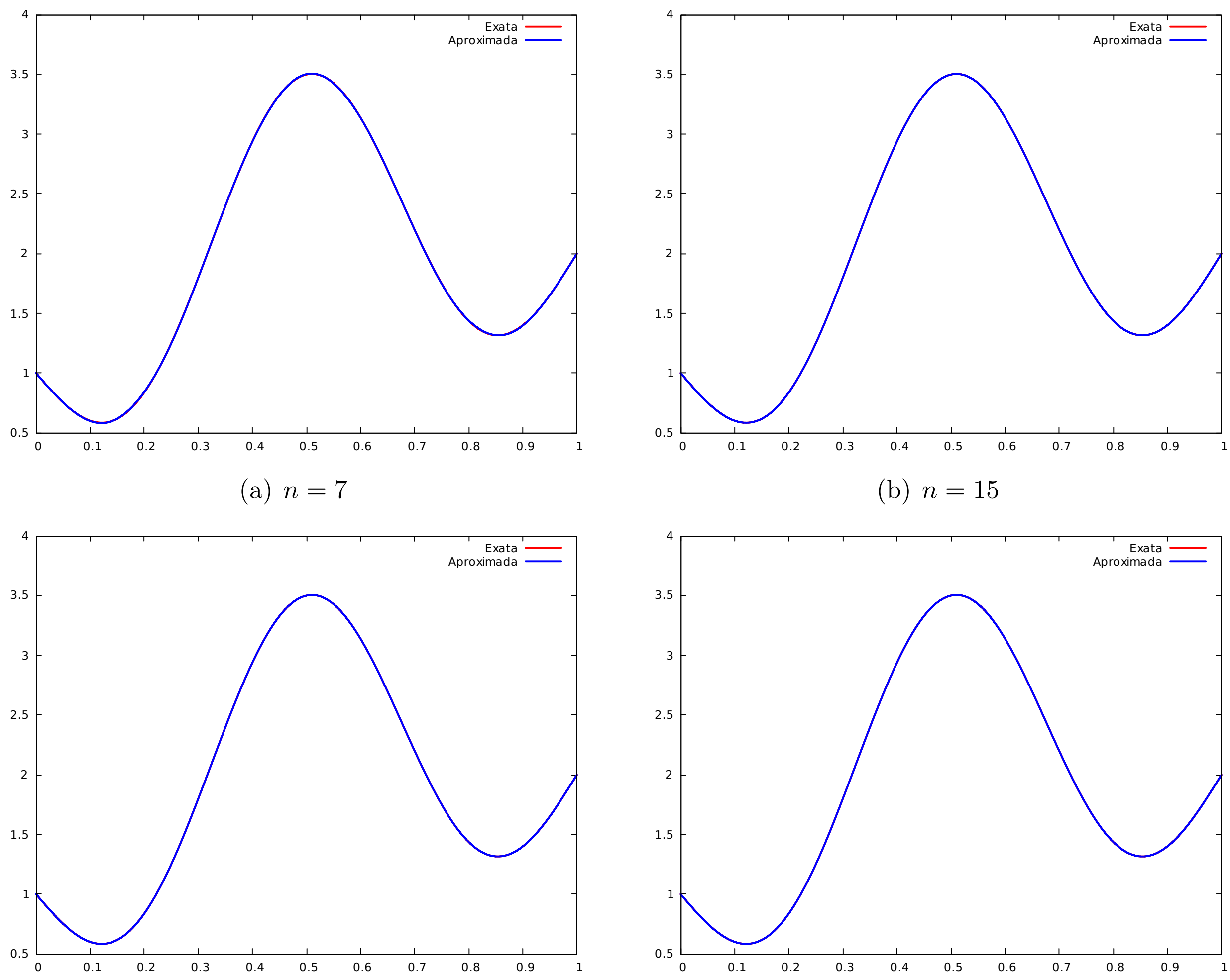


Figura 15: Resultados com Splines Cúbicos para o Teste 3

Tabela 3: Error e Ordem de convergência do Método com Splines Lineares e Splines Cúbicos para o Teste 3.

n	**Splines Lineares**		**Splines Cúbicos**	
	Error	Ordem	Error	Ordem
7	0.159513968	-	4.08572184e-3	-
15	4.60059671e-2	3.4672	1.81805261e-4	22.473
31	1.19095291e-2	3.8630	1.07697491e-5	16.881
63	3.00329249e-3	3.9655	6.60525779e-7	16.305

Referências Bibliográficas

Burden, R. L. (2016). *Análise numérica: Tradução da edição Norte-Americana*. Cengage, São Paulo, 10 edition.

Schultz, M. H. (1973). *Spline analysis*. Prentice-Hall.

Schumaker, L. L. (2007). *Spline Functions: Basic Theory*. Cambridge Mathematical Library, Cambidge, 3 edition.