

普通高等院校信息工程类系列教材

Digital Signal Processing

数字信号处理

丁玉美 高西全 编著

西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

普通高等学校信息工程类系列教材

数字信号处理

丁玉美 高西全 编著

西安电子科技大学出版社

2005

内 容 简 介

全书共 10 章。前四章是数字信号处理的理论基础,分别介绍时域离散信号与时域离散系统以及数字信号处理的三种重要变换(傅立叶变换、Z 变换和离散傅立叶变换)。第五章是离散傅立叶变换的快速算法及其应用。第六章为模拟信号数字处理的原理和方法。第七章是数字系统的实现结构。第八、九章是数字滤波器的基本理论与设计方法,主要介绍 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器的设计方法。第十章是结合本书中基本内容的八个上机实验,并介绍了实验中用到的 MATLAB 函数。

本书在编写上力求选材少而精,突出基本概念的讲述,并通过精心设计的大量例题来引导学生理解概念和掌握解决问题的方法。滤波器部分重点放在概念和设计方法上。不过多地讲解设计理论及其公式推导。各章后附有习题,部分章后附有上机题。

本书可作为普通本科电子信息 and 计算机应用类专业及相近专业的必修课教材。由于本书基本理论和基本概念较强,习题、实验丰富,因此也可以作为相关科技人员的参考书。

为了便于教师和学生学习,与此书配套的《〈数字信号处理〉同步学习指导》将随后出版。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/丁玉美,高西全编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2005.1

普通高等学校信息工程类系列教材

ISBN 7-5606-1422-1

I. 数… II. ① 丁… ② 高… III. 数字信号—信号处理—高等学校:技术学校—教材

IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062404 号

策 划 夏大平

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西画报社印刷厂

版 次 2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 14.75

字 数 345 千字

印 数 1~4 000 册

定 价 16.00 元

ISBN 7-5606-1422-1/TN·0275

XDUP 1693001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

本教材属电子类普通高校大学本科教材，是针对普通本科学生的学习基础和特点，并总结十几年来作者的教学经验编写而成的。

作者于 1994 年编写了全国统编教材《数字信号处理》，2001 年出版了它的第二版。这两本书主要是针对重点本科学生编写的。普通本科类院校的“数字信号处理”课程一般也使用该教材，但教与学均感不方便。考虑到教学需求以及普通本科院校的学生掌握基础知识的特点以及学习特点，特编写了本教材。

本书共 10 章。第一章为时域离散信号和时域离散系统，是全书的理论基础，其重点放在时域离散信号的产生和表示方法，以及时域离散系统的性质上。关于差分方程的求解只要求掌握递推法求解。第二、三章讲述时域离散信号的傅立叶变换和 Z 变换，这两种变换是频域分析的重要的数学工具。这两章重点放在基本定义、基本性质方面。周期序列的频域分析重点放在表示方法上。根据极零点分布分析频率特性是 Z 变换的重要应用之一，重点也放在分析方法上。第四、五章介绍信号的离散傅立叶变换及其快速算法，这种变换和算法是数字信号处理中重要的数学工具。物理概念、基本性质以及如何应用是这两章的重点。快速算法的重点放在应用上，不要求会编 FFT 子程序。第六章是模拟信号数字处理。本章集中了有关这部分的全部内容，包括采样定理、模拟信号和数字信号的相互转换、线性模拟系统的数字模拟以及如何采用数字方法对模拟信号进行频域分析。第七、八、九这三章主要介绍数字滤波器的网络结构和设计方法，其中包括模拟滤波器的设计方法、IIR 和 FIR 数字滤波器的设计方法，以及系统的网络结构。在网络结构部分特别增强了软件实现方法。滤波器设计重点放在设计方法上，简化复杂的设计理论，并引入重要的 MATLAB 语言以及使用方法。第十章是实验部分，共设计了八个实验，内容均紧密结合基本原理和基本要求。实验可以集中进行，也可以分散到各章。建议实验一放在第一章，实验二放在第二章，实验三放在第三章，实验四和实验六放在第六章，实验五放在第四、五章，实验七放在第八章，实验八放在第九章。另外，本书各章后均有习题，有些习题，特别是数字滤波器部分的习题，可以在计算机上采用 MATLAB 语言解题。

本书具有以下特点:

(1) 选材少而精, 突出基本概念和方法的讲述。

(2) 基本原理、基本概念叙述更加细致, 并加强了许多物理概念的叙述, 增加了很多例题。

(3) 略去了复杂公式的推导过程, 讲清了最后公式(结论)的重要概念。

(4) 滤波器设计部分重点放在设计方法上, 并引入用 MATLAB 语言进行设计的方法。

(5) 结合基本原理和要求编写了八个实验, 以帮助学生深入掌握这门课。

(6) 为便于教与学, 编写了配套教学用书(随后出版), 内容包括学习指导、习题解答以及全部的实验程序。

(7) 本书叙述详细, 深入浅出, 例题多, 习题多, 实验多, 有配套的习题解答、实验程序, 适合自学。

本书的先修课是“信号与系统”、“工程数学”和“MATLAB 语言”。书中有些内容, 如差分方程、Z 变换、傅立叶变换等, 可以根据学生的已有基础情况, 作适当的省略和补充。

本书参考学时数为 60。

本书适合作为普通高校电子信息和计算机应用类专业的教学用书。由于本书具有上面介绍的特点, 因此本书也很适合广大读者自学使用。

由于水平有限, 书中难免存在一些缺点和不适当的地方, 欢迎广大读者尤其是老师们和同学们批评指正。

作 者

2004 年 10 月

目 录

绪论	1
0.1 数字信号处理的基本概念	1
0.2 数字信号处理的实现方法	2
0.3 数字信号处理的特点	2
第一章 时域离散信号和时域离散系统	4
1.1 引言	4
1.2 时域离散信号表示法与典型序列	5
1.2.1 序列的表示方法	7
1.2.2 常用的典型序列	7
1.3 数字信号处理中的基本运算	12
1.3.1 乘法和加法	12
1.3.2 序列的移位	12
1.3.3 序列的翻转	13
1.3.4 序列的尺度变换	13
1.4 时域离散系统	13
1.4.1 线性系统	14
1.4.2 时不变系统	15
1.4.3 线性时不变系统输出和输入之间的计算关系	16
1.4.4 时域离散线性时不变系统的串并联系统	19
1.4.5 时域离散系统的因果性和稳定性	22
1.5 线性常系数差分方程	24
习题	28
第二章 时域离散信号和系统的傅立叶变换分析方法	31
2.1 引言	31
2.2 序列傅立叶变换的定义	32
2.3 序列傅立叶变换的性质及定理	33
2.3.1 周期性	33
2.3.2 线性性质	34
2.3.3 时移性和频移性	34
2.3.4 共轭对称性	35
2.3.5 时域卷积定理	37
2.3.6 频域卷积定理	37
2.3.7 帕斯维尔(Parseval)定理	38
2.4 周期序列的频域分析方法	39

2.4.1	周期序列的离散傅立叶级数	39
2.4.2	周期序列的傅立叶变换	42
2.5	利用傅立叶变换对信号和系统进行频域分析	45
习题	48
第三章	时域离散信号和系统的 Z 变换分析方法	50
3.1	序列 Z 变换的定义	50
3.2	序列特性对收敛域的影响	53
3.3	逆 Z 变换	58
3.3.1	留数定理法	58
3.3.2	幂级数法	62
3.3.3	部分分式展开法	62
3.4	Z 变换的性质和定理	63
3.4.1	线性性质	63
3.4.2	时域移位性质	64
3.4.3	初值定理	64
3.4.4	终值定理	64
3.4.5	时域卷积定理	65
3.4.6	复卷积定理	67
3.4.7	帕斯维尔(Parseval)定理	67
3.5	利用 Z 变换解差分方程	68
3.6	利用 Z 变换分析信号和系统的频域特性	70
3.6.1	系统的传输函数和系统函数	70
3.6.2	利用系统函数的极点分析系统的因果性和稳定性	71
3.6.3	利用系统函数的极零点分布分析系统的频率特性	72
习题	78
第四章	离散傅立叶变换(DFT)	80
4.1	引言	80
4.2	离散傅立叶变换的定义及物理意义	80
4.2.1	DFT 定义	80
4.2.2	DFT 与傅立叶变换、 Z 变换和 DFS 之间的关系	81
4.3	离散傅立叶变换的主要性质及定理 ^[1]	83
4.3.1	线性性质	83
4.3.2	隐含周期性	83
4.3.3	循环移位性质	83
4.3.4	实序列 DFT 的共轭对称性	84
4.3.5	循环卷积定理	85
4.4	DFT 应用举例	85
4.4.1	用 DFT 计算序列的线性卷积	85
4.4.2	用 DFT 对信号进行谱分析	89
习题与上机题	90

第五章 快速傅立叶变换(FFT)	92
5.1 引言	92
5.2 直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径	92
5.3 基 2FFT 算法	93
5.3.1 DIT-FFT 算法	93
5.3.2 DIT-FFT 的运算效率	95
5.3.3 DIT-FFT 的运算规律及编程思想	96
5.3.4 DIF-FFT	100
5.3.5 IDFT 的高效算法	103
习题与上机题	104
第六章 模拟信号数字处理	106
6.1 模拟信号数字处理的原理框图	106
6.2 采样频率的确定	107
6.2.1 时域采样定理	107
6.2.2 由模拟信号到时域离散信号采样间隔的确定	111
6.3 将模拟信号转换成数字信号(A/DC)	113
6.4 将数字信号转换成模拟信号(D/AC)	114
6.5 对数字信号处理部分的设计考虑	115
6.6 线性模拟系统的数字模拟	116
6.7 用 DFT(FFT)对连续信号进行频域分析	117
6.7.1 用 DFT(FFT)对连续信号进行近似频域分析	118
6.7.2 用 DFT(FFT)对连续信号进行频域分析的公式推导	119
习题	123
第七章 时域离散系统的基本网络结构	124
7.1 引言	124
7.2 用信号流图表示网络结构	125
7.3 无限长脉冲响应的基本网络结构	129
7.3.1 直接型网络结构	129
7.3.2 级联型网络结构	131
7.3.3 并联型网络结构	133
7.4 有限长脉冲响应的基本网络结构	135
7.4.1 FIR 直接型网络结构	135
7.4.2 FIR 级联型网络结构	135
7.4.3 FIR 频率采样型网络结构	136
7.5 按照网络结构设计运算次序	138
习题	140
第八章 IIR 数字滤波器的设计	142
8.1 滤波的基本概念	142
8.2 模拟滤波器的技术指标	145

8.3 模拟滤波器的设计	147
8.3.1 概述	149
8.3.2 巴特沃斯滤波器的设计	149
8.3.3 切比雪夫滤波器的设计	156
8.3.4 椭圆滤波器的设计	159
8.3.5 频率变换与高通、带通、带阻滤波器的设计	161
8.4 IIR 数字滤波器的设计	165
8.4.1 用脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器	165
8.4.2 用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器	171
8.4.3 高通、带通和带阻 IIR 数字滤波器的设计	176
习题与上机题	179
第九章 FIR 数字滤波器的设计	181
9.1 线性相位 FIR 数字滤波器及其特点	181
9.2 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器	185
9.2.1 基本方法	185
9.2.2 窗函数法的设计性能分析	186
9.2.3 典型窗函数	188
9.2.4 设计步骤	194
9.3 利用等波纹最佳一致逼近法设计 FIR 数字滤波器	199
9.3.1 等波纹最佳一致设计的基本思想	199
9.3.2 remez 函数和 remezord 函数	202
9.3.3 各类滤波器的设计指标	203
9.3.4 设计举例	204
9.4 FIR 滤波器与 IIR 滤波器的比较	209
习题与上机题	210
第十章 实验	212
实验一 用递推法解差分方程以及用线性卷积法求线性时不变系统的输出	212
实验二 信号与系统的傅立叶分析	215
实验三 零极点分布对系统频率响应的影响	217
实验四 时域采样定理	219
实验五 用 DFT(FFT)对时域离散信号进行频谱分析	221
实验六 用 DFT(FFT)对连续信号进行频谱分析	223
实验七 IIR 滤波器的设计与信号滤波	224
实验八 用窗函数法设计 FIR 滤波器	226
参考文献	227

绪 论

0.1 数字信号处理的基本概念

几乎在所有的工程技术领域中都会涉及到信号处理问题，其信号来源很多，表现形式也很多，这里要处理的信号指的是电信号。对于非电信号，例如磁的、机械的信号，热、光、声的信号，要利用种种不同的传感器或者转换器转换成电信号。这些电信号是电压或者电流信号。处理的目的一般是对信号进行分析、滤波、变换、综合、估值、识别等。例如，利用滤波将信号中的杂波或者干扰去除，分析语音信号的共振峰在哪里等等。

电信号(以后统称信号)的种类可以分成三种。一种是连续信号(即模拟信号)，它的信号值(幅度)和自变量(时间)都取连续值，例如电视机音频端输出的语音信号，或者收音机的语音信号等。另一种是时域离散信号，它的信号值取连续值，但自变量取离散值，例如，学生的成绩统计数据，高血压病人每天按小时测量的舒张压和收缩压等等。第三种是数字信号，它的幅度和时间都取离散值。一般说数字信号处理的对象是数字信号，模拟信号处理的对象是模拟信号。但是如果系统中增加数模转换器和模数转换器，数字信号处理系统也可以处理模拟信号，模拟信号处理系统也可以处理数字信号。两种信号系统对信号处理的方式不同。数字信号处理是采用数值计算的方法，完成对信号的处理，而模拟信号处理则是通过一些模拟器件，例如晶体管、电阻、电容、电感等完成对信号的处理。例如，图 0.1.1(a)所示的是一个简单的模拟高通滤波器，它是用电阻 R 和电容 C 组成的，而图 0.1.1(b)则是一个简单的数字高通滤波器，它是由一个加法器、一个乘法器和一个延时器组成的。因此，简单地说，数字信号处理就是用数值计算的方法对信号进行处理，这里“处理”的实质是“运算”。

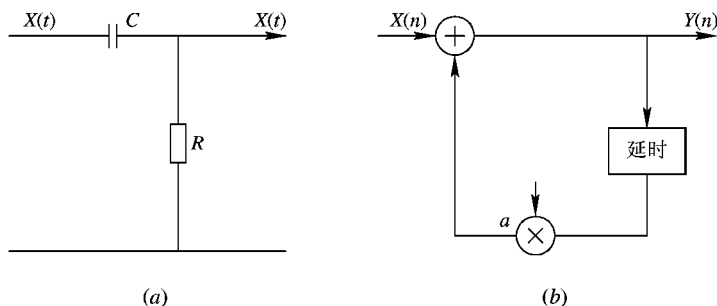


图 0.1.1 高通滤波器

0.2 数字信号处理的实现方法

数字信号处理的主要对象是数字信号，且是采用运算的方法达到处理目的的。其实现方法不同于模拟信号的实现方法，基本上可以分成两种：软件实现方法和硬件实现方法。软件实现方法指的是按照原理和算法，自己编写程序或者采用现成的程序在通用计算机上实现的方法；硬件实现指的是按照具体的要求和算法，设计硬件结构图，用乘法器、加法器、延时器、控制器、存储器以及输入输出接口部件实现的方法。显然，前者灵活，只需改变程序中的有关参数，例如，只要改变图 0.1.1(b) 中的 a 参数，数字滤波器就可能是低通、带通或高通滤波器。但是软件实现法的运算速度慢，一般达不到实时处理的要求。因此前者适合于科研和教学。后者运算速度快，可以达到实时处理要求，但不灵活。

用单片机可以实现称谓软硬结合的方法。现在单片机发展很快，功能也很强，配以数字信号处理软件，既灵活，速度又比软件方法快，这种方法适用于数字控制等方面。采用专用的数字信号处理芯片(DSP 芯片)是目前发展最快、应用最广的一种方法。因为 DSP 芯片较之单片机有更为突出的优点，它结合了数字信号处理的特点，内部配有乘法器和累加器，结构上采用了流水线工作方式以及并行结构、多总线，且配有适合数字信号处理的指令，是一类可实现高速运算的微处理器。目前 DSP 芯片已进入市场，且正在高速发展，速度高、体积小、性能优良，价格也在不断下降。可以说，用 DSP 芯片实现数字信号处理，正在变成或已经变成工程技术领域中的主要方法。

总结以上，如果从数字信号处理的实际应用情况和发展考虑，数字信号处理的实现方法分成两类，一类是软件实现，一类是硬件实现。而硬件实现指的是选用合适的 DSP 芯片，配有适合芯片语言及任务要求的软件，实现某种信号处理功能的一种方法。这种系统无疑是一种最佳的数字信号处理系统。

0.3 数字信号处理的特点

由于数字信号处理的直接对象是数字信号，处理的方法是数值运算的方法，使它相对模拟信号处理具有许多优点。归纳起来有以下优点：

(1) 灵活性。数字信号处理系统(简称数字系统)的性能取决于系统参数，这些参数存储在存储器中，很容易改变，因此系统的性能容易改变，甚至通过参数的改变，系统变成了另外完全不同的系统。灵活性还表现在数字系统可以分时复用，用一套数字系统分时处理几路信号。

(2) 高精度和高稳定性。数字系统的特性不易随使用条件变化而变化，尤其使用了超大规模集成的 DSP 芯片，设备简化，更提高了系统的稳定性和可靠性。运算位数又由 8 位提高到 16、32、64 位，在计算精度方面，模拟系统是不能和数字系统相比拟的，为此，许多测量仪器为满足高精度的要求，只能采用数字系统。

(3) 便于大规模集成。由于数字部件有高度的规范性，对电路参数要求不严，容易大规模集成和大规模生产，这也是 DSP 芯片发展迅速的原因之一。由于采用了大规模集成电路，数字系统体积小、重量轻和可靠性强。

(4) 对数字信号可以存储、运算，系统可以获得高性能指标。这一优点更加使数字信号处理不再仅仅限于对模拟系统的逼近上，它可以完成许多模拟系统完不成的任务。例如，电视系统中的画中画、多画面，各种视频特技，包括画面压缩、画面放大、画面坐标旋转、演员特技制作、特殊的配音制作、数字滤波器严格的线性相位特性等，甚至非因果系统也可通过延时实现，等等。

正是由于以上的优点，数字信号处理的理论和技术一出现，就受到人们的极大关注，发展非常迅速。国际上一般把 1965 年作为数字信号处理这一门新学科的开端，仅仅 30 多年，这门学科已基本上形成了自己一套完整的理论体系，其中也包括各种快速的和优良的算法。随着电子技术、计算机技术的飞速发展，数字信号处理的理论和技术还在不断丰富和完善，新的理论和技术层出不穷。可以说，数字信号处理是应用最快、成效最显著的新学科之一，目前已广泛地应用在语音、雷达、声纳、地震、图像、通信、控制、生物医学、遥感遥测、地质勘探、航空航天、故障检测、自动化仪表等领域。数字信号处理的理论和技术已成为目前高新理论和技术的强有力的基础。

数字信号处理涉及到的内容丰富而广泛，本书作为专业基础课，主要学习其基本理论和基本分析方法。这门课是一门理论和实践、原理和应用结合紧密的课程，为此，本书每章后有习题或上机题，最后一章专门结合基本理论编写了八个实验，并提供了每个实验所需要的 MATLAB 函数。

第一章 时域离散信号和时域离散系统

【本章重点和难点】

- (1) 模拟信号、时域离散信号和数字信号三者的差别，时域离散信号的常用典型序列。
- (2) 周期性序列周期的确定。
- (3) 时域离散系统的线性、时不变性质及系统的因果性和稳定性。
- (4) 线性时不变系统的输出和输入之间的关系。
- (5) 用串、并联分系统的单位脉冲响应表示该系统总的单位脉冲响应。
- (6) 已知系统输入、线性常系统差分方程和初始条件，用递推解法求解系统的输出。
- (7) 由差分方程求解系统的单位脉冲响应。

1.1 引言

在绪论中曾介绍了三种类型的信号：模拟信号、时域离散信号和数字信号。模拟信号是信号幅度和自变量时间均取连续值的信号。时域离散信号是信号幅度取连续值，而自变量时间取离散值的信号，也可以看成是自变量取离散值的模拟信号。数字信号则是信号幅度和自变量均取离散值的信号，也可以说是，信号幅度离散化的时域离散信号，再或者简单说是一些二进制编码信号。下面举例说明模拟信号、时域离散信号和数字信号之间的差别。

假设模拟信号是一个正弦波，表示为 $x_a(t) = 0.9 \sin(50\pi t)$ ，波形如图 1.1.1(a) 所示，它的周期是 0.04 s，对 $x_a(t)$ 每隔 0.005 s 取一点，它们是 $\{\dots, 0.0, 0.6364, 0.9, 0.6364, 0.0, -0.6364, -0.9, -0.6364, \dots\}$ ，将这些离散值形成的信号用 $x(n)$ 表示， $x(n) = \{\dots, 0.0, 0.6364, 0.9, 0.6364, 0.0, -0.6364, -0.9, -0.6364, \dots\}$ ，自变量 n 表示第 n 个点， $n = \{\dots, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 。该信号 $x(n)$ 称为时域离散信号，其波形如图 1.1.1(b) 所示。如果用四位二进制数表示 $x(n)$ 的幅度，二进制数第一位表示符号位，该二进制编码形成的信号用 $x[n]$ 表示，那么 $x[n] = \{\dots, 0.000, 0.101, 0.111, 0.101, 0.000, 1.101, 1.111, 1.101, \dots\}$ ，这里 $x[n]$ 称为数字信号。由以上可明显看出三种信号的不同。下面再进一步分析时域离散信号和数字信号之间的不同。

如果将上面的 $x[n]$ 再换算成十进制，则 $x[n] = \{\dots, 0.0, 0.625, 0.875, 0.625, 0.0, -0.625, -0.875, -0.625, \dots\}$ 。比较 $x(n)$ 和 $x[n]$ ，有两点不同，一点是数字信号是用有限位二进制编码表示，时域离散信号则不是；第二点是都用十进制表示时，数值有差别，这种差别和表示二进制编码的位数有关系。如果用 8 位二进制编码表示 $x(n)$ ，则

$x[n]=\{\cdots, 0.0000000, 0.1010001, 0.1110011, 0.1010001, 0.0000000, 1.1010001, 1.1110011, 1.1010001, \cdots\}$,再换算成十进制, $x[n]=\{\cdots, 0.0, 0.6328, 0.8884, 0.6328, 0.0, -0.6328, -0.8884, -0.6328, \cdots\}$ 。很清楚,用 8 位二进制编码比用 4 位二进制编码数字信号愈加接近于时域离散信号。显然,随着二进制编码位数增加,两者的差别愈来愈小。如果采用 32 位,这时数字信号和时域离散信号的幅度值在数值上相差无几,误差可以忽略,认为是相等的,只是信号形式不同。由于现在计算机的精度很高,位数可以高达 32、64 位,因此分析研究数字信号处理的基本原理时,都是针对时域离散信号进行的。

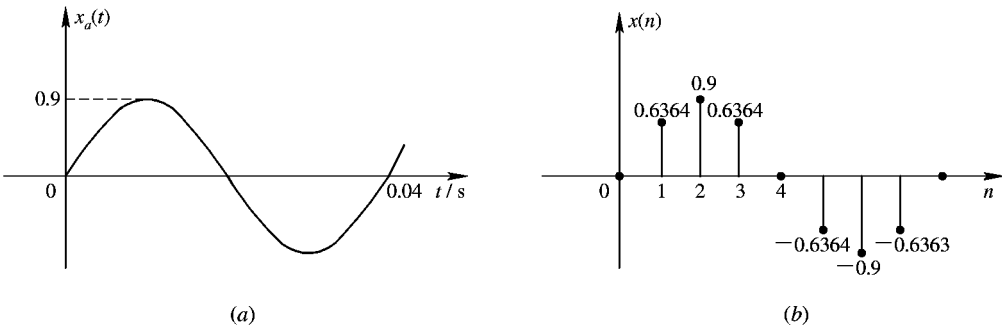


图 1.1.1 模拟信号和时域离散信号

如果系统的输入、输出是模拟信号,该系统被称为模拟系统;如果系统的输入、输出是数字信号,该系统被称为数字系统;相应地,系统的输入、输出是时域离散信号,该系统被称为时域离散系统。当然还有模拟系统和数字系统共同构成的混合系统。

1.2 时域离散信号表示法与典型序列

由引言知道,时域离散信号的特点是自变量取离散值,信号幅度值可取连续值。在理论研究中,对于实际中具体测试什么和如何测试,得到的一串有序离散数据,都可以称为时域离散信号。例如每天下午 3 点检测病人的血压,共测试了五天,舒张压均正常,收缩压不正常,收缩压用 $x(n)$ 表示, $x(n)=\{155, 161, 150, 165, 168\}$, n 取值为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, n 具体代表第 n 个数据。这里规定自变量 n 只能取整数,非整数无定义。此时 $x(n)$ 称为时域离散信号。由该例说明时域离散信号是一串有序的数据序列,因此也可以称 $x(n)$ 为序列。

但实际中,很多时域离散信号是由模拟信号产生的,下面介绍如何由模拟信号产生时域离散信号。

假设模拟信号用 $x_a(t)$ 表示,它的波形用图 1.2.1(a)表示。按照时间 T 等间隔地对 $x_a(t)$ 取它的幅度值,或者说按照时间 T 等间隔地对 $x_a(t)$ 采样,得到一串有序的数据 $\{x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \cdots\}$,波形图如图 1.2.1(b)所示。当 n 取 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 时, $x_a(nT)=\{x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \cdots\}$,现在将这一串数字序列用 $x(n)$ 表示,如图 1.2.1(c)所示。

比较图 1.2.1(b)和(c)，它们幅度值相等，只是横坐标不同， $x_a(nT)$ 的横坐标是时间 t ，单位为秒(s)；时域离散信号 $x(n)$ 的横坐标是 n ，无量纲，且只能取整数。时域离散信号 $x(n)$ 和模拟信号 $x_a(t)$ 之间的关系用下式表示：

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t) \big|_{t=nT} \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2.1)$$

注意： n 只能取整数，当 n 取非整数时，无定义。

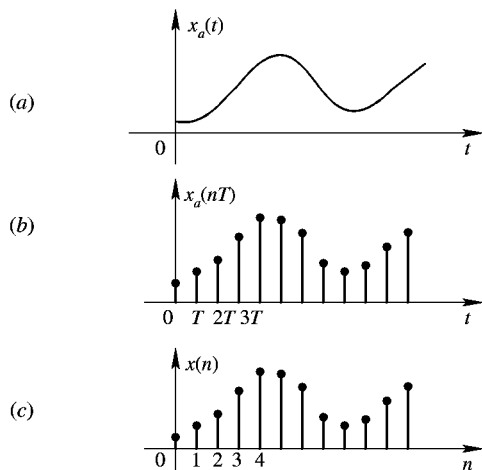


图 1.2.1 由模拟信号产生时域离散信号

例 1.2.1 假设模拟信号 $x_a(t) = \sin(2\pi \cdot 50t) + \sin(2\pi \cdot 100t)$ ，令 $f_s = 1/T$ ， $T = 0.0025$ s， $f_s = 400$ Hz，这里 T 称为采样间隔， f_s 称为采样频率。要求用 f_s 对该模拟信号进行采样，得到时域离散信号 $x(n)$ ，试写出 $x(n)$ 的表达式，并画出它的波形图。

解 按照(1.2.1)式，该例题中序列表达式为

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = x_a(t) \big|_{t=nT} \\ &= \sin(2\pi \cdot 50 \cdot nT) + \sin(2\pi \cdot 100 \cdot nT) \end{aligned}$$

将 $T = 0.0025$ s 代入上式，得到：

$$x(n) = \sin(2\pi \cdot 50 \cdot 0.0025n) + \sin(2\pi \cdot 100 \cdot 0.0025n) = \sin(0.25\pi n) + \sin(0.5\pi n)$$

画出它的波形如图 1.2.2 所示。

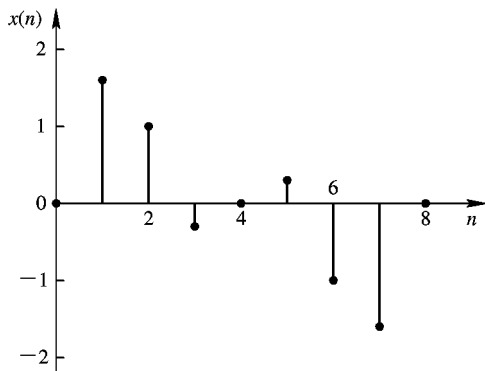


图 1.2.2 例 1.2.1 图

总结以上可知，时域离散信号是一个有序的数据序列，它可以是实际中通过实验测试得到的一组有序的数据序列，也可以是由模拟信号等间隔采样得到的信号。

1.2.1 序列的表示方法

一个具体的序列可以有三种表示方法。

1. 用集合符号表示序列

对于数的集合，可用集合符号 $\{\cdot\}$ 表示，时域离散信号是一个有序的数的集合，可用集合表示。例如当 $n=\{\cdots, 0, 1, 2, \cdots\}$ 时， $x(n)=\{\cdots, 0.12, 0.15, 0.18, \cdots\}$ ，就是用集合符号表示的时域离散信号。

2. 用公式表示序列

例如：

$$x(n) = a^{|n|} \quad 0 < a < 1$$

式中的 n 是 $(-\infty, +\infty)$ 间变化的整数。这里 $x(n)$ 就是用公式表示的序列。还有一种用公式表示任意序列的方法，将在后面介绍。

3. 用图表示

这是一种很直观表示方法，例如图 1.2.2 所示的就是一个时域离散信号。

三种表示方法根据具体情况可以灵活运用。对于一般序列，包括由实际信号采样得到的序列，或者是一些没有明显规律的数据，可以用集合、图表示。

1.2.2 常用的典型序列

1. 单位采样序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

单位采样序列也可以称为单位脉冲序列。特点是仅在 $n=0$ 处取值为 1，其他均为 0。单位采样序列如图 1.2.3 所示。

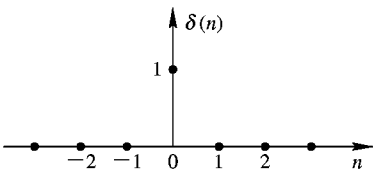


图 1.2.3 单位采样序列

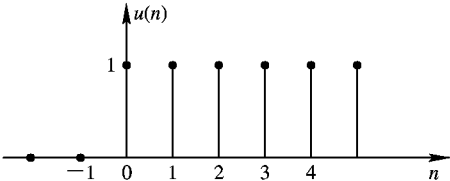


图 1.2.4 单位阶跃序列

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

单位阶跃序列如图 1.2.4 所示。特点是只有在 $n \geq 0$ 时，它才取非零值 1；当 $n < 0$ 时，均取零值。

$u(n)$ 可以用单位采样序列表示，公式如下：

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(n-m) \tag{1.2.4}$$

如果上式中 $n < 0$ ，求和号中的每一项的 $n-m$ 取值均为负值，因此 $u(n)=0$ 。如果 $n \geq 0$ ，上式中的 $m=n$ 项，即 $\delta(n-m)=1$ ，例如 $n=2$ ，上式则为

$$\begin{aligned} u(2) &= \sum_{m=-\infty}^2 \delta(n-m) \\ &= \cdots + \delta(2-(-1)) + \delta(2-0) + \delta(2-1) + \delta(2-2) \\ &= \delta(0) = 1 \end{aligned}$$

因此(1.2.4)式表示的就是单位阶跃序列 $u(n)$ 。

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

上式中的下标 N 称为矩形序列的长度。例如，当 $N=4$ 时，矩形序列 $R_4(n)$ 如图 1.2.5 所示。矩形序列的特点是只有在 $0 \leq n \leq N-1$ 时，才取非零值 1，其他均取零值。

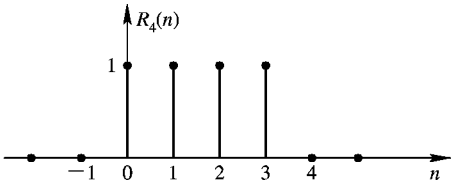


图 1.2.5 矩形序列

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

式中 a 取实数， $u(n)$ 起着使 $x(n)$ 在 $n < 0$ 时幅度值为 0 的作用。 a 的大小直接影响序列波形。如果 $0 < a < 1$ ， $x(n)$ 的幅度值则随着 n 的加大会逐渐减少，其波形如图 1.2.6(a) 所示。如果 $a > 1$ ，幅度值则随着 n 的加大而增大，波形如图 1.2.6(b) 所示。

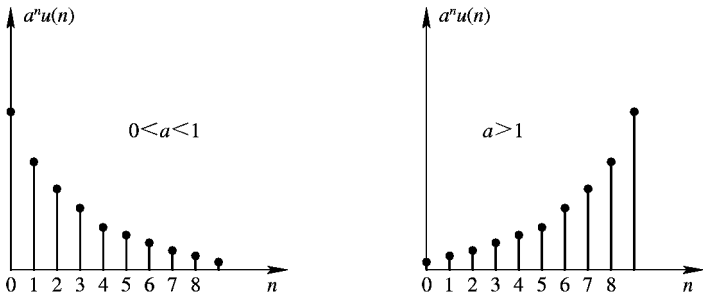


图 1.2.6 实指数序列

一般把绝对幅度值 $|x(n)|$ 随着 n 的加大而减少的序列称为收敛序列，而把绝对幅度值 $|x(n)|$ 随着 n 的增大而加大的序列称为发散序列。如果 $x(n)=(-a)^nu(n)$ ，作为练习，请读者自己画出它们的波形，并判断 a 为何值时，形成收敛序列。

5. 正弦序列与复指数序列

假设模拟信号是一个正弦序列 $x_a(t)=A\sin(\Omega t+\theta)$ ，对它以等间隔 T 进行采样，得到时域离散信号 $x(n)$ ，

$$x(n)=A\sin(\Omega nT+\theta)$$

令
 $\omega=\Omega T$
(1.2.6)

得到：
 $x(n)=A\sin(\omega n+\theta)$
(1.2.7)

上式 $x(n)$ 称为正弦序列，式中 ω 称为数字频率，它不同于式中的模拟角频率 Ω ， Ω 的单位是rad/s(弧度/秒)，数字频率和模拟角频率的关系是 $\omega=\Omega T$ ，因此数字频率 ω 的单位是rad(弧度)。这里要记住数字频率和模拟角频率之间的关系是线性关系，用(1.2.6)式描述。式中 A 是幅度， θ 是初相位。相应地，还有余弦序列，用下式描述：

$$x(n)=A\cos(\omega n+\theta)$$

式中 ω 也是数字频率。复指数序列用下式描述：

$$x(n)=e^{j\omega n}$$

可以按照欧拉公式展开，表示成下式：

$$x(n)=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n)$$

式中 ω 仍然称为数字频率。由于正弦序列和复指数序列中的 n 只能取整数，因此下面公式成立：

$$\begin{aligned} e^{j(\omega+2\pi M)n}&=e^{j\omega n} \\ \cos[(\omega+2\pi M)n]&=\cos(\omega n) \\ \sin[(\omega+2\pi M)n]&=\sin(\omega n) \end{aligned}$$

上面公式中 M 取整数，所以对数字频率而言，正弦序列和复指数序列都是以 2π 为周期的周期信号。

6. 周期序列

如果序列满足下式，则称为周期序列：

$$x(n)=x(n+N) \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.2.8}$$

很显然，满足上式的 N 有很多个，周期序列的周期则规定为满足上式的最小的 N 值。例如图1.2.7中的 $x(n)$ 是一个周期序列，满足上式的 N 有4, 8, 12, …，它的周期为4。

下面讨论关于正弦序列的周期性。前面讲过，如果 n 一定， ω 作为变量时，正弦序列是以 2π 为周期的函数。但当 ω 一定， n 作为变量，正弦序列是否是周期序列？答案是不一定，

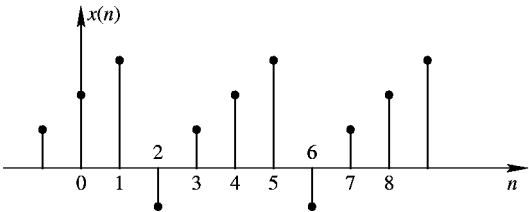


图 1.2.7 周期序列

如果是周期序列，则要求正弦序列的频率满足一定条件。设

$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1.2.9)$$

式中 A 、 ω 、 φ 均为常数。将上式中的 n 变成 $n+N$ ，得到：

$$x(n+N) = A \sin(\omega n + \omega N + \varphi) \quad (1.2.10)$$

如果是周期序列，要求(1.2.9)式和(1.2.10)式相等，即

$$A \sin(\omega n + \varphi) = A \sin(\omega n + \omega N + \varphi)$$

观察上式，因为正弦函数是以 2π 为周期的，因此上式如果成立，则要求 ωN 是 2π 的整数倍，即

$$\omega N = 2\pi M$$

那么得到：

$$N = \frac{2\pi}{\omega} M \quad (1.2.11)$$

上式中 M 取整数。另外，我们知道对于序列 $x(n+N)$ 中的 $n+N$ 只能取整数， n 取整数，

那么 N 也只能取整数，因此得到结论：正弦序列当 n 变化时，如果 $\frac{2\pi}{\omega} M$ 是一个整数，正弦

序列才可能是周期序列，其周期仍是 $\frac{2\pi}{\omega} M$ 最小的整数值。下面用例题进一步说明。

例 1.2.2 $x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$ ，分析其周期性。

解 上面序列的数字频率 $\omega = \pi/4$ ， $(2\pi/\omega) = 8$ ，因此它是周期序列，周期是 $8(M$ 取 1)。该序列的波形如图 1.2.8 所示。

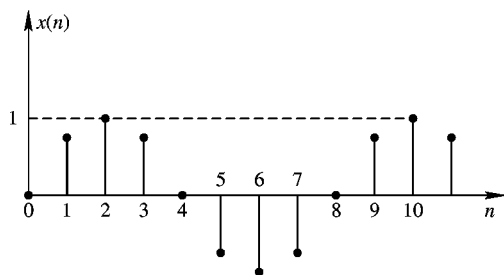


图 1.2.8 例 1.2.2 图：正弦序列

例 1.2.3 $x(n) = \sin\left(\frac{1}{4} n\right)$ ，分析其周期性。

解 上面序列的频率 $\omega = 1/4$ ， $(2\pi/\omega) = 8\pi$ ，这是一个无理数， M 无论取什么整数，都不会使 $\frac{2\pi}{\omega} M$ 变成整数，因此这是一个非周期序列。

例 1.2.4 $x(n) = \sin\left(\frac{3}{2} \pi n + \frac{\pi}{4}\right)$ ，分析它的周期性。

解 序列频率 $\omega = \frac{3}{2} \pi$ ， $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}$ ，取 $M=3$ ， $\frac{2\pi}{\omega} M = 4$ ，因此它是一个周期序列，周期为 4。它的波形图如图 1.2.9 所示。

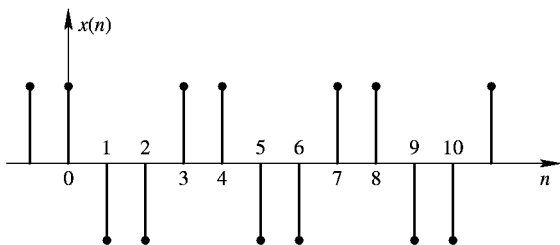


图 1.2.9 例 1.2.4 图

以上关于正弦序列是否是周期序列的分析讨论,也适合复正弦序列和余弦序列。下面介绍如何用公式表示任意序列。

这里任意序列包括有规律或者无规律的序列,它们均可以用单位采样序列的移位加权和表示。具体公式如下:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.2.12)$$

式中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

在(1.2.12)式中, $\delta(n-m)$ 只有在 $n=m$ 处,取值为 1,其他均为 0。 $x(m)\delta(n-m)$ 在 $n=m$ 处的取值决定于 $x(m)$, $x(m)$ 称为加权值。这样当 m 变化时,就把 $x(n)$ 表示出来。下面通过举例进一步说明。

例 1.2.5 用(1.2.12)式表示图 1.2.10 所示的序列。

解 在图中, $n=0$ 处的值等于 3,用 $3\delta(n)$ 表示; $n=1$ 处的值等于 2,用 $2\delta(n-1)$ 表示; $n=2$ 处的值等于 1,用 $\delta(n-2)$ 表示; $n=3$ 处的值等于 -1,用 $-\delta(n-3)$ 表示;其他为 0。这样整个序列可表示成下面公式:

$$x(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) - \delta(n-3)$$

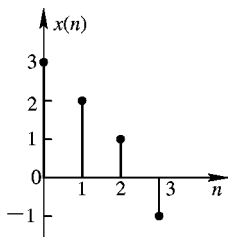


图 1.2.10 例 1.2.5 图

例 1.2.6 假设 $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)\delta(n-m)$, 试用图表示 $x(n)$ 序列。

解 该例题中,矩形序列 $R_4(m)$ 限制序列 $x(n)$ 的非零值长度为 4,非零值区间是 $0 \leq m \leq 3$,但 $\delta(n-m)$ 函数限制,只有在 $n=m$ 时, $x(n)$ 才能取非零值,因此,对于 n 的非零值区间,也是 $0 \leq n \leq 3$,具体地说,即:当 $n=0, m=0$ 时, $x(0)=1$;当 $n=1, m=1$ 时, $x(1)=1$;当 $n=2, m=2$ 时, $x(2)=1$;当 $n=3, m=3$ 时, $x(3)=1$,这样画出 $x(n)$ 的图如图 1.2.11 所示。实际上该例题就是用(1.2.12)式表示的矩形序列。

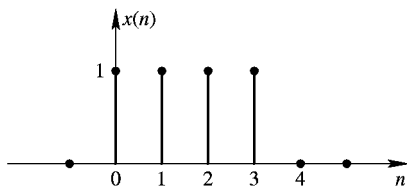


图 1.2.11 例 1.2.6 图

例 1.2.7 用(1.2.12)式表示序列 $x(n)=0.5^nu(n)$ 。

解 将 $x(n)$ 中的 n 换成 m ，再代入(1.2.12)式，得到：

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}0.5^mu(m)\delta(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}0.5^m\delta(n-m)$$

1.3 数字信号处理中的基本运算

在数字信号处理中，采用对输入信号进行运算的方法来达到处理的目的。数字信号处理的基本运算有乘法、加法(包括减法)、移位、翻转和尺度变换等。对输入信号的运算就是由这些基本运算按照处理目的组合成的一些专用算法。这一节介绍这些基本算法。

1.3.1 乘法和加法

一个序列乘一个常数 a ，相当于将序列幅度值放大 a 倍。两个序列相乘或者相加，是指它们同序号的序列值相乘或者相加。设 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 分别如图 1.3.1(a)、(b)所示， $x_1(n)+x_2(n)$ 和 $x_1(n)\cdot x_2(n)$ 分别如图 1.3.1(c)、(d)所示。

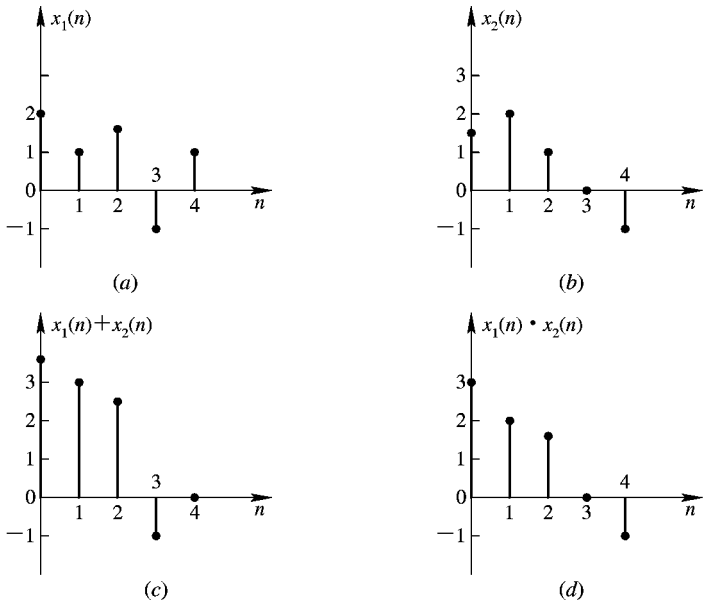


图 1.3.1 序列加法和乘法

1.3.2 序列的移位

设序列 $x(n)$ 的波形如图 1.3.2(a)所示。对于 $x(n-2)$ ，它的波形如图 1.3.2(b)所示，相当于将波形向右移动 2 位，或者说在时间上延迟 2 位。对 $x(n-n_0)$ ，如果 $n_0>0$ ，则是将 $x(n)$ 向右移动 n_0 位，即延迟 n_0 位；如果 $n_0<0$ ， $x(n-n_0)$ 表示将序列 $x(n)$ 向左移动 n_0 位， $x(n-n_0)$ 比 $x(n)$ 领先 n_0 位。这里 $x(n-n_0)$ 称为 $x(n)$ 的移位序列。

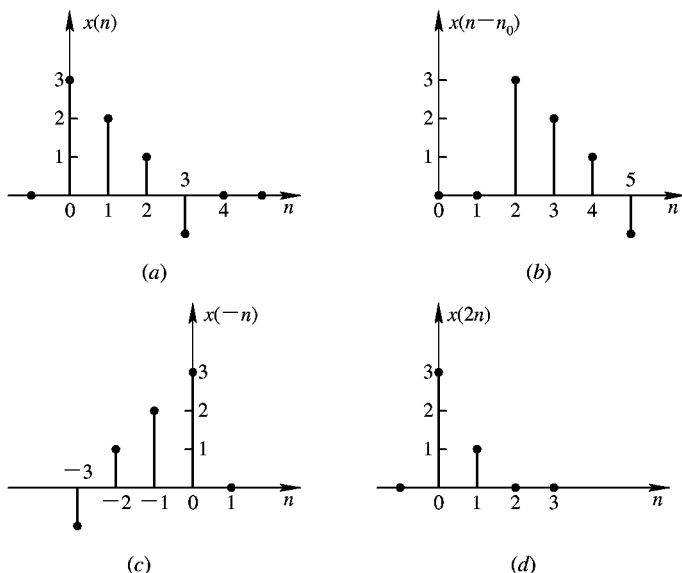


图 1.3.2 序列的移位、翻转和尺度变换

1.3.3 序列的翻转

$x(-n)$ 相对于 $x(n)$ ，被称为翻转序列。这里翻转的意思是指将 $x(n)$ 围绕坐标竖轴 180° 旋转。 $x(n)$ 及其翻转序列 $x(-n)$ 的波形如图 1.3.2(a)、(c) 所示。

1.3.4 序列的尺度变换

设 $y(n) = x(2n)$ ，当 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 时， $y(0) = x(0)$ ， $y(1) = x(2)$ ， $y(2) = x(4)$ ， $y(3) = x(6)$ ， \dots ，相当于将 $x(n)$ 每两个相邻序列值取一个，或者说是将原来的 $x(n)$ 坐标横轴压缩了 $1/2$ 。如果 $x(n)$ 的波形如图 1.3.2(a) 所示，那么 $x(2n)$ 就如图 1.3.2(d) 所示。对于 $x(mn)$ ，则是对 $x(n)$ 每 m 个相邻序列值取一个序列点，相当于将 $x(n)$ 的坐标横轴，即时间轴压缩至原来的 $1/m$ 。

1.4 时域离散系统

设时域离散系统的输入信号用 $x(n)$ 表示，经过规定的运算，系统输出信号用 $y(n)$ 表示。对系统规定的运算关系用 $T[\cdot]$ 表示，方括弧中的一点表示要实行运算的信号。输入输出之间的关系用下式表示：

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.4.1)$$

上式的框图如图 1.4.1 所示。例如有一个系统对输入信号的运算是延时 2 个单位，同时放大 2 倍，则输入输出的关系式为

$$y(n) = T[x(n)] = 2x(n-2)$$

如果

$$x(n) = 0.5^n u(n)$$

那么

$$y(n) = 2 \cdot 0.5^{n-2} u(n-2)$$

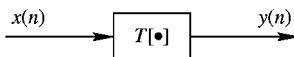


图 1.4.1 时域离散系统模型

时域离散系统中最常用的一类系统是线性时不变系统，下面介绍什么是线性时不变系统，以及线性时不变系统输出输入之间的计算关系和系统的因果性、稳定性。

1.4.1 线性系统

线性系统具有一个很重要的性质，即线性叠加性质，它具体包括可加性和比例性两个性质。下面进行介绍。

如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别作为系统的输入，系统对应的输出用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

1. 可加性

如果系统输入是 $x_1(n) + x_2(n)$ ，系统的输出为 $y_1(n) + y_2(n)$ ，则系统具有可加性。用公式表示为

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \quad (1.4.2)$$

2. 比例性

如果输入信号乘一常数，或者说进行加权，系统的输出等于输入信号的输出响应进行加权，或者说乘一常数。用公式表示为

$$T[ax_1(n)] = ay_1(n) \quad (1.4.3)$$

式中 a 是常数。也可以把(1.4.2)、(1.4.3)两式结合在一起，简单地表示成

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (1.4.4)$$

式中 a 和 b 是常数。该式说明，如果系统由几个信号的加权和组成，那么系统输出就是对这组信号的每一个响应的加权和。满足(1.4.2)、(1.4.3)式或者满足(1.4.4)式的系统称为线性系统。这两个性质称为线性叠加性质。根据(1.4.3)式可以得到另外一个重要性质，就是对于一个线性系统零输入产生零输出，即

$$T[0 \cdot x(n)] = 0 \cdot y(n) = 0 \quad (1.4.5)$$

例 1.4.1 如果系统的输入与输出满足下面关系式，试分析系统是否是线性系统：

$$y(n) = 2x(n-2)$$

解 分析系统是否是线性系统，需分别检查是否具有可加性和比例性，即满足(1.4.2)式和(1.4.3)式，或者满足(1.4.4)式。令

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

按照给定的输入输出关系式，得到：

$$y_1(n) = 2x_1(n-2), \quad y_2(n) = 2x_2(n-2)$$

先检查可加性。令

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$y(n) = T[x(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$$

下面需要检查 $y(n)$ 是否等于 $y_1(n) + y_2(n)$ ，推导如下：

$$y(n) = T[x(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$$

$$= 2[x_1(n-2) + x_2(n-2)]$$

$$= 2x_1(n-2) + 2x_2(n-2)$$

$$= y_1(n) + y_2(n)$$

证明该系统满足可加性。

再检查是否满足比例性。令输入为 $ax(n)$ ，检查输出 $y_3(n)$ 是否是 $ay(n)$ ，推导如下：

$$y_3(n) = T[ax(n)] = 2ax(n-2) = aT[x(n)] = ay(n)$$

证明该系统满足比例性。

总结以上，可知该系统是线性系统。

作为练习，请读者自己再按照(1.4.4)式检查该系统是否是线性系统。

例 1.4.2 如果系统的输入与输出满足下面关系式，试分析系统是否是线性系统：

$$y(n) = ax(n) + b$$

式中 a, b 是常数。

解 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别作为系统的输入，系统对应的输出用 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 表示，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = ax_1(n) + b$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = ax_2(n) + b$$

如果

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

则

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)] = a[x_1(n) + x_2(n)] + b \\ &\neq T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = a[x_1(n) + x_2(n)] + 2b \end{aligned}$$

因此该系统不满足可加性，也就不具有线性叠加性质。比例性就不用检查了，不满足线性叠加性质足以说明该系统是非线性系统。实际上该系统它不满足零输入产生零输出的性质，即

$$x(n) = 0, \quad y(n) = b \neq 0$$

因此利用该性质也可以很容易地证明该系统是一个非线性系统。

1.4.2 时不变系统

如果系统对输入信号的运算关系在整个运算过程中不随时间改变，或者说系统对于输入信号的响应与输入信号加入系统的时间无关，则这种系统称为时不变系统。用公式表示如下：

$$y(n) = T[x(n)]$$

如果将输入信号 $x(n)$ 延时 n_0 (n_0 是常数)，相应地，输出为

$$y(n - n_0) = T[x(n - n_0)] \quad (1.4.6)$$

一般将满足(1.4.6)式的系统称为时不变系统。检查系统是否具有时不变性质，即检查是否满足(1.4.6)式。

例 1.4.3 检查 $y(n) = ax(n) + b$ (a, b 均为常数)表示的系统是否是时不变系统。

解 $y(n) = ax(n) + b$

用 $(n - n_0)$ 代替上式中的 n ，得到：

$$y(n - n_0) = ax(n - n_0) + b$$

将输入 $x(n)$ 延时 n_0 ，输出则是

$$T[x(n - n_0)] = ax(n - n_0) + b$$

观察上式，得到：

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0)$$

因此该系统是一个时不变系统。注意该系统虽是时不变系统，但却是一个非线性系统。线

性和时不变是两个不同的概念，它们之间没有一定的连带关系。

例 1.4.4 检查 $y(n) = nx(n)$ 表示的系统是否是时不变系统。

解

$$y(n) = nx(n)$$

$$y(n - n_0) = (n - n_0)x(n - n_0)$$

$$T[x(n - n_0)] = nx(n - n_0)$$

$$y(n - n_0) \neq T[x(n - n_0)]$$

因此该系统不是时不变系统，是时变系统。从概念上讲，相当于该系统将输入信号放大 n 倍，放大倍数随变量 n 变化，因此它是一个时变系统。

作为练习，请读者自己证明该系统是一个线性系统。

1.4.3 线性时不变系统输出和输入之间的计算关系

如果系统或者网络已设计完，已知输入信号，其输出信号可以计算出来，计算的依据是系统特性和输入信号。这里系统特性可以是时域特性，也可以是频域特性。这一节我们先介绍系统的时域特性，即单位脉冲响应，然后介绍输出和输入之间的计算关系。关于系统的频域特性在下一章介绍。

系统的时域特性用它的单位脉冲响应表示。假设系统的输出 $y(n)$ 初始状态为 0，当输入 $x(n) = \delta(n)$ 时，定义系统的输出为单位脉冲响应，用 $h(n)$ 表示。换句话说，单位脉冲响应即系统对于 $\delta(n)$ 的零状态响应。用公式表示为

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1.4.7)$$

将系统的输入 $x(n)$ 用移位单位脉冲序列的加权和表示，即用 (1.2.12) 式表示，重写如下：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.4.8)$$

那么系统的输出为

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统的线性叠加性质，运算符可以拿到求和号内，即

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T[x(m)\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)] \quad (1.4.9)$$

又根据线性系统的时不变性质 (1.4.6) 式和 (1.4.7) 式，得到：

$$T[\delta(n-m)] = h(n-m) \quad (1.4.10)$$

将上式代入 (1.4.9) 式，得到：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.4.11)$$

上式就是根据输入信号 $x(n)$ 和系统的时域特性 $h(n)$ 计算输出 $y(n)$ 的计算关系，这种计算关系称为线性卷积关系，可以用运算符“ $*$ ”表示成下式：

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1.4.12)$$

按照 (1.4.11) 式，卷积运算规律是将 $x(n)$ 信号的 n 换成 m ，将 $h(n)$ 的 n 换成 $n-m$ ，相乘后，再对 m 在 $-\infty \sim +\infty$ 之间求和。已知系统的单位脉冲响应和输入信号，按照 (1.4.11)

式求输出，可以有两种解法，即图解法和解析法。图解法有以下几个步骤：

- (1) 按照(1.4.11)式，卷积运算主要是对 m 的运算，公式中的 n 作参变量。首先将 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的 n 变成 m ，然后将 $h(m)$ 进行翻转，形成 $h(-m)$ 。此时相当于 $n=0$ 。
 - (2) 令 $n=1$ ，将 $h(-m)$ 移位 n ，得到 $h(n-m)$ 。
 - (3) 将 $x(m)$ 和 $h(n-m)$ 同样的 m 的序列值相乘，再相加，得到 $x(n)$ 。
 - (4) 再令 $n=2$ ，重复(2)、(3)步，然后 $n=3, 4, \dots$ ，直到对所有的 n 都计算完为止。
- 下面举例说明线性卷积的图解法。

例 1.4.5 设 $x(n)=R_4(n)$ ， $h(n)=R_4(n)$ ，用图解法求 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

解 按照(1.4.11)式写出卷积公式：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m)R_4(n-m)$$

首先画出 $R_4(n)$ 、 $R_4(m)$ 的波形，如图 1.4.2(a)、(b)所示。

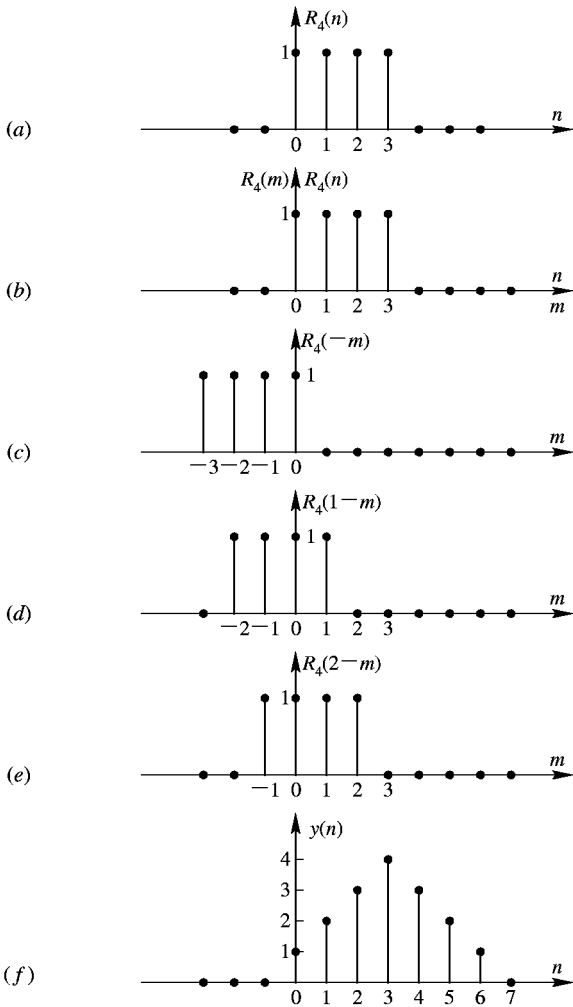


图 1.4.2 例 1.4.1 图

(1) 令 $n=0$, 画出 $R_4(-m)$, 即将 $R_4(m)$ 进行翻转, 如图 1.4.2(c) 所示, 将图 1.4.2(b)、(c) 两图波形相同 m 的序列值对应相乘, 再相加, 得到 $y(0)=1$ 。

(2) 令 $n=1$, 画出 $R_4(1-m)$, 即将上图波形右移一位, 如图 1.4.2(d) 所示, 将图 1.4.2(b)、(d) 两图相同 m 的序列值对应相乘, 再相加, 得到 $y(1)=2$ 。

(3) 令 $n=2$, 画出 $R_4(2-m)$ 波形, 即将上图右移一位, 如图 1.4.2(e) 所示, 和上面做法一样得到 $y(2)=3$ 。

(4) 令 $n=3, 4, \dots$, 重复上面的做法, 得到 $y(n)$, 最后画出 $y(n)$ 波形, 如图 1.4.2(f) 所示。

该例说明图解法容易理解, 但是对于复杂的波形难以应用, 适应于简单波形, 且得到的是用波形表示的解答, 不容易得到用公式表示的解答。解析法得到的是用公式表示的解答, 下面通过举例说明。

例 1.4.6 假设 $h(n)=a^n u(n)$, $0 < a < 1$, $x(n)=u(n)$, 用解析法求 $y(n)=h(n) * x(n)$ 。

解 首先写出 $y(n)$ 的线性卷积公式:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m) u(n-m)$$

上式中的 $u(m)$ 和 $u(n-m)$ 的非零值均为 1, 这里关键是找出求和号的上、下限。上、下限由求和号中的具体序列确定。该例题中的 $u(m)$ 限制非零值区间在 $m \geq 0$, $u(n-m)$ 限制非零值区间在 $m \leq n$, 因此可推出下限是 0, 上限是 n , 这样得到:

$$y(n) = \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

例 1.4.7 设 $x(n)=R_4(n)$, $h(n)=R_4(n)$, 用解析法求 $y(n)=x(n) * h(n)$ 。

解

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_4(m) R_4(n-m)$$

上式中, 矩形序列的幅度值为 1, 长度为 4, 求解上式主要根据矩形序列的非零值区间确定求和号的上、下限, $R_4(m)$ 的非零区间为: $0 \leq m \leq 3$, $R_4(n-m)$ 的非零区间为: $0 \leq n-m \leq 3$, 或者写成: $n-3 \leq m \leq n$, 这样 $y(n)$ 的非零区间要求 m 同时满足下面两个不等式:

$$\begin{aligned} 0 &\leq m \leq 3 \\ n-3 &\leq m \leq n \end{aligned}$$

由上面公式表明 m 的取值还和 n 的取值有关, 需要将 n 作分段的假设。按照上式, 当 n 变化时, m 应该按下式取值:

$$\max\{0, n-3\} \leq m \leq \min\{3, n\}$$

当 $0 \leq n \leq 3$ 时, m 的下限应该是 0, 上限应该是 n ; 当 $4 \leq n \leq 6$ 时, m 的下限应该是 $n-3$, 上限应该是 3; 当 $n < 0$ 或 $n > 6$ 时, 上面的不等式不成立, 因此 $y(n)=0$ 。这样将 n 分成三种情况计算如下:

(1) $n < 0$ 或 $n > 6$ 时,

$$y(n) = 0$$

(2) $0 \leq n \leq 3$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=0}^n 1 = n+1$$

(3) $4 \leq n \leq 6$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=n-3}^3 1 = 7-n$$

将 $y(n)$ 写成一个表达式, 如:

$$y(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 7-n & 4 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

上式的波形图和例 1.4.5 得到的 $y(n)$ 波形图是一样的。

例 1.4.8 证明下面两公式成立:

$$(1) \quad x(n) = x(n) * \delta(n) \quad (1.4.13)$$

$$(2) \quad x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0) \quad (1.4.14)$$

证明

$$(1) \quad x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)$$

式中, 只有当 $n=m$ 时, $x(n)$ 才取非零值。将 $n=m$ 代入上式中, 得到:

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

证明完毕。

$$(2) \quad x(n) * \delta(n-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-n_0-m)$$

式中, 只有当 $m=n-n_0$ 时, $x(n)$ 才取非零值。将 $m=n-n_0$ 代入上式中, 得到:

$$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

证明完毕。

(1.4.13)、(1.4.14) 式是很有用的两个公式。第一个公式说明序列卷积单位脉冲序列等于序列本身, 第二个公式说明序列卷积一个移位 n_0 的单位脉冲序列, 相当于将该序列移位 n_0 。

在卷积运算中最基本的运算是翻转、移位、相乘和相加, 其中移位指的是左右平行移位, 这就是称它为线性卷积的原因。下面介绍卷积运算的几个性质。

(1) 卷积运算服从交换率, 用公式表示为

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1.4.15)$$

(2) 卷积运算服从结合率, 用公式表示为

$$x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (1.4.16)$$

(3) 卷积运算服从分配率, 用公式表示为

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.4.17)$$

下面介绍串并联系统, 以及它们的等效系统。

1.4.4 时域离散线性时不变系统的串并联系统

1. 串联系统

假设有两个系统, 其单位脉冲响应分别用 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 表示, 将这两个系统进行串联

(即级联)，如图 1.4.3(a) 所示。第一个系统 $h_1(n)$ 的输出用 $y_1(n)$ 表示，那么根据线性时不变系统输出和输入之间的计算关系，得到：

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y(n) &= y_1(n) * h_2(n) \\ y(n) &= x(n) * h_1(n) * h_2(n) \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

根据卷积计算服从交换率，(1.4.18) 式中的 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 可以交换，得到：

$$y(n) = x(n) * h_2(n) * h_1(n) \quad (1.4.19)$$

按照上式，串联系统中，可以将两个串联的系统交换位置，如图 1.4.3(b) 所示，此时输出不改变。如果令

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

那么

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

上式中， $h(n)$ 称为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 串联后的等效系统，该等效系统的单位脉冲响应等于两个串联系统分别的单位脉冲响应的卷积，如图 1.4.3(c) 所示。依次类推，如果有 n 个系统串联，那么它的总系统的单位脉冲响应等于 n 个分系统单位脉冲响应的卷积。

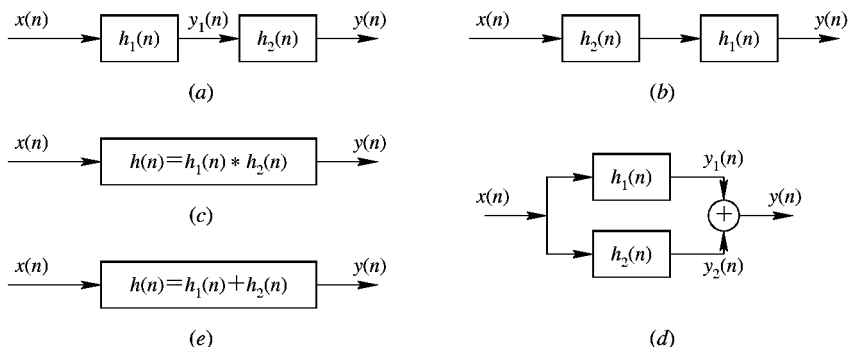


图 1.4.3 串并联系统

2. 并联系统

假设有两个系统，其单位脉冲响应分别用 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 表示，将这两个系统进行并联，如图 1.4.3(d) 所示。下面求它的等效系统。按照图 1.4.3(d) 推导如下：

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) * h_1(n) \\ y_2(n) &= x(n) * h_2(n) \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$

按照线性卷积服从分配率，上边最后一式可写成下式：

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \quad (1.4.20)$$

令

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

那么

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

上式中 $h(n)$ 就是要求的两个系统并联的等效系统的单位脉冲响应，它等于两个并联系统的单位脉冲响应的相加。依次类推，如果有 n 个系统并联，那么它的总系统的单位脉冲响应等于 n 个分系统单位脉冲响应相加，如图 1.4.3(e) 所示。

例 1.4.9 在图 1.4.4 中, 系统 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 串联, 设

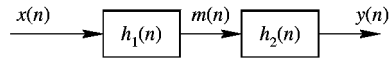


图 1.4.4 例 1.4.5 图

$$x(n) = u(n)$$

$$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$$

$$h_2(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

求系统的输出 $y(n)$ 。

解 系统 $h_1(n)$ 的输出用 $m(n)$ 表示, 可以先求 $m(n)$, 再求 $y(n)$ 。

$$\begin{aligned} m(n) &= x(n) * h_1(n) = u(n) * [\delta(n) - \delta(n-4)] \\ &= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-4) \\ &= u(n) - u(n-4) \\ &= R_4(n) \\ y(n) &= m(n) * h_2(n) = R_4(n) * a^n u(n) \\ &= a^n u(n) * [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)] \\ &= a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1) + a^{n-2} u(n-2) + a^{n-3} u(n-3) \end{aligned}$$

在以上公式推导中, 用到了卷积运算服从的交换率、分配率, 以及序列卷积一个移位 n_0 的单位脉冲序列, 等于序列移位 n_0 的重要性质。

例 1.4.10 按照图 1.4.5 描绘的时域离散时不变系统, 试用 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 、 $h_3(n)$ 、 $h_4(n)$ 表示系统总的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

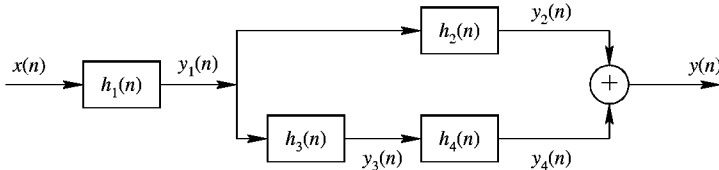


图 1.4.5 例 1.4.6 图

解 令: 分系统 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 、 $h_3(n)$ 、 $h_4(n)$ 对应的输出为 $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$ 、 $y_3(n)$ 、 $y_4(n)$ 。先写出各分系统的输出:

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n)$$

$$y_2(n) = y_1(n) * h_2(n)$$

$$y_3(n) = y_1(n) * h_3(n)$$

$$y_4(n) = y_3(n) * h_4(n)$$

总的输出为

$$y(n) = y_2(n) + y_4(n)$$

将各分系统的输出代入, 得到:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) * h_2(n) + y_3(n) * h_4(n) \\ &= x(n) * h_1(n) * h_2(n) + y_1(n) * h_3(n) * h_4(n) \\ &= x(n) * h_1(n) * h_2(n) + x(n) * h_1(n) * h_3(n) * h_4(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n) * h_4(n)] \end{aligned}$$

观察上式, 系统总的单位脉冲响应为上式中中方括号中的那一部分, 即

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n) * h_4(n)$$

或者利用卷积服从分配率，可以写成

$$h(n) = h_1(n) * [h_2(n) + h_3(n) * h_4(n)]$$

其实，通过串并联系统的原理，即：两个分系统串联，它的总等效系统的单位脉冲响应等于两个分系统单位脉冲响应的卷积；两个分系统并联，它的总等效系统的单位脉冲响应等于两个分系统单位脉冲响应相加，就可以一次写出该例题的答案。方括号中的部分是 $h_3(n)$ 、 $h_4(n)$ 串联后，再和 $h_2(n)$ 进行并联后的等效单位脉冲响应，方括号代表的系统再和分系统串联，即和 $h_1(n)$ 卷积后，得到总的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

1.4.5 时域离散系统的因果性和稳定性

系统的因果性指的是系统的可实现性。具体地说就是，如果系统 n 时刻的输出只取决于 n 时刻以及 n 时刻以前的输入信号，而和 n 时刻以后的输入信号无关，则说该系统具有因果性质，或者称该系统为因果系统。如果 n 时刻的输出还取决于 n 时刻以后的输入信号，在时间上违背了因果性，系统无法实现，则该系统被称为非因果系统。比如，输出 $y(n)$ 和输入 $x(n)$ 之间满足下面关系式：

$$y(n) = x(n) + x(n+1)$$

考察上式， n 时刻的输出决定于 n 时刻和 $n+1$ 时刻的输入信号，这里 $n+1$ 时刻还没有到来， $n+1$ 时刻的信号值没有加到系统，因此不可能得到系统输出，说明该系统是非因果系统。如果把上式中的 $x(n+1)$ 改成 $x(n-1)$ ，那么系统变成因果系统。

时域离散系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应满足下式：

$$h(n) = 0 \quad n < 0 \quad (1.4.21)$$

对于上式，我们不进行证明，只从概念上理解。单位脉冲响应是当系统输入信号为单位脉冲序列 $\delta(n)$ 时，系统的零状态输出响应。而 $\delta(n)$ 只有在 $n=0$ 时，才取非零值 1，这样，当 $n < 0$ 时，对于一个因果可实现系统不可有输出。一般将满足(1.4.21)式的序列称为因果序列，因此因果系统的单位脉冲响应必然是因果序列。

虽然因果系统是很重要的，但所有具有实际意义的系统不一定是由因果系统构成的。我们知道计算机或者专用数字信号处理系统都具有存储能力，在一些数据处理系统中待处理的数据早已记录并保存起来，那么处理这些数据不一定限制用因果系统处理，例如语音处理、气象中的信号处理、股票市场分析等。具体地说，如果要研究股票市场中某个数据的慢变化过程，可以采用下面系统对数据进行平滑：

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

式中 M 是整数且为常数。当 k 取负值时， n 时刻的输出就和 n 时刻以后的输入信号有关，因此这一处理系统是非因果系统，但是输入信号的数据早已存储起来，仍然可以进行处理。

系统的稳定性也是系统的一个重要性质。一个稳定系统必然是：如果输入信号有界，其输出必然有界，指的是信号的幅度不是无限大，或者说幅度总是小于一个常数，例如 B 。观察下面描写的系统：

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1)$$

输出小于等于 3 倍的输入，如果输入有界，输出一定有界，这是一个稳定的系统。再观察下面系统：

$$y(n) = nx(n)$$

该系统的输出会随着 n 的增加而增加，即使输入有界，系统的输出也会趋于无限大，这是一个不稳定系统。系统稳定的充分必要条件是该系统的单位脉冲响应绝对可和，即满足下式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.4.22)$$

该条件的证明可参考文献[1]。

例 1.4.11 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$ ，式中 a 是实常数。试分析该系统的因果稳定性。

解 因为单位脉冲响应中含有 $u(n)$ ，因此当 $n < 0$ 时， $h(n) = 0$ ，这是一个因果系统。要判断系统是否稳定，需判断 $h(n)$ 是否绝对可和，即是否满足 (1.4.22) 式，下面进行推导。

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} |a|^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - |a|^N}{1 - |a|} \end{aligned}$$

只有当 $|a| < 1$ 时，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1 - |a|}$$

因此系统稳定的条件是 $|a| < 1$ ，否则系统不稳定。下面再进一步分析当系统稳定或者不稳定时，它的单位脉冲响应有什么特点。当系统稳定时，满足条件 $|a| < 1$ ，它的 $h(n)$ 随着 n 的加大，模值愈来愈小。经常把这种模值随 n 加大而减小的序列称为收敛序列。因此，单位脉冲响应是收敛序列的系统稳定。相反，不满足条件 $|a| < 1$ ，系统不稳定，它的 $h(n)$ 随着 n 的加大，其模值愈来愈大。经常把这种模值随 n 的加大而增大的序列称为发散序列。单位脉冲响应是发散序列的系统不稳定。

例 1.4.12 设系统的单位脉冲响应 $h(n) = u(n)$ ，求系统对于任意输入序列 $x(n)$ 的输出 $y(n)$ ，并分析系统的因果性和稳定性。

$$\text{解} \quad y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) u(n-k)$$

因为当 $n-k < 0$ 时， $u(n-k) = 0$ ； $n-k \geq 0$ 时， $u(n-k) = 1$ ，因此求和限为 $k \leq n$ ，这样得到：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

上式表明该系统是一个累加器，它将输入序列从加上之时开始，逐项累加，一直加到 n 时刻为止。下面分析它的因果稳定性：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty$$

因此系统是一个不稳定系统。很明显，该系统是一个因果系统。最后得到结论：累加器是

一个不稳定的因果系统。工程中一般用的是有限项的累加器。

1.5 线性常系数差分方程

描述或者研究一个系统可以不管系统内部结构如何,只描述或研究系统的输出和输入之间的关系。对于时域离散系统,输出和输入之间经常用的是差分方程,而对于线性时不变系统,常用的是线性常系数差分方程。本节先介绍什么是线性常系数差分方程,再介绍它的解法。

一个 N 阶线性常系数差分方程用下式表示:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (1.5.1)$$

式中, $x(n)$ 、 $y(n)$ 分别表示输入信号和输出信号。(1.5.1)式的特点是: a_i 、 b_i 都是常数,且 $x(n-i)$ 和 $y(n-k)$ 都只有一次幂,也没有相互相乘的项,例如没有 $x(n-1)y(n-2)$ 的项。也就是因为有这样的特点,称它为线性常系数差分方程。这里 N 阶的意思指的是上式中 $y(n-k)$ 项中,最大的 k 和最小的 k 之间的差值。在上式中,最大的 k 为 N ,最小的 k 为 0,因此称它为 N 阶的差分方程。例如, $y(n)=0.5y(n-1)+x(n)$ 就是一个一阶的线性常系数差分方程。

观察(1.5.1)式,如果已知输入信号 $x(n)$,包括 $x(n-1)$ 、 $x(n-2)$ 、……、 $x(n-M)$ 也已知,以及和系统性质有关的所有系数 a_i 、 b_i ,要求出 $y(n)$,还需要知道 N 个初始条件。下面用例题解释为什么还需要知道 N 个初始条件。

例 1.5.1 已知二阶线性常系数差分方程如下式所示,试分析它所需要的初始条件:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.5y(n-2) + x(n)$$

解 将 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ 分别代入上式,得到:

$$y(0) = 0.9y(-1) + 0.5y(-2) + x(0)$$

$$y(1) = 0.9y(0) + 0.5y(-1) + x(1)$$

$$y(2) = 0.9y(1) + 0.5y(0) + x(2)$$

$$y(3) = 0.9y(2) + 0.5y(1) + x(3)$$

再观察上面四个公式,要求出 $y(0)$,必须先知道 $y(-1)$ 和 $y(-2)$,如果求出 $y(0)$, $y(n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 都能求出。很明显,需要预先知道两个初始条件,即 $y(-1)$ 和 $y(-2)$ 。这是一个二阶差分方程,需要两个初始条件;可以以此类推,解 N 阶差分方程,需要 N 个初始条件。

解差分方程的方法有三种,它们是递推法、经典法和变换域法。其中只有递推法适合用计算机求解。为简单,本书只介绍递推法,其他解法请参考文献[1]。

按照(1.5.1)式,求 n 时刻的输出,只要知道输入信号和 N 个初始条件,可以求出 n 时刻的输出。如果将(1.5.1)式中的 n 用 $n+1$ 代替,得到:

$$y(n+1) = \sum_{i=0}^M b_i x(n+1-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n+1-k)$$

利用上式可以求出 $n+1$ 时刻的输出 $y(n+1)$ 。当然,计算中要用到刚刚算出的 $y(n)$ 。类似地, $n+2$ 、 $n+3$ 、……时刻的输出都可以这样递推求出。实际上 N 阶差分方程本身就是一

个适合递推算法的方程。下面举例说明如何利用递推法求解差分方程。

例 1.5.2 设因果系统用差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 描述, $0 < a < 1$, 输入信号 $x(n) = \delta(n)$, 求输出信号 $y(n)$ 。

解 该系统差分方程是一个一阶差分方程, 需要一个初始条件。下面假设两种初始条件, 顺便分析初始条件对输出的影响。

(1) 设初始条件:

$$\begin{aligned} y(-1) &= 0 \\ y(n) &= ay(n-1) + x(n) \\ n=0 \quad y(0) &= ay(-1) + \delta(0) = 1 \\ n=1 \quad y(1) &= ay(0) + \delta(1) = a \\ n=2 \quad y(2) &= ay(1) + \delta(2) = a^2 \\ &\dots \\ n=n \quad y(n) &= a^n \end{aligned}$$

最后得到:

$$y(n) = a^n u(n)$$

(2) 设初始条件:

$$\begin{aligned} y(-1) &= 1 \\ n=0 \quad y(0) &= ay(-1) + \delta(0) = 1 + a \\ n=1 \quad y(1) &= ay(0) + \delta(1) = (1+a)a \\ n=2 \quad y(2) &= ay(1) + \delta(2) = (1+a)a^2 \\ &\dots \\ n=n \quad y(n) &= (1+a)a^n \end{aligned}$$

最后得到:

$$y(n) = (1+a)a^n u(n)$$

该例说明, 差分方程相同, 输入信号也一样, 但不同的初始条件会得到不同的系统输出。这里还要说明的是, 对于一个因果系统, 递推时应从输入信号加上时刻开始, 向 $n > 0$ 的方向递推, 初始条件应该从输入信号加上时刻以前, 且离该时刻最近的系统输出作为初始条件。该例中, 初始条件即是 $n = -1$ 时刻的系统输出, 即 $y(-1)$ 。当然如果没有限定是因果系统, 也可以向 $n < 0$ 的方向递推, 此时得到的是非因果系统输出。下面举例说明。

例 1.5.3 设系统用差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 描述, $0 < a < 1$, 输入信号 $x(n) = \delta(n)$ 。已知当 $n > 0$ 时, $y(n) = 0$, 求输出信号 $y(n)$ 。

解 因为例题中已假设 $n > 0$ 时, $y(n) = 0$, 只能向 $n < 0$ 方向递推, 先把差分方程写成下面形式:

$$\begin{aligned} y(n-1) &= a^{-1}[y(n) - \delta(n)] \\ n=1 \quad y(0) &= a^{-1}[y(1) - \delta(1)] = 0 \\ n=0 \quad y(-1) &= a^{-1}[y(0) - \delta(0)] = -a^{-1} \\ n=-1 \quad y(-2) &= a^{-1}[y(-1) - \delta(-1)] = -a^{-2} \\ &\dots \end{aligned}$$

按照上面递推规律, 归纳得到 $y(n-1) = -a^{n-1}$, 再用 n 代替式中的 $n-1$, 将最后的

结果写成

$$y(n) = -a^n u(-n-1)$$

观察上式, 由于初始条件限制, 确实得到的是一个非因果的输出信号。

一个系统的输入输出之间的关系用差分方程描述, 但是差分方程本身并不能确定系统是否是因果、线性、时不变系统。上面的例子已经说明因果性和初始条件有关, 下面仍用例子说明初始条件还影响系统的线性、时不变性质。

例 1.5.4 设因果系统用差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 描述, $0 \leq a < 1$, $y(-1) = 1$, 试分析该系统是否是线性、时不变系统。

解 为了分析系统是否具有线性、时不变性质, 在上面假设的初始条件下, 先分别求出系统对于以下三种不同输入信号的输出, 然后再分析判断。

(1) $x(n) = \delta(n)$, 系统的输出用 $y_1(n)$ 表示。

$$y_1(n) = ay_1(n-1) + \delta(n)$$

该情况在例 1.5.2 中已求出, 系统的输出为

$$y_1(n) = (1+a)a^n u(n)$$

(2) $x(n) = \delta(n-1)$, 系统的输出用 $y_2(n)$ 表示。

$$y_2(n) = ay_2(n-1) + \delta(n-1)$$

$$n=0 \quad y_2(0) = ay_2(-1) + \delta(-1) = a$$

$$n=1 \quad y_2(1) = ay_2(0) + \delta(0) = 1 + a^2$$

$$n=2 \quad y_2(2) = ay_2(1) + \delta(1) = (1+a^2)a$$

...

$$n \quad y_2(n) = (1+a^2)a^{n-1}$$

最后得到:

$$y_2(n) = (1+a^2)a^{n-1}u(n-1) + a\delta(n)$$

(3) $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$, 系统的输出用 $y_3(n)$ 表示。

$$y_3(n) = ay_3(n-1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$n=0 \quad y_3(0) = ay_3(-1) + \delta(0) + \delta(-1) = 1+a$$

$$n=1 \quad y_3(1) = ay_3(0) + \delta(1) + \delta(0) = 1+a+a^2$$

$$n=2 \quad y_3(2) = ay_3(1) + \delta(2) + \delta(1) = (1+a+a^2)a$$

...

$$n \quad y_3(n) = (1+a+a^2)a^{n-1}$$

最后得到:

$$y_3(n) = (1+a+a^2)a^{n-1}u(n-1) + (1+a)\delta(n)$$

由(1)和(2)得到:

$$y_1(n) = T[\delta(n)]$$

$$y_2(n) = T[\delta(n-1)]$$

$$y_1(n) = (1+a)a^n u(n)$$

$$y_2(n) = (1+a^2)a^{n-1}u(n-1) + a\delta(n)$$

观察 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 它们的输入信号类型相同, 只是 $y_2(n)$ 的输入信号比 $y_1(n)$ 输入

信号延时一个单位；如果是时不变系统， $y_2(n)$ 比 $y_1(n)$ 只是延时一个单位，但是

$$y_2(n) \neq y_1(n-1)$$

因此可断言这是一个时变系统。情况(3)的输入信号是情况(1)和情况(2)输入信号的相加信号，如果是线性系统，应具有线性叠加性质，但是

$$y_3(n) = T[\delta(n) + \delta(n-1)]$$

$$y_3(n) \neq y_1(n) + y_2(n)$$

$$y_3(n) \neq T[\delta(n)] + T[\delta(n-1)]$$

因此该系统也不是线性系统。但是如果将该例的初始条件改为 $y(-1)=0$ ，这时对应于上面的三种情况的输出信号为

$$y_1(n) = a^n u(n)$$

$$y_2(n) = a^{n-1} u(n-1)$$

$$\begin{aligned} y_3(n) &= (1+a)a^{n-1}u(n-1) + \delta(n) \\ &= a^{n-1}u(n-1) + a^n u(n-1) + \delta(n) \\ &= a^{n-1}u(n-1) + a^n u(n) \end{aligned}$$

请读者自己证明系统变成了线性、时不变系统。以上的分析说明系统的差分方程不能限定系统是否是因果、线性、时不变系统，它还和给定的初始条件有关。

最后介绍如何用差分方程确定系统的单位脉冲响应。我们已知道系统的单位脉冲响应是当系统加入 $\delta(n)$ 时的零状态响应，那么给定差分方程，只要令 $x(n)=\delta(n)$ ，初始条件为：当 $n<0$ 时， $y(n)=0$ ，解差分方程，得到的系统输出 $y(n)$ 即是单位脉冲响应 $h(n)$ 。下面举例说明。

例 1.5.5 假设系统的差分方程用下式描述，求其单位脉冲响应：

$$y(n) = x(n) + ax(n-1) + bx(n-2)$$

解 令 $x(n)=\delta(n)$ ，并代入上式，得到：

$$y(n) = \delta(n) + a\delta(n-1) + b\delta(n-2)$$

也可以表示成下式：

$$y(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a & n = 1 \\ b & n = 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

最后得到系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) + a\delta(n-1) + b\delta(n-2)$$

例 1.5.6 已知系统的差分方程为

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) + 0.8x(n-1)$$

求其单位脉冲响应。

解 令 $x(n)=\delta(n)$ ，并代入上式，得到：

$$\begin{aligned} y(n) &= ay(n-1) + \delta(n) + 0.8\delta(n-1) \\ n=0 \quad y(0) &= ay(-1) + \delta(0) + 0.8\delta(-1) = 1 \\ n=1 \quad y(1) &= ay(0) + \delta(1) + 0.8\delta(0) = 0.8 + a \end{aligned}$$

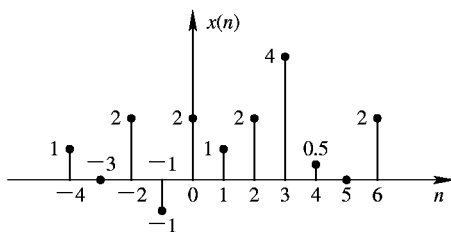
$$\begin{aligned}
 n=2 \quad & y(2) = ay(1) + \delta(2) + 0.8\delta(1) = (0.8+a)a \\
 n=3 \quad & y(3) = ay(2) + \delta(3) + 0.8\delta(2) = (0.8+a)a^2 \\
 & \dots \\
 n \quad & y(n) = (0.8+a)a^{n-1}
 \end{aligned}$$

最后得到：

$$h(n) = (0.8+a)a^{n-1}u(n-1) + \delta(n)$$

习 题

1. 模拟信号、时域离散信号和数字信号之间有什么不同点？
2. 用单位脉冲序列及其加权和表示如题 2 图所示的序列。



题 2 图

3. 给定信号：

$$x(n) = \begin{cases} 2n+5 & -4 \leq n \leq -1 \\ 6 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 画出 $x(n)$ 的波形，标上各序列值；
 - (2) 试用延迟的单位脉冲序列及其加权和表示 $x(n)$ 序列；
 - (3) 令 $x_1(n) = 2x(n-2)$ ，画出 $x_1(n)$ 的波形；
 - (4) 令 $x_2(n) = 2x(n+2)$ ，画出 $x_2(n)$ 的波形；
 - (5) 令 $x_3(n) = x(2-n)$ ，画出 $x_3(n)$ 的波形。
4. 判断下面的序列是否是周期序列，如是周期的，确定其周期。

$$(1) \quad x(n) = A \cos\left(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8}\right) \quad A \text{ 为常数}$$

$$(2) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{1}{8}n - \pi\right)}$$

5. 对题 2 图给出的 $x(n)$ ，要求：

- (1) 画出 $x(-n)$ 的波形；
- (2) 计算 $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ ，并画出 $x_e(n)$ 的波形；
- (3) 计算 $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ ，并画出 $x_o(n)$ 的波形；
- (4) 令 $x_1(n) = x_e(n) + x_o(n)$ ，将 $x_1(n)$ 和 $x(n)$ 进行比较，你能得出什么结论？

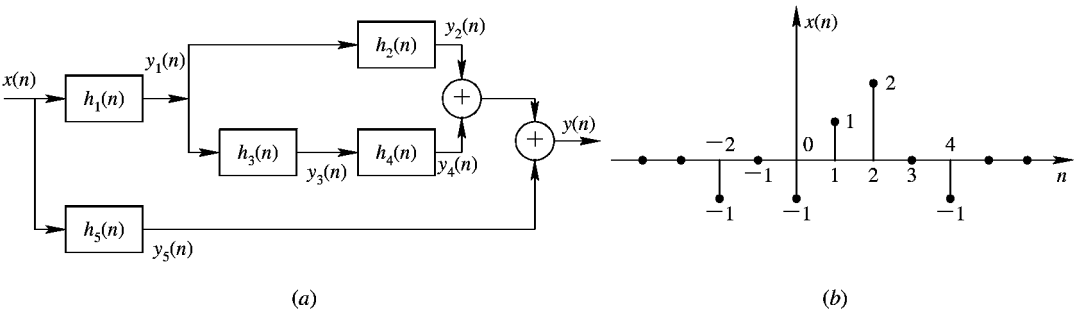
6. 以下序列是系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，试说明系统是否是：(a) 因果的；(b) 稳定的。

- (1) $\frac{1}{n^2}u(n)$
- (2) $\frac{1}{n!}u(n)$
- (3) $3^nu(n)$
- (4) $3^nu(-n)$
- (5) $0.3^nu(n)$
- (6) $0.3^nu(-n-1)$
- (7) $\delta(n+4)$

7. 假设系统的输入和输出之间的关系分别如下式所示，试分别分析系统是否是线性、时不变系统。

- (1) $y(n)=3x(n)+8$
- (2) $y(n)=x(n-1)+1$
- (3) $y(n)=x(n)+0.5x(n-1)$
- (4) $y(n)=nx(n)$

8. 按照题 8 图 (a) 完成下面各题：



题 8 图

- (1) 根据串并联系统的原理直接写出总的系统单位脉冲响应 $h(n)$ ；
- (2) 设

$$\begin{aligned} h_1(n) &= 4 \cdot 0.5^n[u(n) - u(n-3)] \\ h_2(n) &= h_3(n) = (n+1)u(n) \\ h_4(n) &= \delta(n-1) \\ h_5(n) &= \delta(n) - 4\delta(n-3) \end{aligned}$$

试求总的系统单位脉冲响应 $h(n)$ 。

(3) 如果 $x(n)$ 如题 8 图 (b) 所示，试定性画出题 8 图 (a) 所给出的系统的输出响应 $y(n)$ 。

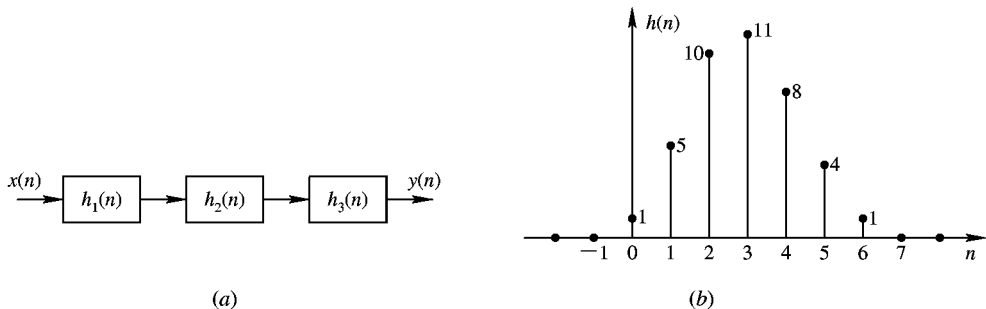
9. 由三个因果线性时不变系统串联如题 9 图 (a) 所示，已知分系统

$$h_2(n) = u(n) - u(n-2)$$

整个系统的单位脉冲响应如题 9 图 (b) 所示。完成下面各题：

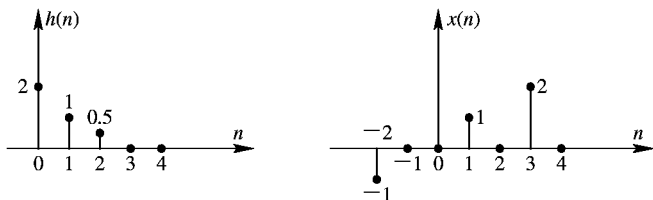
(1) 求分系统单位脉冲响应 $h_1(n)$;

(2) 如果输入为 $x(n] = \delta(n) - \delta(n-1)$, 求该系统的输出 $y(n)$ 。



题 9 图

10. 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 如题 10 图所示, 要求画出输出 $y(n)$ 的波形。



题 10 图

11. 证明线性卷积服从交换率、结合率和分配率, 即证明下面等式成立:

(1) $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

(2) $x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$

(3) $x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

12. 已知系统的输入 $x(n)$ 和单位脉冲响应 $h(n)$, 试求系统的输出 $y(n)$ 。

(1) $x(n) = \delta(n)$, $h(n) = R_5(n)$

(2) $x(n) = R_5(n)$, $h(n) = R_4(n)$

(3) $x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$, $h(n) = 2R_4(n)$

(4) $x(n) = \delta(n-2)$, $h(n) = 0.5^n R_3(n)$

(5) $x(n) = R_5(n)$, $h(n) = 0.5^n u(n)$

13. 已知因果系统的差分方程为 $y(n) = 0.5y(n-1) + x(n) + 0.5x(n-1)$, 求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

14. 设系统的差分方程为 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, $0 < a < 1$, $y(-1) = 0$, 分析系统是否是线性、时不变系统。

15. 设系统的单位脉冲响应 $h(n) = (3/8)0.5^n u(n)$, 系统的输入 $x(n)$ 是一些观察数据, 设 $x(n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, 试用递推法求系统的输出 $y(n)$ 。递推时设系统的初始状态为零。

第二章 时域离散信号和系统的 傅立叶变换分析方法

【本章重点和难点】

- (1) 傅立叶变换的正反变换定义、基本性质和定理。
 - (2) 周期序列的两种频域分析方法，即离散傅立叶级数和傅立叶变换。
 - (3) 序列： $1, \delta(n), a^n u(n), R_N(n), e^{j\omega_0 n}, \cos(\omega_0 n)$ 的傅立叶变换($2\pi/\omega_0$ 是有理数)。
 - (4) 利用傅立叶变换对系统进行频域分析。
-

2.1 引言

对信号和系统进行分析和研究可以在时间域也可以在频率域进行。前面第一章的内容是在时间域对信号和系统进行分析和研究。在时间域中，时域离散信号(序列) $x(n)$ 是序数 n 的函数，这里 n 可看成时间参量。时域离散系统的单位脉冲响应是系统在时间域的描述，线性常系数差分方程是时域离散系统输入输出之间关系的描述。当然，已知线性常系数差分方程可以求出系统的单位脉冲响应，线性常系数差分方程和单位脉冲响应都是对系统在时间域的描述方法。

在时间域对信号和系统进行分析和研究，比较直观，物理概念清楚，但仅在时间域分析研究并不完善，有很多问题在时间域分析研究不方便，或者说研究起来困难。例如有两个序列，从波形上看，一个变化快，另一个变化慢，但都混有噪声，希望分别用滤波器滤除噪声，但又不能损伤信号。从信号波形观察，时域波形变化快，意味着含有更高的频率，因此两种信号的频谱结构不同，那么对滤波器的通带范围要求也不同。为了设计合适的滤波器，需要分析信号的频谱结构，这样应该将时域信号转换到频率域，求出它的频域函数，再进行分析就方便多了。

本章学习的傅立叶变换和下一章要学习的 Z 变换都是将时域离散信号变换到频率域的重要的数学工具。两个变换工具不同的是，前者是将信号转换到实频域，后者是将信号转换到复频域。

2.2 序列傅立叶变换的定义

定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \text{FT}[x(n)] \quad (2.2.1)$$

上式称为序列 $x(n)$ 的傅立叶变换, 式中 FT 是 Fourier Transform 的缩写字母, 表示傅立叶变换, $X(e^{j\omega})$ 称为 $x(n)$ 频谱函数。虽然序列是时域离散函数, n 只能取整数, 但它的频谱函数却是数字频率 ω 的连续函数, 且一般是复函数, 它具体描述了信号在频率域的频谱分布。

傅立叶变换存在的充分必要条件是序列满足绝对可和的条件, 即满足下式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (2.2.2)$$

有限长序列一般满足绝对可和的条件, 但有些信号是不满足的。例如周期信号, 它的持续时间无限长, 因此不满足绝对可和的条件, 那么傅立叶变换不存在, 但是如果引进奇异函数, 就可以用奇异函数表示它的傅立叶变换。这部分内容留待以后学习。

傅立叶反变换的定义用下式表示:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \text{IFT}[X(e^{j\omega})] \quad (2.2.3)$$

式中, IFT 是 Inverse Fourier Transform 的缩写字母, 表示傅立叶反变换。反变换的作用是由频谱函数求原来的时间序列。(2.2.1)式和(2.2.3)式称为一对傅立叶变换表示式, 这两个表示式中, $X(e^{j\omega})$ 和 $x(n)$ 相互一一对应, 也就是说, 已知 $x(n)$ 可以惟一地求出频谱函数 $X(e^{j\omega})$; 反过来, 已知 $X(e^{j\omega})$ 可以惟一地求出 $x(n)$ 。频谱函数可用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \quad (2.2.4)$$

式中, $|X(e^{j\omega})|$ 称为频谱函数的幅度函数, 它是一个非负函数, 它具体描述频谱函数中各频率分量的幅度相对大小。 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 称为频谱函数的相位特性, 表示频谱函数中各频率分量的相位之间的关系。幅度函数和相位特性是很重要的两个函数, 幅度函数尤为重要。

例 2.2.1 已知 $x(n) = \delta(n)$, 利用傅立叶变换求它的频谱函数。

解 按照定义(2.2.1)式,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n}$$

因为只有在 $n=0$ 时, $\delta(n)=1$, 而对其他的 n , $\delta(n)=0$, 因此将 $n=0$ 带入上式中, 可得到:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} \Big|_{n=0} = 1$$

上式的结果说明, $\delta(n)$ 的频谱函数在整个频率轴上保持一个常数 1。所有的频率分量均相等, 相位函数在整个频率轴上为 0。它的幅度特性如图 2.2.1 所示。

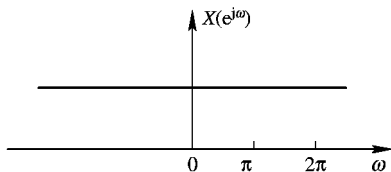


图 2.2.1 $\delta(n)$ 的幅度特性

例 2.2.2 设 $x(n)=R_N(n)$ ，求 $x(n)$ 的傅立叶变换。

解

$$\begin{aligned} x(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

假设 $N=4$ ，将 $N=4$ 代入上式，得到：

$$x(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega/2} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

信号的幅度特性和相位特性随 ω 的变化曲线如图 2.2.2 所示。

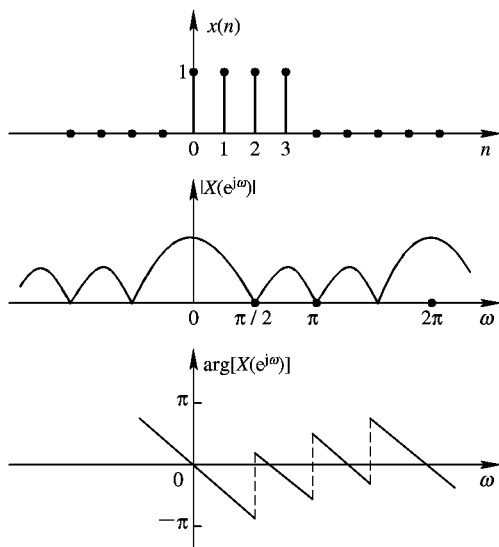


图 2.2.2 信号 $R_4(n)$ 的幅度特性和相位特性

2.3 序列傅立叶变换的性质及定理

序列傅立叶变换的性质及定理在实际应用中是很重要的。

2.3.1 周期性

将傅立叶变换的定义重写如下：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

式中 n 取整数，且式中的指数函数是一个以 2π 为周期的函数，因此下式成立：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi M)n} = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \quad M \text{ 为任意整数} \quad (2.3.1)$$

上式表明序列的傅立叶变换是频率 ω 的周期函数，周期是 2π 。由于序列的频谱函数是以 2π 为周期的，因此在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pm 2\pi M$ (M 为整数) 附近的频谱分布应该是相同的。在 $\omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 点上表示信号的直流分量，离开这些点愈远，其频率应该愈高，但又是以 2π 为周期，可以推论最高频率是在 $\omega=\pi$ 处。这里序列的直流分量是指如图 2.3.1 所示的时间波形，这个波形可以看成是一个直流连续信号采样得到的。另外，我们知道一个时间波形变化愈快，意味着它包含的频率愈高，对于序列变化最快的波形应该是如图 2.3.2 所示的波形。这个波形的特点是幅度从 1 跳到 -1，再从 -1 跳到 1，这是一个周期序列，周期为 2，不可能有比这变化更快的信号，因此它的频率应该最高。关于它的频谱函数，由于不服从绝对可和的条件，不能用 (2.2.1) 式来求。关于周期信号的傅立叶变换将在后面介绍。

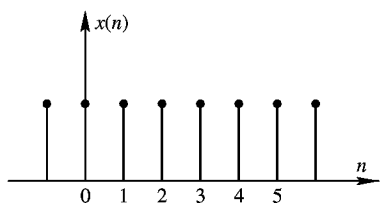


图 2.3.1 序列直流分量的时间波形

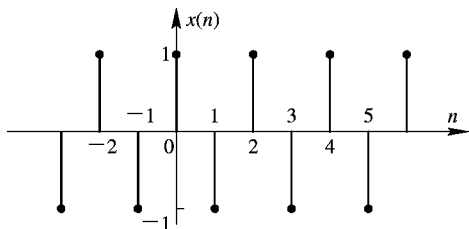


图 2.3.2 变化最快的时域离散信号

在图 2.2.2 中，幅度特性清楚表示频谱函数以 2π 为周期的周期性，频率为 0 和 $\pm 2\pi M$ (M 为整数) 处的幅度最高，说明 $R_N(n)$ 的低频分量较强。由于频谱函数以 2π 为周期，因此一般分析频率范围中的一个周期就够了，一般选 0 到 2π 。

2.3.2 线性性质

傅立叶变换是线性变换，线性变换指的是下面公式成立：

$$\text{假设 } X_1(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_1(n)], \quad X_2(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_2(n)]$$

$$\text{那么 } \text{FT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (2.3.2)$$

式中 a, b 是常数。

2.3.3 时移性和频移性

傅立叶变换的时移性指的是，如果信号延时 n_0 ，那么它的傅立叶变换相应地增加相位移 $-\omega n_0$ ；频移性指的是，如果信号的傅立叶变换在频率轴上位移 ω_0 ，那么时间域信号相应地增加相角 $\omega_0 n$ 。分别用公式表示如下：

$$\text{假设 } X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$$

$$\text{则 } \text{FT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (2.3.3)$$

$$\text{FT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j\omega - \omega_0}) \quad (2.3.4)$$

(2.3.3) 式和 (2.3.4) 式分别称为傅立叶变换的时移性和频移性。

例 2.3.1 在例 2.2.2 中已求出 $x(n) = R_N(n)$ 的傅立叶变换为

$$x(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

试求 $y(n) = x(n - n_0) = R_N(n - n_0)$ 的傅立叶变换。

$$\text{解} \quad Y(e^{j\omega}) = \text{FT}[R_N(n - n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n - n_0) e^{-j\omega n}$$

$$\text{令} \quad n' = n - n_0, \text{ 即 } n = n' + n_0$$

$$\text{则} \quad Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n') e^{-j\omega(n' + n_0)} = e^{-j\omega n_0} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} R_N(n') e^{-j\omega n'}$$

将上式与例 2.2.2 的推导对比, 或者按照傅立叶变换的基本定义, 可以得到:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

上面例题是按照基本定义进行求解的, 以后此类问题可以直接按照傅立叶变换的性质求解。

2.3.4 共轭对称性

首先复习关于共轭对称的概念。对于任意函数取共轭是将虚数部分乘以 -1 , 或者说将凡是带 j 的部分乘以 -1 。当然, 实数的共轭仍然是实数本身。例如, 复数 $x = a + jb$, 式中 a, b 是实常数, 如果取它的共轭, 则得到 $x^* = a - jb$ 。又例如, 复序列 $x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$, 取它的共轭, 则得到 $x^*(n) = e^{-j\omega n} = \cos(\omega n) - j \sin(\omega n)$ 。再例如 $y(n) = j e^{j\omega n}$, 取共轭则得到 $y^*(n) = -j e^{-j\omega n}$ 。另外, 如果实序列 $x(n)$ 服从公式 $x(n) = x(-n)$, 则称 $x(n)$ 是一个对称序列, 如果服从下面公式:

$$x(n) = x^*(-n) \quad (2.3.5)$$

则称 $x(n)$ 是一个共轭对称序列。如果服从下式:

$$x(n) = -x^*(-n) \quad (2.3.6)$$

则称为共轭反对称序列。以上是用时间域信号说明共轭对称的概念, 对频域函数也有相同的共轭对称的概念。假设频域函数 $X(e^{j\omega})$ 服从下式:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.3.7)$$

则称 $X(e^{j\omega})$ 是一个共轭对称函数。如果服从下式:

$$X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.3.8)$$

则称为共轭反对称函数。

例 2.3.2 试分析 $x(n) = e^{j\omega n}$ 的对称性。

解 这是一个复序列。先分析是否具有对称性, 将 $x(n)$ 的 n 用 $-n$ 代替, 得到:

$$x(-n) = e^{-j\omega n}$$

由于 $x(n) \neq x(-n)$, 因此它不具有对称性。但对上式再取共轭, 得到:

$$x^*(-n) = e^{j\omega n}$$

将上式和原信号对比, 得到 $x(n) = x^*(-n)$, 因此该信号具有共轭对称性。如果将信号用欧拉公式展开, 则得到:

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$$

观察上式, 它的实部是一个偶函数, 虚部是一个奇函数。可以证明, 具有共轭对称性的函数, 它的实部都是偶函数, 虚部都是奇函数。另外, 也可以证明它的模是偶函数。

例 2.3.3 试分析 $y(n) = j e^{j\omega n}$ 的对称性。

解 先分析它是否是对称函数, 将式中的 n 用 $-n$ 代替, 得到:

$$y(-n) = j e^{-j\omega n}$$

$$y(n) \neq y(-n)$$

上式说明该函数不是对称函数。如果再对 $y(-n)$ 取共轭，得到：

$$y^*(-n) = -j e^{j\omega n}$$

$$y(n) = -y^*(-n)$$

上式说明 $y(n)$ 是一个共轭反对称函数。如果再用欧拉公式展开，得到：

$$y(n) = -\sin(\omega n) + j \cos(\omega n)$$

观察上式，它的实部是一个奇函数，而虚部是一个偶函数，而且它的模仍然是 1，是一个偶函数。

这是一个例题，但得到的结论却具有普遍性。

下面分析实序列傅立叶变换的对称性。

假设实序列用 $x(n)$ 表示，它的傅立叶变换用下式表示：

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

将上式中的 ω 用 $-\omega$ 代替，得到：

$$x(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n}$$

然后再对上式取共轭，得到：

$$x^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

观察上式，上式的右边就是原信号 $x(n)$ 的傅立叶变换，因此得到：

$$x(e^{j\omega}) = x^*(e^{-j\omega})$$

对照(2.3.7)式，完全一样，可得到结论：实序列的傅立叶变换具有共轭对称性质。具有共轭对称性就意味着它的实部是偶函数，虚部是奇函数，模是偶函数。

对于一般的复序列 $x(n)$ ，可以分解成实部和虚部，实部用下标 r 表示，虚部用下标 i 表示，得到：

$$x(n) = x_r(n) + j x_i(n)$$

上式中 $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 都是实序列。前面已经分析出实序列的傅立叶变换具有共轭对称性，因此一般复序列的实部对应的傅立叶变换具有共轭对称性。下面要分析实序列乘上 j 以后，它的傅立叶变换具有什么对称性。按照基本定义分析如下：

$$X_o(e^{j\omega}) = \text{FT}[j x_i(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j x_i(n) e^{-j\omega n}$$

将上式中的 ω 用 $-\omega$ 代替，再取共轭，得到：

$$X_o^*(e^{-j\omega}) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} j x_i(n) e^{-j\omega n}$$

由上面两式得到：

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

由上式得到结论：实序列乘以 j 以后的傅立叶变换，具有共轭反对称性。

可以将以上的分析归纳如下：

将一般复序列写成下式：

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \quad (2.3.9)$$

式中, $x_r(n)$ 表示实部, $x_i(n)$ 表示虚部, 且它们都是实序列。对上式进行傅立叶变换, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (2.3.10)$$

式中

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)], \quad X_e(e^{j\omega}) = \text{FT}[x_r(n)], \quad x_o(e^{j\omega}) = \text{FT}[jx_i(n)]$$

根据上面分析, $X_e(e^{j\omega})$ 具有共轭对称性, $X_o(e^{j\omega})$ 具有共轭反对称性。具有共轭对称性的函数 $X_e(e^{j\omega})$ 的实部是偶函数, 虚部是奇函数, 模 $|X_e(e^{j\omega})|$ 是偶函数。具有共轭反对称性的函数 $X_o(e^{j\omega})$ 的实部是奇函数, 虚部是偶函数, 模 $|X_o(e^{j\omega})|$ 也是偶函数。经常称 $X_e(e^{j\omega})$ 是 $X(e^{j\omega})$ 的共轭对称分量, $X_o(e^{j\omega})$ 是 $X(e^{j\omega})$ 的共轭反对称分量。

2.3.5 时域卷积定理

我们已经知道线性非时变系统的输出 $y(n)$ 等于它的输入 $x(n)$ 和该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的时域卷积, 用公式表示如下:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (2.3.11)$$

下面推导 $y(n)$ 、 $x(n)$ 、 $h(n)$ 的傅立叶变换应满足的关系。

$$Y(e^{j\omega}) = \text{FT}[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n}$$

将(2.3.11)式代入上式, 得到:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)e^{-j\omega n}$$

令 $k=n-m$, 则

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k)e^{-j\omega k}e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \\ &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

上式说明, 两序列满足卷积关系, 它们分别的频域函数, 即分别的傅立叶变换则满足相乘关系。此定理表示线性非时变系统的输出信号的傅立叶变换等于输入信号傅立叶变换和系统的传输函数相乘。或者简单地说, 两信号若在时域服从卷积关系, 则在频域也服从卷积关系。

2.3.6 频域卷积定理

该定理表示: 如果两个时域信号服从相乘的关系, 它们分别的频域函数则服从卷积关系, 用下面关系式表示:

$$y(n) = x(n)h(n) \quad (2.3.13)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (2.3.14)$$

证明如下:

$$y(e^{j\omega}) = \text{FT}[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)e^{-j\omega n}$$

将式中的 $h(n)$ 用它的傅立叶变换的反变换表示，如下式：

$$y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) d\theta \right] e^{-j\omega n}$$

交换积分和求和的次序，得到：

$$\begin{aligned} y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} e^{j\theta n} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \end{aligned}$$

上式中方括号部分是 $x(n)$ 的傅立叶变换，只是将 ω 用 $\omega - \theta$ 代替，因此得到：

$$y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

我们观察上式，两个频域函数 $H(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 放在积分号中时，前一个将自变量 ω 变成 θ ，后一个将 ω 变成 $\omega - \theta$ ，再对 θ 进行积分，这正是频域函数的线性卷积公式，只是前面多了一个因子 $1/(2\pi)$ ，因此可将上式写成下式：

$$y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})$$

2.3.7 帕斯维尔 (Parseval) 定理

帕斯维尔定理告诉我们信号在时域的总能量和频域函数的关系，该定理用下式表示：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.3.15)$$

该定理可以利用上面的频域卷积定理进行证明。证明如下：

$$y(n) = |x(n)|^2 = x(n)x^*(n)$$

上式的傅立叶变换既然是 $x(n)$ 与 $x^*(n)$ 乘积的傅立叶变换，利用频域卷积定理，应该等于 $x(n)$ 与 $x^*(n)$ 分别的傅立叶变换的卷积，用(2.3.14)式描述。下面先求 $x^*(n)$ 的傅立叶变换。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n} \right]^* = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2.3.16)$$

按照(2.3.14)式，得到：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \text{FT}[x(n)x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) X^*(e^{-j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

令 $\omega=0$ ，由上式得到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) X^*(e^{j\theta}) d\theta$$

因此得到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

该定理按照(2.3.15)式，左边是信号在时域的总能量，右边应该是信号在频域的总能量。这里频域的总能量是指 $|X(e^{j\omega})|^2$ 在一个周期 $(-\pi \sim \pi)$ 中的积分再乘以 $1/(2\pi)$ 。

表 2.3.1 综合了序列傅立叶变换的性质和定理，这些性质和定理在分析问题和实际应用中是很重要的。

表 2.3.1 序列傅立叶变换的性质与定理

序 列	傅立叶变换	说 明
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$	
$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$	
$x(n)$	$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi M)})$ ， M 是整数	傅立叶变换的周期性
$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$ ， $a、b$ 是常数	傅立叶变换的线性性质
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$	傅立叶变换的时移性质
$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	傅立叶变换的频移性质
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$	
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$	
$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$	时域卷积定理
$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$	频域卷积定理
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	帕斯维尔定理
$x(n)$ 实序列	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$	傅立叶变换的共轭对称性
$jx(n)$ 实序列	$X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{-j\omega})$	傅立叶变换的共轭反对称性

2.4 周期序列的频域分析方法

周期序列因为不满足(2.2.2)式绝对可和的条件，其傅立叶变换不存在。它的频域分析可以用两种方法进行，一种是采用离散傅立叶级数进行表示，另一种是引入奇异函数用傅立叶变换表示。下面分别进行介绍。

2.4.1 周期序列的离散傅立叶级数

设 $\tilde{x}(n)$ 是以 N 为周期的周期序列，因为序列具有周期性，可以用离散傅立叶级数展开，如下式所示：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{2.4.1}$$

式中， a_k 是离散傅立叶级数的系数。为求系数 a_k ，将上式两边乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ ，并对 n 在一个周期 N 中求和：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$

将上式右边的两个求和号交换位置：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nm} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

式中

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} = \frac{1 - e^{j2\pi(k-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} = \begin{cases} N & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (2.4.2)$$

因此得到：

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty \quad (2.4.3)$$

式中, k 和 n 均取整数。当 k (或者 n) 变化时, $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 是周期为 N 的周期函数, 因此下式成立：

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-lN)n} \quad l \text{ 取整数}$$

在(2.4.3)式中, a_k 是 k 的函数, 由于上式成立, a_k 也是以 N 为周期的周期序列, 用下式表示：

$$a_k = a_{k+lN} \quad (2.4.4)$$

令

$$\tilde{X}(k) = Na_k \quad (2.4.5)$$

将(2.4.3)式代入上式, 得到：

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty \quad (2.4.6)$$

因为 a_k 是以 N 为周期的周期序列, 因此 $\tilde{X}(k)$ 也是以 N 为周期的周期序列。一般称 $\tilde{X}(k)$ 为 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅立叶级数系数, 用 DFS(Discrete Fourier Series) 表示, $\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 。

为了用 $\tilde{X}(k)$ 表示 $\tilde{x}(n)$, 对(2.4.6)式两端乘以 $e^{j\frac{2\pi}{N}kl}$, 并对 k 在一个周期中求和, 得到：

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kl} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kl} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(l-n)k} \quad (2.4.7)$$

同样按照(2.4.2)式, 得到：

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(l-n)k} = \begin{cases} N & l = n \\ 0 & l \neq n \end{cases} \quad (2.4.8)$$

将(2.4.8)式代入(2.4.7)式, 得到：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < n < \infty \quad (2.4.9)$$

将(2.4.6)式和(2.4.9)式写在一起, 得到：

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty \quad (2.4.10)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < n < \infty \quad (2.4.11)$$

注意上式中 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 均是以 N 为周期的序列。(2.4.10) 式和 (2.4.11) 式称为一对离散傅立叶级数。(2.4.11) 式具有明显的物理意义, 它表示将周期序列分解成 N 次谐波, N 次谐波的频率是 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, 谐波的幅度为 $\frac{1}{N}|\tilde{X}(k)|$ 。其中, $k=0$ 表示直流分量, 直流分量的幅度是 $\tilde{X}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)$; 第 k 次的频率是 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, 幅度是 $\frac{1}{N}|\tilde{X}(k)|$, 相位是 $\arg[\tilde{X}(k)]$, 式中 $\tilde{X}(k)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅立叶级数。因此, 周期序列的频域分析完全可以用它的 DFS 表示, 下面举例说明。

例 2.4.1 设 $x(n) = R_4(n)$, 将 $x(n)$ 以 $N=8$ 为周期进行周期延拓, 得到周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。 $\tilde{x}(n)$ 的波形如图 2.4.1(a) 所示。试求 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS, 并画出它的幅度谱。

解 按照 (2.4.10) 式推导如下:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^7 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k \cdot 4}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})} \\ &= e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}\end{aligned}\quad (2.4.12)$$

$$|\tilde{X}(k)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)} \right| \quad (2.4.13)$$

画出它的幅度特性如图 2.4.1(b) 所示。

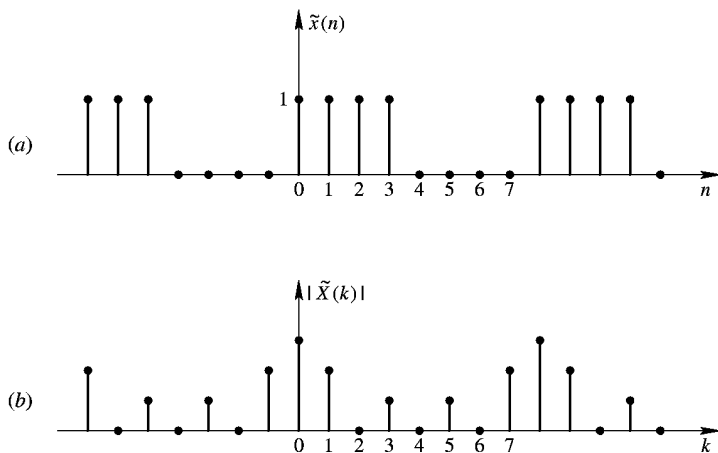


图 2.4.1 周期序列 (a) 及其幅度特性 (b)

图 2.4.1 也表明周期性信号的频谱是线状谱, 如果该信号的周期是 N , 频谱就有 N 条谱线, 且以 N 为周期进行延拓。

2.4.2 周期序列的傅立叶变换

周期序列可以用 DFS 进行频域分析, 也可以引入奇异函数用傅立叶变换表示。如何引入奇异函数, 用傅立叶变换表示的推导过程类似于模拟系统中周期信号傅立叶变换的推导过程。为了简单, 直接给出周期序列的傅立叶表示法, 详细推导请参考文献[1]。

1. 复指数序列的傅立叶变换表示法

设 $\tilde{x}(n) = e^{j\omega_0 n}$ 。这是一个复指数序列, 频率 ω_0 是常数, 该信号不服从绝对可和的条件, 因此严格地讲, 傅立叶变换不存在, 但可以用奇异函数表示它的傅立叶变换, 表示如下:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[e^{j\omega_0 n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) \quad (2.4.14)$$

式中, δ 是一个单位冲激函数, 性质用下式表示:

$$\begin{cases} \delta(\omega) = 0 & \omega \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 \end{cases} \quad (2.4.15)$$

上式表明 δ 函数是在 $\omega=0$ 处的冲激, 强度是 1。(2.4.14) 式表示复指数序列的傅立叶变换用一串冲激函数表示, 这些冲激位于 $\omega_0 + 2\pi r$ 处, 这里 $r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 因此仍具有傅立叶变换的周期性。 $\tilde{x}(n) = e^{j\omega_0 n}$ 的傅立叶变换如图 2.4.2 所示。

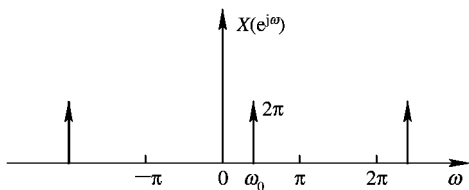


图 2.4.2 $\tilde{x}(n) = e^{j\omega_0 n}$ 的傅立叶变换

2. 一般周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅立叶变换表示法

假设 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 N , 首先将它用离散傅立叶级数表示:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < n < \infty$$

前面已经将复指数序列的傅立叶变换用(2.4.14)式进行表示, 而上式求和号中每一项都是复指数序列, 其中第 k 次谐波 $\frac{1}{N}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 的傅立叶变换可以表示成下式:

$$\text{FT}\left[\frac{1}{N}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right] = \frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r\right)$$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 由 N 次谐波组成, 因此它的傅立叶变换可以用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N}\tilde{X}(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r\right)$$

式中, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$; $r=\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 。 $\tilde{X}(k)$ 以 N 为周期, 而 r 变化时使 δ 函数频率变化 $2\pi r$, 因此如果让 k 在 $-\infty \sim +\infty$ 之间变化, 上式中的两个求和号可以简化成一个求和号。 $\tilde{x}(n)$ 的傅立叶变换用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.4.16)$$

此式就是一般周期序列的傅立叶变换表示式。一般周期序列傅立叶变换表示式的特点如下：

(1) 周期序列的傅立叶变换是由在 $\omega = \frac{2\pi k}{N}$, $-\infty < k < \infty$ 处的冲激函数组成的, 冲激函数的强度为 $\frac{2\pi}{N} \tilde{X}(k)$, 式中 $\tilde{X}(k)$ 是周期序列的离散傅立叶级数, 用(2.4.10)式计算。

(2) 周期序列的傅立叶变换仍以 2π 为周期, 而且一个周期中只有 N 个用冲激函数表示的谐波。

例 2.4.2 求例 2.4.1 中周期序列的傅立叶变换。

解 按照(2.4.16)式, 周期序列的傅立叶变换可用下式求得：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.4.17)$$

式中 $\tilde{X}(k)$ 是该周期序列的离散傅立叶级数, 在例 2.4.1 中已求出, 重写如下：

$$\tilde{X}(k) = e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$

将上式代入(2.4.17)式中, 得到该周期序列的傅立叶变换表示式为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.4.18)$$

它的幅频特性为

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)} \right| \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (2.4.19)$$

周期序列及其幅频特性波形如图 2.4.3 所示。将图 2.4.3 和图 2.4.1 比较, 它们的幅频特性的包络形状是一样的, 但表示方法不同。主要不同点是傅立叶变换用奇异函数表示, 是用一些带箭头的竖线段表示的。这两种表示法都能表示周期序列的频谱结构。

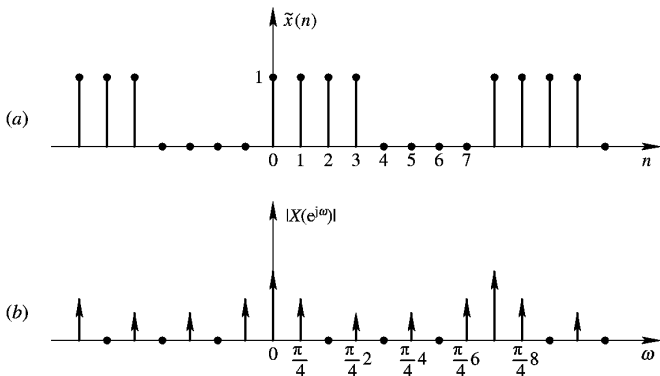


图 2.4.3 周期序列(a)及其幅频特性波形(b)

例 2.4.3 令 $\hat{x}(n) = \cos(\omega_0 n)$, $2\pi/\omega_0$ 为有理数, 求其傅立叶变换。

解 将 $\hat{x}(n)$ 用欧拉公式展开:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

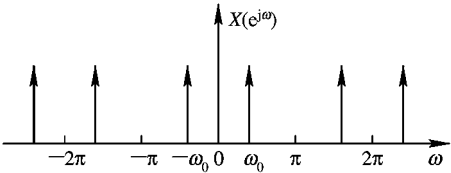
前面已求出复指数序列的傅立叶变换用(2.4.14)式表示, 重写如下:

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[e^{j\omega_0 n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$$

那么可以推出余弦序列的傅立叶变换:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{FT}[\cos\omega_0 n] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)] \\ &= \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)] \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

上式表明, $\hat{x}(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的傅立叶变换是在 $\omega = \pm\omega_0$ 处的单位冲激函数, 强度为 π , 而且以 2π 为周期进行周期性延拓, 如图 2.4.4 所示。



对于正弦序列 $\hat{x}(n) = \sin(\omega_0 n)$, $2\pi/\omega_0$ 为有理数, 请读者自己推导。它的傅立叶变换用下式表示:

图 2.4.4 $\hat{x}(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的傅立叶变换

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{FT}[\sin\omega_0 n] \\ &= -j\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)] \end{aligned}$$

上面学习了序列的傅立叶变换的定义、性质、定理, 以及周期序列的傅立叶变换表示式, 下面用表 2.4.1 综合一些基本序列的傅立叶变换表示式。

表 2.4.1 基本序列的傅立叶变换

序 列	傅立叶变换
$\delta(n)$	1
$a^n u(n), a < 1$	$(1 - ae^{-j\omega})^{-1}$
$R_N(n)$	$e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$
1	$2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r)$
$e^{j\omega_0 n}, 2\pi/\omega_0$ 为有理数	$2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r)$
$\cos(\omega_0 n), 2\pi/\omega_0$ 为有理数	$\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)]$
$\sin(\omega_0 n)$	$-j\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)]$
$u(n)$	$(1 - e^{-j\omega})^{-1} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi r)$

表中 $u(n)$ 序列的傅立叶变换推导如下：

令

$$x(n) = u(n) - \frac{1}{2} \quad (2.4.21)$$

$$x(n-1) = u(n-1) - \frac{1}{2}$$

$$x(n) - x(n-1) = u(n) - u(n-1) = \delta(n) \quad (2.4.22)$$

对上式进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j\omega} &= 1 \\ X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

对(2.4.21)式进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= U(e^{j\omega}) - \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r) \\ U(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) + \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r) \end{aligned}$$

将(2.4.23)式带入上式，得到：

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r)$$

2.5 利用傅立叶变换对信号和系统进行频域分析

时域离散信号 $x(n)$ 或者信号的单位脉冲响应 $h(n)$ 分别经过傅立叶变换，变成 $X(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$ ，它们都是频率 ω 的函数，一般称它们为信号或者系统的频率响应。信号的频率响应反映信号在频率域的分布规律。那么系统的频率响应具体反映什么呢？下面我们用系统对复指数序列的响应来说明。

设系统的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，输入是复指数序列，即

$$x(n) = e^{j\omega n} \quad -\infty < n < \infty$$

那么系统的输出 $y(n)$ 为

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} \right] \end{aligned}$$

上式方括号中的部分正是 $h(n)$ 的傅立叶变换 $H(e^{j\omega})$ ，因此可以写成下式：

$$y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \quad (2.5.1)$$

上式说明复指数序列通过系统后发生了变化。复指数序列本身的幅度是 1，频率是 ω ，初相位是 0。通过系统后，序列 $y(n)$ 仍是频率为 ω 的复指数序列，幅度及初相位与 $H(e^{j\omega})$ 有关。若将 $H(e^{j\omega})$ 写成下式：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \quad (2.5.2)$$

$$\text{则} \quad y(n) = e^{j\omega n} |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \quad (2.5.3)$$

这样 $y(n)$ 的幅度变成了 $|H(e^{j\omega})|$ ，初相位是 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 。这里 $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的函数，如果输入序列的频率 ω 发生变化，因为 $H(e^{j\omega})$ 是频率的函数，所以 $y(n)$ 的幅度和相角均会随着变化，那么 $H(e^{j\omega})$ 代表该系统对于复指数序列的频率响应。对于任意序列 $x(n)$ ，系统的输出为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

根据傅立叶变换的性质，输出响应为

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (2.5.4)$$

此时系统输出用傅立叶变换表示，该公式表明输出的频率响应不仅与输入信号的频率响应有关，也与系统的频率响应有关。 $H(e^{j\omega})$ 同样表示对输入信号中各频率分量的不同作用，有的频率分量起放大作用，有的则起衰减作用，当然相位也会发生变化。

系统的频率响应是单位脉冲响应的傅立叶变换，用下式表示：

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)] \quad (2.5.5)$$

$H(e^{j\omega})$ 一般称为系统的传输函数(或频率响应函数)。

例 2.5.1 已知系统输出和输入的关系为 $y(n) = x(n - n_0)$ ，试求该系统的频率响应。

解 将给定的输出和输入的关系进行傅立叶变换，利用傅立叶变换的移位性质得到：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = e^{-j\omega n_0} \end{aligned}$$

由上式得到：

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \arg[H(e^{j\omega})] = -\omega n_0$$

由输入输出之间的关系知道，该系统是一个延时器，其作用是将输入信号延时 n_0 单位，并不改变信号的幅度，例如 $x(n) = a^n u(n)$ ，通过该系统后，输出 $y(n) = a^{n-n_0} u(n - n_0)$ 。该系统频率响应幅度为 1，相位是 $-\omega n_0$ 。

例 2.5.2 设一阶系统的差分方程为

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad 0 < a < 1$$

求该系统的频率响应。

解 将该系统的差分方程进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) + aY(e^{j\omega})e^{-j\omega} \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

可以推导出它的幅度函数 $|H(e^{j\omega})|$ 和相位函数 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 如下：

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= (1 + a^2 - 2a \cos\omega)^{-\frac{1}{2}} \\ \arg[H(e^{j\omega})] &= -\arctan\left(\frac{a \sin\omega}{1 - a \cos\omega}\right) \end{aligned}$$

画出它的幅频特性和相位特性，如图 2.5.1 所示。由该图可知系统具有低通特性，信号通过该系统后，高频分量大大衰减。

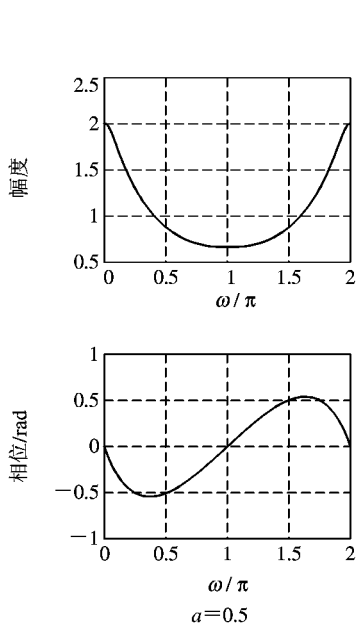


图 2.5.1 幅频特性与相位特性

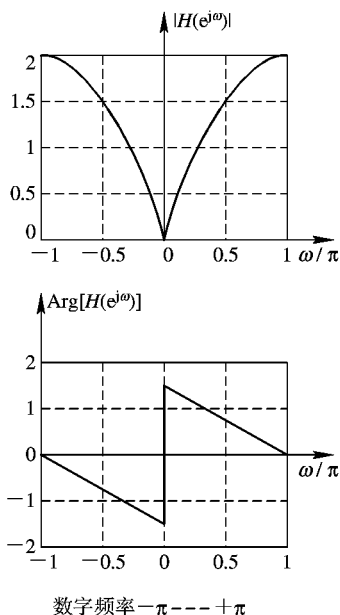


图 2.5.2 幅频特性与相位特性

例 2.5.3 假设系统的差分方程为 $y(n) = x(n) - x(n-1]$ ，试分析该系统的频率响应。

解 将系统的差分方程进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) \\
 H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos\omega + j \sin\omega \\
 |H(e^{j\omega})| &= (1 - \cos\omega)^2 + \sin^2\omega = 2(1 - \cos\omega) \\
 \arg[H(e^{j\omega})] &= \arctan \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega}
 \end{aligned}$$

画出幅频特性和相位特性如图 2.5.2 所示。

观察图 2.5.2，该系统具有高通特性，它将输入信号在 $\omega = \pi$ 附近的频率分量放大，而衰减 $\omega = 0$ 附近的频率分量。

如果输入信号 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，其输出为

$$y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

观察上式，如果输入信号频率 $\omega_0 = \pi$ ， $|H(e^{j\omega_0})|$ 最大，因此输出信号幅度最大；如果 $\omega_0 = 0$ ， $|H(e^{j\omega_0})| = 0$ ，因此输出为 0。也可以用另外的方法分析，因为输出的傅立叶变换可以用下式表示：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$$

式中
$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[e^{j\omega_0 n}] = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

得到：
$$Y(e^{j\omega}) = 2\pi H(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

这里 $Y(e^{j\omega})$ 是用在 ω_0 的冲激函数表示，它的强度决定于传输函数 $H(e^{j\omega})$ ， $|H(e^{j\omega_0})|$ 在 ω_0

$=\pi$ 时最大, 表明输出的幅度也最大; 如果 $\omega_0=0$, $|H(e^{j\omega_0})|=0$, 那么输出也为 0。这和上面得到的结论是一致的。傅立叶变换方法适合于任意序列的频域分析方法, 且表示法直观。

习 题

1. 已知序列的傅立叶变换用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \text{FT}[x(n)]$$

试证明它的反变换用下式表示:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \text{IFT}[X(e^{j\omega})]$$

2. 假设 $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$, 试利用基本定义证明下面两式成立:

$$\text{FT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j\omega - \omega_0})$$

3. 假设 $x(n)$ 的傅立叶变换具有共轭对称性, 试证明 $jx(n)$ 的傅立叶变换具有共轭反对称性。

4. 设 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的傅立叶变换, 试求下面序列的傅立叶变换:

(1) $x(n - n_0)$

(2) $x^*(n)$

(3) $x(-n)$

(4) $x(n) * y(n)$

(5) $x(n) \cdot y(n)$

(6) $x(2n)$

(7) $x^2(n)$

(8) $y(n) = \begin{cases} x(2n) & n = \text{偶数} \\ 0 & n = \text{奇数} \end{cases}$

5. 已知

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \omega_0 < \omega \leq \pi \end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$ 的傅立叶反变换 $x(n)$ 。

6. 线性时不变系统的频率响应(传输函数) $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$, 如果它的单位脉冲响应 $h(n)$ 为实数, 试证明输入 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的稳态响应为

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \varphi + \theta(\omega_0)]$$

7. 设

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

将 $x(n)$ 以 4 为周期进行周期延拓, 形成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形, 求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅立叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

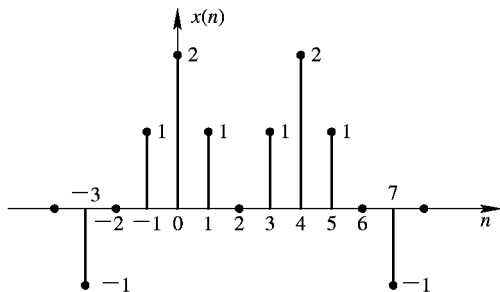
8. 设题 8 图所示的序列 $x(n)$ 的傅立叶变换用 $X(e^{j\omega})$ 表示, 不直接求出 $X(e^{j\omega})$, 完成下面运算:

(1) $X(e^{j0})$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

(3) $X(e^{j\pi})$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$



题 8 图

9. 试求以下序列的傅立叶变换：

(1) $x_1(n) = \delta(n-3)$

(2) $x_2(n) = 0.5\delta(n+1) + \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$

(3) $x_3(n) = a^n u(n) \quad 0 < a < 1$

(4) $x_4(n) = u(n+3) - u(n-4)$

10. 令 $\tilde{x}(n) = A \cos\left(\omega_0 n + \frac{\pi}{3}\right)$ ，式中 A 为常数， $2\pi/\omega_0$ 为有理数。试求该周期序列的傅立叶变换，并画出它的幅度特性。

11. 令 $\tilde{x}(n) = A \sin\left(\omega_0 n + \frac{\pi}{3}\right)$ ，式中 A 为常数， $2\pi/\omega_0$ 为有理数。试求该周期序列的傅立叶变换，并画出它的幅频特性。

12. 设：

(1) $x(n)$ 是实、偶函数；

(2) $x(n)$ 是实、奇函数。

分别分析推导以上两种假设下，其 $x(n)$ 的傅立叶变换的性质。

13. 设系统的单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$ ， $0 < a < 1$ ，输入序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2)$ ，完成下面各题：

(1) 求出系统输出序列 $y(n)$ ；

(2) 分别求出 $x(n)$ 、 $h(n)$ 和 $y(n)$ 的傅立叶变换。

14. 已知 $x_a(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t)$ ，式中 $f_0 = 100$ Hz，以采样频率 $f_s = 400$ Hz 对 $x_a(t)$ 进行采样，得到采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ ，试完成下面各题：

(1) 写出 $x_a(t)$ 的傅立叶变换表示式 $X_a(j\Omega)$ ；

(2) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x(n)$ 的表达式；

(3) 分别求出 $\hat{x}_a(t)$ 的傅立叶变换和 $x(n)$ 的傅立叶变换。

15. 假设系统的差分方程为 $y(n] = x(n] + 0.5x(n-1)$ ，试分析该系统的频率响应，并定性画出频率特性的幅度特性曲线。

第三章 时域离散信号和系统的 Z 变换分析方法

【本章的重点和难点】

- (1) 序列 Z 变换定义, Z 变换的收敛域特点, 各种序列(有限长序列、右序列、左序列和双边序列)Z 变换收敛域的特点。
- (2) 逆 Z 变换的定义, 用留数法求逆 Z 变换。
- (3) Z 变换的基本性质和基本定理。
- (4) 用 Z 变换解系统差分方程的稳态解。
- (5) 因果性系统的系统函数的收敛域特点, 稳定性系统的系统函数收敛域特点, 因果稳定性系统的系统函数的收敛域的特点。
- (6) 利用系统的零极点分布分析系统的频率特性。

对于模拟信号及其系统, 用傅立叶变换进行频域分析, 拉氏变换作为傅立叶变换的推广, 对信号及其系统进行复频域分析。对于时域离散信号及其系统, 用序列的傅立叶变换进行频域分析, Z 变换则是序列傅立叶变换的推广, 用以对序列及其系统进行复频域分析。因此, Z 变换与傅立叶变换一样, 也是数字信号处理中重要的数学分析工具。

3.1 序列 Z 变换的定义

序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义如下:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1.1)$$

式中, z 是一个复变量, 可以表示为

$$z = \text{Re}[z] + j\text{Im}[z] = re^{j\omega} \quad (3.1.2)$$

式中, r 和 ω 均为实变量。注意在定义中, 对 n 求和是在 $-\infty \sim +\infty$ 之间求和, 故称为双边 Z 变换。还有一种针对因果序列的 Z 变换, 称为单边 Z 变换, 定义如下:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1.3)$$

这种单边 Z 变换的求和限是从零到无限大。当然, 对于因果序列, 两种 Z 变换的结果是一样的。本书中如不另外说明, 均用双边 Z 变换对信号进行分析。

(3.1.1) 式 Z 变换存在的条件是等号右边级数收敛, 要求级数绝对可和, 用公式表示如下:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \quad (3.1.4)$$

要使上式成立,除和序列 $x(n)$ 有关以外,和 z 变量在 z 平面上取值的域也有关。如果对于某个序列,称能使上式成立的 z 变量取值的域为 $X(z)$ 的收敛域,则可以推想,对于不同的序列,就有不同的收敛域。

收敛域一般用下式表示:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.1.5)$$

按照(3.1.2)式,上式也可改写成下式:

$$R_{x-} < |r| < R_{x+} \quad (3.1.6)$$

(3.1.5)式和(3.1.6)式表示,收敛域一般是用一个环状域表示的,这里 R_{x-} 和 R_{x+} 分别是两个圆的半径,收敛域就是用这两个圆形成的环状域表示的,如图 3.1.1 中斜线部分所示。 R_{x-} 和 R_{x+} 可称为收敛半径,当然 R_{x-} 可小到零, R_{x+} 可以大到无穷大。

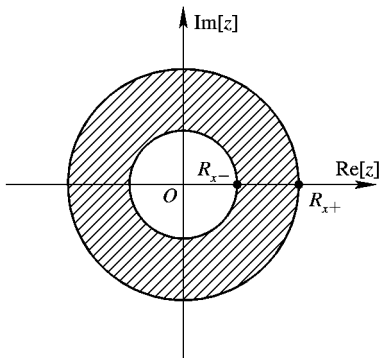


图 3.1.1 Z 变换的收敛域

常用的 Z 变换是一个有理函数,可用两个多项式之比表示:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3.1.7)$$

分子多项式 $P(z)$ 的根是 $X(z)$ 的零点,分母多项式的根是 $X(z)$ 的极点。在极点处 $X(z)$ 不存在,因此可以推想收敛域中肯定没有极点,那么收敛域也肯定是以极点为边界。总结以上所述, Z 变换收敛域的特点是:

- (1) Z 变换只存在在收敛域中,不同的序列有不同的收敛域。
- (2) 收敛域用环状域表示,且总是以极点为边界。

例 3.1.1 设 $x(n) = 0.9^n u(n)$, 求它的 Z 变换,并确定收敛域。

解 按照 Z 变换的定义,推导如下:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.9^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n z^{-n}$$

如果上式的 $X(z)$ 存在,则要求满足绝对可和的条件,即要求下式成立:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |0.9^n z^{-n}| < \infty$$

由上式得到: $|0.9z^{-1}| < 1$, 解该不等式,得到: $|z| > 0.9$, 这就是 $X(z)$ 的收敛域。

在该收敛域中, $x(n)$ 的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad |z| > 0.9$$

上式也可以写成

$$X(z) = \frac{z}{z - 0.9}$$

上式清楚地表示 $X(z)$ 有一个零点,即 $z=0$, 一个极点为 $z=0.9$ 。而收敛域是 $|z| > 0.9$, 说明收敛域中没有极点(可以有零点),且以极点为边界。收敛域的示意图如图 3.1.2 所示(图中斜线部分)。收敛域 $|z| > 0.9$ 也可以写成 $0.9 < |z| \leq \infty$ 。但要注意如果收敛域是 $0.9 < |z| < \infty$, 不能写成 $|z| > 0.9$ 。

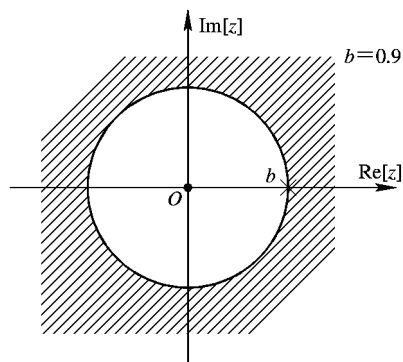


图 3.1.2 收敛域

下面将 Z 变换和已学过的傅立叶变换进行对比，看它们之间有什么关系。

将 Z 变换的定义(3.1.1)式和傅立叶变换的定义(2.2.1)式重写如下：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

对比上面两式，得到序列 Z 变换和它的傅立叶变换之间的关系：

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.1.8)$$

上面关系式表明如果已知序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ ，只要将 $z=e^{j\omega}$ 带入 $X(z)$ ，便得到它的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。另外， $z=e^{j\omega}$ 在 z 平面上是半径为 1 的圆，辐角是 ω ，它被称为单位圆，如图 3.1.3 所示。因此也可以用单位圆上的 Z 变换就是序列的傅立叶变换来表明它们之间的关系。但要注意用(3.1.8)式求序列傅立叶变换的条件是序列的傅立叶变换必须存在，否则，不能这样求傅立叶变换。下面举例说明。

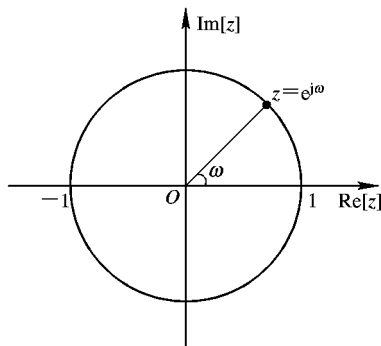


图 3.1.3 Z 平面上的单位圆

例 3.1.2 $x(n)=u(n)$ ，求其 Z 变换和收敛域。

解

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$X(z)$ 存在的条件是 $|z^{-1}| < 1$ ，因此收敛域是 $|z| > 1$ ，在收敛域中，它的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

由上式可知,极点是 $z=1$,极点刚好在单位圆上;收敛域以极点为边界,但不包括单位圆,因此不能用(3.1.8)式求它的傅立叶变换。关于单位阶跃序列 $u(n)$,因为它不服从绝对可和的条件,即 $\sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty$,因此它的傅立叶变换不存在。该例题也说明 Z 变换作为傅立叶变换的推广,傅立叶变换不存在,但在一定的收敛域中它的 Z 变换是可以存在的。当然,如果引入奇异函数,可以求出单位阶跃序列 $u(n)$ 的傅立叶变换。关于 $u(n)$ 的傅立叶变换的推导,请参考表 2.4.1 后的文字。

3.2 序列特性对收敛域的影响

一般不同序列的 Z 变换有不同的收敛域,这一节学习序列特性对收敛域的影响。了解序列特性与收敛域之间的一些一般关系,对应用 Z 变换对信号进行分析很有帮助。下面分别介绍有限长序列、右序列、左序列和双边序列收敛域的特点。

1. 有限长序列

如果序列取非零值的区间是有限长的,称该序列为有限长序列。有限长序列可以用下式表示:

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

式中, n_1 和 n_2 是整常数。该式表示有限长序列 $x(n)$ 从 n_1 到 n_2 的序列值不全为 0,但该范围外序列值全为 0。有限长序列的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \quad (3.2.2)$$

如果序列取值小于无穷大,即满足 $|x(n)| < \infty$,称该序列是有界的序列。这里假设(3.2.1)式中,序列 $x(n)$ 是有界序列,由于是有限项求和,在平面上除了两个特殊点 0 和 ∞ 以外,整个 z 平面上序列的 Z 变换都存在。在这两个特殊点上 Z 变换是否存在,和 n_1 、 n_2 分别的取值有关。在(3.2.2)式中,对于 z^{-n} ,如果 n 的取值都大于 0,那么 $z=\infty$ 点上的 Z 变换存在,但 $z=0$ 点上的 Z 变换不存在;只要有 n 小于 0 的情况,在 $z=\infty$ 点上 Z 变换不存在。对于 n_1 、 n_2 分别的取值有三种情况,下面按照三种情况总结如下:

- (1) $n_1 < 0, n_2 \leq 0$, 收敛域为: $0 \leq |z| < \infty$;
- (2) $n_1 < 0, n_2 > 0$, 收敛域为: $0 < |z| < \infty$;
- (3) $n_1 \geq 0, n_2 > 0$, 收敛域为: $0 < |z| \leq \infty$ 。

例 3.2.1 求 $x(n)=R_N(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解 $x(n)=R_N(n)$ 是一个有限长序列,它的非零值区间是 $n=0 \sim N-1$,根据上面的分析,它的收敛域应是: $0 < |z| \leq \infty$ 。下面先求它的 Z 变换。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

根据上面得到的 $X(z)$,先分析 $X(z)$ 的极零点在哪里。将 $X(z)$ 写成下式:

$$X(z) = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}$$

先求它的零点，零点是分子多项式的根，即求下式的根：

$$\begin{aligned} z^N - 1 &= 0 \\ z^N &= 1 = e^{j2\pi M} \end{aligned}$$

式中， M 取整数。因为这是一个 N 阶多项式，应该有 N 个根，具体是：

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}M} \quad M = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$X(z)$ 的极点是 $X(z)$ 分母多项式的根，即解下面方程式：

$$z^{N-1}(z - 1) = 0$$

它的极点是 $z=1$ 和 $z=0$ ($N-1$ 阶极点)，但要注意到在零点中，当 $M=0$ 时，零点是 $z=1$ ，这样， $z=1$ 处的极零点相互抵消。该 Z 变换只有 $N-1$ 个零点，它们是：

$$z = e^{-j\frac{2\pi}{N}M} \quad M = 1, 2, \dots, N-1$$

极点只有 $z=0$ 。因为收敛域中不可能有极点，该 Z 变换的收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$ ，这一结果和前面分析得到的结果一样。

因为 $x(n) = R_N(n)$ 的收敛域包含单位域，说明它的傅立叶变换存在，可以将 $z = e^{j\omega}$ 直接带入 $X(z)$ 中，得到它的傅立叶变换。

2. 右序列

右序列是指序列在 $n \geq n_1$ 时，序列值不全为 0，而在 $n < n_1$ 时，序列值全为 0 的序列。这种序列的 Z 变换如下式：

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

为了分析它的收敛域的特点，将序列分成两部分，一部分是 $n \geq 0$ 的部分，另一部分是 $n < 0$ 的部分，分析如下：

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

上式中第一部分是有限长序列的 Z 变换，这里假设 $n_1 < 0$ ，因此收敛域是 $0 \leq |z| < \infty$ 。第二部分相当于是因果序列的 Z 变换， $z = \infty$ 点肯定是收敛的，但随着 z 绝对值的减小， $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$ 的值会增大，可以推想收敛域是在某个圆以外，假设这个圆的半径用 R_{x-} 表示，那么该收敛域表示为： $R_{x-} < |z| \leq \infty$ 。两部分的收敛域均已求出， $X(z)$ 的收敛域应该取它们收敛域的公共部分，即 $R_{x-} < |z| < \infty$ 。

如果该序列 $n_1 \geq 0$ ，也就是说，序列没有 n 小于零的部分，是一个因果序列，那么上面公式中没有第一部分，它的收敛域就是： $R_{x-} < |z| \leq \infty$ 。

总结以上，右序列的收敛域是在某个圆的圆外，如果是因果序列，则收敛域包含 $z = \infty$ 点，否则不包含 $z = \infty$ 点。

例 3.2.2 求 $x(n) = a^n u(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

上式 Z 变换存在, 要求 $|az^{-1}| < 1$, 解这个不等式, 得到: $|z| > |a|$, 它的 Z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

由上式得出, 该 Z 变换的极点是 $z=a$, 收敛域是 $|z| > |a|$, 收敛域仍然以极点为边界, 在以 a 为收敛半径的圆的圆外, 且包含 $z=\infty$ 点。且又一次验证了因果序列的收敛域包含 $z=\infty$ 点。该序列的 Z 变换已求出, 能否将 $z=e^{j\omega}$ 直接带入 Z 变换中得到它的傅立叶变换呢? 这要看 a 的取值情况。如果 $|a| \geq 1$, 则这是一个发散序列, 它的极点在单位圆以外, 或者极点在单位圆上, 收敛域不包含单位圆, 因此不能将 $z=e^{j\omega}$ 直接带入 Z 变换中得到它的傅立叶变换。如果 $|a| < 1$, 则这是一个收敛序列, 收敛域包含单位圆, 可以将 $z=e^{j\omega}$ 直接带入 Z 变换中得到它的傅立叶变换。它的傅立叶变换如下:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

3. 左序列

左序列是指当 $n \leq n_2$ 时, 序列值不全为 0, 而在 $n > n_2$ 时, 序列值全为 0 的序列。左序列的 Z 变换为

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

为分析收敛域的特点, 将序列分成两部分, 一部分是 $n \geq 0$ 的部分, 另一部分是 $n < 0$ 的部分, 分析如下:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

先假设 $n_2 \geq 0$, 那么第二部分是一个因果有限长序列的 Z 变换, 收敛域是 $0 < |z| \leq \infty$ 。第一部分 n 的取值全为负值, $z=0$ 点的 Z 变换存在, 但随着 $z=re^{j\omega}$ 中 r 的增大, $\sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n) z^{-n}|$ 会增大起来。可推想, 第二部分的收敛域是在某个圆的圆内, 假设这个圆的半径用 R_{x+} 表示, 那么第二部分的收敛域为: $0 \leq |z| < R_{x+}$ 。 $X(z)$ 的收敛域取这两部分收敛域的公共部分, 即 $0 < |z| < R_{x+}$ 。如果 $n_2 < 0$, 则上式 Z 变换中没有第二部分, 因此收敛域为: $0 \leq |z| < R_{x+}$ 。

最后总结起来, 左序列的收敛域是在某个圆的圆内。具体地说: 如果 $n_2 \geq 0$, 收敛域则是 $0 < |z| < R_{x+}$; 如果 $n_2 < 0$, 收敛域则是 $0 \leq |z| < R_{x+}$ 。

例 3.2.3 求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解 $x(n) = -a^n u(-n-1)$, 只有在 $n \leq -1$ 时序列才有非零值, 否则序列值为 0, 因此这是一个左序列。可以推想, 它的收敛域是在某个圆的圆内, 且包含 $z=0$ 点。下面求它的 Z 变换:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} -a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n \end{aligned}$$

$X(z)$ 存在, 要求 $|a^{-1}z| < 1$, 解该不等式, 得到收敛域为 $|z| < |a|$ 。在收敛域中, 该 Z 变换为

$$X(z) = \frac{-a^1 z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

上式表示 $X(z)$ 的极点为 $z=a$, 收敛域是在以极点为边界的圆内, 且包含 $z=0$ 点。将该例题和例 3.2.2 对比, Z 变换的函数相同, 但是收敛域不同, 对应的序列也不同。

4. 双边序列

双边序列 $x(n)$ 的 n 在 $(-\infty, +\infty)$ 之间取值, 可以看成是由一个左序列和一个右序列组合而成的, 它的 Z 变换表示如下:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

根据上面分析, 第一部分是左序列的 Z 变换, 收敛域为 $0 \leq |z| < R_{x+}$, 第二部分是因果右序列的 Z 变换, 收敛域为: $R_{x-} < |z| \leq \infty$, 取这两个收敛域的公共部分, 最后得到双边序列的 Z 变换的收敛域是一个环状域: $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 。这里要求 $R_{x+} > R_{x-}$, 否则 Z 变换不存在。

例 3.2.4 $x(n) = a^{|n|}$, a 为实数, 求其 Z 变换及它的收敛域。

解 这是一个双边序列, 它的 Z 变换求解如下:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} a^{-n} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n \end{aligned}$$

第一部分是一个因果序列的 Z 变换, 要求 $|az^{-1}| < 1$, 解不等式得到收敛域为 $|a| < |z| \leq \infty$ 。第二部分 Z 变换存在, 要求 $|az| < 1$, 解不等式, 得到收敛域为 $|z| < |a|^{-1}$ 。这两部分收敛域的公共部分为 $|a| < |z| < |a|^{-1}$, 这就是最后 Z 变换的收敛域。在收敛域中, Z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{az}{1 - az} \\ &= \frac{1 - a^2}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad |a| < |z| < |a|^{-1} \end{aligned}$$

该例题要求 $|a| < 1$, 此时 $x(n) = a^{|n|}$ 是一个收敛序列; 假设 $0 < a < 1$, 它的波形和收敛域如图 3.2.1 所示。如果 $|a| > 1$, 则序列变成发散序列, 它的 Z 变换不存在。如果 $|a| < 1$,

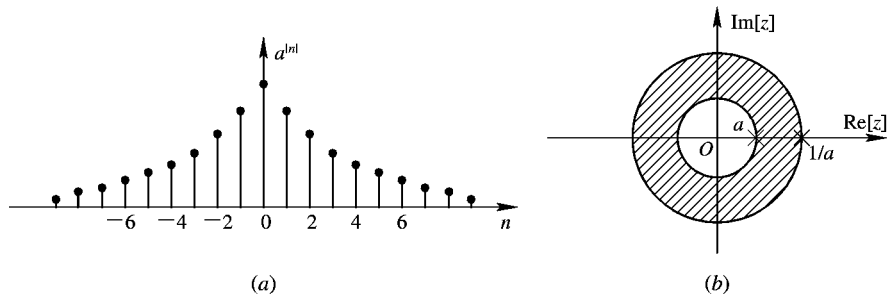


图 3.2.1 波形(a)与收敛域(b)

则由于 $|a|^{-1} > 1$ ，收敛域一定包含单位圆，因此该序列的傅立叶变换存在，即

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-a^2}{(1-ae^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})}$$

以上分析了序列的一些特性对收敛域的影响，得到的一些结论是很重要的，记住它们，可以简化对题目的分析过程。下面进行简要的总结。

- (1) 收敛域中无极点，收敛域一般以极点为边界。
- (2) 有限长序列 Z 变换的收敛域是整个 z 平面，特殊点 $z=0, \infty$ 另外考虑。
- (3) 右序列 Z 变换的收敛域是在某个圆的圆外，特殊点 $z=0, \infty$ 另外考虑。
- (4) 左序列 Z 变换的收敛域是在某个圆的圆内，特殊点 $z=0, \infty$ 另外考虑。
- (5) 双边序列 Z 变换的收敛域是环状域，特殊点 $z=0, \infty$ 另外考虑。

(6) 特殊点的考虑：序列 $x(n)$ 的 n 值全部取正整数，收敛域包含 $z=\infty$ 点，例如因果序列的 Z 变换的收敛域包含 $z=\infty$ 点；序列 $x(n)$ 的 n 值全部取负整数，收敛域包含 $z=0$ 点。除了上面两种情况以外，也就是说， n 的取值既有正整数，也有负整数时，收敛域不包括 $z=0, \infty$ 两点。

注意：以上的结论反过来也成立，例如已知某序列的收敛域包含 $z=\infty$ 点，可以推论这个序列一定是因果序列；如果序列的收敛域包括 $z=0$ 点，可以推想这是一个左序列，而且 n 全部取负整数。但对于 $\delta(n)$ ，它的 Z 变换是 1，收敛域为整个 z 平面，且包括 $z=0, \infty$ 两点，这是一个特殊例子，不服从以上规则。表 3. 2. 1 给出常见的一些序列的 Z 变换及其收敛域。

表 3. 2. 1 常见序列的 Z 变换及其收敛域

序 列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	$0 \leq z \leq \infty$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$1 < z \leq \infty$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ a < z \leq \infty$
$-a^n u(-n-1)$ $R_N(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ $\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$0 \leq z < a $ $0 < z \leq \infty$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$1 < z \leq \infty$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ a < z \leq \infty$
$e^{j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}$	$1 < z \leq \infty$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$ $\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$ $\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$1 < z \leq \infty$ $1 < z \leq \infty$

3.3 逆 Z 变换

已知序列的 Z 变换和收敛域, 求原序列称为求逆 Z 变换。逆 Z 变换定义为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x+}, R_{x-}) \quad (3.3.1)$$

式中, $c \in (R_{x+}, R_{x-})$ 表示收敛域为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, c 是收敛域中的一条封闭曲线, 如图 3.3.1 所示。已知序列的 Z 变换和收敛域, 求原序列就是按照 (3.3.1) 式求围线积分。但是直接计算围线积分是比较麻烦的, 下面介绍求逆 Z 变换的方法。

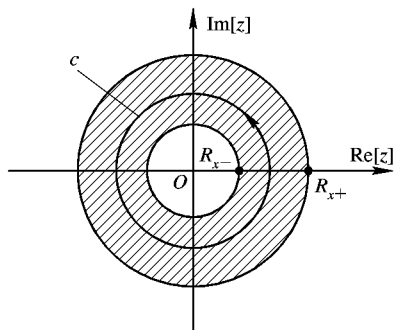


图 3.3.1 围线积分路径

一般来说, 求逆 Z 变换的方法有三种, 第一种是用留数定理法求解, 第二种是用幂级数法求解, 第三种是用部分分式展开法求解。下面先重点介绍第一种, 后面两种仅简单介绍它们的求解原理。

3.3.1 留数定理法

下面介绍用留数定理求逆 Z 变换的方法。

令 $F(z) = X(z) z^{n-1}$, $F(z)$ 在围线 c 内的极点用 z_k 表示, 假设有 M 个极点。根据留数定理下式成立:

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) dz = \sum_{k=1}^M \text{Res}[F(z), z_k] \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

上式中 $\text{Res}[F(z), z_k]$ 表示被积函数 $F(z)$ 在极点 z_k 的留数, 这样求逆 Z 变换就是求围线 c 内所有的极点留数之和。下面再介绍如何求极点留数。

如果极点 z_k 是单阶极点, 根据留数定理, 极点留数用下式求解:

$$\text{Res}[F(z), z_k] = (z - z_k) F(z) \big|_{z=z_k} \quad (3.3.3)$$

由上式可知, 求极点留数就是将被积函数乘上 $z - z_k$, 再将 $z = z_k$ 带入即可。

如果极点 z_k 是 N 阶极点, 根据留数定理, 极点留数用下式求解:

$$\text{Res}[F(z), z_k] = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_k)^N F(z)] \big|_{z=z_k} \quad (3.3.4)$$

上式表明求 N 阶极点留数比较麻烦, 但是可以根据留数辅助定理避免求 N 阶极点的留数。下面介绍留数辅助定理。

假设被积函数 $F(z)$ 在 Z 平面上有 N 个极点, 围线 c 在收敛域中, 围线 c 内有 N_1 个极点, 用 z_{1k} 表示; 围线 c 外有 N_2 个极点, 用 z_{2k} 表示, 那么 $N = N_1 + N_2$ 。根据留数辅助定理下式成立:

$$\sum_{k=1}^{N_1} \text{Res}[F(z), z_{1k}] = - \sum_{k=1}^{N_2} \text{Res}[F(z), z_{2k}] \quad (3.3.5)$$

上式表明围线 c 内所有极点留数之和等于负的围线 c 外所有极点留数之和。这样在求围线 c 内所有极点留数之和时，遇到了有多阶极点，而围线 c 外没有多阶极点的情况，这时可以利用(3.3.5)式，改求围线 c 外的所有极点留数之和，从而避免求多阶极点的麻烦。

但是(3.3.5)式成立需要一个条件，条件是：假设 $X(z)$ 用有理式 $X(z) = P(z)/Q(z)$ 表示， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别是 N 与 M 阶多项式，要求下式成立：

$$N - M - n + 1 \geq 2 \quad (3.3.6)$$

或者写成

$$N - M - n \geq 1$$

(3.3.6)式说明(3.3.5)式成立的条件是被积函数 $F(z)$ 分母的阶次比其分子的阶次要大于等于 2。下面通过例题说明如何利用留数定理求逆 Z 变换。

例 3.3.1 已知 $X(z) = (1 - az^{-1})^{-1}$ ，收敛域是 $|z| > |a|$ ，求其逆 Z 变换 $x(n)$ 。

解 由于收敛域包含 ∞ 点，可以推想 $x(n)$ 是一个因果序列。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{1 - az^{-1}} z^{n-1} dz$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} z^{n-1} = \frac{z^n}{z - a}$$

为了用留数定理求解，首先确定被积函数 $F(z)$ 的极点。这里要注意 $F(z)$ 中的 n 是在 $-\infty \sim +\infty$ 之间取值，因此 $F(z)$ 极点是否包含 $z=0$ 点和 n 的取值有关。为此将 n 分成两部分分析，一部分是 $n \geq 0$ ，此时 $z=0$ 不是极点；另一部分是 $n < 0$ ，此时 $z=0$ 是一个 n 阶极点。

当 $n \geq 0$ 时， $F(z)$ 的极点是 $z=a$ 。再确定在围线 c 内的极点，由收敛域 $|z| > |a|$ 知道围线 c 内的极点也只有 $z=a$ 点。这样序列 $x(n)$ 等于被积函数 $F(z)$ 在极点 $z=a$ 的留数。

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a]$$

极点 $z=a$ 是一个单阶极点，按照(3.3.3)式求单阶极点的方法，得到：

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a] = (z - a) \frac{z^n}{(z - a)} \Big|_{z=a} = a^n$$

由于收敛域包含 ∞ 点，这是一个因果序列，因果序列的序列值在 $n < 0$ 时，全取零值，因此 $n < 0$ 时的 $x(n)$ 不需要再求。最后该例题的逆 Z 变换为

$$x(n) = a^n u(n)$$

上式中的 $u(n)$ 是为了限制 $x(n)$ 是一个因果序列。为了练习求逆 Z 变换的方法，下面用留数定理求 $n < 0$ 时的 $x(n)$ ，检验 $x(n)$ 是否取零值。

当 $n < 0$ 时， $F(z)$ 的极点有： $z=0$ ， a ，其中 $z=0$ 是一个 n 阶极点，由收敛域知道这两个极点全在围线 c 内，因为多阶极点留数不易求，改求围线 c 以外的极点留数。当然，要检查(3.3.6)式是否满足，观察(3.3.6)式，要求 $N - M - n \times 1 \geq 2$ ，或者检查 $F(z)$ 的分母阶次是否比分子阶次大于等于 2。这里 $F(z)$ 的分母阶次是 1，分子阶次是 n ，而且 $n < 0$ ，因此(3.3.6)式一定满足，可以用求围线 c 以外的极点留数代替求围线 c 内的留数。但是围线 c 外没有极点，那么得到同样的结果：当 $n < 0$ 时， $x(n) = 0$ 。

例 3.3.2 假设 $x(n)$ 的 Z 变换用下式表示：

$$X(z) = \frac{1 - a^2}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad |a| < 1$$

收敛域取 $|z| > |a^{-1}|$ ，试求 $X(z)$ 的逆 Z 变换。

解 $X(z)$ 的极点分布如图 3.3.2 所示。首先因为收敛域 $|z| > |a^{-1}|$ 包含 ∞ 点，原序列一定是因果序列，只要求解 $n \geq 0$ 的部分即可。下面先确定被积函数 $F(z)$ 的极点。

$$\begin{aligned} F(z) &= X(z)z^{n-1} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1} \\ &= \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n \end{aligned}$$

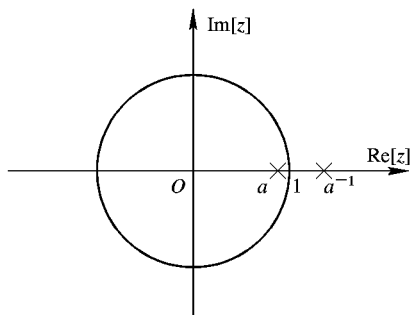


图 3.3.2 例 3.3.2 图

当 $n \geq 0$ 时， $F(z)$ 的极点为： $z=a, a^{-1}$ ，极点分布如图 3.3.2 所示。因为收敛域是 $|z| > |a^{-1}|$ ，这两个极点均在围线 c 内，那么原序列就是这两个极点的留数之和。

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), a^{-1}]$$

$$\begin{aligned} &= (z-a) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n \Big|_{z=a} + (z-a^{-1}) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n \Big|_{z=a^{-1}} \\ &= a^n - a^{-n} \end{aligned}$$

因为 $n \geq 0$ ，最后得到：

$$x(n) = (a^n - a^{-n})u(n)$$

当然也可以用留数定理求 $n < 0$ 时的 $x(n)$ ，它一定是 $x(n) = 0$ 。该例题说明记住序列特点和收敛域的一些结论可以简化解题过程。

例 3.3.3 假设 $x(n)$ 的 Z 变换用下式表示：

$$X(z) = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \quad |a| < 1$$

收敛域取 $|z| < |a|$ ，试求其原序列 $x(n)$ 。

解 由于收敛域是在以 $|a|$ 为半径的圆内，可以推论这是一个左序列，又由于收敛域包含 $z=0$ 点， $x(n)$ 的 n 值全部取负整数，或者说当 $n \geq 0$ 时， $x(n) = 0$ ，因此只要求解 $n < 0$ 时的 $x(n)$ 。

被积函数 $F(z)$ 仍用下式表示：

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n$$

当 $n < 0$ 时， $F(z)$ 的极点有： $z=0$ （这是一个 n 阶极点）， a, a^{-1} 。由于收敛域是 $|z| < |a|$ ，围线 c 内只有 $z=0$ 极点，且是多阶极点，为此改求围线 c 外的极点留数。围线 c 外的极点是： $z=a, a^{-1}$ 。这样 $x(n)$ 就等于这两点的留数之和，再加一负号。推导公式如下：

$$\begin{aligned}
 x(n) &= -\operatorname{Res}[F(z), a] - \operatorname{Res}[F(z), a^{-1}]^n \\
 &= -(z-a) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n \Big|_{z=a} - (z-a^{-1}) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n \Big|_{z=a^{-1}} \\
 &= -a^n - (-a^{-n}) = a^{-n} - a^n
 \end{aligned}$$

最后将序列表示成

$$x(n) = (a^{-n} - a^n)u(-n-1)$$

例 3.3.4 假设 $x(n)$ 的 Z 变换用下式表示:

$$X(z) = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \quad |a| < 1$$

收敛域取 $|a| < |z| < |a^{-1}|$, 试求 $X(z)$ 的逆 Z 变换。

解 由于收敛域是一个环状域, 可以推论原序列是一个双边序列。被积函数仍为下式:

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n$$

当 $n \geq 0$ 时, $F(z)$ 的极点有: $z=a, a^{-1}$, 但围线 c 以内只有极点 $z=a$, 因此 $x(n)$ 就等于该点的留数:

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \operatorname{Res}[F(z), a] = (z-a) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n \Big|_{z=a} \\
 &= a^n
 \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 时, $F(z)$ 的极点有: $z=0, a, a^{-1}$, 围线 c 以内的极点是 $z=0, a$, 其中 $z=0$ 是一个多阶极点, 为此改求围线 c 以外的极点留数, 围线 c 以外的极点只有 $z=a^{-1}$ 点, 此时 $x(n)$ 就等于该点的留数, 但要加一负号。

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \operatorname{Res}[F(z), a^{-1}] = -(z-a^{-1}) \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n \Big|_{z=a^{-1}} \\
 &= a^{-n}
 \end{aligned}$$

最后将 $x(n)$ 表示为

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ a^{-n} & n < 0 \end{cases} \\
 &= a^{|n|}
 \end{aligned}$$

例 3.3.3 和例 3.3.4 中, 需要验证 $F(z)$ 的分母的阶次要大于等于分子的阶次 2 以上, 这一条件请读者自己验证, 它是满足的。

通过以上例题, 总结用留数定理求解逆 Z 变换的步骤如下:

(1) 确定被积函数 $F(z) = X(z)z^{n-1}$ 。

(2) 找出 $F(z)$ 的所有极点。注意: 双边 Z 变换的 n 是在 $-\infty \sim +\infty$ 之间变化, 因此 $z=0$ 是否是极点和 n 的取值有关。一般将 n 分成两部分, 一部分 $z=0$ 是单阶极点, 另一部分 $z=0$ 是多阶点。

(3) 确定 $F(z)$ 在围线 c 内的极点 z_k 。

(4) 所求的逆 Z 变换可用下式求得:

$$x(n) = \sum_k \operatorname{Res}[F(z), z_k]$$

如果围线 c 内的极点中有多阶极点, 可以改求围线 c 外的所有极点 z'_k 留数之和, 并加一负号, 公式为

$$x(n) = - \sum_k \operatorname{Res}[F(z), z'_k]$$

上面公式成立的条件是 $F(z)$ 分母的阶次比分子的阶次大于等于 2 以上。

求 Z 变换时, 最好先根据收敛域的情况确定序列的特点, 例如收敛域包含 $z=\infty$, 序列是因果序列, 当 $n<0$ 时, $x(n)=0$; 如收敛域包含 $z=0$, 当 $0\leq n\leq\infty$ 时, $x(n)=0$ 。这样, 可以简化解题过程。

3.3.2 幂级数法

求逆 Z 变换的第二种方法是幂级数法, 下面简单地进行介绍。将序列的 Z 变换重写如下:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \cdots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

观察上式, $X(z)$ 是 z 的负幂次级数, $x(n)$ 就是级数的系数。一般 $X(z)$ 用一个有理式表示: 即 $X(z)=P(z)/Q(z)$, 利用长除法, 将其展成负幂级数, 负幂级数的系数就是原序列 $x(n)$ 。长除法的缺点是对于复杂的 Z 变换很难得到序列的封闭解形式。

例 3.3.5 已知 $X(z)=(1-az^{-1})^{-1}$, 收敛域是 $|z|>|a|$, 用幂级数法求其逆 Z 变换 $x(n)$ 。

解 由收敛域知道这是一个因果序列。为了得到负幂级数的系数, 先进行长除法,

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\ 1 - az^{-1} \overline{) 1} \\ \underline{1 - az^{-1}} \\ az^{-1} \\ \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \\ a^2z^{-2} \\ \underline{a^2z^{-2} - a^3z^{-3}} \\ \cdots \end{array}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

因此 $x(n)=a^nu(n)$

3.3.3 部分分式展开法

求逆 Z 变换的第三种方法是部分分式展开法, 下面进行简单介绍。

一般序列 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 是有理函数, 分母是 N 多项式, 分子是 M 阶多项式, 将 $X(z)$ 展成一些简单的常用的部分分式之和, 通过查表 3.2.1 得到各部分的逆 Z 变换, 再相加即得到原序列 $x(n)$ 。假设 $X(z)$ 有 N 个一阶极点, 可展成下式:

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^N \frac{A_m z}{z - z_m} \tag{3.3.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{z - z_m} \quad (3.3.8)$$

观察上式, $X(z)/z$ 在 $z=0$ 的极点留数就是系数 A_0 , 在 $z=z_0$ 的极点留数就是系数 A_m , 用下列两式表示:

$$A_0 = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 0\right] \quad (3.3.9)$$

$$A_m = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, z_m\right] \quad (3.3.10)$$

求出各个系数后, 很容易求出原序列, 下面通过举例说明。

例 3.3.6 已知 $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$, $2 < |z| < 3$, 求其逆 Z 变换。

解

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5z}{z^2+z-6}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5}{z^2+z-6} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, 2\right] = \frac{5}{(z-2)(z+3)}(z-2) \Big|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}, -3\right] = \frac{5}{(z-2)(z+3)}(z+3) \Big|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

此时可以通过查表 3.2.1 得到原序列, 但要注意各个分式的收敛域要根据给定的收敛域确定。该例题的收敛域是 $2 < |z| < 3$, 第一个分式的极点是 $z=2$, 那么第一个分式的收敛域应取 $|z| > 2$, 查表 3.2.1, 得到第一个分式对应的原序列是 $2^n u(n)$ 。第二个分式的极点是 $z=-3$, 收敛域应取 $|z| < 3$, 查表 3.2.1, 得到第二个分式对应的原序列是 $(-3)^n u(-n-1)$ 。最后得到 $X(z)$ 对应的原序列为

$$x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$$

从上面例题的解题过程看, 这种方法在进行部分分式时, 为求系数也要利用留数定理。要特别注意各分式的收敛域的选取。太复杂的逆 Z 变换不宜用这种方法。

3.4 Z 变换的性质和定理

Z 变换有许多重要的性质和定理, 下面进行介绍。

3.4.1 线性性质

假设两个不同的序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 进行线性组合, 得到 $w(n)$, 那么 $w(n)$ 的 Z 变换等于 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别的 Z 变换的线性组合, 用公式表示如下:

$$w(n) = ax(n) + by(n)$$

式中 a, b 是常数

$$W(z) = aX(z) + bY(z) \quad R_{w-} < |z| < R_{w+} \quad (3.4.1)$$

式中

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)] & R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Y(z) &= ZT[y(n)] & R_{y-} < |z| < R_{y+} \\ R_{w+} &= \min[R_{x+}, R_{y+}] & R_{w-} &= \max[R_{x-}, R_{y-}] \end{aligned}$$

这里要注意线性组合后的 Z 变换, 它的收敛域是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 收敛域的公共收敛域。如果没有公共收敛域, 则 $W(z)$ 不存在。例如, 当 $R_{x+} > R_{x-} > R_{y+} > R_{y-}$ 时, 没有公共收敛域, 因此 $W(z)$ 不存在。

3.4.2 时域移位性质

设 $X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $ZT[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.4.2)$

由该性质知道, 如果一个网络起延时一个单位的作用, 输入为 $x(n)$, 输出为 $x(n-1)$, 那么输出的 Z 变换等于输入 Z 变换乘上一个因子 z^{-1} , 即 $z^{-1}X(z)$ 。

3.4.3 初值定理

如果 $x(n)$ 是因果序列, 可以由它的 Z 变换求出它的初值 $x(0)$, 用公式表示如下:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.4.3)$$

证明

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

因为 $x(n)$ 是因果序列, 当 $n < 0$ 时, $x(n) = 0$, 代入上式, 得到:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

对于上式右边, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 只剩下 $x(0)$ 项, 因此得到: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 。

例 3.4.1 已知 $X(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$, 收敛域是 $|z| > 0.9$, 试求出原序列的初值。

解 收敛域表明这是一个因果序列, 利用该性质, 它的初值推导如下:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} = 1$$

由例 3.1.1 知道该 Z 变换的原序列是 $x(n) = 0.9^n u(n)$, 初值为 $n=0$ 时的序列值, 即 $x(0) = 1$ 。

3.4.4 终值定理

如果 $x(n)$ 是一个因果序列, 可由它的 Z 变换求出它的终值, 条件是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位上只能有一个一阶极点, 其他极点均在单位圆内。公式如下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (3.4.4)$$

证明 由移位性质知道 $zX(z)$ 对应的原序列是 $x(n+1)$, 那么 $(z-1)X(z)$ 对应的原序

列为 $x(n+1)-x(n)$ ，用公式表示为

$$\begin{aligned}(z-1)X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1)-x(n)]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\end{aligned}$$

因为 $x(n)$ 是因果序列，当 $n < 0$ 时， $x(n)=0$ ；当 $n < -1$ 时， $x(n+1)=0$ ，代入上式得到：

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

将上式写成极限形式：

$$(z-1)X(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-1}^m x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^m x(n)z^{-n} \right]$$

如果 $(z-1)X(z)$ 在单位圆上无极点，也就是说， $X(z)$ 在单位圆上最多有一个极点，且是一阶的，将上式对 $z=1$ 取极限，得到：

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-1}^m x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^m x(n)z^{-n} \right] \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-1}^m x(n+1) - \sum_{n=0}^m x(n) \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [x(0) + x(1) + \cdots + x(m+1) - x(0) - x(1) - \cdots - x(m)] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} x(m+1) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} x(m)\end{aligned}$$

例 3.4.2 已知 $X(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$ ，收敛域是 $|z| > 0.9$ ，试求出原序列的终值。

解 由收敛域知道它的原序列是一个因果序列，又知极点是 $z=0.9$ ，且是一阶的，根据终值定理，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{Z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{Z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1-0.9z^{-1}} = 0$$

由例 3.1.1 知道该 Z 变换的原序列是 $x(n)=0.9^n u(n)$ ，它的终值，即当 $n \rightarrow \infty$ 时的序列值确是 0。由该例可以推论，如果因果序列的 Z 变换在单位圆上无极点，则该序列的终值为 0。

3.4.5 时域卷积定理

如果两个序列进行卷积，则卷积的 Z 变换等于两个序列分别的 Z 变换的相乘。用公式表示如下：

$$\begin{aligned}w(n) &= x(n) * y(n) \\ W(z) &= ZT[w(n)] = X(z)Y(z)\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

这里 $W(z)$ 的收敛域是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 收敛域的公共收敛域，用公式表示如下：

$$\begin{aligned}X(z) &= ZT[x(n)] & R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Y(z) &= ZT[y(n)] & R_{y-} < |z| < R_{y+} \\ W(z) &= ZT[w(n)] & R_{w-} < |z| < R_{w+}\end{aligned}$$

$$R_{w+} = \min[R_{x+}, R_{y+}], \quad R_{w-} = \max[R_{x-}, R_{y-}]$$

证明

$$\begin{aligned} W(z) &= ZT[w(n)] = ZT[x(n) * y(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * y(n)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(n-m) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-m) z^{-n} \right] \end{aligned}$$

式中，方括弧部分是移位序列 $y(n-m)$ 的 Z 变换，它等于 $z^{-m}Y(z)$ ，代入上式，得到：

$$W(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} Y(z) = X(z) Y(z)$$

我们已经知道，线性时不变系统的输出 $y(n)$ 等于输入 $x(n)$ 和该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的卷积，即 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。由该性质可知，它们的 Z 变换之间的关系为

$$Y(z) = X(z) H(z)$$

例 3.4.3 已知网络的单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$ ， $|a| < 1$ ，网络输入序列 $x(n) = u(n)$ ，求网络的输出序列 $y(n)$ 。

解 求网络的输出序列 $y(n)$ 可以用两种方法，一种是直接求解线性卷积，另外一种方法是利用 Z 变换方法。这里要用到序列卷积性质。

(1) 直接求解线性卷积：

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u(m) u(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

(2) Z 变换法：

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

将上式进行 Z 变换，得到：

$$Y(z) = X(z) H(z)$$

式中

$$\begin{aligned} H(z) &= ZT[h(n)] = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \\ X(z) &= ZT[x(n)] = ZT[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1 \\ Y(z) &= X(z) H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} \end{aligned}$$

因为 $x(n)$ 和 $h(n)$ 均为因果序列， $y(n)$ 必为因果序列。由上式知道 $Y(z)$ 的极点是 a 和 1，而 $|a| < 1$ ，因此选 $Y(z)$ 的收敛域为 $|z| > 1$ 。

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n-1}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)} dz$$

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)}, \quad \text{因为 } n \geq 0$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), 1] \\ &= (z-a) \frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)} \Big|_{z=a} + (z-1) \frac{z^{n+1}}{(z-a)(z-1)} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

最后将 $y(n)$ 表示为

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

3.4.6 复卷积定理

如果 $w(n) = x(n)y(n)$, 则上式中三个序列分别的 Z 变换服从下面关系:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \quad R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+} \quad (3.4.6)$$

式中

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)] & R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Y(z) &= ZT[y(n)] & R_{y-} < |z| < R_{y+} \\ W(z) &= ZT[w(n)] & R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+} \end{aligned}$$

该定理说明, 如果两信号(序列)在时间域服从相乘关系, 则在复频域的关系用(3.4.6)式描述, 是一种复卷积的关系。下面解释为什么称它为复卷积的关系。

将 $z = e^{j\omega}$ 和 $v = e^{j\theta}$ 代入(3.3.16)式, 得到 $w(n)$ 的傅立叶变换形式:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3.4.7)$$

式中, 被积函数是将 $X(e^{j\omega})$ 的自变量 ω 变成 θ , 而将 $Y(e^{j\omega})$ 的自变量 ω 变成 $(\omega-\theta)$, 然后对 θ 进行积分, 这明显是一种卷积关系。这种卷积关系在复频域则用(3.3.6)式表示。

计算(3.4.6)式时, 需要在 v 平面用留数定理计算。在 v 平面上, $W(z)$ 的收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |z| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right] \quad (3.4.8)$$

为简化内容, 对该定理不进行证明和举例, 这方面内容请参考文献[1]。

3.4.7 帕斯维尔 (Parseval) 定理

帕斯维尔定理用下面公式描述:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \frac{dv}{v} \quad (3.4.9)$$

式中

$$\begin{aligned} X(z) &= ZT[x(n)] & R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ Y(z) &= ZT[y(n)] & R_{y-} < |z| < R_{y+} \\ R_{x-}R_{y-} &< 1, R_{x+}R_{y+} > 1 \end{aligned}$$

(3.4.9)式是在 v 平面上的圆积分, 积分路线 c 所在的收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right] \quad (3.4.10)$$

证明要用复卷积定理(3.3.6)式,具体证明过程请参考文献[1]。

如果将 $x(n)=y(n)$, $v=e^{j\omega}$ 代入(3.4.9)式,得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.4.11)$$

(3.4.11)公式就是傅立叶变换中的帕斯维尔定理。如果 $x(n)$ 是实序列,上式中的右边还可以写成 Z 变换形式,公式如下:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)X(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (3.4.12)$$

3.5 利用 Z 变换解差分方程

在第一章中,我们已学习了用递推法解差分方程的方法,这一节我们介绍用 Z 变换解差分方程的方法。

差分方程的解有两种,一种是稳态解,另一种是暂态解。

1. 稳态解

如果输入信号是在 $n=0$ 以前 ∞ 时加到系统的输入端的,则可以认为在 n 时刻系统的输出 $y(n)$ 是稳态解,此时系统中一切暂态效应都结束了。这种情况下解差分方程不需要初始条件,利用已学习过的双边 Z 变换,将已知的差分方程进行 Z 变换,解出要求的项,再进行 Z 的反变换即可。公式推导如下:先写出 N 阶的差分方程如下式:

$$y(n) = \sum_{i=0}^m b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

将上式进行 Z 变换,得到:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=0}^M b_i X(z) z^{-i} - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} \\ Y(z) &= X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \\ Y(z) &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

也可以将上式写成

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) \quad a_0 = 1 \quad (3.5.2)$$

再将上式进行 Z 的反变换,得到系统的输出 $y(n)$ 为

$$y(n) = \text{IZT}[Y(z)] \quad (3.5.3)$$

求稳态解的例题请看例 3.4.3 中的 Z 变换法,这里不再举例。这里 IZT 表示 Z 的反变换。

2. 暂态解

对于 N 阶差分方程, 求暂态解必须知道 N 个初始条件。假设输入信号 $x(n)$ 是因果序列, 即当 $n < 0$ 时, $x(n) = 0$, 对于 N 阶差分方程必须要知道初始条件 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 。而且这里不能用双边 Z 变换, 要用到单边 Z 变换。下面直接给出求暂态解的公式, 详细推导请参考文献[1]。

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.5.4)$$

上式中右边第一部分与初始条件无关, 称为零状态解; 第二部分与输入信号无关, 只与初始条件有关, 称为零输入解。如果系统处于零状态, 那么第二部分为 0, 只有第一部分, 重写如下:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) \quad (3.5.5)$$

上式中 $X(z)$ 是因果序列的单边 Z 变换, 但是因果序列的单边 Z 变换和双边 Z 变换是一样的, 将(3.5.5)式和(3.5.2)式对比, 它们是一样的, 因此对于因果序列的零状态解的求法和求稳态解的方法是一样的, 即在(3.5.5)式中的 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 都用双边 Z 变换。

下面介绍如果已知差分方程, 如何用 Z 变换法求解系统的单位脉冲响应。我们已经知道, 单位脉冲响应是当系统输入是 $\delta(n)$ 时的零状态响应, 毫无疑问, 可以直接应用(3.5.5)式, 式中 $X(z) = ZT[\delta(n)] = 1$, 此时 $y(n) = h(n)$, 公式为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.5.6)$$

$$h(n) = IZT[H(z)] \quad (3.5.7)$$

从上两式可知, 只要将已知的差分方程中的输入信号用 $\delta(n)$ 代替, 输出信号 $y(n)$ 用 $h(n)$ 代替, 进行 Z 变换, 求出 $H(z) = ZT[h(n)]$, 再进行 Z 反变换, 就可得到 $h(n)$ 。

例 3.5.1 已知因果系统用下面差分方程描述:

$$y(n] = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.5x(n-1)$$

试利用 Z 变换法求该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

解 首先将给出的差分方程进行 Z 变换, 得到:

$$Y(z) = 0.9Y(z)z^{-1} + X(z) + 0.5X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)[1 - 0.9z^{-1}] = X(z)[1 + 0.5z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

为求出 $h(n)$, 将上式进行 Z 反变换。因为系统是因果的, $H(z)$ 的极点是 $z = 0.9$, 因此

取 $H(z)$ 的收敛域为 $|z| > 0.9$ 。

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(z) dz$$

$$F(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}} z^{n-1} = \frac{z + 0.5}{z - 0.9} z^{n-1}$$

当 $n \geq 1$ 时, $F(z)$ 的极点是 $z = 0.9$,

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{Res}[F(z), 0.9] = \frac{z + 0.5}{z - 0.9} (z - 0.9) z^{n-1} \Big|_{z=0.9} \\ &= 1.4 \cdot 0.9^{n-1} \end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时, $F(z)$ 的极点是 $z = 0.9$ 和 $z = 0$,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z + 0.5}{z(z - 0.9)} \\ h(n) &= \text{Res}[F(z), 0.9] + \text{Res}[F(z), 0] \\ &= \frac{z + 0.5}{z(z - 0.9)} (z - 0.9) \Big|_{z=0.9} + z \frac{z + 0.5}{z(z - 0.9)} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{0.9 + 0.5}{0.9} + \frac{0.5}{-0.9} = 1 \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, 最后将 $h(n)$ 表示成下式:

$$h(n) = 1.4 \cdot 0.9^{n-1} u(n-1) + \delta(n)$$

3.6 利用 Z 变换分析信号和系统的频域特性

利用傅立叶变换和 Z 变换都可以对信号和系统进行频域分析, 但利用 Z 变换进行分析比较灵活方便, 而且还具有傅立叶变换不具备的特点。下面重点学习 Z 变换的零极点对频率特性的影响。

3.6.1 系统的传输函数和系统函数

系统的时域特性用它的单位脉冲响应 $h(n)$ 表示, 如果将 $h(n)$ 进行傅立叶变换, 则可得到:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.6.1)$$

一般称 $H(e^{j\omega})$ 为系统的传输函数, 它表征系统的频率特性。

如果将 $h(n)$ 进行 Z 变换, 则可得到 $H(z)$, 它表征系统的复频域特性。为了区别 $H(e^{j\omega})$, 一般称 $H(z)$ 为系统的系统函数。对于 N 阶差分方程, 系统函数表示成

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.6.2)$$

如果 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z| = 1$, 则 $H(e^{j\omega})$ 和 $H(z)$ 之间的关系为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.6.3)$$

上式表示系统的传输函数是系统单位脉冲响应在单位圆上的 Z 变换。 $H(z)$ 的分析域是一

个复频域(z 平面), $H(e^{j\omega})$ 的分析域仅是 z 平面上的单位圆, 可以认为 $H(e^{j\omega})$ 是 $H(z)$ 的一种特例情况。它们之间是有区别的, 但有时为了简单, 均称它们为传输函数。

3.6.2 利用系统函数的极点分析系统的因果性和稳定性

系统函数 $H(z)$ 的极点分布决定系统的因果性质和稳定性。如果系统具有因果性, 单位脉冲响应是因果序列, 即 $n < 0$ 时, $h(n) = 0$, $H(z)$ 的收敛域一定包含 ∞ 点, 收敛域是在某个圆的圆外, 因此极点一定分布在某个圆的圆内。反过来说, 极点分布在某个圆的圆内, 收敛域在该圆的圆外, 该系统一定是因果系统。

极点分布同样影响系统的稳定性。如果系统稳定, 系统的单位脉冲响应则一定服从绝对可和的条件, 即服从

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (3.6.4)$$

将系统函数的定义重写如下:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

上式在收敛域中一定满足下式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty \quad (3.6.5)$$

如果系统同时满足(3.6.4)式和(3.6.5)式, 要求 $|z|=1$ 时(3.6.5)式成立, 因此系统稳定要求收敛域包含单位圆。反过来说, 系统收敛域包含单位圆, 系统一定稳定。

如果要求系统因果稳定, 系统函数的极点应该如何分布呢? 根据前面结论, 因果系统的收敛域是在某个圆的圆外, 且包含 ∞ 点; 系统稳定又要求收敛域包含单位圆, 因此可得出结论: 系统因果稳定要求它的收敛域包含单位圆在内的某个圆的圆外, 且包含 ∞ 点。收敛域的公式用下式表示:

$$1 \leq |z| < \infty \quad (3.6.6)$$

这样可以推出结论: 系统因果稳定时, $H(z)$ 的极点一定分布在单位圆内部。反过来, $H(z)$ 的极点分布在单位圆内部时, 系统一定因果稳定。

例 3.6.1 已知系统函数用下式表示:

$$H(z) = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \quad |a| < 1$$

试分析该系统的因果性和稳定性。

解 该系统有两个极点, 即 $z=a$ 和 $z=a^{-1}$, 极点分布如图 3.3.2 所示。根据系统极点分布情况, 系统的因果性和稳定性有三种情况, 分别分析如下:

(1) 收敛域取 $a^{-1} < |z| \leq \infty$ 。由于收敛域包含 ∞ 点, 因此系统是因果系统。但由于 $a^{-1} > 1$, 收敛域不包含单位圆, 因此系统不稳定。在例 3.3.2 中已求出该 z 函数的反变换是 $(a^n - a^{-n})u(n)$, 这里它就是该系统的单位脉冲响应, 即 $h(n) = (a^n - a^{-n})u(n)$ 。观察该式, $h(n)$ 确实是因果序列; 又因为 $h(n)$ 中存在 $a^{-n}u(n)$ 项, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h(n) \rightarrow \infty$, $h(n)$ 是一个发散序列, 系统不稳定。

(2) 收敛域取 $a < |z| < a^{-1}$ 。由于收敛域包含单位圆, 系统稳定; 但收敛域不包含 ∞

点, 系统不是因果序列。在例 3.3.4 中, z 的反变换是 $x(n)=a^{|n|}$, 因而 $h(n)=a^{|n|}$, 这是一个双边序列, 因此系统不是因果系统, 但是一个收敛序列, 系统稳定。

(3) 收敛域取 $|z|<a$ 。因为收敛域既不包含 ∞ 点, 也不包含单位圆, 因此系统既不稳定也不是因果系统。根据例 3.3.3, 单位脉冲响应 $h(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$ 。单位脉冲响应证实: 系统不但是一个非因果系统, 而且是一个不稳定系统。

3.6.3 利用系统函数的极零点分布分析系统的频率特性

如果系统用 N 阶差分方程描述, 一般系统函数用 (3.6.2) 式描述, 再将它的分子、分母进行因式分解, 得到:

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} \quad A = \frac{b_0}{a_0}$$

式中, c_r 和 d_r 分别是系统函数的零点和极点, 共有 M 个零点和 N 个极点。上式表明系统函数的特性主要取决于系统函数的零极点分布, 系数 A 只影响幅度大小。下面介绍如何用几何方法分析研究零极点对系统频率特性的影响。首先介绍要用到的矢量表示方法。

对于 $z=e^{j\omega}$, 在 z 平面上可以用坐标原点到单位圆上 B 点的矢量 \overrightarrow{OB} 表示, 该矢量的长度是 1, 该矢量的相角就是和水平坐标之间的夹角, 这里是 ω 。当频率 ω 由 0 连续增加, 经过 π 再到 2π 时, 矢量 \overrightarrow{OB} 便围绕坐标原点逆时针转一圈, 如图 3.6.1(a) 所示。对于极点 $z=d_r$, 在 z 平面上则用坐标原点 O 到 d_r 的矢量 $\overrightarrow{Od_r}$ 表示。相应的零点 c_r 用 $\overrightarrow{Oc_r}$ 表示。对于 $e^{j\omega}-d_r$, 则用从极点 d_r 到单位圆上一点 B 的矢量 $\overrightarrow{d_r B}$ 表示, 该矢量称为极点矢量。极点矢量的长度用 $d_r B$ 表示, 矢量的相位, 即和水平坐标之间的夹角用 β_r 表示。相应地, 对于零点有零点矢量, 用 $\overrightarrow{c_r B}$ 表示, 零点矢量的长度用 $c_r B$ 表示, 相位用 α_r 表示。零极点矢量如图 3.6.1 所示。

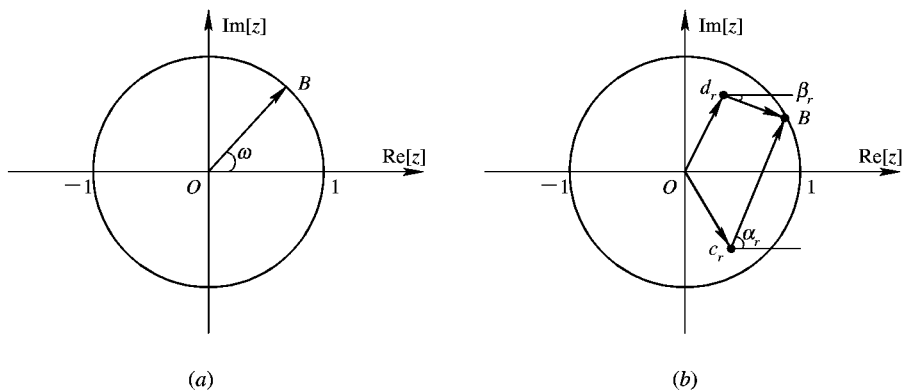


图 3.6.1 用矢量表示零极点

下面先分析较简单情况, 假设系统函数 $H(z)$ 只有一个极点, 用下式表示:

$$H(z) = \frac{1}{z - a}$$

它的传输函数为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{e^{j\omega} - a}$$

上式中 $e^{j\omega} - a$ 用极点矢量 \overrightarrow{aB} 表示, 如图 3.6.2(a) 所示。这样传输函数可以表示为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\overrightarrow{aB}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{aB}$$

传输函数的相位特性 $\varphi(\omega)$ 就是 \overrightarrow{aB} 矢量的相位再加一负号。传输函数的幅度特性是 \overrightarrow{aB} 矢量长度 aB 的倒数。如果式中 $a=0.9$, 当 ω 由 0 增加到 2π , 即点 B 在单位圆上由 $z=1$, 逆时针移动时, aB 也随之变化; 当 $\omega=0$ 时, 极点矢量长度 aB 最短, 因此幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 最大; 而当 $\omega=\pi$ 时, 极点矢量长度 aB 最长, 因此幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 最小。且幅度特性对于 $\omega=\pi$ 两边对称, 这样可以定性地画出它的幅度特性如图 3.6.2(b) 所示。如果让 a 点靠近单位圆, 即极点靠近单位圆, 在 $\omega=0$ 附近的峰会变得尖锐。

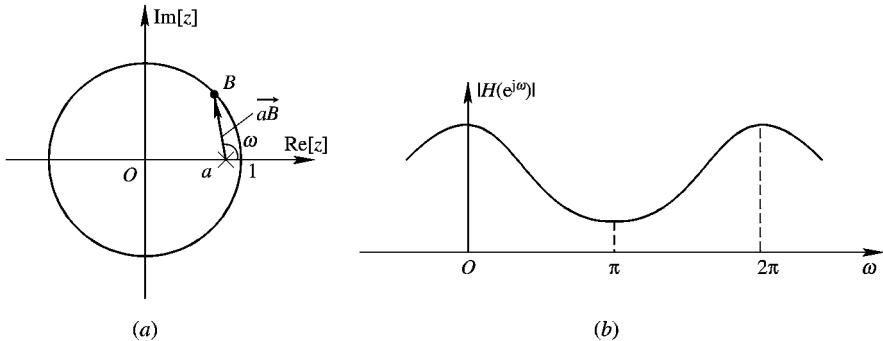


图 3.6.2 一个极点的频率特性

下面再分析由一个极点和一个零点组成的系统。假设系统函数由下式表示:

$$H(z) = \frac{z - c}{z - a}$$

它的传输函数为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - c}{e^{j\omega} - a}$$

上式中 $e^{j\omega} - a$ 用极点矢量 \overrightarrow{aB} 表示, $e^{j\omega} - c$ 用零点矢量 \overrightarrow{cB} 表示, 得到:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\overrightarrow{cB}}{\overrightarrow{aB}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

式中, $\overrightarrow{cB} = \overline{cB}e^{j\alpha}$, $\overrightarrow{aB} = \overline{aB}e^{j\beta}$, 得到:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\overline{cB}}{\overline{aB}}$$

$$\varphi(\omega) = \beta - \alpha$$

下面主要定性分析系统的幅度特性。假设零点 $c=0.9$, $a=-0.9$, 零极点分布如图 3.6.3(a) 所示。

当 $\omega=0$ 时, 零点矢量长度 \overline{cB} 最短, 而极点矢量长度 \overline{aB} 最长, 因此 $|H(e^{j\omega})|$ 最小; 随着 ω 的加大, 零点矢量长度 \overline{cB} 增加, 而极点矢量长度 \overline{aB} 减少, 因此 $|H(e^{j\omega})|$ 增加; 当

$\omega=\pi$ 时, \overline{cB} 最长, \overline{aB} 最短, 因此 $|H(e^{j\omega})|$ 最大; 当 ω 再增加时, \overline{cB} 减小, \overline{aB} 增加, 因此 $|H(e^{j\omega})|$ 减小, 一直到 $\omega=2\pi$ 时, $|H(e^{j\omega})|$ 又达到最小。画出幅度特性如图 3.6.3(b) 所示。这里 $\omega=\pi$ 是幅度特性的峰值点频率, 它离极点最近; $\omega=0$ 是幅度特性谷点频率, 它离零点最近。如果令 $c=1$, 则 $\omega=0$ 点的 $|H(e^{j\omega})|=0$ 。

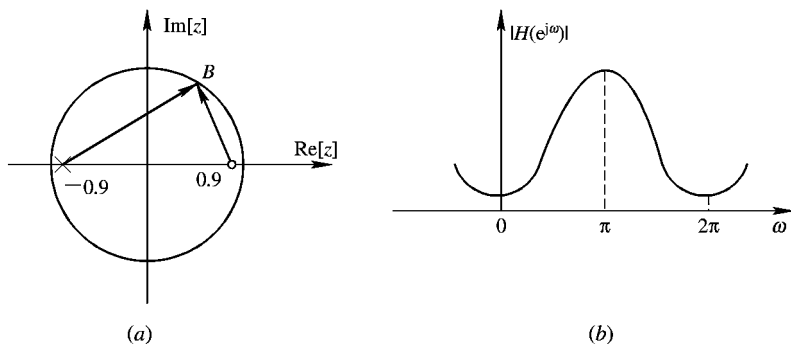


图 3.6.3 一个零点一个极点的分布图

再来分析有两个极点的系统, 它的系统函数如下:

$$H(z) = \frac{1}{(z-d_1)(z-d_2)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{j\omega}-d_1)(e^{j\omega}-d_2)}$$

极点矢量有两个, 它们分别表示如下:

$$e^{j\omega} - d_1 = \overline{d_1} \vec{B} = \overline{d_1} B e^{j\beta_1}$$

$$e^{j\omega} - d_2 = \overline{d_2} \vec{B} = \overline{d_2} B e^{j\beta_2}$$

幅度特性和相位特性推导如下:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\overline{d_1} B \cdot \overline{d_2} B}$$

$$\varphi(\omega) = -\beta_1 - \beta_2$$

下面仅分析它的幅度特性。假设极点 $d_1=0.9e^{j\frac{\pi}{4}}$, $d_2=0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}$, 零极点分布如图 3.6.4(a) 所示。仍然让频率 ω 从 0 开始, 增加到 2π , 即点 B 逆时针沿单位圆转一圈。当在 $\omega=\pi/4$ 附近时, $\overline{d_2} B$ 较大, 但 $\overline{d_1} B$ 很小, $|H(e^{j\omega})|$ 最大; 同样, 当在 $\omega=-\pi/4$ 附近时, $|H(e^{j\omega})|$ 也是最大; 当在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 附近时, 由于两个极点矢量长度相等, 因而在这里形成两个谷值; 相对地说, $\omega=\pi$ 附近的谷值要深一些, 因为 $\omega=\pi$ 时的极点矢量长度长于 $\omega=0$ 时的极点矢量长度。同样, 两个极点愈靠近单位圆, 幅度特性的两个峰值愈尖锐。经过上面分析, 可以定性画出系统的幅度特性, 如图 3.6.4(b) 所示。

通过以上分析, 可以看出用矢量表示传输函数, 再用几何方法分析幅度特性是很方便的, 它为我们提供了一个直观的概念, 这对于分析和设计系统是十分有用的。在分析过程中主要分析零极点对幅度特性的影响, 找出幅度特性的峰值和谷值。

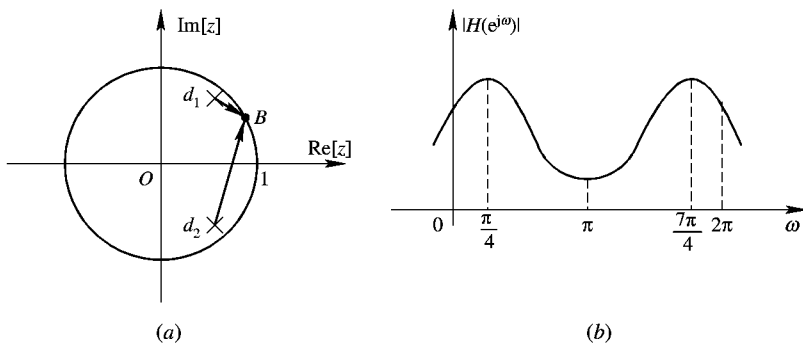


图 3.6.4 两个极点的分布

对于 N 阶差分方程，相应的系统函数为

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} \quad A = \frac{b_0}{a_0} \quad (3.6.7)$$

假设 $M=N$ ，得到：

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^N (z - c_r)}{\prod_{r=1}^N (z - d_r)} \quad (3.6.8)$$

传输函数为

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)} \quad (3.6.9)$$

上式中有 N 个零点矢量和 N 个极点矢量，分别用 $\overrightarrow{c_r B}$ 和 $\overrightarrow{d_r B}$ 表示，将它们用极坐标表示：

$$\overrightarrow{c_r B} = \overline{c_r B} e^{j\alpha_r} \quad (3.6.10)$$

$$\overrightarrow{d_r B} = \overline{d_r B} e^{j\beta_r} \quad (3.6.11)$$

将上式代入传输函数中，得到：

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N \overrightarrow{c_r B}}{\prod_{r=1}^N \overrightarrow{d_r B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.6.12)$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^N \overline{c_r B}}{\prod_{r=1}^N \overline{d_r B}} \quad (3.6.13)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^N \alpha_r - \sum_{r=1}^N \beta_r \quad (3.6.14)$$

(3.6.13) 式表明系统的幅度特性是所有的零点矢量的长度之积除以所有极点矢量长度之积。相位特性是所有零点矢量的相位之和减去所有极点矢量相位的和。下面举例说明如何

用这种几何方法分析系统频率特性。

例 3.6.2 设一阶系统的差分方程为

$$y(n) = by(n-1) + x(n) \quad 0 < b < 1$$

试用几何方法分析其幅度特性。

解 由系统的差分方程得到系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{z}{z - b}$$

选择收敛域为 $|z| > |b|$ ，这样系统是一个因果系统。系统的零点是 $z=0$ ，极点是 $z=b$ ，极零点分布如图 3.6.5(a) 所示。取单位圆上一点 B ，可以画出极点矢量和零点矢量，当 B 点从 $\omega=0$ 开始，沿单位圆逆时针转一圈，观察极点矢量长度和零点矢量长度的变化。首先因为零点是在坐标原点，零点矢量的长度始终保持为 1，它对幅度特性没有影响。当 $\omega=0$ 时，极点矢量长度最短，幅度值最大；当 $\omega=\pi$ 时，极点矢量长度最长，幅度值最小，而且幅度特性对 $\omega=\pi$ 对称。这样定性画出它的幅度特性如图 3.6.5(b) 所示。幅度特性的峰值在极点矢量长度最短处，即 $\omega=0$ 处，谷值在极点矢量最长处，即 $\omega=\pi$ 处。很明显， b 点愈靠近单位圆，它的峰值愈尖锐。

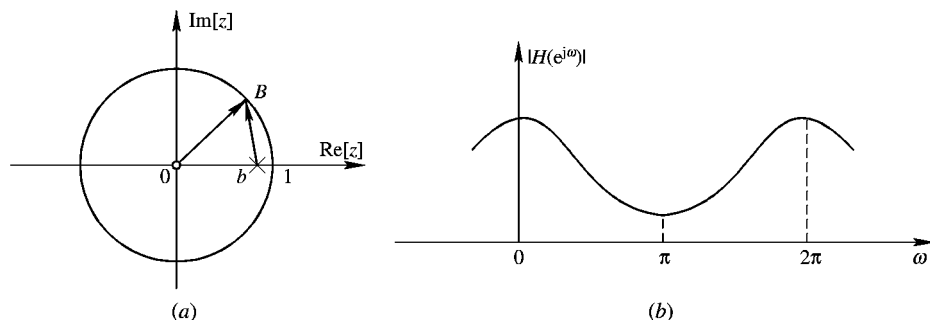


图 3.6.5 极零点分布与幅度特性

例 3.6.3 已知系统函数 $H(z) = 1 - z^{-N}$ ，试定性画出系统的幅度特性。

解

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

系统的极点是 $z=0$ ，是一个 N 阶极点。分子是一个 N 阶多项式，应该有 N 个零点。这里零点就是分子多项式的根，推导如下：

$$z^N - 1 = 0$$

$$z^N = 1 \quad z^N = e^{j2\pi k}$$

$$z = e^{j\frac{2\pi k}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

上式表明 N 个零点等间隔地分布在单位圆上。假设 $N=8$ ，极零点分布如图 3.6.6 所示。由于极点在坐标原点，当 ω 变化时，极点矢量长度始终不变，而且是 1，因此分析时可以不考虑。当频率从 $\omega=0$ 开始增加，每遇到一个零点，幅度为 0。因为单位圆上的零点是圆对称，在两个零点之间幅度最大，形成峰值。幅度谷值点的频率为： $\omega_k = (2\pi/N)k$ ， $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。该系统的幅度特性如图 3.6.6 所示。因为有 N 个等幅度的峰，一般将具有这

样类似的幅度特性的滤波器称为梳状滤波器。

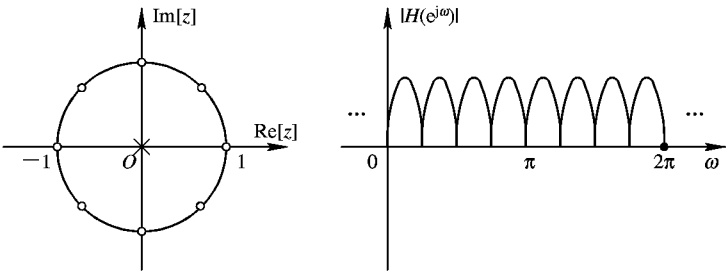


图 3.6.6 零极点分布与幅度特性

例 3.6.4 利用几何分析法分析矩形序列的幅度特性。

解 矩形序列的 Z 变换推导如下：

令 $x(n)=R_N(n)$ ，

$$\begin{aligned} X(z) &= \text{ZT}[R_N(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)} \end{aligned}$$

式中，分子是一个 N 阶多项式，和前面例题一样，有 N 个零点，它们是

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

极点有两个，一个是 $z=0$ ，这是一个 $N-1$ 阶极点，另一个是 $z=1$ 。观察上式，当 $k=0$ 时， $z=1$ 也是零点，那么该处的零极点相互抵消。设 $N=8$ ，该系统的零极点分布如图 3.6.7(a) 所示。

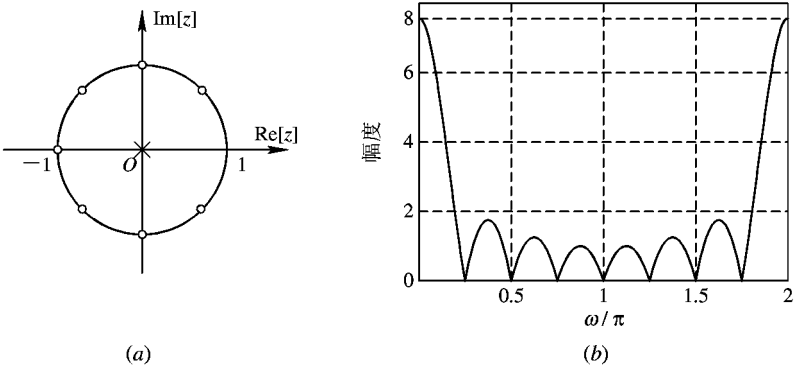


图 3.6.7 $N=8$ 矩形序列零极点分布及幅度特性

当单位圆上一点从 $\omega=0$ 开始逆时针旋转时，每遇到一个零点，幅度特性等于零，幅度特性为零的频率为： $\omega_k=(2\pi/N)k, k=1, 2, \cdots, N-1$ ，那么每两个零点之间有一个峰值，由于这些零点并不是圆对称，因此这些峰不一样高。相对地说，在 $\omega=0$ 处所有的零点矢量长度之积最大，而在 $\omega=\pi$ 两边所有零点矢量长度之积要小一些。因此幅度特性在 $\omega=0$ 的峰值最大，而在 $\omega=\pi$ 两边的峰值最小。这样该系统的幅度特性如图 3.6.7(b) 所示。

通过以上分析,零极点分布对幅度特性的影响可以总结为以下几点:

- (1) 系统函数的极点主要影响幅度特性的峰值,峰值频率在极点附近。极点愈靠近单位圆,峰值愈高、愈尖锐。如果极点在单位圆上,则幅度为 ∞ ,系统不稳定。
- (2) 系统函数的零点主要影响幅度特性的谷值,谷值频率在零点附近。零点愈靠近单位圆,谷值愈接近 0。当零点处在单位圆上时,谷值为 0。
- (3) 处于坐标圆点的零极点不影响幅度特性。

习 题

1. 求以下序列的 Z 变换及收敛域:

- (1) $2^{-n}u(n)$
- (2) $-2^{-n}u(-n-1)$
- (3) $2^{-n}u(-n)$
- (4) $\delta(n)$
- (5) $\delta(n-1)$
- (6) $2^{-n}[u(n)-u(n-10)]$

2. 求以下序列的 Z 变换及其收敛域,并在 z 平面上画出极零点分布图。

- (1) $x(n)=R_N(n) \quad N=4$
- (2) $x(n)=Ar^n \cos(\omega_0 n)u(n) \quad r=0.9, \omega_0=0.5 \pi \text{ rad}$
- (3) $x(n)=\begin{cases} n & 0 \leq n \leq 4 \\ 8-n & 5 \leq n \leq 8 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

3. 已知 $X(z)$ 如下式:

$$X(z) = \frac{3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$$

求出对应 $X(z)$ 的各种可能的序列表达式。

4. 分别求:

- (1) $x(n)=a^n u(n) \quad 0 < a < 1$
- (2) $y(n)=a^{-n} u(-n) \quad 0 < a < 1$

的 Z 变换,以及它们的收敛域。

5. 已知

$$X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$$

分别求:

- (1) 收敛域 $0.5 < |z| < 2$ 对应的原序列 $x(n)$;
- (2) 收敛域 $|z| > 2$ 对应的原序列 $x(n)$ 。

6. 求下面 $X(z)$ 的反变换:

$$(1) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

7. 如果 $x(n)$ 是实序列, 利用复卷积定理证明下面公式成立:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) X(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

8. 设线性时不变系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad a \text{ 为实数}$$

(1) 在 z 平面上用几何法证明该系统是全通函数, 即 $|H(e^{j\omega})| = \text{常数}$ 。

(2) 问参数 a 如何取值才能使系统因果稳定, 并画出极零点分布及收敛域。

9. 设系统由下面差分方程描述:

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n-1)$$

(1) 求系统的系统函数 $H(z)$, 并画出极零点分布图;

(2) 限定系统是因果的, 写出 $H(z)$ 的收敛域, 并求出其单位脉冲响应 $h(n)$;

(3) 限定系统是稳定的, 写出 $H(z)$ 的收敛域, 并求出其单位脉冲响应 $h(n)$ 。

10. 已知线性因果网络用下面的差分方程描述:

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.9x(n-1)$$

(1) 求网络的系统函数 $H(z)$ 及其单位脉冲响应 $h(n)$;

(2) 写出网络传输函数 $H(e^{j\omega})$ 的表达式, 并定性画出其幅频特性曲线;

(3) 设输入 $x(n] = e^{j\omega_0 n}$, 求输出 $y(n)$ 。

11. 已知网络的输入和单位脉冲响应分别为:

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$h(n) = b^n u(n) \quad |b| < 1$$

(1) 用卷积法求输出 $y(n)$;

(2) 用 Z 变换法求输出 $y(n)$ 。

12. 线性因果系统用下面差分方程描述:

$$y(n) - 2ry(n-1) \cos\theta + r^2 y(n-2) = x(n)$$

式中: $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, $0 < r < 1$, $\theta = \text{常数}$ 。试求系统的响应 $y(n)$ 。

第四章 离散傅立叶变换(DFT)

【本章重点和难点】

- (1) 离散傅立叶变换的正反变换的定义、物理意义。
 - (2) 离散傅立叶变换、傅立叶变换、Z 变换以及离散傅立叶级数之间的关系。
 - (3) 离散傅立叶变换的基本性质和时域循环卷积定理。
 - (4) 已知系统的输入和系统的单位脉冲响应，用离散傅立叶变换计算系统输出的方法和步骤。
 - (5) 用离散傅立叶变换对时域离散信号进行频谱分析。
-

4.1 引言

傅立叶变换和 Z 变换是时域离散线性时不变系统分析与设计的重要数学工具。但是，时域离散信号的傅立叶变换和 Z 变换都是连续函数，用计算机无法处理。

离散傅立叶变换(DFT: Discrete Fourier Transform)是一种将有限长时域离散序列变换成有限长频域离散序列的一种数学变换，其实质是对频谱函数的离散采样。这样就可以使数字信号处理在频域用计算机处理，大大增加了数字信号处理的灵活性。更重要的是，DFT 有多种快速算法，可使数字信号处理速度提高几个数量级。因此，DFT 在数字信号处理中具有重要的理论意义和应用价值。

4.2 离散傅立叶变换的定义及物理意义

4.2.1 DFT 定义

设序列 $x(n)$ 长度为 M ，定义 $x(n)$ 的 N 点 DFT 如下式：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2.1)$$

式中， N 称为离散傅立叶变换区间长度，要求 $N \geq M$ ， $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。

定义 $X(k)$ 的 N 点离散傅立叶逆变换(IDFT)如下式：

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)]_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2.2)$$

例 4.1.1 $x(n) = R_8(n)$ ，分别计算 $x(n)$ 的 8 点和 16 点 DFT。

解 $x(n)$ 的 8 点 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n)W_8^{kn} = \frac{1 - W_8^{k \cdot 8}}{1 - W_8^k} = \begin{cases} 8 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

$x(n)$ 的 16 点 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 W_{16}^{kn} = \frac{1 - W_{16}^{k \cdot 8}}{1 - W_{16}^k} \\ &= \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}8k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{16}k} (e^{j\frac{\pi}{16}k} - e^{-j\frac{\pi}{16}k})} \\ &= e^{-j\frac{7\pi}{16}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 15 \end{aligned}$$

$x(n)$ 的幅频特性函数曲线、8 点 DFT、16 点 DFT 和 32 点 DFT 的模分别如图 4.2.1(a)、(b)、(c)和(d)所示。由以上结果可见，对同一个有限长序列 $x(n)$ ，当 DFT 变换区间长度 N 不同时，得到的离散傅立叶变换的结果不同。这一现象在下面介绍了 DFT 与傅立叶变换和 Z 变换之间的关系后就会得到解释。

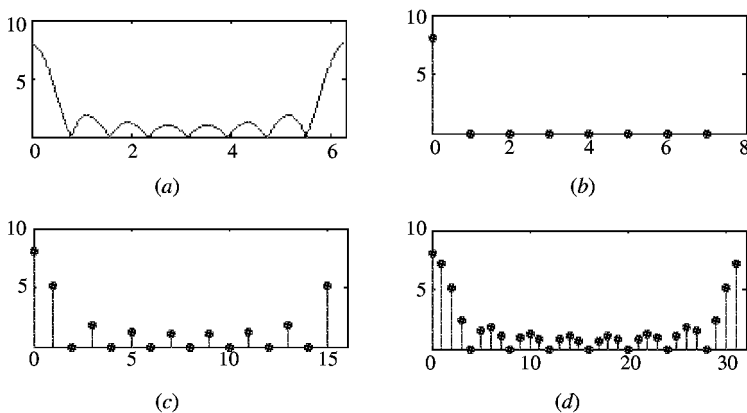


图 4.2.1 $|X(e^{j\omega})|$ 与 $|X(k)|$ 的关系

4.2.2 DFT 与傅立叶变换、 Z 变换和 DFS 之间的关系

将四种变换定义式重写如下，比较便可得到它们之间的关系。

对长度为 M 的有限长序列 $x(n)$ ，有

$$\begin{aligned} X(z) &= \text{ZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)z^{-n} \\ X(e^{j\omega}) &= \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_N(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}_n(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_{N\text{点}} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

式中的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓序列, 其定义为

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) \quad (4.2.3)$$

式中, N 称为延拓周期。在这里, N 又是 DFT 变换区间长度, 所以 $N \geq M$ 。但是, 当 $N < M$ 时, 用式(4.2.3)得到的仍是以 N 为周期的周期序列, 亦称为 $x(n)$ 的周期延拓序列。显然, 当 $x(n)$ 为无限长度序列时, 同样可以用式(4.2.3)得到 $x(n)$ 的周期延拓序列。通常又定义周期序列的主值序列为

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n)$$

仅当延拓周期 N 大于等于 $x(n)$ 长度时, $x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = x(n)$, 否则周期延拓序列存在混叠, 使 $x_N(n) \neq x(n)$ 。

比较以上四种变换的计算式可得到:

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2.4)$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2.5)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k) \quad (4.2.6)$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k + mN) \quad (4.2.7)$$

(4.2.4)式说明, 有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 就是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样; (4.2.5)式说明, 有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 就是 $x(n)$ 的傅立叶变换在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 采样间隔为 $2\pi/N$ 。这就是 DFT 的物理意义。显然, N 不同, 则采样间隔不同, 在数字频率主值区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样点数也不同。所以, 对同一个有限长序列 $x(n)$, 当 DFT 变换区间长度 N 不同时, 得到的 DFT 变换结果就不同。但是, 这并不是说序列的 DFT 不惟一, 因为变换区间长度 N 是 DFT 定义的一个参数, 当 N 给定时, 一个序列的 N 点 DFT 是惟一的。图 4.2.1(a)、(b)、(c)和(d)分别给出例 4.1.1 中 $x(n)$ 的幅频函数曲线、8 点 DFT、16 点 DFT 和 32 点 DFT 的模。由此图可见, 要用 $x(n)$ 的 N 点 DFT 观察 $x(n)$ 的频谱特性, N 必须足够大, 采样间隔足够小, 才能由 $X(k)$ 观察 $x(n)$ 的频谱特性。图 4.2.1(a)、(b)、(c)和(d)中, 只有图(d)所示的线谱的包络能近似图(a)所示的幅频曲线。式(4.2.6)和(4.2.7)说明, 有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 就是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}_N(n)$ 的 DFS 系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, 而 DFS 系数 $\tilde{X}(k)$ 表示了 $\tilde{x}_N(n)$ 的频谱特性, 所以 $X(k)$ 真正表示的是 $\tilde{x}_N(n)$ 的频谱特性。

应当说明两点:

- (1) 当 DFT 变换区间长度 N 给定后, 对确定的 $x(n)$, $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$ 是惟一的;
- (2) 可以证明^[1], 当离散傅立叶变换区间长度 N 给定后, $\text{IDFT}[X(k)]$ 是惟一的 $x(n)$ 。即 $x(n)$ 与 $X(k)$ 一一对应。

4.3 离散傅立叶变换的主要性质及定理^[1]

4.3.1 线性性质

设有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 N_1 和 N_2 , $x(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$, a 和 b 为常数, 则

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = aX_1(k) + bX_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.3.1)$$

其中 $N \geq \max[N_1, N_2]$, $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]_{N_1}$, $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]_{N_2}$

4.3.2 隐含周期性

(4.2.1)和(4.2.2)式定义了一对 N 点离散傅立叶变换, 其中只定义了 $X(k)$ 和 $x(n)$ 在变换区间上的 N 个值。如果使式(4.2.1)中 k 的取值域为 $[-\infty, \infty]$, 就会发现 $X(k)$ 是以 N 为周期的, 即

$$X(k + mN) = X(k) \quad (4.3.2)$$

我们称 $X(k)$ 的这一特性为 DFT 的隐含周期性。

下面证明:

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\ X(k + mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = X(k) \end{aligned}$$

证明过程中用到等式:

$$W_N^{k+mN} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+mN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$$

4.3.3 循环移位性质

1. 有限长序列的循环移位

设序列 $x(n)$ 长度为 M , 对 $x(n)$ 进行周期延拓得到:

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) \quad N \geq M \quad (4.3.3)$$

则定义 $x(n)$ 的循环移位序列:

$$y(n) = \tilde{x}_N(n + m)R_N(n) \quad (4.3.4)$$

图 4.3.1 给出了 $x(n)$ 以及按上述定义得到 $x(n)$ 的循环移位序列的过程。

图中, $M=N=6$, $m=2$ 。由图中所示的循环移位过程和结果可见, $y(n)$ 就是将 $x(n)$ 左移 m 个时间点, 移出时间区间 $[0, N-1]$ 的序列值依次从 $n=N-1$ 点移入所得到的序列, 所以称之为循环移位。

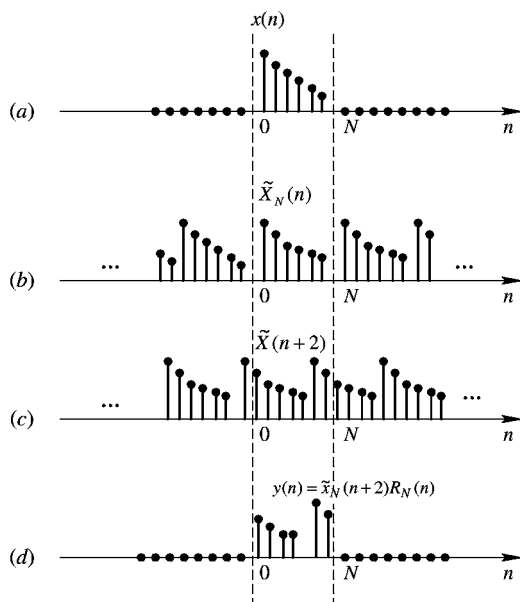


图 4.3.1 序列的循环移位示意图

2. 循环移位性质^[1]

设序列 $x(n)$ 长度为 M , $x(n)$ 的循环移位序列为

$$y(n) = \tilde{x}_N(n+m)R_N(n) \quad N \geq M$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)]_N = W_N^{-km} X(k) \quad (4.3.5)$$

4.3.4 实序列 DFT 的共轭对称性

在通信和信号处理的工程实际中, 最常见的是实信号, 所以讨论实信号 DFT 的特点具有重要意义。设 $x(n)$ 是有限长实序列, 其 N 点 DFT 为 $X(k)$, 则 $X(k)$ 关于 $N/2$ 点共轭对称, 即

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (4.3.6)$$

证明如下:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X^*(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^*$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

由 DFT 定义式可知, 计算 N 点 DFT 需要计算 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次加法, 当 N 较大时运算量很大。利用共轭对称性可以使实序列的 DFT 运算量减少一半, 计算方法如下:

(1) 先计算出 $X(k)$ 的前 $N/2+1$ 个值:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

(2) 再利用共轭对称性计算 $X(k)$ 的后 $N/2-1$ 个值:

$$X(N-k) = X^*(k) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

共需要 $N^2/2$ 次复数乘法, 比直接按定义计算少一半。

对一般的复序列, DFT 也有共轭对称性^[1]。

4.3.5 循环卷积定理

时域循环卷积定理是 DFT 最重要的定理, 具有很大的实用性。下面直接给出两个有限长序列循环卷积及 DFT 的循环卷积定理, 其证明见文献[1]。

1) 两个有限长序列的循环卷积

设序列 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 N 和 M 。 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 L 点循环卷积定义为

$$y_c(n) = h(n) * x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) \tilde{x}_L(n-m) \right] R_L(n) \quad (4.3.7)$$

其中, L 为循环卷积区间长度, $L \geq \max[N, M]$, $\tilde{x}_L(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(m+iL)$ 是 $x(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列。 $\tilde{x}_L(n-m)$ 是将 $\tilde{x}_L(-m)$ 右移 n 个时间单位形成的周期序列。式 (4.3.7) 只需要对 $0 \leq n \leq L-1$ 计算 $y_c(n)$ 的 L 个值, 即 $y_c(n)$ 的长度为 L 。为了同时表示循环卷积及其区间长度, 将 L 点循环卷积记为 $y_c(n) = h(n) \text{ } L \text{ } x(n)$ 。为了区别于循环卷积, 我们称序列的卷积为线性卷积。

2) DFT 的时域循环卷积定理

已知 $y_c(n)$ 为序列 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的 L 点循环卷积, 则

$$Y_c(k) = \text{DFT}[y_c(n)]_L = H(k) X(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (4.3.8)$$

式中 $H(k) = \text{DFT}[h(n)]_L$, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_L$

后面会看到, DFT 的时域循环卷积定理是利用 DFT (实际中是用 FFT) 计算序列的线性卷积的理论依据。

4.4 DFT 应用举例

4.4.1 用 DFT 计算序列的线性卷积

如前面所述, 序列 $x(n)$ 通过单位脉冲响应为 $h(n)$ 的线性时不变系统时, 输出序列 $y(n) = h(n) * x(n)$ 。所以, 用 DFT 计算序列的线性卷积是信号处理的实际需要。

设 $h(n)$ 长度为 N , $x(n)$ 长度为 M , $y_c(n)$ 表示 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 L 点循环卷积, $y_c(n) = h(n) \text{ } L \text{ } x(n)$, $y(n) = h(n) * x(n)$ 。可以证明^[1], $y_c(n)$ 等于 $y(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列, 即

$$y_c(n) = \tilde{y}_L(n) R_L(n) \quad (4.4.1)$$

式中
$$\tilde{y}_L(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(n+mL) \quad (4.4.2)$$

当 $L \geq N+M-1$ 时, (4.4.2) 式给出的周期延拓无时域混叠, 所以 $y_c(n) = y(n)$ 。由 DFT 的循环卷积定理知道, 可以按图 4.4.1 计算 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 L 点循环卷积。

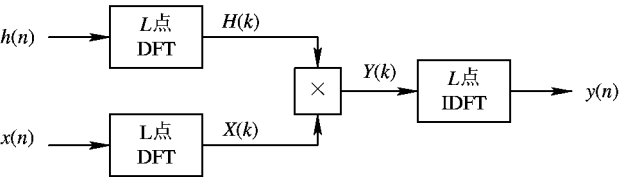


图 4.4.1 用 DFT 计算序列的 L 点循环卷积框图

综上所述, 如果图 4.4.1 中循环卷积长度 $L \geq N+M-1$, 则其计算结果 $y_c(n)$ 就等于 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积 $y(n)$ 。因此, $L \geq N+M-1$ 时, 图 4.4.1 就是用 DFT 计算 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积的程序框图。当图中的 DFT 和 IDFT 均用第五章介绍的快速傅里叶变换 (FFT) 计算时, 计算速度比直接在时域计算卷积快得多, 所以称之为快速卷积法。

例 4.4.1 上机验证按图 4.4.2 用 DFT 计算序列的线性卷积的正确性。

解 设 $x(n) = R_{10}(n)$, $h(n) = R_6(n)$, 直接计算得到 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n)$, 如图 4.4.2(a) 所示, $y(n)$ 长度为 15。分别取 $L=20$ 和 13, 按图 4.4.1 计算所得结果分别如图 4.4.2(b) 和 (c) 所示。由图可见, 当 $L \geq 15$ 时, 按图 4.4.1 确实可计算线性卷积 $y(n)$, 而 $L < 15$ 时则不能。

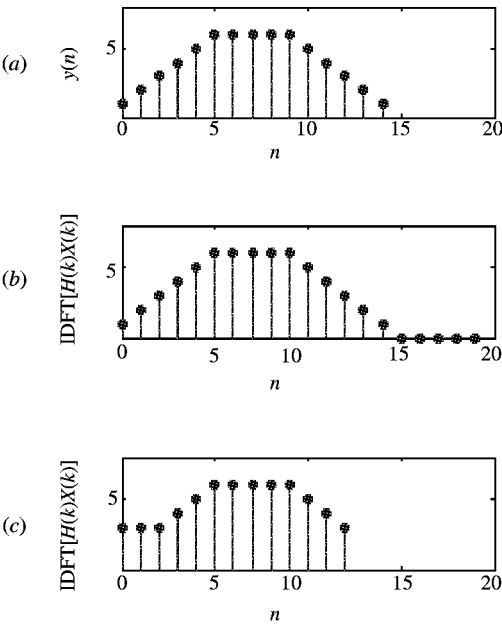


图 4.4.2 用 DFT 计算序列卷积的时域波形图
(a) $y(n) = h(n) * x(n)$; (b) $L=20$; (c) $L=13$

下面给出当 $x(n)$ 为无限长因果序列时的计算方法。

工程实际中, $x(n)$ 一般为无限长因果序列, 而 $h(n)$ 是有限长序列。例如, 数字电话系统中, 从电话系统开通时刻开始(记为零时刻), 线路上的语音信号源源不断, 对其采样所得数字信号 $x(n)$ 就是无限长因果序列。这时直接按图 4.4.1 计算 $y(n)=h(n)*x(n)$ 是行不通的。存在的问题是要求 L 等于无穷大, 计算机无法实现, 而且会造成无穷大的时延。解决该问题的实用算法有两种: 重叠相加法和重叠保留法^[1,9]。下面仅介绍重叠相加法。

重叠相加法的基本思想是将 $x(n)$ 分段, 每段长度为 M , 然后依次计算各段与 $h(n)$ 的卷积, 再由各段的卷积结果得到 $y(n)$ 。

设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 如图 4.4.3 所示, $h(n)$ 的长度为 $N=8$, 对 $x(n)$ 进行分段, 每段长度为 $M=25$, 第 i 段记为 $x_i(n)$, 即

$$x_i(n) = x(n)R_M(n-iM) \quad i=0,1,2,\dots$$

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} h(n) * x_i(n) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i(n) \end{aligned}$$

其中, $y_i(n)=h(n)*x_i(n)$, 由于这是两个有限长序列的卷积, 因此直接按图 4.4.1 计算。 $x_i(n)$ 和 $y_i(n)$ 如图 4.4.3 所示, 由于 $x_i(n)$ 长度为 M , 而 $y_i(n)$ 长度为 $L=N+M-1$, 因此, $y_i(n)$ 和 $y_{i+1}(n)$ 在时间上必然有 $N-1$ 个点重叠, 即 $y_i(n)$ 的最后 $N-1$ 个点与 $y_{i+1}(n)$ 最前面的 $N-1$ 个点重叠。所谓重叠相加法, 就是将这些重叠点的序列值相加得到相应点的 $y(n)$ 值。重叠相加法计算步骤如下:

- (1) 计算并保存: $H(k)=\text{DFT}[h(n)]_L$, $L=N+M-1$;
- (2) 读入 $x_i(n)$ 并计算: $X_i(k)=\text{DFT}[x_i(n)]_L$;
- (3) $\hat{Y}_i(k)=H(k)X_i(k)$;
- (4) $\hat{y}_i(n)=\text{IDFT}[Y_i(k)]_L$, $n=0,1,2,\dots,L-1$;
- (5) 计算:

$$y(iM+n) = \begin{cases} \hat{y}_{i-1}(M+n) + \hat{y}_i(n) & 0 \leq n \leq N-2 (\text{重叠区}) \\ \hat{y}_i(n) & N-1 \leq n \leq M-1 (\text{非重叠区}) \end{cases}$$

- (6) $i=i+1$, 返回(2)。

应当注意, 工程上都用 FFT 算法计算 DFT, 所以一般取 $L=2^m$ 。图 4.4.3 中, $N=8$, $M=25$, $L=32$ 。由图可见 $i=0,1,2,3$ 时, 计算结果正确。即当 $0 \leq n \leq 4M$ 时,

$$y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) + y_3(n) = y(n)$$

上面的计算过程中,

$$\hat{y}_i(n) = y_i(n+iM)R_L(n)$$

编程计算时, $\hat{y}_{i-1}(n)$ 和 $\hat{y}_i(n)$ 存放在两个长度为 L 的一维数组中。

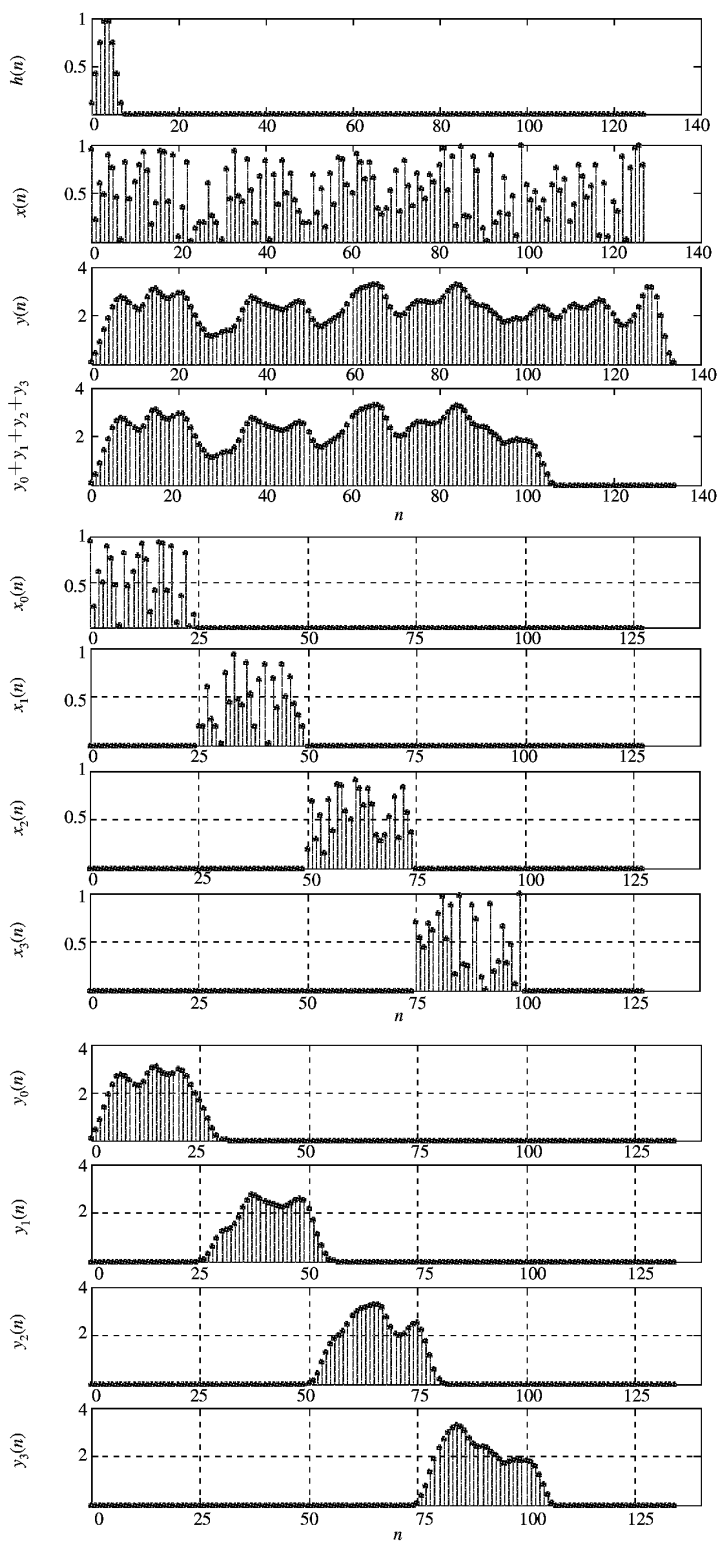


图 4.4.3 重叠相加法时域波形图

4.4.2 用 DFT 对信号进行谱分析

可以用 DFT 对时域离散信号和连续信号进行谱分析, 本节只介绍对序列的频谱分析, 对连续信号的谱分析放在第六章介绍。

1. 对有限长序列的谱分析

我们知道, 如果有限长序列 $x(n)$ 的长度为 M , 则 $x(n)$ 的 $N(M \leq N)$ 点 DFT 就是 $x(n)$ 的频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 在频率主值区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样。所以用 DFT 对有限长序列的谱分析很简单, 具体方法如下:

(1) 根据频率分辨率要求确定 DFT 变换区间长度 N 。频率分辨率是指频谱分析中能分辨的两个相邻频率点谱线的最小间隔。在数字频率域, 如果要求频率分辨率为 D rad, 而 N 点 DFT 意味着频谱采样间隔为 $2\pi/N$, 即能够实现的频率分辨率就是 $2\pi/N$, 所以根据下式求 N 的值:

$$\frac{2\pi}{N} \leq D \quad (4.4.3)$$

$$N \geq \frac{2\pi}{D} \quad (4.4.4)$$

一般取满足要求的整数即可。

(2) 计算 $x(n)$ 的 N 点 DFT, 绘制频谱图。

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_{N\text{点}} = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

要特别注意, 如果希望由 $X(k)$ 绘制 $x(n)$ 的频谱图, 要先求出 k 对应的数字频率 ω_k , 再以 ω_k 为自变量(横坐标)绘制频谱图。即

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$$

$$X(e^{j\omega_k}) = X(k)$$

例 4.4.2 $x(n) = 0.5^n R_{10}(n)$, 用 DFT 分析 $x(n)$ 的频谱, 要求频率分辨率为 0.02π , 并画出幅频曲线和相频曲线。

解 (1) 根据频率分辨率求 N :

$$\frac{2\pi}{N} \leq 0.02\pi$$

$$N \geq 100, \text{ 取 } N = 100$$

(2) 计算 $x(n)$ 的 N 点 DFT:

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= \sum_{n=0}^9 0.5^n W_{100}^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, 99 \\ &= \frac{1 - 0.5^{10} W_{100}^{k10}}{1 - 0.5 W_{100}^k} \quad k = 0, 1, \dots, 99 \end{aligned}$$

(3) $X(e^{j\omega k})$ 的幅频特性和相频特性如图 4.4.4 所示。

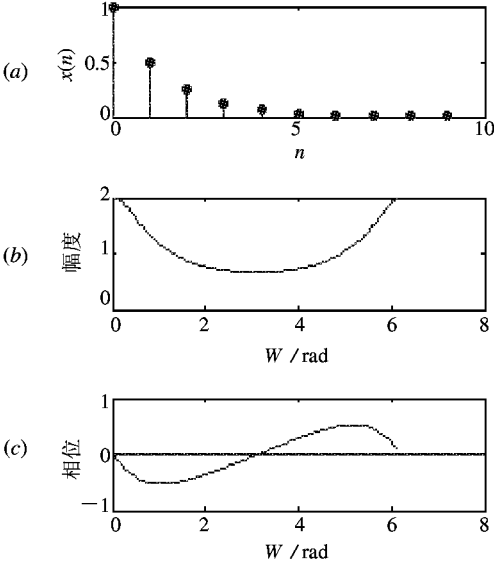


图 4.4.4 例 4.4.2 中 $x(n)$ 的频谱

(a) $x(n)$ 波形; (b) 幅频特性曲线; (c) 相频特性曲线

由图 4.4.4(b) 可见, $x(n)$ 的频谱变化很缓慢, 所以用 DFT 对该信号进行谱分析时, 频率分辨再低一点 (即 N 小一点) 也可以得到正确的频谱。

2. 对无限长序列的谱分析

对无限长序列 $x(n)$, 一般根据频率分辨率要求确定 DFT 变换区间长度 N , 对 $x(n)$ 截取 N 点进行 N 点 DFT, 则可以得到 $x(n)$ 的近似频谱。其分析误差在第六章介绍。

习题与上机题

说明: 下面各题中的 DFT 和 IDFT 计算均可以调用 MATLAB 函数 `fft` 和 `ifft` 计算。

1. 计算以下诸序列的 N 点 DFT, 在变换区间 $0 \leq n \leq N-1$ 内, 序列定义为

- (1) $x(n) = 1$
- (2) $x(n) = \delta(n)$
- (3) $x(n) = \delta(n - n_0) \quad 0 < n_0 < N$
- (4) $x(n) = R_m(n) \quad 0 < m < N$
- (5) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \quad 0 < m < N$
- (6) $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}nm\right) \quad 0 < m < N$
- (7) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$
- (8) $x(n) = \sin(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$
- (9) $x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(N)$
- (10) $x(n) = nR_N(n)$

2. 已知下列 $X(k)$, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$:

$$(1) X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta} & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta} & k = N - m \\ 0 & \text{其他 } k \end{cases}$$

$$(2) X(k) = \begin{cases} -\frac{N}{2} j e^{j\theta} & k = m \\ \frac{N}{2} j e^{-j\theta} & k = N - m \\ 0 & \text{其他 } k \end{cases}$$

其中, m 为正整数, $0 < m < N/2$ 。

3. 已知 $x(n) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$ 。

(1) 求出 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 画出幅频特性和相频特性曲线;

(2) 计算 $x(n)$ 的 $N(N \geq 12)$ 点离散傅立叶变换 $X(k)$, 画出幅频特性和相频特性曲线;

(3) 将 $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 的幅频特性和相频特性分别画在同一幅图中, 验证 $X(k)$ 是 $X(e^{j\omega})$ 的等间隔采样, 采样间隔为 $2\pi/N$ 。

(4) 计算 $X(k)$ 的 N 点离散傅立叶逆变换, 验证 DFT 和 IDFT 的惟一性。

4. 选择合适的变换区间长度 N , 用 DFT 对下列信号进行谱分析, 画出幅频特性和相频特性曲线。

$$(1) x_1(n) = 2 \cos(0.2\pi n) R_{10}(n)$$

$$(2) x_2(n) = \sin(0.45\pi n) + \sin(0.55\pi n) R_{51}(n)$$

$$(3) x_3(n) = 2^{-|n|} R_{21}(n+10)$$

5. 已知实序列 $x(n)$ 的 8 点 DFT 的前 5 个值为: $[0.25, 0.125 - j0.3, 0, 0.125 - j0.06, 0.5]$ 。利用 DFT 的性质和定义求下列各序列的 8 点 DFT。

$$(1) x_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n+5+10m) R_8(n)$$

$$(2) x_2(n) = x(n) e^{j\pi n/4}$$

6. 试利用 DFT 和 IDFT 的定义证明离散 Parseval 定理:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

其中, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N$ 。

7. 给定两个序列: $x_1(n) = [2, 1, 1, 2]$, $x_2(n) = [1, -1, -1, 1]$ 。

(1) 直接在时域计算 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的卷积;

(2) 用 DFT 计算 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的卷积, 验证 DFT 的时域循环卷积定理。

第五章 快速傅立叶变换(FFT)

【本章重点和难点】

(1) 基 2FFT 的算法原理。

(2) DIT-FFT 算法和 DIF-FFT 算法的差异。

(3) 编程并调用 MATLAB 函数 fft, 计算需要用 DFT 完成的课题(例如, 用 FFT 计算快速卷积、频谱分析、长序列过滤等)。

5.1 引言

影响数字信号处理发展的最主要因素之一是处理速度。DFT 使计算机在频域处理信号成为可能, 但是当 N 很大时, 直接计算 N 点 DFT 的计算量非常大。快速傅立叶变换(FFT: Fast Fourier Transform)可使实现 DFT 的运算量下降几个数量级, 从而使数字信号处理的速度大大提高。自从 1965 年第一篇 DFT 快速算法的论文发表以来, 人们已经研究出多种 FFT 算法, 它们的复杂度和运算效率各不相同。本章主要介绍最基本的基 2FFT 算法及其编程方法。

5.2 直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径

长度为 N 的序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_{N\text{点}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

由上式可知, 计算 $X(k)$ 的每一个值需要计算 N 次复数乘法和 $N-1$ 次复数加法, 所以计算 $X(k)$ 的 N 个值需要计算 N^2 次复数乘法和 $(N-1) \times N$ 次复数加法。当 $N \gg 1$ 时, N 点 DFT 的复数乘法和复数加法运算次数均与 N^2 成正比。当 N 增大时, 运算量非线性迅速增大。例如, $N=2^{10}$ 时, $N^2=2^{20}=1\,048\,576$ 。为了将 DFT 应用于各种实时信号处理的工程实际中, 必须减少其运算量。

由于 N 点 DFT 的运算量随 N^2 增长, 因此, 当 N 较大时, 减少运算量的途径之一就是 将 N 点 DFT 分解为几个较短的 DFT 计算, 则可大大减少其运算量。例如, 分解为 M 个 N/M 点 DFT, 则复数乘法运算量为 $(N/M)^2 \times M = N^2/M$, 下降到原来的 $1/M$ 。后面会看到, 经过某种运算, 即可由这 M 个 DFT 的运算结果得到原来要计算的 N 点离散傅立叶变换 $X(k)$ 。另外, 可根据 W_N^m 的周期性和对称性减少 DFT 的运算量。

W_N^m 的周期性:

$$W_N^{m+lN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = W_N^m \quad (5.2.1)$$

W_N^m 的对称性:

$$(W_N^{N-m})^* = W_N^m \quad (5.2.2)$$

$$W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m \quad (5.2.3)$$

快速傅立叶变换就是不断地将长序列的 DFT 分解为短序列的 DFT, 并利用 W_N^m 的周期性和对称性及其一些特殊值来减少 DFT 运算量的快速算法。本章要介绍的基 2FFT 算法是最基本且最常用的快速算法, 它只用到将长序列 DFT 分解和(5.2.3)式所示的 W_N^m 的对称性。

5.3 基 2FFT 算法

基 2FFT 要求 DFT 变换区间长度 $N=2^M$, M 为自然数。基 2FFT 算法又分为两类: 时域抽取法 FFT(Decimation In Time FFT), 简称为 DIT-FFT; 频域抽取法 FFT(Decimation In Frequency FFT), 简称为 DIF-FFT。本节分别介绍这两种 FFT 算法。

5.3.1 DIT-FFT 算法

序列 $x(n)$ 的 $N(N=2^M)$ 点 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_{N\text{点}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

将上面的和式按 n 的奇偶性分解为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=\text{偶数}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=\text{奇数}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l)W_N^{k2l} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1)W_N^{k(2l+1)} \end{aligned}$$

令 $x_1(l)=x(2l)$, $x_2(l)=x(2l+1)$ 。

因为 $W_N^{2kl}=W_{N/2}^{kl}$, 所以上式可写成

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.3.1)$$

(5.3.1)式说明, 按 n 的奇偶性将 $x(n)$ 分解为两个 $N/2$ 长的序列 $x_1(l)$ 和 $x_2(l)$, 则 N 点 DFT 可分解为两个 $N/2$ 点 DFT 来计算。用 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别表示 $x_1(l)$ 和 $x_2(l)$ 的 $N/2$ 点 DFT, 即

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(l)]_{N/2\text{点}} = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (5.3.2)$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(l)]_{N/2\text{点}} = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (5.3.3)$$

将(5.3.2)式和(5.3.3)式代入(5.3.1)式, 并利用 $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ 和 $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$ 的隐含周

期性可得到：

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{5.3.4}$$

这样，就将 N 点 DFT 的计算分解为计算两个 $N/2$ 点离散傅立叶变换 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ ，再计算(5.3.4)式。为了将如上分解过程用运算流图表示，以便估计其运算量，观察运算规律，总结编程方法，先介绍一种表示(5.3.4)式的蝶形运算图。

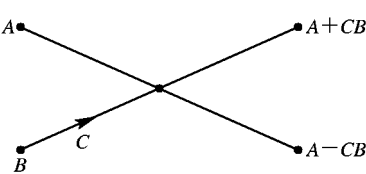


图 5.3.1 蝶形运算图

蝶形图及其运算功能如图 5.3.1 所示。

当 $N=2^3=8$ 时，用蝶形图表示第一次时域奇偶抽取分解及(5.3.4)式的运算流程图如图 5.3.2 所示。

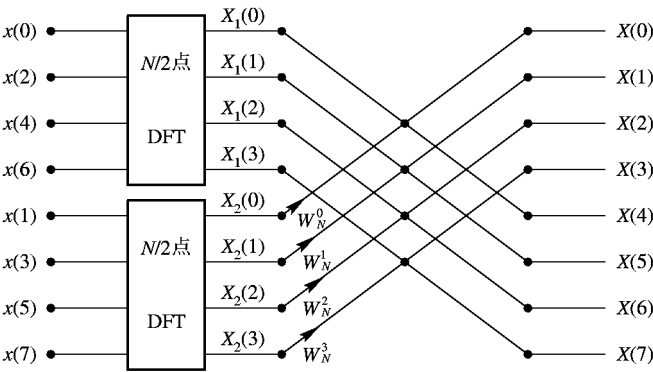


图 5.3.2 8 点 DFT 一次时域抽取分解运算流程图

根据图 5.3.2 可以求得第一次分解后的运算量。图 5.3.2 包括两个 $N/2$ 点 DFT 和 $N/2$ 个蝶形，每个 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 需要 $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 次复数乘法和 $\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{N}{2}$ 次复数加法运算，每个蝶形只有一次复数乘法运算和两次复数加法运算。所以，总的复数乘法次数为

$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 \times 2 + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}(N+1) \mid_{N \gg 1} \approx \frac{N^2}{2}$$

总的复数加法次数为

$$\left(\frac{N}{2}-1\right) \times \frac{N}{2} \times 2 + \frac{N}{2} \times 2 = \frac{N^2}{2}$$

由此可见，经过一次抽取分解，当 $N \gg 1$ 时，使 N 点 DFT 的运算量近似下降一半。所以，应当继续分解下去。将每个 $N/2$ 点 DFT 分解为 2 个 $N/4$ 点 DFT，……，依次类推，经过 M 级时域奇偶抽取，可分解为 N 个 1 点 DFT 和 M 级蝶形运算，每级有 $N/2$ 个蝶形。而 1 点 DFT 就是 1 点时域序列本身。 $N=8$ 点 DIT-FFT 的运算流程图如图 5.3.3(a)所示。根据 $W_{N/m}^k = W_N^{km}$ ，将图 5.3.3(a)转换成如图 5.3.3(b)所示的标准形式的运算流程图。

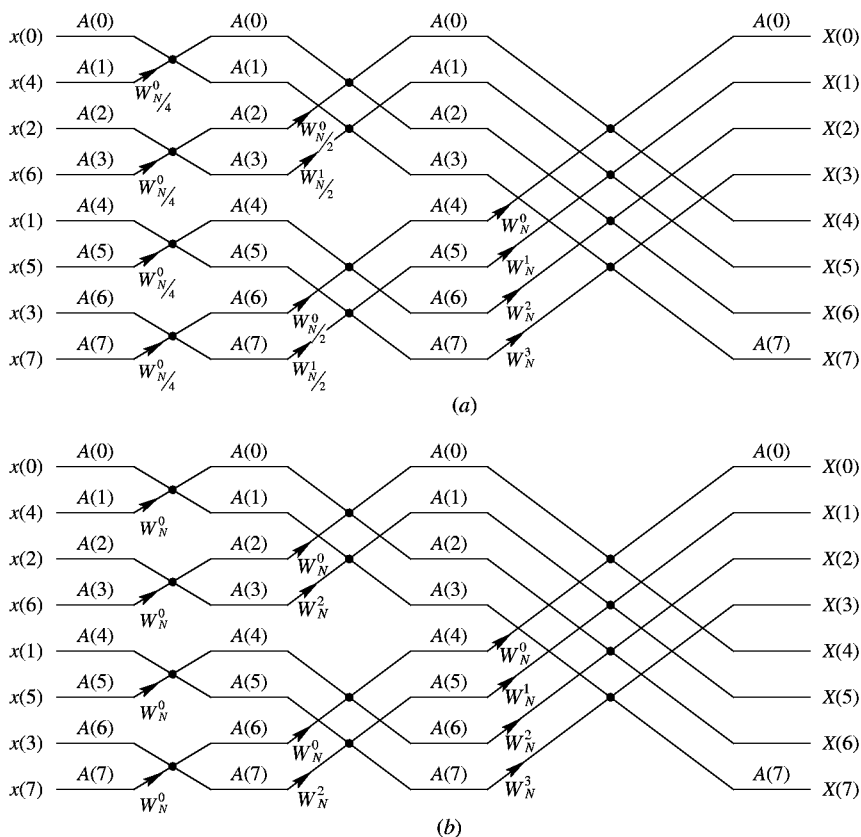


图 5.3.3 8 点 DIT - FFT 运算流程图

5.3.2 DIT - FFT 的运算效率

DIT - FFT 的运算效率指直接计算 DFT 的运算量与 DIT - FFT 的运算量之比。

由图 5.3.3 可见, $N=2^M$ 时, 其 DIT - FFT 运算流图由 M 级蝶形构成, 每级有 $N/2$ 个蝶形。因此, 每级需要 $N/2$ 次复数乘法运算和 N 次复数加法运算, M 级形共需复数乘法次数 $C_M(2)$ 和复数加法次数 $C_A(2)$ 分别为

$$C_M(2) = \frac{N}{2} \cdot M = \frac{N}{2} \lg N \quad (5.3.5)$$

$$C_A(2) = N \cdot M = N \lg N \quad (5.3.6)$$

式中, $\lg N = \log_2 N$ 。直接计算 N 点 DFT 的复数乘法次数为 N^2 , 复数加法次数为 $(N-1)N$ 。当 $N \gg 1$ 时, $N^2/C_M(2) \gg 1$, 所以 N 越大, DIT - FFT 运算效率越高。DIT - FFT 算法与 DFT 所需乘法次数与 N 的关系曲线如图 5.3.4 所示。例如, $N=2^{10}=1024$ 时, DIT - FFT 的运算效率为

$$\frac{\text{DFT 的乘法次数}}{\text{DIT - FFT 的乘法次数}} = \frac{N^2}{C_M(2)} = \frac{1024^2}{\frac{1024}{2} \times 10} = 204.8$$

而当 $N=2^{11}=2048$ 时,

$$\frac{N^2}{C_M(2)} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \cdot M} = \frac{2N}{M} = \frac{2 \times 2048}{11} \approx 372.37$$

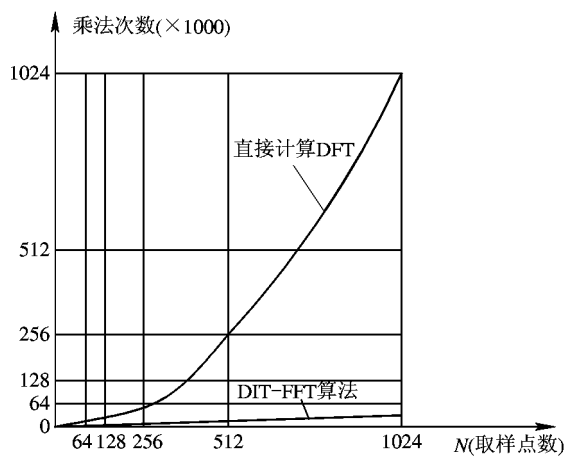


图 5.3.4 DIT-FFT 与 DFT 所需乘法次数比较曲线

5.3.3 DIT-FFT 的运算规律及编程思想

为了最终写出 DIT-FFT 运算程序或设计出硬件实现电路,下面介绍它的运算规律。

1. 原位计算

由图 5.3.3 可以看出, DIT-FFT 的运算过程很有规律。 $N=2^M$ 点的 FFT 共进行 M 级运算, 每级由 $N/2$ 个蝶形运算组成。同一级中, 每个蝶形的两个输入数据只对计算本蝶形有用, 而且每个蝶形的输入、输出数据结点又同在一条水平线上, 这就意味着计算完一个蝶形后, 所得输出数据可立即存入原输入数据所占用的存储单元。这样, 经过 M 级运算后, 原来存放输入序列数据的 N 个存储单元中便依次存放 $X(k)$ 的 N 个值。这种利用同一存储单元存储蝶形计算输入、输出数据的方法称为原位(址)计算。原位计算可节省大量内存, 从而使设备成本降低。

2. 旋转因子的变化规律

如上所述, N 点 DIT-FFT 运算流图中, 每级都有 $N/2$ 个蝶形。每个蝶形都要乘以因子 W_N^p , 称其为旋转因子, p 称为旋转因子的指数。但各级的旋转因子和循环方式都有所不同。为了编写计算程序, 应先找出旋转因子 W_N^p 与运算级数的关系。用 L 表示从左到右的运算级数($L=1, 2, \dots, M$)。观察图 5.3.3(a) 不难发现, 第 L 级共有 2^{L-1} 个不同的旋转因子。 $N=2^3=8$ 时的各级旋转因子表示如下:

$L=1$ 时,

$$W_N^p = W_{N/4}^J = W_{2^L}^J \quad J = 0$$

$L=2$ 时,

$$W_N^p = W_{N/2}^J = W_{2^L}^J \quad J = 0, 1$$

$L=3$ 时,

$$W_N^p = W_N^J = W_2^{JL} \quad J = 0, 1, 2, 3$$

对 $N=2^M$ 的一般情况, 第 L 级的旋转因子为

$$W_N^p = W_2^{JL} \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1$$

由于

$$2^L = 2^M \times 2^{L-M} = N \cdot 2^{L-M}$$

所以

$$W_N^p = W_{N \cdot 2^{L-M}}^J = W_N^{J \cdot 2^{M-L}} \quad J = 0, 1, 2, \dots, 2^{L-1} - 1 \quad (5.3.7)$$

$$p = J \cdot 2^{M-L} \quad (5.3.8)$$

这样, 就可按(5.3.7)式和(5.3.8)式确定第 L 级运算的旋转因子(实际编程时, L 为最外层循环变量)。

3. 蝶形运算规律

设序列 $x(n)$ 经时域抽选(倒序)后, 存入数组 X 中。如果蝶形运算的两个输入数据相距 B 个点, 应用原位计算, 则蝶形运算可表示成如下形式:

$$X_L(J) \leftarrow X_{L-1}(J) + X_{L-1}(J+B)W_N^p$$

$$X_L(J+B) \leftarrow X_{L-1}(J) - X_{L-1}(J+B)W_N^p$$

式中

$$p = J \cdot 2^{M-L}; J = 0, 1, \dots, 2^{L-1} - 1; L = 1, 2, \dots, M$$

下标 L 表示第 L 级运算, $X_L(J)$ 则表示第 L 级运算后数组元素 $X(J)$ 的值。而 $X_{L-1}(J)$ 表示第 L 级运算前 $X(J)$ 的值(即第 L 级蝶形的输入数据)。如果要用实数运算完成上述蝶形运算, 可按下面的算法进行。

设

$$T = X_{L-1}(J+B)W_N^p = T_R + jT_I$$

$$X_{L-1}(J) = X'_R(J) + jX'_I(J)$$

式中, 下标 R 表示取实部, I 表示取虚部,

$$T_R = X'_R(J+B) \cos \frac{2\pi}{N}p + X'_I(J+B) \sin \frac{2\pi}{N}p$$

$$T_I = X'_I(J+B) \cos \frac{2\pi}{N}p - X'_R(J+B) \sin \frac{2\pi}{N}p$$

$$X_L(J) = X_R(J) + jX_I(J)$$

则

$$X_R(J) = X'_R(J) + T_R$$

$$X_I(J) = X'_I(J) + T_I$$

$$X_R(J+B) = X'_R(J) - T_R$$

$$X_I(J+B) = X'_I(J) - T_I$$

4. 编程思想及程序框图

仔细观察图 5.3.3, 还可归纳出一些编程序有用的运算规律: 第 L 级中, 每个蝶形的两个输入数据相距 $B=2^{L-1}$ 个点; 同一旋转因子对应着间隔为 2^L 点的 2^{M-L} 个蝶形。

总结上述运算规律, 便可采用下述运算方法。先从输入端(第 1 级)开始, 逐级进行, 共进行 M 级运算。在进行第 L 级运算时, 依次求出 2^{L-1} 个不同的旋转因子, 每求出一个旋转因子, 就计算完它对应的所有 2^{M-L} 个蝶形。这样, 我们可用三重循环程序实现 DIT-FFT 运算, 程序框图如图 5.3.5 所示。

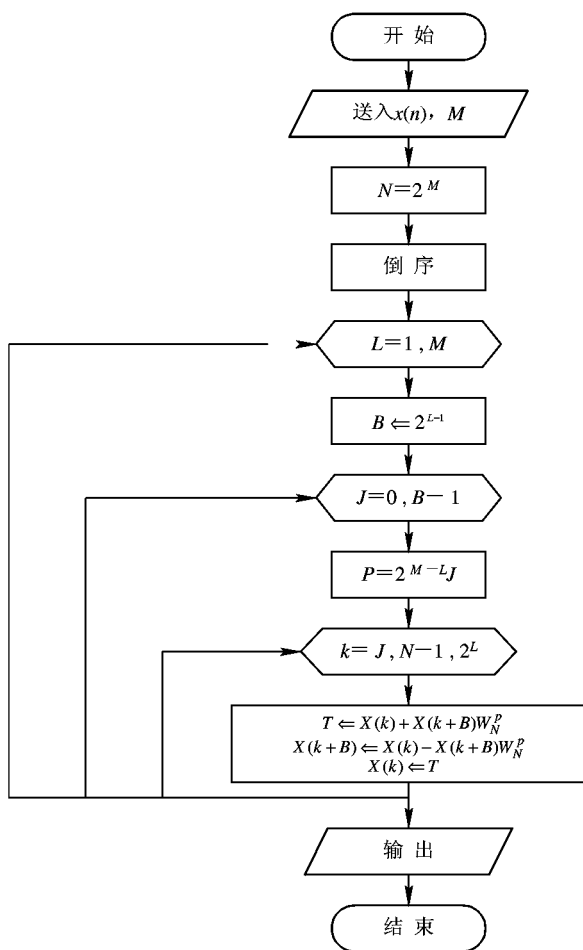


图 5.3.5 DIT-FFT 运算和程序框图

另外，DIT-FFT 算法的输出 $X(k)$ 为自然顺序，但为了适应原位计算，其输入序列不是按 $x(n)$ 的自然顺序排序，这种经过 $M-1$ 次偶奇抽选后的排序称为序列 $x(n)$ 的倒序（倒位）。因此，在运算之前应先对序列 $x(n)$ 进行倒序。程序框图中的倒序框就是完成这一功能的。下面介绍倒序算法。

5. 序列的倒序

DIT-FFT 算法的输入序列的排序看起来似乎很乱，但仔细分析就会发现这种倒序是很有规律的。由于 $N=2^M$ ，因此顺序数可用 M 位二进制数 $(n_{M-1}n_{M-2}\cdots n_1n_0)$ 表示。 M 次偶奇时域抽选过程如图 5.3.6 所示。第一次按最低位 n_0 的 0 和 1 将 $x(n)$ 分解为偶奇两组，第二次又按次低位 n_1 的 0、1 值分别对偶奇组分解；依次类推，第 M 次按 n_{M-1} 位分解，最后所得二进制倒序数如图 5.3.6 所示。表 5.3.1 列出了 $N=8$ 时以二进制数表示的顺序数和倒序数。由表显而易见，只要将顺序数 $(n_2n_1n_0)$ 的二进制位倒置，则得对应的二进制倒序值 $(n_0n_1n_2)$ 。按这一规律，用硬件电路和汇编语言程序产生倒序数很容易。但用高级语言程序实现时，直接倒置二进制数位是不行的，因此必须找出产生倒序数的十进制运算规

律。由表 5.3.1 可见，自然顺序数 I 增加 1，是在顺序数的二进制数最低位加 1，逢 2 向左进位。而倒序数则是在 M 位二进制数最高位加 1，逢 2 向右进位。例如，在 (000) 最高位加 1，则得 (100)，而 (100) 最高位为 1，所以最高位加 1 要向次高位进位，其实质是将最高位变为 0，再在次高位加 1。用这种算法，可以从当前任一倒序值求得下一个倒序值。

表 5.3.1 顺序和倒序二进制数对照表

顺 序		倒 序	
十进制数 I	二进制数	二进制数	十进制数 J
0	0 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

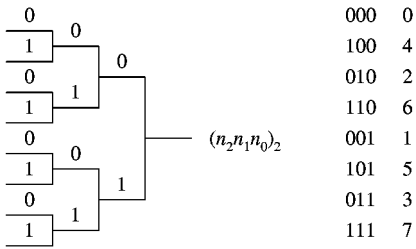


图 5.3.6 形成例序的树状图 ($N=2^3$)

为了叙述方便，用 J 表示当前倒序数的十进制数值。对于 $N=2^M$ ， M 位二进制数最高位的权值为 $N/2$ ，且从左向右二进制位的权值依次为 $N/4, N/8, \dots, 2, 1$ 。因此，最高位加 1 相加相当于十进制运算 $J+N/2$ 。如果最高位是 0 ($J < N/2$)，则直接由 $J+N/2$ 得下一个倒序值；如最高位是 1 ($J \geq N/2$)，则要将最高位变成 0 ($J \leftarrow J - N/2$)，次高位加 1 ($J \leftarrow J + N/4$)。但次高位加 1 时，同样要判断 0、1 值，如果为 0 ($J < N/4$)，则直接加 1 ($J \leftarrow J + N/4$)，否则将次高位变成 0 ($J \leftarrow J - N/4$)，再判断下一位；依次类推，直到完成最高位加 1，逢 2 向右进位的运算。

形成倒序 J 后，将原存储器中存放的输入序列重新按倒序排列。设原输入序列 $x(n)$ 先按自然顺序存入数组 A 中。例如，对 $N=8$ ， $A(0), A(1), A(2), \dots, A(7)$ 中依次存放着 $x(0), x(1), \dots, x(7)$ 。对 $x(n)$ 的重新排序(倒序)规律如图 5.3.7 所示。倒序的程序框图如图 5.3.8 所示，图 5.3.8 中的虚线框内是完成计算倒序值的运算流程图。由图 5.3.7 可见，第一个序列值 $x(0)$ 和最后一个序列值 $x(N-1)$ 不需要重排；当 $I=J$ 时，不

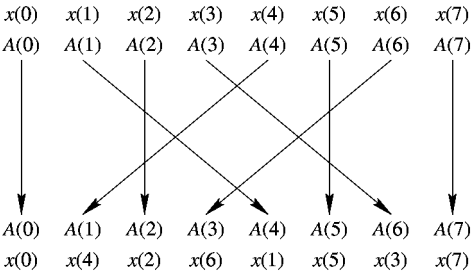


图 5.3.7 倒序规律

需要交换，当 $I \neq J$ 时， $A(I)$ 与 $A(J)$ 交换数据。所以图 5.3.8 中，顺序数 I 的起始、终止值分别为 1 和 $N-2$ ；倒序数 J 的起始值为 $N/2$ 。另外，为了避免再次调换前面已调换过的一对数据，框图中只对 $I < J$ 的情况调换 $A(I)$ 和 $A(J)$ 的内容。

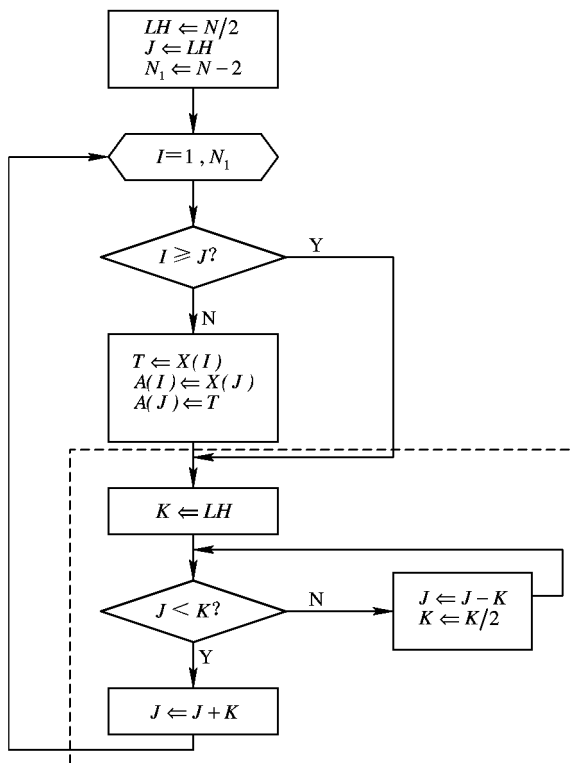


图 5.3.8 倒序程序框图

5.3.4 DIF - FFT

在基 2 快速算法中，频域抽取法 FFT 也是一种常用的快速算法，简称 DIF - FFT。

设序列 $x(n)$ 长度为 $N=2^M$ ，首先将 $x(n)$ 前后对半分开，得到两个子序列，其 DFT 可表示为如下形式：

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{k(n+N/2)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + W_N^{kN/2} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn}
 \end{aligned}$$

式中

$$W_N^{kN/2} = (-1)^k = \begin{cases} 1 & k = \text{偶数} \\ -1 & k = \text{奇数} \end{cases}$$

将 $X(k)$ 分解成偶数组与奇数组, 当 k 取偶数 ($k=2r, r=0, 1, \dots, N/2-1$) 时,

$$\begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^r \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

当 k 取奇数 ($k=2r+1, r=0, 1, \dots, N/2-1$) 时

$$\begin{aligned} X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \cdot W_{N/2}^r \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

令

$$\left. \begin{aligned} x_1(n) &= x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) &= \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{aligned} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$$

将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别代入 (5.3.9) 式和 (5.3.10) 式, 可得

$$\left. \begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^r \\ X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^r \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)$$

(5.3.11) 式表明, $X(k)$ 按奇偶 k 值分为两组, 其偶数组是 $x_1(n)$ 的 $N/2$ 点 DFT, 奇数组则是 $x_2(n)$ 的 $N/2$ 点 DFT。 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x(n)$ 之间的关系也可用图 5.3.9 所示的蝶形运算流图符号表示。图 5.3.10 表示 $N=8$ 时一次分解的运算流程图。

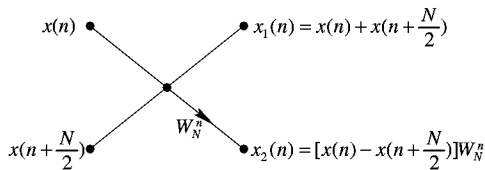


图 5.3.9 DIF-FFT 蝶形运算流图符号

由于 $N=2^M$, $N/2$ 仍然是偶数, 继续将 $N/2$ 点 DFT 分成偶数组和奇数组, 这样每个 $N/2$ 点 DFT 又可由两个 $N/4$ 点 DFT 形成, 其输入序列分别是 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 按上下对半分开形成的四个子序列。图 5.3.11 示出了 $N=8$ 时二次分解运算流图。这样继续分解下去, 经过 $M-1$ 次分解, 最后分解为 2^{M-1} 个 2 点 DFT, 2 点 DFT 就是一个基本蝶形运算流图。当 $N=8$ 时, 经两次分解, 便分解为四个 2 点 DFT, 如图 5.3.11 所示。 $N=8$ 的完整 DIF-FFT 运算流图如图 5.3.12 所示。

这种算法是对 $X(k)$ 进行奇偶抽取分解的结果, 所以称之为频域抽取法 FFT。观察图 5.3.12 可知, DIF-FFT 算法与 DIT-TFF 算法类似, 可以原位计算, 共有 M 级运算, 每级共有 $N/2$ 个蝶形运算, 所以两种算法的运算次数亦相同。不同的是 DIF-FFT 算法输入序列为自然顺序, 而输出为倒序排列。因此, M 级运算完后, 要对输出数据进行倒序才能得到自然顺序的 $X(k)$ 。另外, 蝶形运算略有不同, DIF-FFT 蝶形是先乘后加(减), 而

DIF-FFT 蝶形是先加(减)后相乘。观察图 5.3.3 和图 5.3.12 可知, DIT-FFT 和 DIF-FFT 的运算流图互为转置关系。

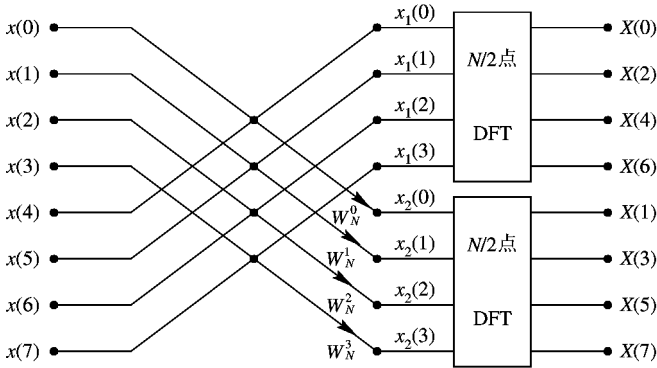


图 5.3.10 DIF-FFT 一次分解运算流图($N=8$)

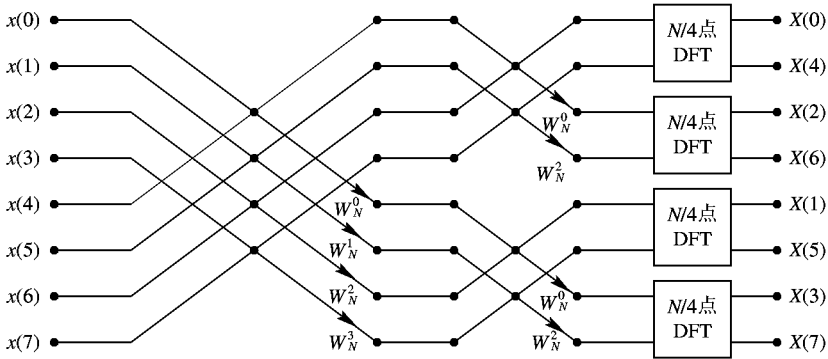


图 5.3.11 DIF-FFT 二次分解运算流图($N=8$)

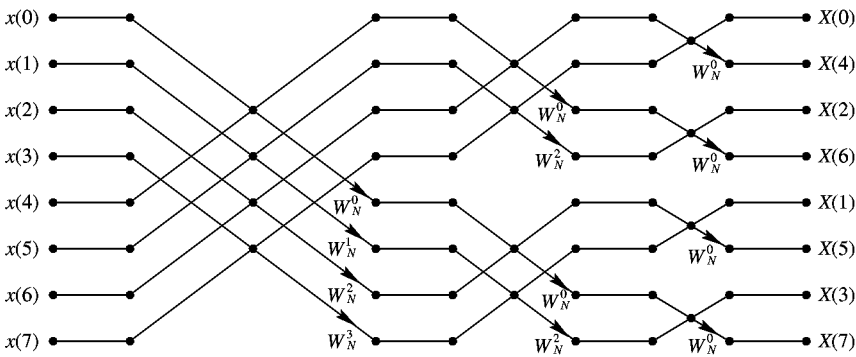


图 5.3.12 DIF-FFT 运算流图($N=8$)

5.3.5 IDFT 的高效算法

上述 FFT 算法流图也可以用于离散傅立叶逆变换 (IDFT: Inverse Discrete Fourier Transform)。比较 DFT 和 IDFT 的运算公式：

$$X(k) = \text{DET}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$
$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

只要将 DFT 运算式中的系数 W_N^{kn} 改变为 W_N^{-kn} ，最后乘以 $1/N$ ，就是 IDFT 的运算公式。所以，只要将上述的 DIT-FFT 与 DIF-FFT 算法中的旋转因子 W_N^p 改为 W_N^{-p} ，最后的输出再乘以 $1/N$ 就可以用来计算 IDFT。如果流图的输入是 $X(k)$ ，则输出就是 $x(n)$ 。因此，原来的 DIT-FFT 改为 IFFT 后，称为 DIF-IFFT 更合适；DIF-FFT 改为 IFFT 后应称为 DIT-IFFT。由 DIF-FFT 运算流图改成的 DIT-IFFT 运算流图如图 5.3.13 所示。

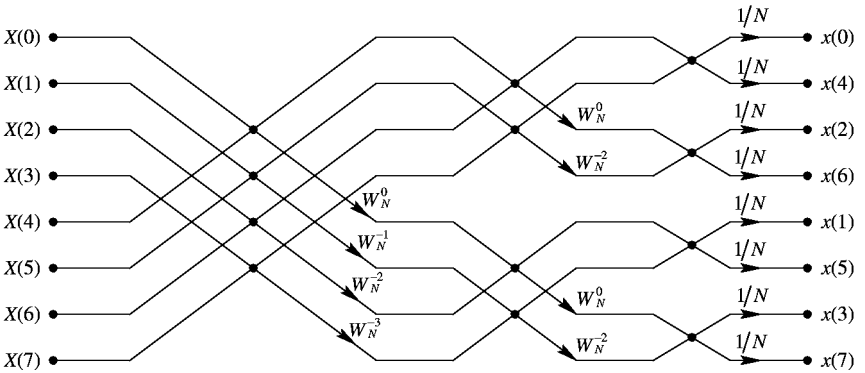


图 5.3.13 DIT-IFFT 运算流图

在实际中，有时为了防止运算过程中发生溢出，将 $1/N$ 分配到每一级蝶形运算中。由于 $1/N=(1/2)^M$ ，因此每级的每个蝶形输出支路均有一相乘因子 $1/2$ ，这种运算的蝶形流图如图 5.3.14 所示。由图可知，乘法次数比图 5.3.13 增加了 $(N/2)(M-1)$ 次。

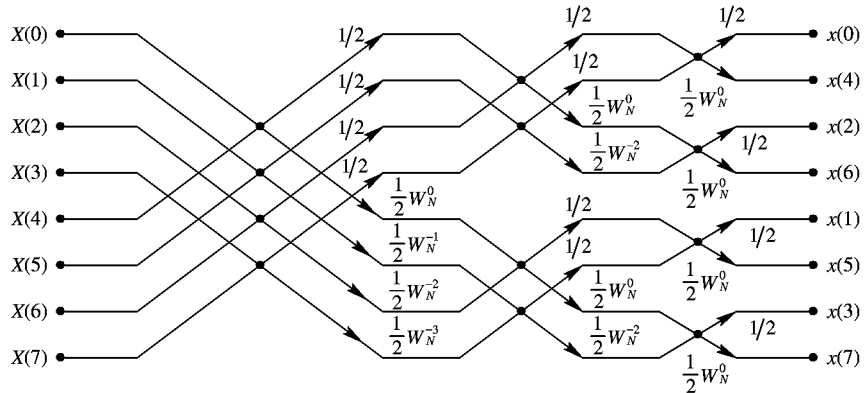


图 5.3.14 DIT-IFFT 运算流图(防止溢出)

如果希望直接调用 FFT 子程序计算 IFFT, 则可用下面的方法:

由于
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

因此
$$x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn}$$

对上式两边同时取共轭, 得

$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{kn} \right]^* = \frac{1}{N} \{ \text{DFT}[X^*(k)] \}^*$$

这样, 可以先将 $X(k)$ 取共轭, 然后直接调用 FFT 子程序, 或者送入 FFT 专用硬件设备进行 DFT 运算, 最后取共轭并乘以 $1/N$ 得到序列 $x(n)$ 。这种方法虽然用了两次取共轭运算, 但可以与 FFT 共用同一子程序, 因而用起来很方便。

应当说明, 快速傅立叶变换算法是信号处理领域重要的研究课题, 它直接影响着信号处理的速度。现在已提出的快速算法有多种, 且还在不断研究探索新的快速算法。由于教学大纲要求及教材篇幅所限, 本章仅介绍了算法最简单、编程最容易的基 2FFT 算法原理及程序框图。其他高效快速算法请读者参考有关书籍。例如乘法次数接近理论最少值的分裂基算法, 适合对实信号进行实数域变换的离散哈特莱变换(DHT), 基 4FFT, 基 8FFT, 基 r FFT, 混合基 FFT 以及进一步减少运算量的途径等内容, 在信号处理工程实际中都是有用的。

习题与上机题

1. 画出 16 点, 基 2DIT - FFT 的运算流程图, 估计图中复数乘法和复数加法的运算次数。

2. 对模拟信号 $x_a(t) = 2 \sin(4\pi t) + 5 \cos(8\pi t)$ 等间隔采样 N 点, 得到一个长度为 N 的序列 $x(n)$, 采样频率为 100 Hz。用 $x(n)$ 的 N 点 FFT 估计 $x_a(t)$ 的频谱。从下面给定的 N 值中选择一个能提供 $x_a(t)$ 的精确频谱的值, 调用 MATLAB 函数 fft 计算 $x(n)$ 的 N 点 FFT, 画出幅度谱和相位谱, 并解释 $|X(k)|$ 中的四根谱线与 $x_a(t)$ 中两项正弦函数的对应关系以及你选择 N 值的理由。

- (1) $N=40$;
- (2) $N=50$;
- (3) $N=60$ 。

3. 设 $x(n) = \cos(\pi n/99)$, $0 \leq n \leq N-1$ 。限定 $N=2^m$, 分别取 $m=10, 11, 12, 13$, 调用 MATLAB 函数 fft 计算 $x(n)$ 的 N 点 FFT, 统计 fft 的执行时间。验证运算时间与 $N \lg N$ 成正比。

[提示: 调用 MATLAB 函数 tic 和 toc 统计时间, 即在调用 fft 的程序行前面加入 tic 启动定时器, 在调用 fft 的程序行后面加入 toc, 则可得到并显示 fft 函数的执行时间。当然, fft 函数的执行时间与计算机速度有关。]

4. 编程序按照 DFT 的定义直接计算第 3 题中所要求的四种长度的 DFT, 统计计算时

间，与 `fft` 函数执行时间对比，验证 FFT 的计算效率随 M 值增大而提高。而且满足：按照 DFT 的定义直接的计算时间近似等于 `fft` 计算时间的 $(2N/M)$ 倍。

5. 编程序：调用 MATLAB 函数 `fft`，用重叠相加法实现有限长序列 $h(n)$ 与无限长因果序列 $x(n)$ 的快速卷积。选取合适的 $h(n)$ 的长度 N 和 $x(n)$ 的分段长度 M ，并产生各种 $h(n)$ 和 $x(n)$ 数据进行卷积仿真，画出 $h(n)$ 、 $x(n)$ 和卷积结果 $y(n)$ 的波形。

第六章 模拟信号数字处理

【本章重点和难点】

- (1) 模拟信号数字处理的原理框图、各部分的作用及主要技术指标的考虑。
- (2) 时域采样定理、采样信号的频谱和原模拟信号的频谱关系；由模拟信号通过采样得到时域离散信号，采样间隔的确定。
- (3) 模拟信号数字处理原理框图中的数字信号处理部分中的数字频率和原模拟信号的模拟频率的关系。
- (4) 用数字系统模拟一个线性模拟系统时，数字系统的传输函数和单位脉冲响应的选取。
- (5) 用 FFT 对模拟信号进行频谱分析的方法和步骤，以及对模拟信号进行频谱分析的近似性。

目前很多电子系统中仍使用模拟信号，而且实际中的信号源不少也是模拟信号源。但我们知道数字信号处理相对模拟信号处理有许多优点，其中有些特点是模拟信号处理不能完成的，因此权衡利弊，希望采用数字信号处理的方法完成对模拟信号处理的目的。

本章介绍以下四个内容：

- (1) 将模拟信号转换成数字信号时，采样频率如何确定——时域采样定理；
- (2) 如何将模拟信号转换成数字信号，以及如何再将处理后的数字信号转换成模拟信号；
- (3) 如何用数字网络实现模拟网络；
- (4) 用 FFT 对模拟信号进行频域分析的原理和误差。

6.1 模拟信号数字处理的原理框图

模拟信号数字处理的原理框图如图 6.1.1 所示。

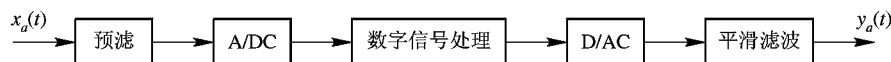


图 6.1.1 模拟信号数字处理的原理框图

数字信号处理方法是采用对输入信号进行计算的方法，使用的工具是计算机，因此必须把模拟信号转变成数字信号，才能适合计算机的要求。图 6.1.1 中的 A/DC (Analog/Digital Converter) 部分完成模拟信号到数字信号的转变。数字信号处理完以后，再将数字

信号通过 D/AC(Digital / Alalog Converter)转换成模拟信号。这样整个系统的输入和输出信号仍然是模拟信号形式, 因此 A/DC 和 D/AC 起着信号形式的匹配作用。

原理框图的核心是数字信号处理, 它具体完成对信号的处理任务, 例如对信号进行低通滤波等。下面将介绍数字信号处理的设计算法、原理框图中的预滤和低通的作用。

6.2 采样频率的确定

用采样间隔 T 对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样, 得到时域离散信号 $x(n)$, 公式如下:

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t) \big|_{t=nT} \tag{6.2.1}$$

显然, 必须要预先确定采样间隔 T , 或者说知道采样频率 f_s 。从概念上讲, 为了让时域离散信号能够包含模拟信号全部信息, 对模拟信号在时间上变化快的, 应采取较短的采样间隔, 或者说较高的采样频率。反过来, 对在时间上变化慢的信号, 采样间隔可以长一些, 即较低的采样频率 f_s 。但从实际处理方面考虑, 过高的采样频率会使数据量加大, 处理复杂, 成本提高。因此, 选择一个合适的采样频率是非常重要的。本节主要解决这一问题。

6.2.1 时域采样定理

对模拟信号进行采样, 可以看成让模拟信号 $x_a(t)$ 通过一个电子开关 S 。设电子开关每隔周期 T 合上一次, 每次合上时间为 $\tau \ll T$, 在电子开关输出端得到信号 $\hat{x}_a(t)$, 如图 6.2.1(a) 所示。该过程相当于将模拟信号乘上一个周期性矩形脉冲串 $P_T(t)$, 得到 $\hat{x}_a(t)$,

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)P_T(t)$$

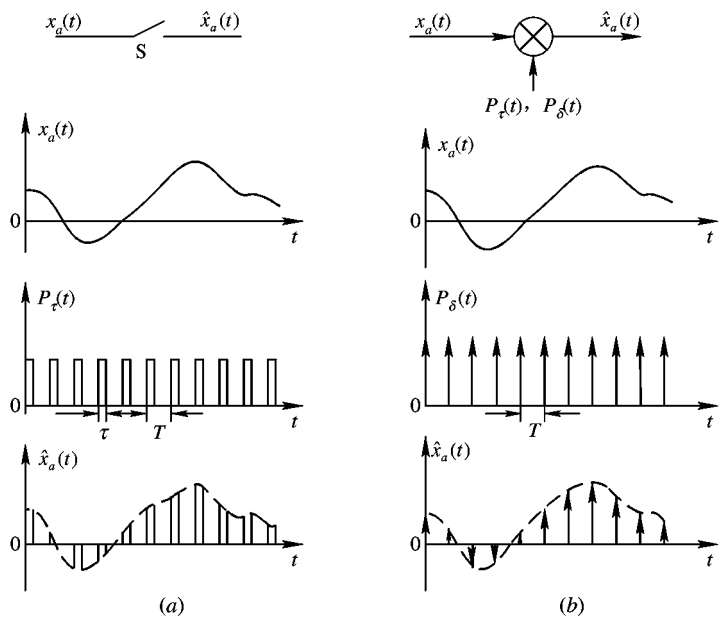


图 6.2.1 对模拟信号进行采样

如果让电子开关合上的时间 $\tau \rightarrow 0$, 则形成理想采样, 此时周期性矩形脉冲串变成周期性单位冲激串 $P_\delta(t)$, 周期为 T , 强度为 1。得到的采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和 $P_\delta(t)$ 如图 6.2.1(b) 所示, 用公式表示如下:

$$P_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (6.2.2)$$

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot P_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT)$$

式中, 只有当 $t = nT$ 时, δ 信号才有非零值, 即 $\hat{x}_a(t)$ 才有非零值, 因此也可以写成下式:

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (6.2.3)$$

上式是采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的表达式。下面转换到频域进行研究, 推导采样前后信号的频谱函数的变化。假设

$$X_a(j\Omega) = \text{FT}[x_a(t)], \quad \hat{X}_a(j\Omega) = \text{FT}[\hat{x}_a(t)], \quad P_\delta(j\Omega) = \text{FT}[P_\delta(t)]$$

这里 $P_\delta(t)$ 是周期性单位冲激信号, 周期是 T , 它的傅立叶变换是强度为 $2\pi/T$ 的周期性单位冲激串, 频率在 $n\Omega_s$ 处, 用公式表示如下:

$$P_\delta(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s) \quad (6.2.4)$$

式中, Ω_s 称为采样角频率, T 称为采样间隔, 如用 f_s 表示采样频率, Ω_s 和 f_s 之间的关系如下:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

按照(6.2.3)式, 采样信号等于模拟信号乘以周期单位冲激信号, 那么采样信号的傅立叶变换等于模拟信号的傅立叶变换卷积周期性单位冲激信号的傅立叶变换, 推导如下:

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - n\Omega_s - \theta) d\theta \end{aligned}$$

式中, 只有在 $\theta = \Omega - n\Omega_s$ 时, 才有非零值, 因此得到:

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jn\Omega_s) \quad (6.2.5)$$

上式表示模拟信号经过采样, 得到的采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱函数和原来信号 $x_a(t)$ 频谱函数之间的关系。如果把上式展开, 得到:

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} [\cdots + X_a(j\Omega + j\Omega_s) + X_a(j\Omega) + X_a(j\Omega - j\Omega_s) + X_a(j\Omega - j2\Omega_s) + \cdots]$$

式中, $X_a(j\Omega)$ 是原来信号的频谱函数, $X_a(j\Omega + j\Omega_s)$ 是将原来信号的频谱移到 $-\Omega_s$ 处, $X_a(j\Omega - j\Omega_s)$ 是将原来信号的频谱移到 Ω_s 处, 这样采样信号的频谱就是将原信号频谱依次搬移到 $n\Omega_s$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 形成的, 或者说采样信号的频谱是原信号的频谱以 Ω_s 为周期, 进行周期性延拓形成的。

假设 $x_a(t)$ 是带限信号, 其频谱函数的最高频率为 Ω_c , 它的频谱函数示意图如图 6.2.2(a) 所示, $P_\delta(t)$ 的频谱 $P_\delta(j\Omega)$ 示意图如图 6.2.2(b) 所示。按照 (6.2.5) 式, $\hat{x}_a(t)$ 的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 则如图 6.2.2(c) 所示。一般将 $X_a(j\Omega)$ 称为基带谱, 如果 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$ 或者 $f_s \geq 2f_c$, 则基带谱和其他周期延拓形成的谱不会重叠, 当然, 相邻的延拓谱也不重叠, 如图 6.2.2(c) 所示。但如果选择采样频率低, 使 $\Omega_s < 2\Omega_c$ 或者 $f_s < 2f_c$, 则明显会形成基带谱和其他周期延拓的谱发生重叠, 相邻的延拓谱也重叠的现象。这种现象称为频谱混叠现象, 如图 6.2.2(d) 所示。

因为基带谱处在 $\Omega=0$ 附近, 如果基带谱和其他延拓谱不重叠, 完全可以用一个理想低通滤波器从这些以 Ω_s 为重复周期的重复谱中把基带谱滤出来。该理想低通滤波器的传输函数 $G(j\Omega)$ 为

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{1}{2}\Omega_s \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{1}{2}\Omega_s \end{cases} \quad (6.2.6)$$

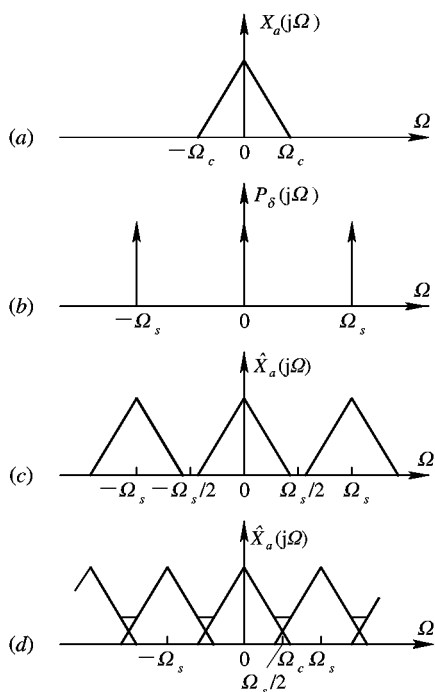


图 6.2.2 采样信号的频谱

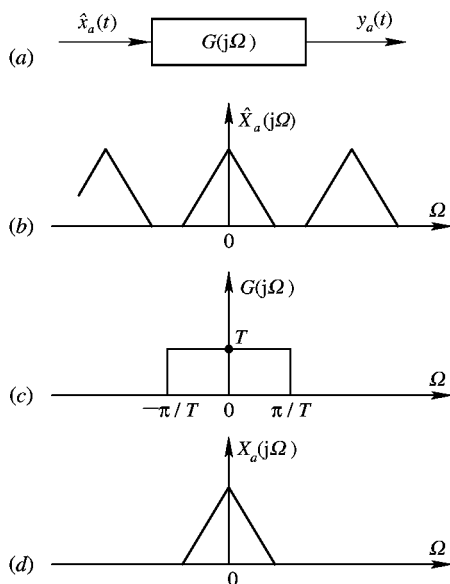


图 6.2.3 采样信号的理想恢复

如果让采样信号通过理想低通滤波器 $G(j\Omega)$, 如图 6.2.3 所示, 毫无疑问, 理想低通滤波器的输出 $y_a(t)$ 就等于原来的模拟信号 $x_a(t)$, 用公式表示如下:

$$Y_a(j\Omega) = \text{FT}[y_a(t)] = \hat{X}_a(j\Omega) \cdot G(j\Omega)$$

将 (6.2.5) 式代入上式, 得到:

$$Y_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jn\Omega_s) \cdot G(j\Omega)$$

由于没有频率混叠, 按照图 6.2.3, 理想低通滤波器 $G(j\Omega)$ 将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 中的基带谱不失真地

过滤出来, 因此

$$\begin{aligned} Y_a(j\Omega) &= X_a(j\Omega) \\ y_a(t) &= \text{IFT}[Y_a(j\Omega)] \\ &= \text{IFT}[X_a(j\Omega)] = x_a(t) \end{aligned}$$

图 6.2.3 表示了理想低通滤波器从采样信号恢复原模拟信号的过程。但是, 当 $f_s \geq 2f_c$ 条件不满足时, 便形成了频谱混叠, 如图 6.2.2(d) 所示, 再用理想低通滤波器, 也不可能从采样信号中无失真地滤出原信号。因此, $f_s \geq 2f_c$ 是能否从采样信号恢复原信号的必要条件。一般将这种用理想低通滤波器恢复模拟信号的方法称为理想恢复, 因为该滤波器是理想的, 是不可实现的。如果对理想低通滤波器的传输函数 $G(j\Omega)$ 进行傅立叶反变换, 得到该滤波器的单位冲激响应, 公式推导如下:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

将 (6.2.6) 式代入, 得到:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} T e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} \quad (6.2.7)$$

上式低通滤波器的单位冲激响应的波形如图 6.2.4 所示。

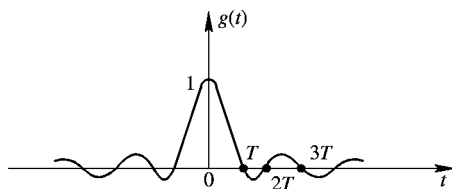


图 6.2.4 理想低通滤波器的单位冲激响应 $g(t)$ 波形

(6.2.7) 式或者图 6.2.4 表明, 低通滤波器的单位冲激响应存在于 $-\infty < t < \infty$ 区间, 该低通滤波器是非因果不可实现的, 因此称为理想恢复。将在下一节中介绍如何在实际中将数字信号恢复成模拟信号。

对图 6.2.2(d) 需要说明一个问题, 一般频谱函数是复函数, 相加应是复数相加, 这里只是一个示意图。另外, 一般称 $f_s/2$ 为折叠频率, 只有当信号的最高频率不超过该频率时, 才不会产生频率混叠现象, 否则超过折叠频率的部分会折叠回来, 形成频率混叠现象, 因此频率混叠现象均产生在 $f_s/2$ 附近。总结以上, 时域采样定理包括两部分内容, 叙述如下:

(1) 对模拟信号 $x_a(t)$ 进行等间隔采样形成采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 。采样信号的频谱是模拟信号的频谱以采样频率为周期进行周期性延拓形成的, 用 (6.2.5) 式表示。

(2) 设模拟信号 $x_a(t)$ 属带限信号, 最高截止角频率为 Ω_c , 如果采样角频率 $\Omega_s \geq 2\Omega_c$, 那么让采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 通过一个增益为 T , 截止角频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器 $G(j\Omega)$, 可以惟一地恢复出原来的模拟信号 $x_a(t)$ 。如果 $\Omega_s < 2\Omega_c$, 则会造成采样信号中的频谱混叠现象, 不可能无失真地恢复出原来的模拟信号。

6.2.2 由模拟信号到时域离散信号采样间隔的确定

由上面得到的采样定理可知,由模拟信号到采样信号 $\hat{x}_a(t)$,为了不丢失信息,或者说能够从 $\hat{x}_a(t)$ 不失真地恢复原模拟信号 $x_a(t)$,要求采样频率必须大于等于信号最高频率的两倍以上,否则会引起频率混叠。如图 6.2.5 所示,采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ 在表示形式上不同,但信号强度是相等的,且都出现在采样点上。不同的是 $\hat{x}_a(t)$ 的自变量是 t ,采样点之间相距采样间隔 T ,而 $x(n)$ 的自变量是 n ,两个相邻序列点之间相距是 1,可以把 $x(n)$ 看成是 $\hat{x}_a(t)$ 自变量归一化的过程。

前面已经推出采样信号的傅立叶变换 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 和模拟信号傅立叶变换 $X_a(j\Omega)$ 之间的关系,重写如下:

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jn\Omega_s) \quad (6.2.8)$$

也可以从另外的路线求 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 。已知采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 用冲激信号表示的公式是

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (6.2.9)$$

$\hat{X}_a(j\Omega)$ 就是对上式的傅立叶变换,即

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

上式中方括号部分只有在 $t = nT$ 时具有非零值,强度是 $x_a(nT)$,因此得到:

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \quad (6.2.10)$$

又知道时域离散信号 $x(n)$ 的傅立叶变换用下式表示:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (6.2.11)$$

比较(6.2.10)式和(6.2.11)式,因为 $x(n) = x_a(nT)$, $\omega = \Omega T$,得到:

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (6.2.12)$$

再将(6.2.8)式代入上式,得到:

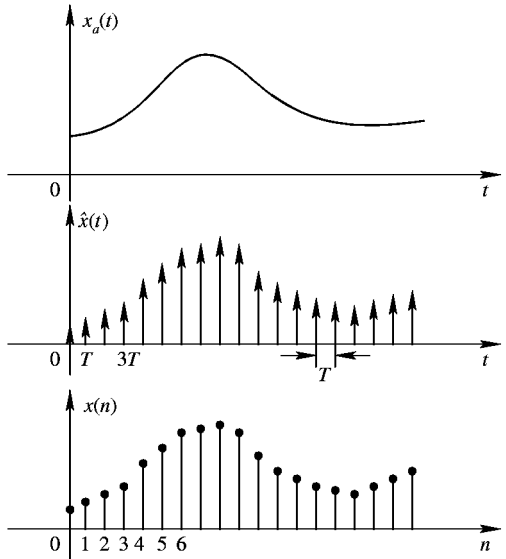


图 6.2.5 模拟信号 $x_a(t)$ 、采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ 的波形

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \frac{\omega}{T} - jn\Omega_s \right)$$

将 $\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$ 代入上式, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a \left(j \frac{\omega}{T} - jn \frac{2\pi}{T} \right) \quad (6.2.13)$$

时域离散信号的频谱和模拟信号的频谱就是通过上式或者(6.2.12)式联系起来的。 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是以模拟角频率 $\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$ 为周期进行延拓的;相应地,数字频率 $\omega_s = \Omega_s T = \Omega_c / f_s = 2\pi$, $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期进行延拓的。如果用两种采样间隔对模拟信号进行采样, $T_1 < 1/(2f_s)$, $T_2 > 1/(2f_s)$, 对于采样间隔 T_1 的采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱没有发生混叠, 时域离散信号的频谱也不会发生混叠。对于采样间隔 T_2 的采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱发生了混叠, 时域离散信号的频谱也发生了混叠。以上情况如图 6.2.6 所示。信号 $x_a(t)$ 的最高截止角频率是 Ω_c , 相应地, $X(e^{j\omega})$ 的最高截止频率是 $\omega_c = \Omega_c T = \Omega_c / f_s$ 。

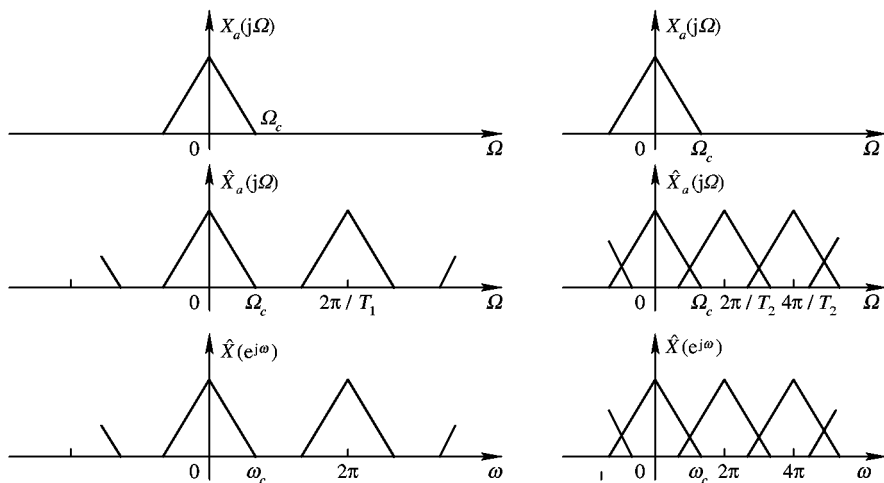


图 6.2.6 $X_a(j\Omega)$ 、 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的示意图

经过以上分析, 得到结论: 由模拟信号经过采样得到时域离散信号, 要求采样频率必须满足采样定理, 即采样频率必须大于等于模拟信号最高频率的 2 倍以上, 才能保证频谱没有混叠现象。

实际中, 信号的频谱并不是锐截止的, 在信号有用的最高截止频率以上, 由于其他的杂乱信号等原因, 存在一些高频分量, 或者说信号截止频率以上还拖着一个长尾巴, 仍然可能引起频率混叠, 为避免这种现象产生, 一般选 $\Omega_s = (3 \sim 4)\Omega_c$ 。当然, 从减少频率混叠现象来说, 选择采样频率愈高愈好, 但这会增加数据量, 延长数字信号处理的运算时间, 增加设备成本。另外, 在采样以前经常再加一个保护性的低通滤波器, 滤去信号高于折叠频率 $\Omega_s/2$ 以上的高频分量, 这就是图 6.1.1 原理框图中加预滤的原因。

下面再把时域离散信号和采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 进行比较, 以弄清楚它们的概念。时域离散信号即序列 $x(n)$, 它一般是一些数据按照一定顺序排列成的序列, 这里自变量 n 取整数, n 取非整数时无定义。而采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 由(6.2.9)式表示, 它用一串延时的单位冲激信号的加权和表示, 在采样点上采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的强度等于模拟信号在采样点的信号值, 在非

采样点上采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的强度为 0，这里自变量 t 取连续值。因此时域离散信号和采样信号有着概念上的不同，但它们都可以由模拟信号产生。

6.3 将模拟信号转换成数字信号(A/DC)

从原理上讲，将模拟信号转换成数字信号(A/DC)的过程有两步。第一步是按照一定的采样间隔对模拟信号进行等间隔采样，形成时域离散信号；第二步是把时域离散信号经过量化和二进制编码形成数字信号。它的原理框图如图 6.3.1 所示。

如果知道模拟信号的最高频率，按照采样定理选择采样频率 f_s 后，对模拟信号进行等间隔(间隔 $T=1/f_s$)采样，得到采样点上的样本数据，这一串样本数据就是序列。设 A/DC 有 M 位，按照 M 位对序列进行量化编码以后，A/DC 的输出就是 M 位的二进制编码，即数字信号。但实际上这两步是同时完成的。下面举一个采样、量化编码的例子。设模拟信号如下式所示：

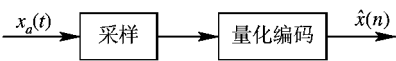


图 6.3.1 A/DC 原理框图

$$x_a(t) = \sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{8}\right)$$

式中， $f=50\text{ Hz}$ ，选择采样频率 $f_s=200\text{ Hz}$ ，将 $t=nT$ 代入上式中，得到：

$$\begin{aligned} x_a(nT) &= \sin\left(2\pi fnT + \frac{\pi}{8}\right) \quad T = \frac{1}{f_s} \\ &= \sin\left(2\pi \frac{50}{200}n + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi n + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

序列 $x(n)$ 在数值上等于 $x_a(nT)$ ，将 $n=\cdots, 0, 1, 2, 3, \cdots$ ，代入上式，得到时域离散信号即序列 $x(n)$ ，

$$x(n) = x_a(nT) = \{\cdots, 0.382\ 683, 0.923\ 879, -0.382\ 683, -0.923\ 879, \cdots\}$$

如果 A/DC 按照 $M=6$ 进行量化编码，也就是说，上面的数据均用 6 位二进制编码表示，其中一位为符号位，则数字信号用 $\hat{x}(n)$ 表示：

$$\hat{x}(n) = \{\cdots, 0.011\ 00, 0.111\ 01, 1.011\ 00, 1.111\ 01, \cdots\}$$

以上只是从原理上介绍用 A/DC 形成数字信号的过程，实际中 A/DC 作为一个器件，输入是模拟信号，输出就是数字信号。如果将上面的数字信号用十进数表示，则是

$$\hat{x}(n) = \{\cdots, 0.375\ 00, 0.906\ 25, -0.375, -0.906\ 25, \cdots\}$$

显然，经过量化编码以后的 $\hat{x}(n)$ 和原 $x(n)$ 不同，这种误差是由量化引起的，一般称为量化误差。量化误差起噪声干扰作用，应用中希望量化误差小，这样需要选择位数高的 A/DC。但位数高，A/DC 的价格会大幅度增加，其他设备的复杂性和价格也相应增加，因此 A/DC 的位数要根据需要适当选择。购买 A/DC 时，主要根据两个指标进行选择，即采样频率和精度，这里的精度即是二进制编码的位数。

6.4 将数字信号转换成模拟信号(D/AC)

数字信号的每一个数据都是有限位的二进制编码,如果要将其转换成模拟信号,首先需要解码。解码即是 将二进制编码变成具体的信号值,例如将数字信号 $(0.1010)_2$ 转换成 0.625 。假设 x 值用 M 位(其中符号位占一位)二进制编码表示: $x = (x_0 x_1 x_2 x_3 \cdots x_{M-1})_2$, 式中 x_i 取值为 1 或者 0, x_0 表示符号位,这需要完成下面的运算:

$$x = (-1)^{x_0} \sum_{i=1}^{M-1} x_i 2^{-i}$$

因此, D/AC 中的解码就是完成上面运算的功能。例如 $x = (0.1010)_2$, 解码运算为

$$x = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} = 0.625$$

这种解码运算可用精度高、稳定性高的电阻网络实现,限于篇幅,不再介绍这部分内容。

经过解码以后,信号可以看成时域离散信号。时域离散信号的信号值只是模拟信号在采样时刻的信号值,缺少采样点之间的信号值,要恢复模拟信号需要在采样点之间进行插值。一种最简单的插值的方法是零阶保持器,其原理是在采样点之间始终保持开始采样点的数值,直到新的采样点来到时,再改变成新的采样值。图 6.4.1(a)表示的是时域离散信号,它的包络是原来的模拟信号,图 6.4.1(b)则是用零阶保持器插值以后的模拟信号。恢复以后的模拟信号和原来的模拟信号对比是有差别的。差别是原来的模拟信号是一条连续的曲线,而恢复的模拟信号产生了许多台阶,相当于在频率域增加了许多高频分量。为此,需要在零阶保持器以后加一个低通滤波器,对零阶保持器的输出波形进行平滑。D/AC 的原理方框图如图 6.4.2 所示。有时市面上买来的 D/AC 不带有低通滤波器,需要另外设计一个模拟低通滤波器。该模拟低通滤波器的最高截止频率要根据数字信号处理完以后的信号最高截止频率进行选择。

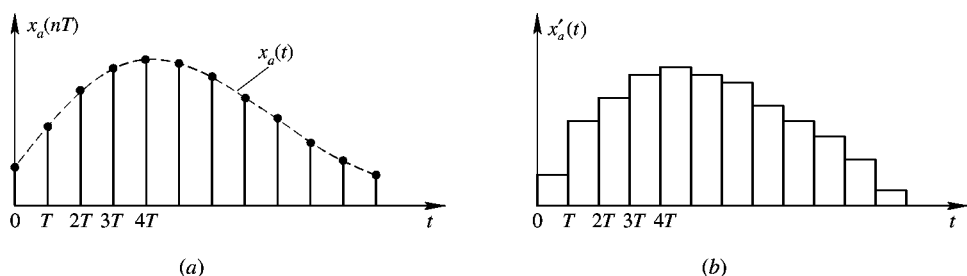


图 6.4.1 零阶保持器的输出波形

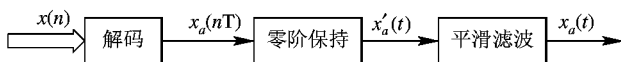


图 6.4.2 D/AC 方框图

零阶保持器的输出经过平滑滤波以后,其波形和原波形相比仍然有误差,但这些误差在工程中是允许的,更重要的是零阶保持器简单易实现,成本也低,因此工程中一般使用的 D/AC 器件都是应用了这种零阶保持器的原理。如果要求更精确地恢复,可以采用一阶

插值或者二阶插值，但相应的器件结构要复杂，成本要提高。

6.5 对数字信号处理部分的设计考虑

对数字信号处理部分的设计取决于对模拟信号要做如何处理的要求。虽然模拟信号处理系统和数字信号处理系统中信号形式不一样，处理方法也不一样，但设计要求的相似。例如，模拟信号处理中，要求对模拟信号进行低通滤波，需要根据要求设计一个低通滤波器；在数字信号处理中，同样要求对数字信号进行低通滤波，需要设计的是数字低通滤波器。下面将通过实例进行说明。在举例之前先介绍模拟信号的频率 f 和数字域的频率 ω 之间的关系。

如果一个时域离散信号是由一个模拟信号采样得来的，该时域离散信号的数字频率和模拟信号的模拟频率之间有一个简单的关系，即

$$\omega = \Omega T \tag{6.5.1}$$

或者

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \tag{6.5.2}$$

上面两式说明，如果时域离散信号由一个模拟信号采样得到，数字频率和模拟角频率之间成线性关系，或者说数字频率就是模拟角频率对采样频率的归一化频率。

在一些文献中经常使用归一化频率 $f' = f/f_s$ 或者 $\Omega' = \Omega/\Omega_s$ ，即频率 f 和角频率 Ω 分别对采样频率 f_s 和采样角频率 Ω_s 归一化。当 f 由 0 经过 $f_s/2$ 变化到采样频率 f_s 时，归一化频率 f' 则由 0 经过 0.5 变化到 1；归一化角频率 Ω' 也一样。归一化数字频率 $\omega' = \omega/(2\pi)$ ，注意，这里 ω' 是对 2π 的归一化频率，当数字频率 ω 由 0 经过 π 变化到 2π 时， ω' 则由 0 经过 0.5 变化到 1。按照(6.5.1)式和(6.5.2)式， f 、 f' 、 Ω 、 Ω' 、 ω 、 ω' 的定标值对应关系如图 6.5.1 所示。这里模拟信号的最高频率为 $0.5f_s$ ，否则经过采样后，得到的序列的傅立叶变换会产生频谱混叠，丢失信息。为了提高模拟信号的分析频率，必须提高采样频率 f_s 。

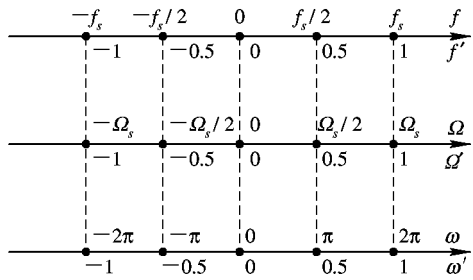


图 6.5.1 模拟频率和数字频率之间的定标关系

有了上面关于模拟频率和数字频率之间的对应关系，可以将模拟域一些频率参数直接转换到数字域，直接对数字信号处理部分提出要求，根据这些要求对数字信号处理部分进行设计。下面通过举例说明如何根据对模拟信号处理的要求，对数字信号处理提出要求。

例 6.5.1 设 $x_a(t)$ 是带有干扰的模拟信号，有用的信号频率范围为 $0 \sim 20$ kHz，干扰

主要在 20 kHz 以上。试用数字信号处理方式对输入信号进行低频滤波,达到滤除干扰的目的。要求画出该数字信号处理系统原理方框图,求出每个方框图的主要指标。

解 按照题意,如果用模拟信号处理方法,需要设计一个模拟低通滤波器。该低通滤波器的最高截止频率可以选在有用信号的最高频率 $f_p = 20$ kHz,带内和带外的幅度衰减要求题目中没有给出,可以根据经验提出,通过实验再修改。这里假定:希望在带内幅度单调变化,在 f_p 处的幅度衰减不小于在 0 频率处幅度的 0.707 倍(即 3 dB 衰减);在 20 kHz 以上,幅度迅速单调下降,要求在 $f_r = 30$ kHz 处的幅度要小于 0 频率处幅度的 1/10(即 20 dB 衰减)。以上是对模拟低通滤波器的技术要求。现在要求用数字信号处理方法对模拟信号进行低通滤波,即要求设计一个数字低通滤波器进行滤波。如何设计数字滤波器将在后面讲述,下面仅对数字滤波器提出技术要求。

该例题的系统方框图应包括预滤、A/DC、数字低通滤波器、D/AC 和平滑滤波,方框图如图 6.5.2 所示。下面分别介绍各部分的技术指标。

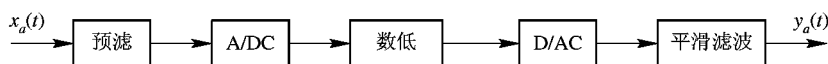


图 6.5.2 系统方框图

(1) 预滤:这是一个简单的模拟低通滤波器,作用是防止高频杂散分量引起频率混叠。由于有用的信号频率为 0~20 kHz,因此模拟低通滤波器的高频截止频率可定在 20 kHz。

(2) A/DC:因为信号的最高频率是 20 kHz,选择采样频率为 40 kHz,即可满足采样定理,但为了防止残余的高频分量引起频率混叠,按照 3 倍于信号最高频率选择采样频率,即选择采样频率 $f_s = 60$ kHz。题目没有对它的精度提出要求,暂时选择编码位数是 8。

(3) 数字低通滤波器:模拟滤波器传输函数使用模拟频率 f ,数字滤波器的传输函数使用数字频率 ω ,这两个频率成线性关系,用(6.5.1)式或(6.5.2)式表示,需要按照这一关系将这些边界频率转换过来。

数字低通滤波器的最高截止频率用 ω_p 表示,计算如下:

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{f_s} = \frac{2\pi f_p}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 20}{60} = \frac{\pi}{2}$$

即要求频率在 $0 \sim \pi/2$ 范围内的数字滤波器的幅度单调下降,最大衰减不小于 3 dB。在 20 kHz 以上,同样要求幅度迅速单调下降,在 ω_r 处幅度衰减不能小于 20 dB。 ω_r 计算如下:

$$\omega_r = \frac{\Omega_r}{f_s} = \frac{2\pi f_r}{f_s} = \frac{2\pi \cdot 30}{60} = \pi$$

(4) D/AC:选择 8 位,变换频率为 60 kHz 以上。

(5) 平滑滤波:这也是一个模拟低通滤波器,该滤波器的技术指标决定于数字信号处理部分的输出信号,这里是数字滤波器的输出。该例题应该选择平滑滤波器的最高截止频率为 20 kHz。

6.6 线性模拟系统的数字模拟

这里的数字模拟指的是系统外部的数字模拟,因为模拟系统和数字系统的处理方法机制是不一样的,也无法从系统内部模拟。

假设线性模拟系统的传输函数用 $H_a(j\Omega)$ 表示, 单位冲激响应用 $h_a(t)$ 表示。输入输出分别用 $x_a(t)$ 和 $y_a(t)$ 表示。数字系统的传输函数用 $H(e^{j\omega})$ 表示, 其输入输出分别用 $x(n)$ 和 $y(n)$ 表示。如图 6.6.1 所示, 这里 $x(n)$ 是由 $x_a(t)$ 采样得到的, $y(n)$ 由 $y_a(t)$ 采样得到, 用公式表示如下:

$$\left. \begin{aligned} x(n) &= x_a(nT) = x_a(t) \big|_{t=nT} \\ y(n) &= y_a(nT) = y_a(t) \big|_{t=nT} \end{aligned} \right\} \quad (6.6.1)$$



图 6.6.1 线性模拟系统的数字模拟

满足上式称为线性系统的数字模拟, 那么, 试问在什么条件下这种数字模拟是成立的。下面直接给出这种数字模拟的条件, 有关公式的推导请参考有关文献。线性模拟系统数字模拟的条件如下:

(1) 模拟信号 $x_a(t)$ 必须是带限信号, 假设 $x_a(t)$ 的最高截止角频率用 Ω_0 表示, 带限信号满足下式:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \text{FT}[x_a(t)] \\ X(j\Omega) &= 0 \quad |\Omega| > \Omega_0 \end{aligned}$$

(2) 对模拟信号采样时必须满足采样定理, 即要求采样角频率 Ω_s 大于等于 Ω_0 的两倍以上。

(3) 数字系统传输函数 $H(e^{j\omega})$ 必须满足下面公式:

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \big|_{\Omega=\omega/T} \quad (6.6.2)$$

相应的模拟系统的单位冲激响应 $h_a(t)$ 和数字系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 有下面关系式:

$$h(n) = h_a(t) \big|_{t=nT} = h_a(nT) \quad (6.6.3)$$

(6.6.2) 式说明 $H(e^{j\omega})$ 和 $H_a(j\Omega)$ 的波形一样, 只是两个函数的自变量满足线性关系, 即 $\omega = \Omega / f_s$ 。(6.6.3) 式说明 $h(n)$ 的包络波形和 $h_a(t)$ 的波形是一样的, $h(n)$ 是由 $h_a(t)$ 采样得到的。如果知道 $H_a(j\Omega)$, 就可按照 (6.6.2) 式选择数字系统的传输函数 $H(e^{j\omega})$ 。因此, 线性模拟系统的数字模拟不是很难的问题。

这里要注意 $H(e^{j\omega})$ 仍以 2π 为周期, 最高频率为 π , 它对应的模拟频率是 $f_s/2$, $H_a(j\Omega)$ 的最高频率应该是 $f_s/2$, 如果采样频率 $f_s = 4\Omega_0$, 那么要求 $H_a(j\Omega)$ 的最高截止角频率小于等于 $2\Omega_0$ (即信号最高频率的两倍)。

6.7 用 DFT(FFT)对连续信号进行频域分析

一般用傅立叶变换对信号进行频域分析, 但连续信号的傅立叶变换仍然是一个连续函数, 不便于直接用计算机进行计算。我们已学习过离散傅立叶变换是将频率域离散化的变换, 因此时域离散信号经过 DFT, 便既可以在时域也可以在频域利用计算机进行分析和处理。下面研究如何用离散傅立叶变换对连续信号进行频域分析。

6.7.1 用 DFT (FFT)对连续信号进行近似频域分析

在推导有关公式以前，首先解释为什么说用 DFT(FFT)对连续信号进行频域分析是近似的，或者说是有误差的，这里有以下 3 方面的原因。

1. 截断效应

DFT 是序列的一种有限点的变换，如果变换点数是 N ，序列经过 DFT 得到的是它的频域函数的 N 点离散化值。因此，对于无限长的模拟信号必须进行截断，通过采样才能得到有限点的序列，这样必然带来误差，截断的模拟信号的频域分析只能是原模拟信号频域分析的近似。模拟信号由于截断，其频谱分析中的一些误差现象，统称为截断效应。这些误差现象包括谱线加宽、高频泄漏和谱间干扰等。例如 50 Hz 正弦波 $x_a(t) = \sin(2\pi \cdot 50t)$ ，它的幅度曲线是线状谱，如图 6.7.1(a)所示。如果将它截取 0.09 s 的一段，相当于将它乘一长度为 0.09 s 矩形窗函数，即 $x_a(t)R_{T_p}(t)$ ， $T_p=0.09\text{s}$ ，对该信号进行谱分析肯定和原信号的谱分析不同，它的幅度谱如图 6.7.1(b)所示。该图表示，在 $\pm 50\text{ Hz}$ 处分别有两个主瓣，主瓣的旁边有很多旁瓣。由线状谱到主瓣称为谱线加宽，或者称为高频泄漏。如果同时有两个正弦波存在，这些旁瓣会形成谱间干扰。如果一个正弦波较另一个正弦波弱，强正弦波的旁瓣会掩盖弱正弦波。高频泄漏和谱间干扰都会使谱的分辨率降低，或者说频率相近的两个信号不易分清。为了改进，可以截取的长一些。该例中如果加长到 $T_p=0.18\text{ s}$ ，得到的幅度曲线如图 6.7.1(c)所示；明显地，主瓣变窄，旁瓣变小。另一种改进的方法，是改变截断窗函数的形状。这一部分请参考滤波器一章，在那一章中也有截断效应及其改进的问题。

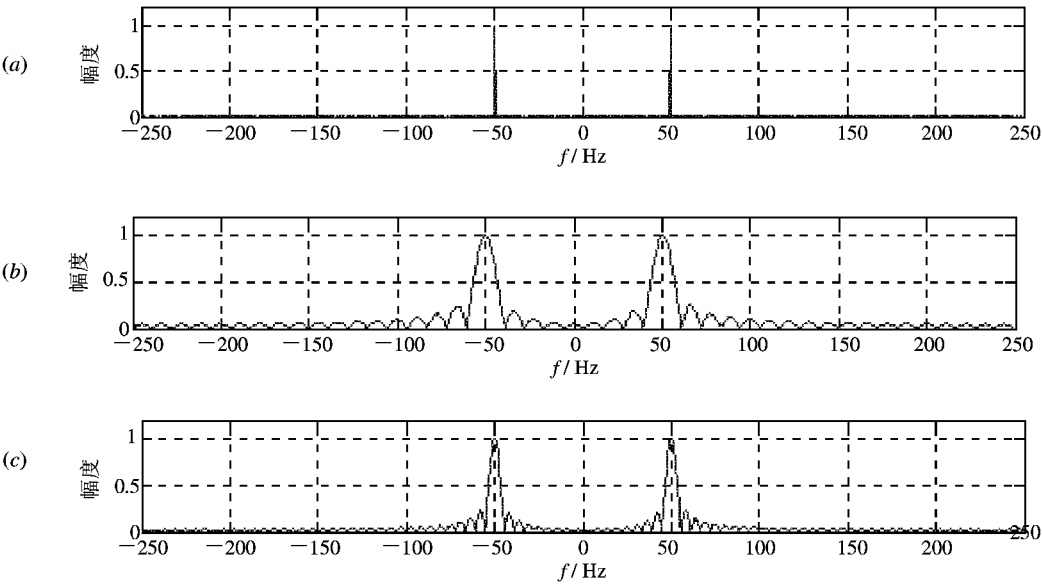


图 6.7.1 用 DFT 对正弦波进行谱分析

(a) 50 Hz 正弦波的幅频曲线；(b) 50 Hz 正弦波加窗后的幅频曲线($T_p=0.09\text{ s}$)；
(c) 50 Hz 正弦波加窗后的幅频曲线($T_p=0.18\text{ s}$)

2. 栅栏效应

模拟信号的傅立叶变换一般是连续函数，也就是说，频谱函数一般是频率的连续函数，但用 DFT(FFT) 进行变换得到的是频域的离散函数，如果 DFT(FFT) 的区间是 N ，那么只得到 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ ，这些点上的频谱值，离散点之间的频谱值却未知。可以形象地比喻成通过栅栏观察频谱，只看到等间隔的一些点上的频谱，其他的频谱都被栅栏挡住了，故称为栅栏效应。这里只能以用 DFT(FFT) 进行变换得到的离散谱线的包络作为近似谱。当然，DFT(FFT) 的变换点数 N 愈大，其包络愈近似于真正的频谱。

3. 频谱混叠

用 DFT(FFT) 对连续信号进行频域分析时，首先需要对模拟信号进行采样。采样必须服从采样定理，要求采样频率大于等于信号最高频率的两倍以上。如果模拟信号是截断得到的，或者模拟信号本身有阶跃点，那么它的频域函数的频率可以高到无限大，采样频率无法选择，只能尽可能选高，不可避免地产生频谱混叠，使频谱在采样频率一半处产生或多或少的失真。为了减少频谱混叠失真，在允许的条件下应尽量提高采样频率，或者根据需要分析的频谱范围，预先将不需要分析的高频分量滤掉。当然，反过来说，如果频域函数是有限长的，也就是说，频率函数有间断点，那么它的相应的时间函数必然是无限长的，这样时间函数和它的频域函数不可能同时是有限长的，利用 DFT 进行分析，只能近似地认为时间函数和它的频域函数都是有限长的。这种近似性在工程上是允许的，因此在下面的公式推导中将假设时间函数和它的频域函数都是有限长的。

6.7.2 用 DFT (FFT) 对连续信号进行频域分析的公式推导

假设模拟信号 $x_a(t)$ 和它的频域函数 $X_a(jf)$ 都是有限长的，如图 6.7.2(a) 所示，这里 $x_a(t)$ 观察时间为 T_p ， $X_a(jf)$ 的最高截止频率为 f_c ， $X_a(jf)$ 是 $x_a(t)$ 的傅立叶变换，公式为

$$X_a(jf) = \text{FT}[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.7.1)$$

对 $x_a(t)$ 进行采样，采样间隔为 T ，要求 T 满足 $T \leq (2f_c)^{-1}$ ，即要求采样频率 f_s 满足 $f_s \geq 2f_c$ ，通过采样得到 $x_a(nT)$ 。假设共采样了 N 点， $T_p = NT$ 。再对 (6.7.1) 式进行零阶近似，零阶近似就是让 (6.7.1) 式中的 $dt = T$ ， $x_a(t)$ 用 $x_a(nT)$ 代替， $t = nT$ ，积分号用求和号代替，如下式所示：

$$X(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (6.7.2)$$

上式中的 $x_a(nT)$ 和 $X(jf)$ 如图 6.7.2(b) 所示，注意这里因为时域离散化，使频率域周期化， $X(jf)$ 是 $X_a(jf)$ 以 f_s 为周期进行延拓形成的，因此 $X(jf)$ 和 $X_a(jf)$ 是不同的。

下面再对 $X(jf)$ 进行采样。从 0 到 f_s 共采样 N 点，采样间隔是 F ，将 $f = kF$ 带入 (6.7.2) 式，得到：

$$X(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi knFT} \quad (6.7.3)$$

式中

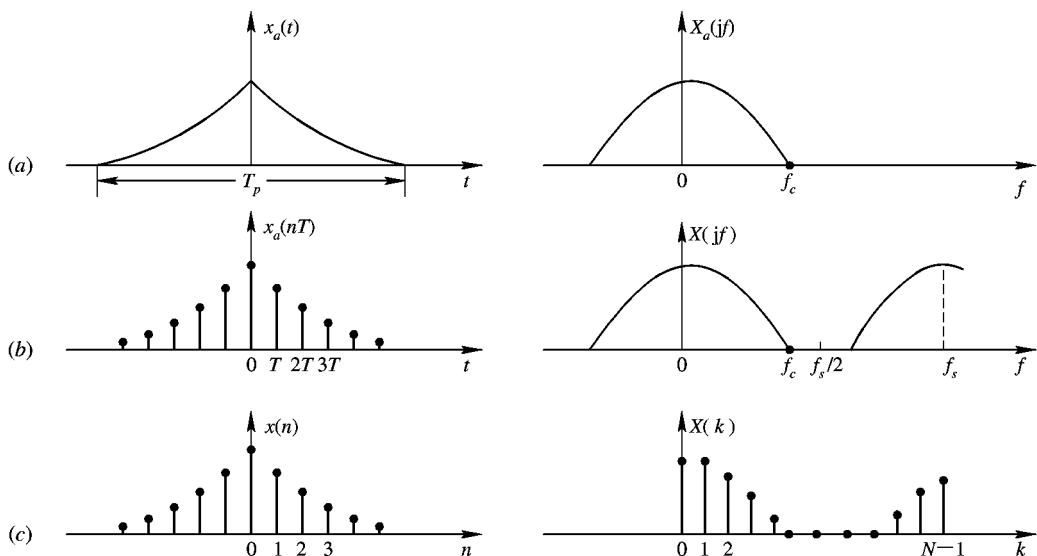


图 6.7.2 用 DFT 计算模拟信号频谱的原理

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} \quad (6.7.4)$$

又

$$T_p = NT = \frac{1}{F} \quad (6.7.5)$$

$$FT = \frac{1}{N} \quad (6.7.6)$$

将(6.7.6)式带入(6.7.3)式, 得到

$$X(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

将上式中的 $X(jkF)$ 和 $x_a(nT)$ 分别用序列 $X(k)$ 和序列 $x(n)$ 表示, 得到:

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (6.7.7)$$

$X(k)$ 和 $x(n)$ 分别用图 6.7.2(c) 表示。观察上式, $X(k)$ 既然是序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 再乘以 T , 那么序列 $x(n)$ 就是 $X(k)$ 的 DFT 的反变换再除以 T , 公式为

$$x(n) = \frac{1}{T} \sum_{K=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X(k)] \quad (6.7.8)$$

(6.7.7) 式就是用 DFT 计算模拟信号频谱的公式。在计算中有几个参数需要预先确定, 这些参数是信号的观测时间 T_p 、采样频率 f_s 、采样点数 N 。其中 F 是 $0 \sim f_s$ 之间的采样间隔, 一般称为频率分辨率, 它的意义是用 DFT 分析频谱时能够分辨的最小频率间隔, 一般希望它愈小愈好。(6.7.4) 式和 (6.7.5) 式表明 F 和观测时间 T_p 有关, 因此 F 不能选择的太小, 否则, 需要观测时间 T_p 太长, 采样点数 N 太大, 使计算量太大。一般 F 需要根据要求的最小频率分辨率预先确定。 F 确定后, 最小的观测时间 $T_{p\min}$ 由 (6.7.5) 式确定, 即

$$T_{p\min} = \frac{1}{F} \quad (6.7.9)$$

f_s 则按照时域采样定理, 最小的 $f_{s\min}$ 为最高信号频率的两倍, 假设信号最高频率为 f_c , 即

$$f_{s\min} = 2f_c \quad (6.7.10)$$

或者说最大的采样间隔为

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} \quad (6.7.11)$$

最小的采样点数为

$$N_{\min} = \frac{f_{s\min}}{F} = \frac{2f_c}{F} \quad (6.7.12)$$

用 DFT 近似计算模拟信号频谱的计算步骤总结如下：

(1) 首先确定用 DFT 对模拟信号频谱进行近似计算的三个参数，即频率分辨率 F 、采样频率 f_s 、观测时间 T_p 。一般取 $f_s = (3 \sim 4)f_{s\min}$ 。 F 则根据具体要求确定。例如已知信号中有两个单频分量，两个单频分量中一个是 5 Hz，另一个是 8 Hz，如要求将这两个单频分量分开，则要求频率分辨率至少为 3 Hz，那么 $T_{p\min} = 1/F = 1/3$ s。

(2) 用已确定的 f_s 对模拟信号采样。采样后得到时域离散信号为

$$x(n) = x_a(t) \big|_{t=nT} = x_a(nT)$$

采样点数至少为 $N_{\min} = T_{p\min}/T = T_{p\min}f_s$ ，具体采样多少点，还要要求点数服从 2 的整数幂规律。这可以通过加长观察时间，增加采样点数完成。当然，如果不能加长观察时间和增加采样点数，可以通过在信号尾部加 0 完成。

(3) 按照(6.7.7)式，在计算机上调 FFT 子程序对信号 $x(n)$ 进行频谱计算。如果 $x_a(t)$ 是一个观测信号，也就是说不能用公式表示出来，或者预先不能确定，那么就用 A/DC 进行采样来得到数字信号，直接送入计算机，用 FFT 进行计算。

例 6.7.1 对模拟信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F \leq 10$ Hz，信号最高频率 $f_c = 2.5$ kHz，试确定最小记录时间 $T_{p\min}$ ，最大的采样间隔 T_{\max} ，最少的采样点数 N_{\min} 。如果 f_c 不变，要求谱分辨率增加 1 倍，最小的采样点数和最小的记录时间是多少？

解 按照(6.7.9)式，最小的记录时间为

$$T_{p\min} = \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}$$

按照(6.7.11)式，最大的采样间隔为

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2500} = 0.2 \text{ ms}$$

按照(6.7.12)式，最少的采样点数为

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{10} = 500$$

为使频率分辨率增加 1 倍， $F = 5$ Hz，要求：

$$N_{\min} = \frac{2 \times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{p\min} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

为使用 FFT 进行计算，希望 N 符合 2 的整数幂规律。为此，可选 $N = 1024$ 。如果模拟信号无限长，则需要将它截断。对截断后信号进行计算的频谱，显然不同于原信号的频谱。这种由于截断引起的误差现象，一般称为截断效应。下面通过例题说明截断效应。

例 6.7.2 假设模拟信号 $x_a(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t)u(t)$, 式中 $A = 444.128$, $\alpha = \Omega_0 = 50\sqrt{2}\pi$, 试用 DFT 分析其频谱特性。要求选择不同的参数, 观察对谱分析的误差。

解 (1) 首先画出连续信号 $x_a(t)$ 及其频谱图, 如图 6.7.3(a) 和 (b) 所示。

(2) 选择观察时间 $T_p = 0.2$ s, 采样频率 $f_s = 1000$ Hz, 采样点数 $N = T_p f_s = 200$ 时, 对模拟信号进行采样, 得到 $x(n)$, 对 $x(n)$ 进行 FFT, 得到 $x(k)$, $x(n)$ 及 $x(k)$ 幅度谱如图 6.7.3(c) 和 (d) 所示。

(3) 选择 $T_p = 0.2$ s, $f_s = 300$ Hz, $N = T_p f_s = 60$ 时, 信号 $x(n)$ 及其频谱曲线如图 6.7.3(e) 和 (f) 所示。

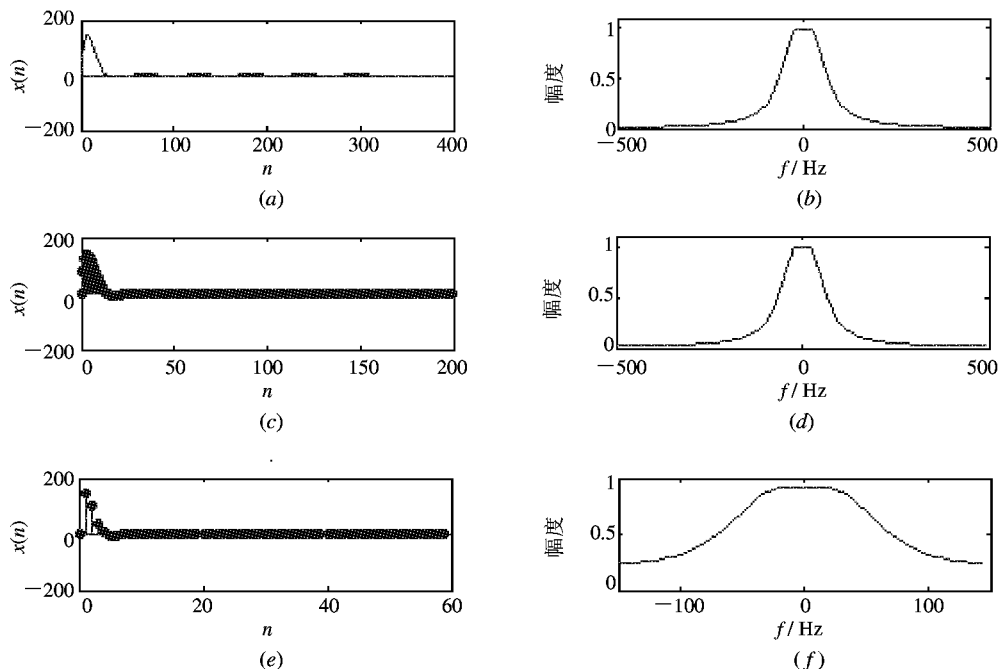


图 6.7.3 例 6.7.2 图

由图可见, 当 $f_s = 1000$ Hz 时, 在 $f_s/2 = 500$ Hz 附近只有微小的频谱混叠失真, 基本可以表示原连续信号的频谱特性, 频谱分析范围为 0 到 500 Hz; 而 $f_s = 300$ Hz 时, 所得频谱曲线误差较大, 在折叠频率 $f_s/2 = 150$ Hz 附近频谱混叠失真较大, 另外频谱分析范围只有 0 到 150 Hz。由此也验证了时域采样定理。因为本例中的模拟信号频谱变化缓慢, 所以对频率分辨率要求不高。另外, 信号衰减很快, 所以看不出明显的截断效应。

应当注意: 由于对模拟信号的采样序列的频谱是原模拟信号频谱函数的周期延拓, 延拓周期为采样频率 f_s 的倒数, 因此, 用 DFT 对连续信号进行谱分析的结果只能得到频率区间 $[-f_s/2, f_s/2]$ 上模拟信号的频谱特性。

如果模拟信号是一个周期信号, 要用 FFT 对它进行谱分析, 那么截取的长度应满足周期的整数倍。这样可以精确地分析出它的频谱分布, 也不再出现上面介绍的截断效应。

在对连续信号的谱分析中, 主要关心两个指标, 一个是前面介绍的分辨率, 另一个是谱分析的范围。如果采样频率 f_s 一定, 为了不产生频率混叠, 要求信号的最高频率 $f_c \leq$

$0.5f_s$ ，因此对模拟信号进行频谱分析的范围为 $(0 \sim 0.5)f_s$ 。如果要扩大频谱分析范围，则只有增加采样频率。

习 题

1. 有一连续信号 $x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$ ，其中， $f = 20 \text{ Hz}$ ， $\varphi = \pi/2$ 。

(1) 求出 $x_a(t)$ 的周期；

(2) 用采样间隔 $T = 0.02 \text{ s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，试写出采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ 的表达式；

(3) 画出 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 $x(n)$ 的波形，并求出 $x(n)$ 的周期。

2. 设模拟信号 $x_a(t) = \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ ，其中， $f_1 = 2 \text{ kHz}$ ， $f_2 = 3 \text{ kHz}$ ， φ_1, φ_2 是常数。

(1) 为将该模拟信号 $x_a(t)$ 转换成时域离散信号 $x(n)$ ，最小的采样频率 f_{min} 应取多少？

(2) 如果采样频率 $f_s = 10 \text{ kHz}$ ， $x(n)$ 的最高频率是多少？

(3) 设采样频率 $f_s = 10 \text{ kHz}$ ，写出 $x(n)$ 的表达式。

3. 设 $x_a(t)$ 是带有干扰的模拟信号，有用的信号频率范围为 $0 \sim 40 \text{ kHz}$ ，干扰主要在 40 kHz 以上。试用数字信号处理方式对输入信号进行低频滤波，达到滤除干扰的目的。要求画出该数字信号处理系统原理方框图，求出每个方框图的主要指标。

4. 假设模拟信号的最高频率 $f_r = 1 \text{ kHz}$ ，要求分辨率 $F = 100 \text{ Hz}$ ，用 FFT 对其进行谱分析，试问：

(1) 最小记录时间是多少？

(2) 最大采样间隔是多少？

(3) 最少的采样点数是多少？

5. 假设模拟信号如下式所示：

$$x_a(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$$

其中， $f = 4 \text{ kHz}$ ， $\varphi = \pi/8$ 。为用 FFT 分析它的频谱，试问：

(1) 采样频率取多高？

(2) 观察时间取多长？

(3) FFT 的变换区间取多少？

6. 假设模拟信号如下式所示：

$$x_a(t) = \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

其中， $f_1 = 4 \text{ kHz}$ ， $\varphi_1 = \pi/8$ ， $f_2 = 2 \text{ kHz}$ ， $\varphi_2 = \pi/4$ 。为用 FFT 分析它的频谱，试问：

(1) 采样频率取多高？

(2) 观察时间取多长？

(3) FFT 的变换区间取多少？

第七章 时域离散系统的基本网络结构

【本章重点和难点】

- (1) 由信号流程图求系统函数，梅玢公式的应用。
 - (2) 由系统函数或者差分方程画 IIR 基本网络结构(直接型、级联型和并联型)，这三种基本形式的各自特点。
 - (3) 由系统函数或者差分方程画 FIR 直接型基本网络结构。
 - (4) 频率采样结构及其优缺点。
 - (5) 由网络结构图设计具体的运算结构。
-

7.1 引言

时域离散系统或者网络一般用差分方程、单位脉冲响应以及系统函数进行描述。如果系统输入和输出服从 N 阶差分方程：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (7.1.1)$$

则系统函数 $H(z)$ 用下式表示：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (7.1.2)$$

为了用计算机对输入信号进行处理(运算)，必须把上面两个公式变换成一种具体的算法，按照这种算法对信号进行运算。观察(7.1.1)式，已知输入信号 $x(n]$ ，要计算出输出信号 $y(n)$ ，基本算法有三种，即加法、乘法和移位，具体的算法就是用这三种基本算法组成的一些计算程序。这些计算程序可能有很多种，也就是说，对于一个差分方程可能有不同的算法，但不同的算法会影响运算误差、运算速度以及系统的复杂程度和成本等，因此研究实现信号处理的算法是一个很重要的问题。其实(7.1.1)式就是一种具体的算法，已知输入信号和全部的系数，可以按照第一章介绍的递推法，在通用计算机上用软件求解。如用硬件实现，这其中要用的延时支路 z^{-1} 太多，公式右边第一项要用 M 个延时支路，第二项要用 N 个延时支路。下面介绍可以明显地减少延时支路的一些网络结构。

网络结构就是表示一种具体的算法，因此这里的网络结构用运算结构表示也许更为合适。网络结构一般用信号流程图表示，下面首先介绍如何用流图表示网络结构，然后介绍各

7.2 用信号流图表示网络结构

信号流图由基本支路组成，基本支路的箭头表示信号的流向，两个圆点分别表示支路的输入节点和输出节点，在箭头旁边的符号表示支路的增益，有时没有符号则表示支路增益为 1。两个支路的输出相加则用圆点表示。整个信号流图就是用这样一些基本支路组成的。信号流图节点处的信号称为节点变量，基本支路的输出节点变量等于输入节点变量乘以支路增益。如果输出节点处有几个输入支路，则输出节点变量等于所有支路的输出节点变量相加。

数字信号处理中有三种基本算法，即加法、乘法和移位，它们的方框图如图 7.2.1(a) 所示。三种基本算法的流图则如图 7.2.1(b) 所示。输入节点变量 $x(n)$ 乘一常数 a ，得到输出节点变量为 $ax(n)$ ， a 作为支路增益写在箭头旁边。延时支路则是将 z^{-1} 写在箭头旁边表示延时一个单位。

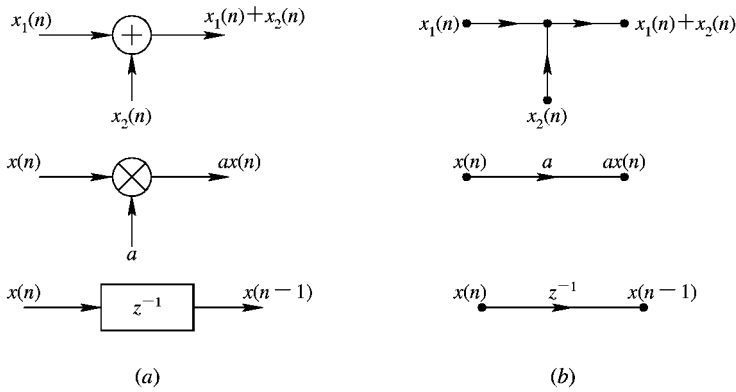


图 7.2.1 三种基本算法流图表示

图 7.2.2 表示的是一种信号流图，流图中每一个节点都用一个节点变量表示，输入 $x(n)$ 称为输入节点变量， $y(n)$ 表示输出节点变量， $w_1(n)$ ， $w_2(n)$ ， $w_3(n)$ 和 $w_4(n)$ 也是节点变量。这些节点变量和其他节点变量之间的关系用下式表示：

$$\begin{aligned}w_1(n) &= x(n) + aw_3(n) \\w_2(n) &= w_1(n) \\w_3(n) &= w_2(n-1) \\w_4(n) &= b_0w_2(n) + b_1w_3(n) \\y(n) &= w_4(n)\end{aligned}$$

以上这些公式是用序列形式写的，也可以通过 Z 变换写成下式：

$$\begin{aligned}W_1(z) &= X(z) + aW_3(z) \\W_2(z) &= W_1(z) \\W_3(z) &= z^{-1}W_2(z) \\W_4(z) &= b_0W_2(z) + b_1W_3(z)\end{aligned}$$

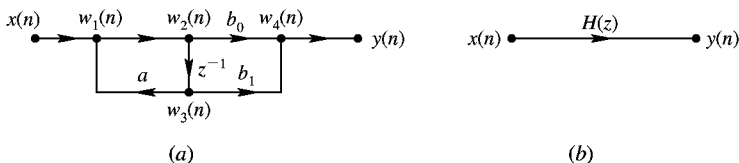


图 7.2.2 基本信号流图

$$Y(z) = W_4(z)$$

从以上看到，不同的信号流图表示不同的运算情况，因此对于同一个系统函数，可以有多种信号流图与之对应。

从基本运算考虑，如果满足以下条件，则称为基本信号流图：

- (1) 信号流图中所有支路都是基本的，即支路增益是常数或者是 z^{-1} ；
- (2) 流图环路中必须存在延时支路；
- (3) 节点个数和支路个数都是有限的。

按照上面的条件可知，图 7.2.2(a) 所示的流图是基本流图，图中有一个环路，环路增益是 az^{-1} ，环路中有延时支路。而图 7.2.2(b) 不是基本信号流图，因为它不是由基本支路组成的，也不能决定一种具体的算法。

给定系统的差分方程或者系统函数，可以设计出几个不同的信号流图。下面章节将给出设计流图的方法。如果已知流图，则可以求出一个系统函数与之对应。根据流图求系统函数有两种方法。一种方法是根据流图列出各个节点的方程，通过解联立方程解出系统函数；另一种方法是根据梅逊(Masson)公式直接写出系统函数。下面先通过举例说明如何根据流图写节点方程，并求出系统函数。

例 7.2.1 求出图 7.2.3 信号流图的系统函数 $H(z)$ 。

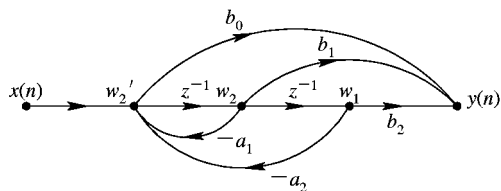


图 7.2.3 例 7.2.1 图

解 首先将各节点用变量表示，它们是 $w_1(n)$ 、 $w_2(n)$ 和 $w_2'(n)$ ，为简单起见，图中简化为 w_1 、 w_2 和 w_2' ，它们分别与其他节点变量之间的关系为

$$w_1(n) = w_2(n-1)$$

$$w_2(n) = w_2'(n-1)$$

$$w_2'(n) = x(n) - a_1 w_2(n) - a_2 w_1(n)$$

$$y(n) = b_2 w_1(n) + b_1 w_2(n) + b_0 w_2'(n)$$

将上式进行 Z 变换，得到：

$$\left. \begin{aligned} W_1(z) &= z^{-1}W_2(z) \\ W_2(z) &= z^{-1}W_2'(z) \\ W_2'(z) &= X(z) - a_1W_2(z) - a_2W_1(z) \\ Y(z) &= b_2W_1(z) + b_1W_2(z) + b_0W_2'(z) \end{aligned} \right\}$$

将上式进行联立求解, 得到:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}X(z)$$

因此得到系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

当网络结构复杂时, 上面利用节点变量方程联立求解的方法较麻烦。下面介绍利用梅逊公式直接写系统函数的方法。

按照梅逊公式, 系统函数公式为

$$H(z) = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} \quad (7.2.1)$$

式中, Δ 称为流图特征式, 其计算公式如下:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i' L_j' - \sum_{i,j,k} L_i'' L_j'' L_k'' + \dots \quad (7.2.2)$$

式中, $\sum_i L_i$ 表示所有的环路增益之和; $\sum_{i,j} L_i' L_j'$ 表示所有的每两个互不接触的环路增益之和; $\sum_{i,j,k} L_i'' L_j'' L_k''$ 表示所有的每三个互不接触的环路增益之和; $\dots T_k$ 表示从输入节点到输出节点的第 k 条前向支路的增益; Δ_k 表示不与第 k 条前向通路接触的 Δ 值。

按照(7.2.1)式以及各个符号的意义, 用下面例题说明利用梅逊公式直接写系统函数的方法。

例 7.2.2 写出图 7.2.3 中流图的系统函数。

解 该流图有两个环路。一个是 $w_2' \rightarrow w_2 \rightarrow w_2'$, 另一个是 $w_2' \rightarrow w_2 \rightarrow w_1' \rightarrow w_2'$ 。环路增益分别为 $-a_1z^{-1}$ 和 $-a_2z^{-2}$ 。没有互不接触的环路, 这样流图特征式为

$$\Delta = 1 - (a_1z^{-1} - a_2z^{-2}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$$

流图中有三条前向通路: 第一条是 $x(n) \rightarrow w_2' \rightarrow y(n)$, 它的增益是 $T_1 = b_0$; 第二条是 $x(n) \rightarrow w_2' \rightarrow w_2 \rightarrow y(n)$, 它的增益是 $T_2 = b_1z^{-1}$; 第三条是 $x(n) \rightarrow w_2' \rightarrow w_2 \rightarrow w_1' \rightarrow y(n)$, 它的增益是 $T_3 = b_2z^{-2}$ 。流图中的两个环路均与所有的前向通路相接触, 因此对应于三条前向通路的 $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 1$ 。这样可以直接写出该流图的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + T_3\Delta_3}{\Delta} \\ &= \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \end{aligned}$$

例 7.2.2 结果和例 7.2.1 的结果是一样的, 但比较起来, 利用梅逊公式直接写系统函数要简单多了, 关键是弄清楚梅逊公式中各个符号的意义。下面再举一个比较复杂的

例子。

例 7.2.3 利用梅逊公式写出图 7.2.4 中流图的系统函数。

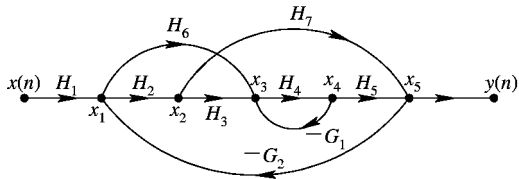


图 7.2.4 例 7.2.3 图

解 首先将各个节点标上节点变量。分析该流图，共有四个环路：

环路 L_1 由 $x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$

环路 L_2 由 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_1$

环路 L_3 由 $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_1$

环路 L_4 由 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_1$

它们的环路增益分别为

$$L_1 = -H_4G_1, L_2 = -H_2H_3H_4H_5G_2, L_3 = -H_6H_4H_5G_2, L_4 = -H_2H_7G_2$$

互不接触的环路有一对，这两个环路的增益乘积为： $L_1L_4 = H_4G_1H_2H_7G_2$ ；没有三个以上的互不接触的环路，因此

$$\Delta = 1 + (H_4G_1 + H_2H_3H_4H_5G_2 + H_6H_4H_5G_2 + H_2H_7G_2) + H_4G_1H_2H_7G_2$$

从输入节点到输出节点有三条前向通路：

$$T_1: \text{由 } x(n) \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow y(n)$$

该条通路的增益为

$$T_1 = H_1H_2H_3H_4H_5$$

$$T_2: \text{由 } x(n) \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow y(n)$$

该条通路的增益为

$$T_2 = H_1H_6H_4H_5$$

$$T_3: \text{由 } x(n) \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow y(n)$$

该条通路的增益为

$$T_3 = H_1H_2H_7$$

由于前向通路 T_1 和 T_2 没有不接触的环路，因此， $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$ ；与前向通路 T_3 不接触的环路只有 L_1 ，因此 $\Delta_3 = 1 + H_4G_1$ ，最后得到网络的系统函数为

$$H(z) = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + T_3\Delta_3}{\Delta}$$

以上介绍了如何由系统流图求系统函数的方法。在数字信号处理中一般很少遇见像例 7.2.3 那样的复杂流图，但例 7.2.3 表明直接用梅逊公式求系统函数是一种简便的方法。

一般将信号流图分成两类。一类称为有限脉冲响应网络，简称 FIR (Finite Impulse Response) 网络，另一类称为无限脉冲响应网络，简称 IIR (Infinite Impulse Response) 网络。

FIR 网络中一般不存在输出对输入的反馈支路，其单位脉冲响应是有限长的，差分方程用下式描述：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

由上式知道，网络有 $M+1$ 个系数 b_i ，它的单位脉冲响应 $h(n)$ 就由这些系数组成，表示为

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

一般称它的网络长度是 $M+1$ ，系统函数是 M 阶的。

IIR 网络中存在输出对输入的反馈支路，也就是说，信号流图中存在环路，它的单位脉冲响应是无限长的。例如，一个简单的一阶 IIR 网络差分方程为： $y(n) = a y(n-1) + x(n)$ ，它的单位脉冲响应是 $h(n) = a^n u(n)$ 。IIR 网络的阶数就是差分方程的阶数，或者说是系统函数的分母多项式的阶数。

这两类网络结构各有不同的特点，下面分类介绍它们的结构。

7.3 无限长脉冲响应的基本网络结构

IIR 网络结构的特点是信号流图中含有反馈支路，即含有环路，其单位脉冲响应是无限长的。基本网络结构有三种，它们是直接型、级联型和并联型。

7.3.1 直接型网络结构

将 N 阶差分方程重写如下：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

为简单起见，假设 $M=N=2$ ，差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^2 b_i x(n-i) + \sum_{k=1}^2 a_k y(n-k) \quad (7.3.1)$$

式中，等式右边第一部分是经过不同延时的输入信号再加权之和，即 $b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$ ，这部分的传输函数用 $H_1(z)$ 表示(输出用 $w_1'(n)$ 表示)：

$$H_1(z) = \frac{W_1'(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^2 b_i z^{-i}$$

(7.3.1) 式中，等式右边第二部分是输出信号经过不同延时的加权之和，可以直接画出这部分的网络结构，如图 7.3.1(a) 中右边的虚线框图内的部分，这部分传输函数用 $H_2(z)$ 表示：

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W_2'(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 成级联关系，因此

$$H(z) = H_1(z) H_2(z)$$

将 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 交换次序，得到 $H(z) = H_2(z) H_1(z)$ ，相当于将图 7.3.1(a) 中的两个虚线框部分相互交换位置，网络结构如图 7.3.1(b) 所示。另外，我们注意到在图 7.3.1(b) 中，节点 w_1 等于节点 w_2 变量，即 $w_1 = w_2$ ，这样，前后两部分经过延时，对应的节点变量也相等，可以将前后两部分的延时支路合并成一个延时支路，如图 7.3.1(c) 所示。一般称

和图 7.3.1(c) 类似的流图为 IIR 直接型网络结构。

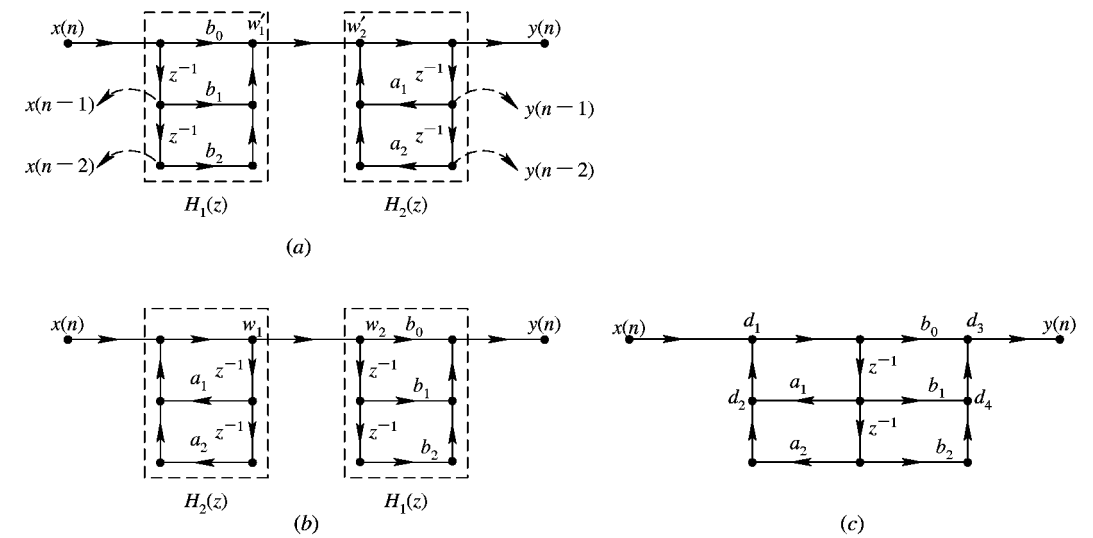


图 7.3.1 IIR 网络直接型结构

分析图 7.3.1 IIR 网络直接型结构，实现时只需要 2 个延时支路(用递推法求解需要 4 个延时支路)、4 个加法器(图中 d_1 、 d_2 、 d_3 、 d_4)和 5 个乘法器。按照这一网络结构，可以设计出它的运算次序。

图 7.3.1(a)~图 7.3.1(c)是设计直接型网络结构的过程，实际设计中这种过程要省略，可以直接画出直接型结构。下面通过举例说明如何设计。

例 7.3.1 已知系统用下面差分方程描述：

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.8y(n-2) + x(n) - 1.4x(n-1)$$

试画出它的直接型网络结构。

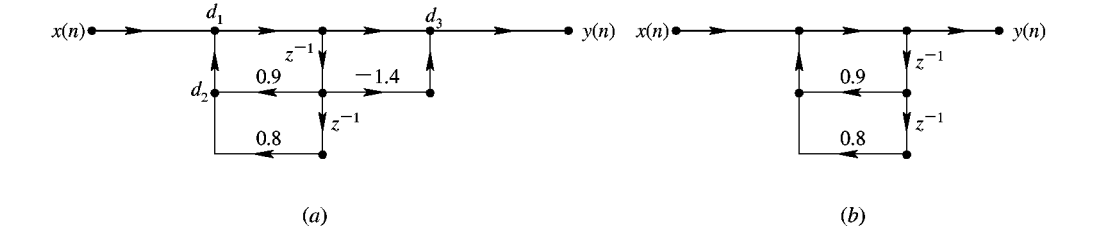


图 7.3.2 例 7.3.1 图

解 类似于上面直接型作图过程，可画出该例题直接型结构如图 7.3.2(a)所示。也可以按照下面次序直接画出。先画反馈部分，即 $0.9y(n-1) + 0.8y(n-2)$ ，如图 7.3.2(b)所示；再画直接通路部分，这里的延时支路要和反馈环路的延时支路共用，这样就得到最后的流图。如果熟悉梅逊公式，则可以按照差分方程写出它的系统函数，根据系统函数直接画出网络结构。根据差分方程，该例题系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 1.4z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} - 0.8z^{-2}}$$

分析上式，反馈回路应该有两个，它们的增益分别是 $0.9z^{-1}$ 和 $0.8z^{-2}$ ，没有互不接触的回路，两个回路的延时支路相串联。分子部分表示有两个直通通路，直通通路的增益分别为 1 和 $-1.4z^{-1}$ ，其中延时支路 z^{-1} 和反馈回路的延时支路共用。这样可以画出网络结构如图 7.3.2(a) 所示。

例 7.3.2 设 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

试画出该滤波器的直接型网络结构。

解 可以先将系统函数写成差分方程，再根据差分方程画网络结构，这里我们直接根据系统函数进行画图。分析它的系统函数，分子属于直通通路部分，分母属于反馈回路部分，而且分母中 z^{-1} 、 z^{-2} 、 z^{-3} 分别只有一个常系数，可以设计三个延时支路 z^{-1} 串联起来，形成三个环路，三个回路的增益分别是 $\frac{5}{4}z^{-1}$ 、 $-\frac{3}{4}z^{-2}$ 和 $\frac{1}{8}z^{-3}$ ，这里没有互不接触的回路。分子中的延时支路和分母中的延时支路公用，具体是分子中的第 2、3、4 项和分母中第 2、3、4 项分别公用，这样可以画出流图如图 7.3.3 所示。请读者自己计算该流图需要多少延时支路、多少乘法器和多少加法器。直接根据系统函数画流图时应熟悉梅逊公式。

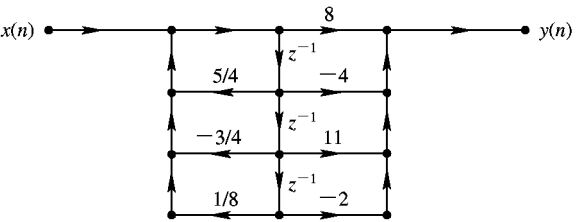


图 7.3.3 直接型网络

直接型网络结构由于反馈回路套在一起，如果计算有误差，这些误差容易通过反馈进行积累，因此误差较大。另外，在前面已介绍过，网络特性取决于网络零极点的分布，极点取决于系统函数的分母部分的系数，如果有多个极点，就有多个反馈系数，只要调整一个系数，多个极点位置都会变化。系统函数分子部分的系数决定其零点位置，同样调整时，也有同样问题。直接型网络结构不容易进行调试，因而一般只用一阶或者二阶网络结构，也就是说，反馈系数最多有两个。对于更多阶的，可以用下面的级联型和并联型网络结构。

7.3.2 级联型网络结构

通过将系统函数分子分母因式分解，分解成简单的一阶或者二阶分式。一阶或者二阶分式都用前面介绍的直接型结构实现，再将它们进行级联，形成级联结构。下面举例说明。

例 7.3.3 设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}}$$

试画出它的级联型网络结构。

解 将上式中的分子部分和分母部分分别因式分解，得到：

$$H(z) = \frac{(1 + 0.3z^{-1})(1 + 0.4z^{-1})}{(1 - 0.6z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} \quad (7.3.2)$$

将上式写成下面形式：

$$H(z) = \frac{1 + 0.3z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} \cdot \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

式中
$$H_1(z) = \frac{1 + 0.3z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

这里 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 分别是 IIR 一阶网络，将它们进行级联，得到级联型网络结构，如图 7.3.4(a) 所示。一个一阶网络决定一个零点和一个极点，因此调整方便，相对直接型其积累误差也较小。

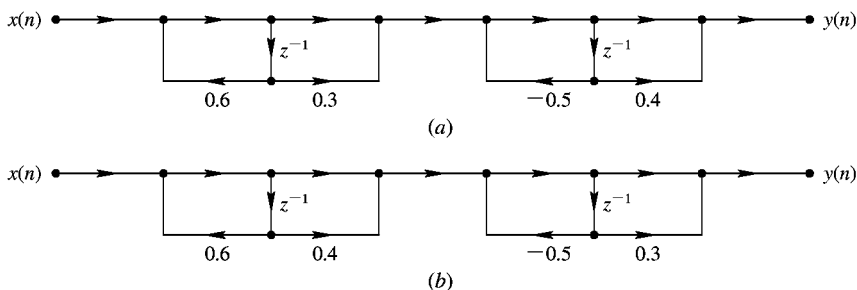


图 7.3.4 级联型网络

观察(7.3.2)式，还可以如下式这样进行分解：

$$H(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} \cdot \frac{1 + 0.3z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = H_3(z) \cdot H_4(z)$$

式中
$$H_3(z) = \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}, \quad H_4(z) = \frac{1 + 0.3z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

再画出流图如图 7.3.4(b) 所示。图 7.3.4(a) 的性质和图 7.3.4(b) 的性质是一样的。

对于一般系统函数的分子、分母多项式进行因式分解时，有时得到的系数是虚数，但实际中乘法器都是实数乘法器，为此希望因式分解后的系数是实数。如果多项式的系数是实数，多项式的根不是实数，就是共轭成对的，可将共轭成对的一对根放在一起，形成一个二阶网络，这样二阶网络的系数乘法器是实数乘法。下面举例说明。

例 7.3.4 设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

试画出它的级联型网络结构。

解 上式中分子分母多项式的根分别有一个实根和一对共轭成对的虚根，将共轭成对的虚根放在一起，形成一个具有实系数的二阶多项式，如下式：

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$

为了节省延时支路，将分子分母中的一阶多项式放在一起形成一个 IIR 一阶网络，分子分母中的二阶多项式放在一起形成一个 IIR 二阶网络，如下式：

$$H(z) = \frac{2 - 0.379z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1}} \cdot \frac{4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

上式中的第一部分是 IIR 一阶网络，它的系数决定一对零极点；第二部分是 IIR 二阶网络，它决定一对零点和一对极点。这两部分相互级联起来，构成 IIR 级联型网络结构，如图 7.3.5 所示。

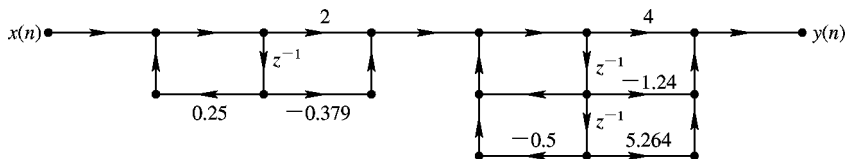


图 7.3.5 例 7.3.4 图(一)

当然，也可以将系统函数写成下面形式：

$$H(z) = \frac{2 - 0.379z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \cdot \frac{4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2}}{1 - 0.25z^{-1}}$$

按照上式画出它的级联型结构如图 7.3.6 所示。显然这种级联方式不如前面结构简单，它多用了两个延时支路。

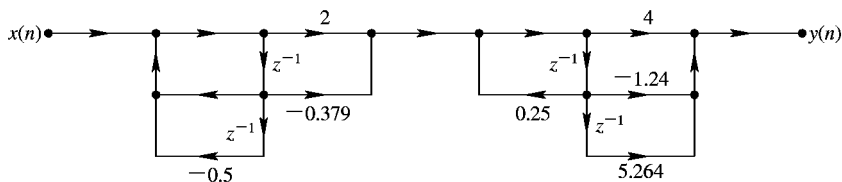


图 7.3.6 例 7.3.4 图(二)

7.3.3 并联型网络结构

将级联形式的系统函数展成部分分式，每个部分分式一般是一阶或者是二阶形式，每个部分分式也用直接型结构，将每个分式构成的网络进行并联，得到它的并联型结构。下面举例说明。

例 7.3.5 设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}}$$

试画出它的并联型结构图。

解 首先将系统函数写成下式：

$$H(z) = \frac{z(z + 0.7)}{z^2 - 0.1z - 0.3}$$

将分母进行因式分解，得到：

$$H(z) = \frac{z(z + 0.7)}{(z - 0.6)(z + 0.5)}$$

再将上式展成部分分式，推导如下：

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{z+0.7}{(z-0.6)(z+0.5)} = \frac{B}{z-0.6} + \frac{C}{z+0.5} \\ B &= \left. \frac{H(z)}{z} (z-0.6) \right|_{z=0.6} = \left. \frac{Z+0.7}{Z+0.5} \right|_{Z=0.6} = \frac{13}{11} \\ C &= \left. \frac{H(z)}{z} (z+0.5) \right|_{z=-0.5} = \left. \frac{Z+0.7}{Z-0.6} \right|_{Z=-0.5} = -\frac{2}{11} \\ H(z) &= \frac{\frac{13}{11}}{1-0.6z^{-1}} + \frac{-\frac{2}{11}}{1+0.5z^{-1}} \end{aligned}$$

按照上式画出它的并联型结构图如图 7. 3. 7 所示。

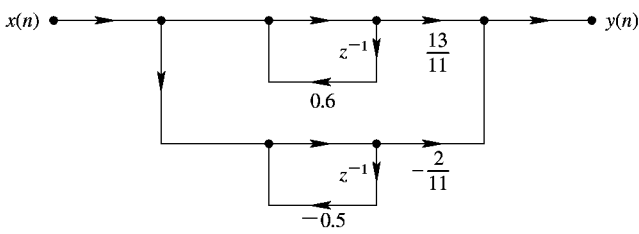


图 7. 3. 7 例 7. 3. 5 图

例 7. 3. 6 假设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{(2-0.379z^{-1})(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2})}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1}+0.5z^{-2})}$$

画出它的并联型结构图。

解 将系统函数展成部分分式，得到：

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1-0.5z^{-1}} + \frac{-16+20z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

将上式中的每一部分画成直接型结构，再进行并联，最后得到 IIR 并联型结构如图 7. 3. 8 所示。

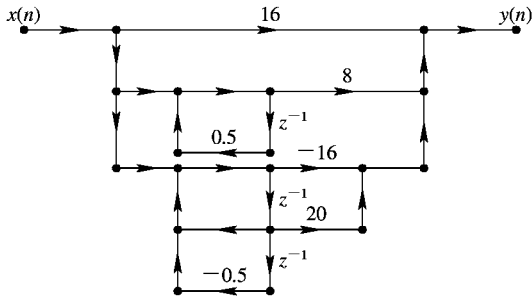


图 7. 3. 8 例 7. 3. 6 图

该并联结构中，一阶网络决定一个实数极点，二阶网络决定两个极点，改变这些系数可以很方便地改变极点的位置。例 7. 3. 6 说明并联结构相对直接型结构调整方便，但调整

零点不如级联型方便。而且由于各个基本网络是并联的，各个基本网络产生的误差不会相互影响，不会增加积累误差。另外，观察流图，信号是同时加到各个基本网络上的，相对直接型和级联型结构，并联型结构的运算速度快。

7.4 有限长脉冲响应的基本网络结构

因为 FIR 网络的单位脉冲响应是有限长的，因而其网络结构的特点是没有反馈回路，也就是说，没有环路，都是直通过路。有限长脉冲响应基本网络结构有直接型、级联型以及频率采样型三种，下面分别介绍。

7.4.1 FIR 直接型网络结构

假设单位脉冲响应 $h(n)$ 的长度是 N ，它的系统函数和差分方程用下式表示：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

按照系统函数或者差分方程直接画出它的结构图如图 7.4.1 所示。由于它的差分方程是单位脉冲响应和输入信号的卷积，因此这种结构也称为卷积型结构。结构中延时支路相互串联，称为延时线，延时线上有 N 个抽头，分别连接乘法器，乘法器相乘的系数就是单位脉冲响应。

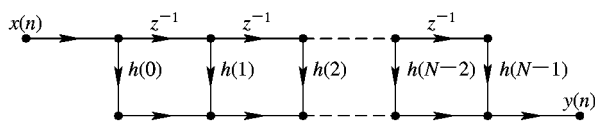


图 7.4.1 FIR 直接型网络结构

7.4.2 FIR 级联型网络结构

系统函数是一个 $N-1$ 阶的 z 负幂多项式，共有 $N-1$ 个根。进行因式分解时，如果有虚根，可以将共轭成对的根放在一起，形成具有实系数的二阶网络。下面举例说明。

例 7.4.1 设 FIR 网络系统函数如下式：

$$H(z) = 0.96 + 2z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

画出它的直接型结构和级联型结构图。

解 这里系统函数 $H(z)$ 是一个 z 负幂多项式，没有反馈网络。它的单位脉冲响应 $h(n)$ 就是该多项式的系数，即 $h(n) = 0.96\delta(n) + 2.0\delta(n-1) + 2.8\delta(n-2) + 1.5\delta(n-3)$ 。画出它的直接型网络结构图如图 7.4.2(a) 所示。

将 $H(z)$ 进行因式分解，得到：

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

按照上式画出它的级联型结构如图 7.4.2(b) 所示。

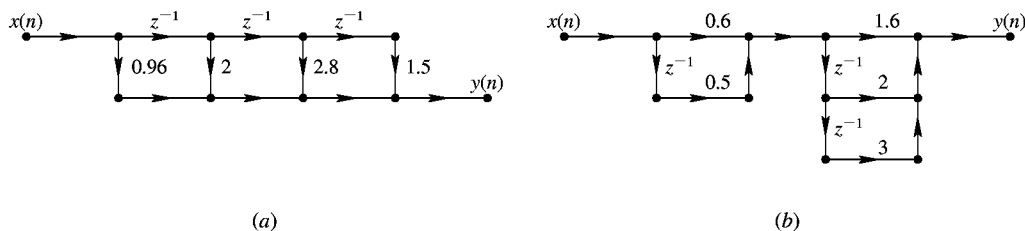


图 7.4.2 例 7.4.1 图

级联结构中，一个一阶网络决定一个零点，一个二阶网络决定一对共轭零点，因此级联型的调整比直接型的方便。但级联型的系数较多，需要的乘法器较直接型的多；分解出的因式愈多，需要的乘法器也愈多。不过当阶次高时，不易分解。级联型较少用，普遍应用的是直接型。

7.4.3 频率采样型网络结构

我们已经知道，对于序列 $h(n)$ ，对它的频域 $H(z)$ 函数进行等间隔采样 N 点，得到 $H(k)$ ，相应的时域信号 $h(n)$ 会以采样点数为周期进行周期性延拓；如果在频率域的采样点数 N 大于等于原序列的长度 M ，则不会引起信号失真。此时，原序列的 Z 变换 $H(z)$ 与频域采样值 $H(k)$ 之间满足下面关系式：

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.4.1)$$

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

如果 $h(n)$ 和 $H(z)$ 分别是 FIR 网络的单位脉冲响应和系统函数，并要求 $N \geq M$ ，则上面两式提供了一种称为频率域采样的 FIR 网络结构。将 (7.4.1) 式写成下式：

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \quad (7.4.2)$$

$$\text{式中} \quad H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad (7.4.3)$$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (7.4.4)$$

(7.4.3) 式中的 $H_c(z)$ 就是第三章中例 3.6.3 中的 $H(z)$ 。在该例题中曾分析出在它的幅度特性中有 N 个等幅度的峰，并称它为梳状滤波器。式中 $H_k(z)$ 是 IIR 一阶网络， N 个 $H_k(z)$ 进行相加，表示 N 个一阶网络相并联。假设 $N=3$ ，画出整个频率域采样型网络结构图如图 7.4.3 所示。

观察 (7.4.2) 式，每一个一阶并联网络有一个极点， N 个一阶网络并联共有 N 个极点，它们是

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

这些极点等间距地分布在单位圆上。因为极点刚好在单位圆上，因此系统不稳定。但是梳状滤波器 $H_c(z)$ 刚好也有 N 个零点，它们刚好也是上面的表达式，即

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

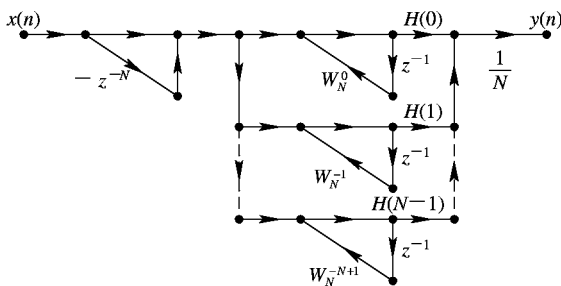


图 7.4.3 FIR 频率采样型网络结构

这样从理论上讲, 这些零极点刚好抵消, 使网络保持稳定。前面曾讲过, FIR 网络结构没有反馈回路, 这里虽有反馈回路, 但因为零极点抵消了, 仍然认为频率采样结构属于 FIR 网络结构。

FIR 频率采样型网络结构有明显的两个优点和两个缺点, 下面分别介绍。

1) FIR 频率采样型网络结构的优点

(1) 调试方便。在频率域采样点上, 频率为 $\omega_k = 2\pi/N, k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 频率特性为 $H(e^{j\omega_k})$, 可以证明 $H(e^{j\omega_k}) = H(k)$, 这里 $H(k)$ 就是图 7.4.3 中乘法器中进行相乘的系数, 因此只要调整该系数, 就可以直接有效地调整频率特性。

(2) 便于标准化、模块化。对于系统的不同频率特性, 只要单位脉冲响应的长度 N 相同, 梳状滤波器部分以及 N 个一阶并联网路部分完全相同, 不同的仅是各支路的增益 $H(k)$ 不同, 那么相同部分便可以标准化、模块化。

2) FIR 频率采样型网络结构的缺点

(1) FIR 频率采样型网络结构中的系数 $H(k)$ 和 W_N^{-k} 一般是复数, 要求使用复数乘法器, 这对于硬件实现是较困难的。

(2) 实际中的频率采样结构是不易稳定的。前面已讲过, 这种结构的单位圆上有极点, 它是靠梳状滤波器在单位圆上的零点抵消来维持稳定的, 但这只是从理论上说它能抵消, 实际中, 由于有从十进制转换成二进制引起的误差, 以及使用过程中的运算误差等, 使这些极、零点不能完全抵消, 从而使系统产生不稳定现象。

为了克服以上的缺点, 需要对结构进行修正。第一点修正是将单位圆上的零、极点移到一个以半径为 r 的圆上, 要求 $0 < r < 1$, 且 r 接近于 1, 这样即使零、极点不能完全抵消, 也不会产生不稳定现象。第二点修正是将 $H(k)$ 和 W_N^{-k} 共轭成对的并联一阶网络合并成一个二阶网络。这样, 由于二阶网络的系数是实数, 可以使用实数乘法器。综合以上两点修正, 频率采样结构的系统函数改用下面两式表示:

当 N 为偶数时,

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right] \quad (7.4.5)$$

当 N 为奇数时，

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[\frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right] \quad (7.4.6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{0k} &= 2 \operatorname{Re}[H(k)] \\ \alpha_{1k} &= -2 \operatorname{Re}[rH(k)W_N^{-k}] \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(7.4.5)式和(7.4.6)式的详细推导请参考文献[1]。按照(7.4.5)式画出 N 为偶数时的频率采样修正结构如图 7.4.4 所示。请读者按照(7.4.6)式画出 N 为奇数时频率采样修正结构图。

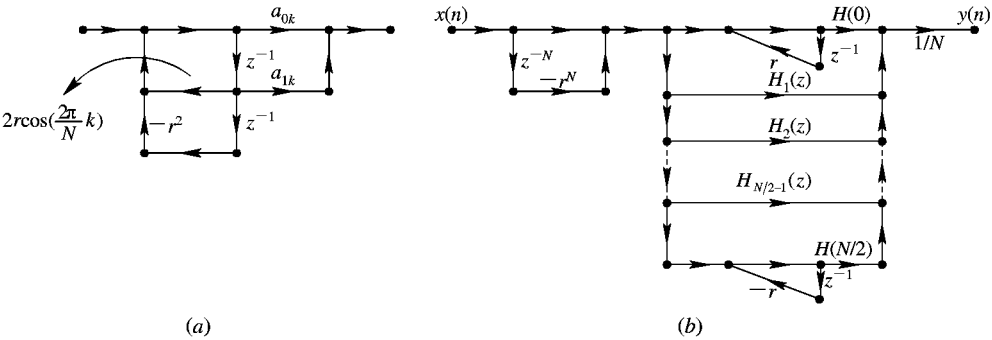


图 7.4.4 频率采样修正结构 (N = 偶数)

由图 7.4.4 可见，当采样点数 N 很多时，其结构很复杂，需要的乘法器和延时支路很多，使网络变的复杂。但对于窄带滤波器，大部分的采样值 $H(k)$ 为 0，从而使二阶网络的个数大大减少。所以频率采样结构适合于窄带滤波网络。

7.5 按照网络结构设计运算次序

通过设计知道系统函数，可以按照上面介绍的基本网络结构设计一种网络结构。具体的网络结构代表一种算法，这一节介绍如何根据网络结构确定运算次序。

首先将流图中的节点进行排序。延时支路的输出节点变量是前一时刻已存储的数据，它和输入节点都作为起始节点，排序为 $k=0$ 。但延时支路的输出节点还有一输入支路，应该给延时支路的

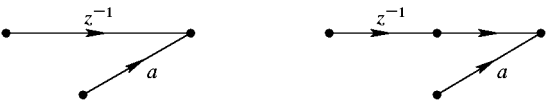


图 7.5.1 给延时支路分配节点

输出节点专门分配一个节点，如图 7.5.1 所示。然后由 $k=0$ 的节点可以计算出节点排序为 $k=1$ ；由 $k=0, k=1$ ，可以计算出节点排序为 $k=2$ ；依次类推，直到全部节点排完。最后根据排序，写出运算和操作步骤。具体地如何排序和写运算次序用举例说明。

例 7.5.1 写出图 7.5.2(a)流图的运算次序。

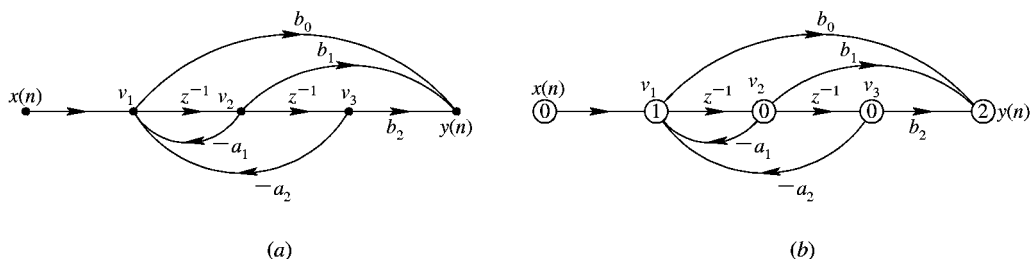


图 7.5.2 流图及运算次序

解 首先根据流图进行排序。将延时支路的输出节点定为 $k=0$ ，即图 7.5.2(a) 中的 v_2 、 v_3 节点定为 $k=0$ (用圆圈中的数字 0 表示)。 v_1 节点变量可以由 v_2 、 v_3 节点 (即 $k=0$ 点) 变量计算出来，因此 v_1 节点定为 $k=1$ 。然后输出节点变量可以由 v_1 、 v_2 、 v_3 节点变量计算出来。最后排序图如图 7.5.2(b) 所示。一般假设 v_2 、 v_3 的初始状态为 0，即 $v_2=0$ ， $v_3=0$ ，这样起始数据为 $x(n)$ ， v_2 ， v_3 ，运算次序如下：

- (1) $v_1 = x(n) - a_1 v_2 - a_2 v_3$;
- (2) $y(n) = b_0 v_1 + b_1 v_2 + b_2 v_3$;
- (3) 数据更新 $v_2 \rightarrow v_3$, $v_1 \rightarrow v_2$;
- (4) 循环运算以上三步。

例 7.5.2 已知网络系统函数如下式所示：

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3}}$$

要求画出它的信号流图，并确定运算次序。

解 画出直接型流图如图 7.5.3(a) 所示。

和上例一样，为了设计运算次序，首先根据流图进行排序。将延时支路的输出节点定为 $k=0$ ，即图 7.5.3(a) 中的 v_1 、 v_2 、 v_3 节点定为 $k=0$ (用圆圈中的数字表示)。 v_4 和 v_{10} 节点变量可以由 v_2 、 v_3 节点 (即 $k=0$ 点) 变量计算出来，因此 v_4 和 v_{10} 节点定为 $k=1$ 。然后 v_5 节点变量可以由 v_4 和 v_1 节点变量计算出来，定为 $k=2$ 。同样， v_9 节点也定为 $k=2$ 。 v_6 节点变量由输入 $x(n)$ 和 v_5 节点变量计算， v_6 节点定为 $k=3$ 。依此类推， v_7 节点定为 $k=4$ ， v_8 节点定为 $k=5$ ，输出节点定为 $k=6$ 。总的排序图如图 7.5.3(b) 所示。下面按照排序图写出运算次序。输入信号 $x(n)$ 和 v_1 、 v_2 、 v_3 节点变量作为起始数据，设 $v_1=0$ ， $v_2=0$ ， $v_3=0$ 。

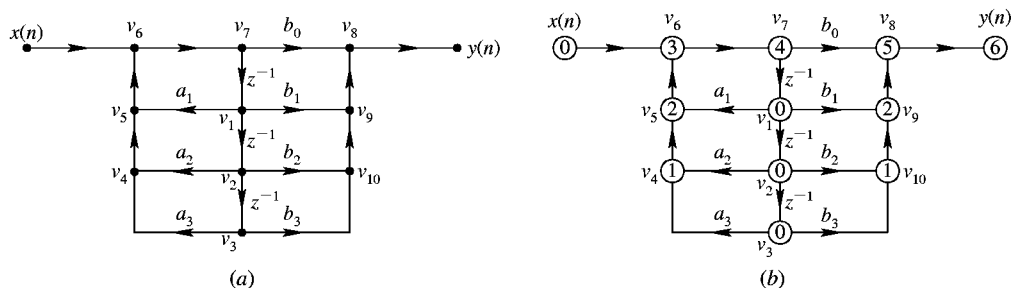


图 7.5.3 信号流图及运算次序

起始数据 $x(n]$, v_1, v_2, v_3 。

$$(1) v_4 = a_2 v_2 + a_3 v_3, v_{10} = b_2 v_2 + b_3 v_3;$$

$$(2) v_5 = a_1 v_1 + v_4, v_9 = b_1 v_1 + v_{10};$$

$$(3) v_6 = x(n) - v_5;$$

$$(4) v_7 = v_6;$$

$$(5) v_8 = b_0 v_7 + v_9;$$

$$(6) y(n) = v_8;$$

$$(7) \text{数据更新: } v_2 \rightarrow v_3, v_1 \rightarrow v_2, v_7 \rightarrow v_1;$$

$$(8) \text{循环以上七步。}$$

实际上, 在上面八步中, (3)和(4)可以合成一步, (5)和(6)可以合成一步, 共需六步即可。另外在(1)中, 计算 v_4 和 v_{10} 可同时进行, 在(2)中, 计算 v_5 和 v_9 可同时进行。

以上确定运算次序的方法适合任何基本流图, 请读者自己练习。

习 题

1. 已知网络的差分方程为

$$y(n) = b_1 x(n) + b_2 x(n-1) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

试画出该网络的直接型结构, 并设计出它的运算次序。

2. 设系统用下面差分方程描述:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2)$$

试画出该系统的直接型、级联型和并联型结构。

3. 设数字滤波器的差分方程为

$$y(n] = (a + b)y(n-1) - aby(n-2) + x(n-2) + (a + b)x(n-1) + ab$$

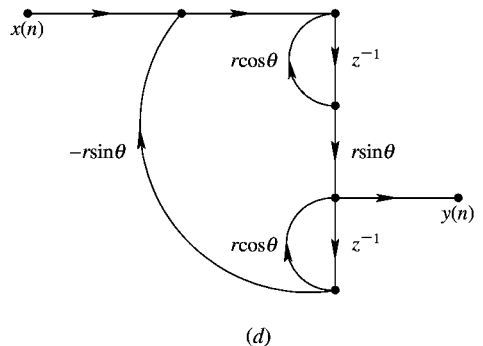
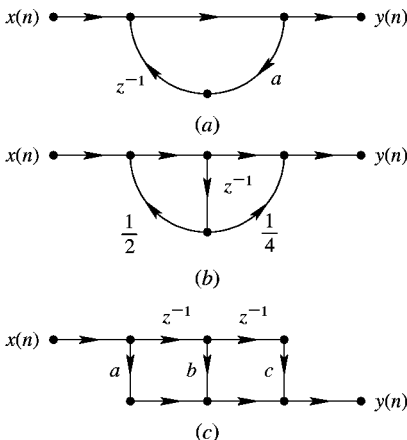
试画出该系统的直接型、级联型和并联型网络结构。

4. 设系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{4(1 + z^{-1})(1 - 1.414z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2})}$$

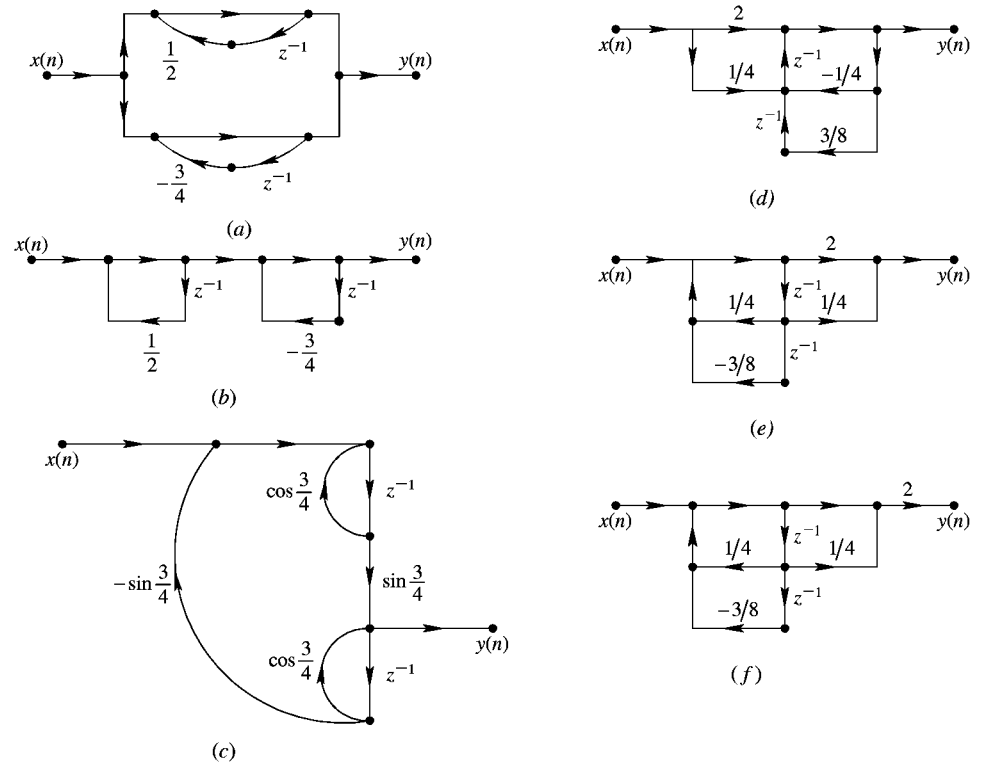
试画出各种可能的级联型结构。

5. 题 5 图中, 画出了四种流图, 试写出它们的系统函数和差分方程。



题 5 图

6. 题 6 图中，画出了六种流图，试写出它们的系统函数。



题 6 图

7. 已知滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = 0.9^n R_5(n)$$

求出该滤波器的系统函数，并画出直接型网络结构图。

8. 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n - 1) + \delta(n - 4)$$

试用频率采样型网络结构实现该滤波器。设采样点数 $N=5$ ，要求画出频率采样型网络结构图，写出滤波器参数的计算公式。

9. 设网络的系统函数有三种情况：

$$H_1(z) = 1 - 0.6z^{-1} - 1.414z^{-2} + 0.864z^{-3}$$

$$H_2(z) = 1 - 0.98z^{-1} + 0.898z^{-3}$$

$$H_3(z) = H_2(z)/H_1(z)$$

试分别画出它们的直接型网络结构图。

第八章 IIR 数字滤波器的设计

【本章重点和难点】

(1) 模拟低通滤波器的技术指标, 巴特沃斯低通滤波器的设计方法与步骤。

(2) 高通模拟滤波器的设计方法和步骤。

(3) 一般 IIR 数字滤波器的设计步骤, 将模拟低通滤波器的系统函数转换成数字滤波器的系统函数的两种方法(脉冲响应不变法和双线性变换法), 这两种方法各自的优缺点, 将数字滤波器的技术指标转换成模拟滤波器的技术指标。

(4) 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器的设计步骤。

(5) 用双线性变换法设计数字低通滤波器的设计步骤。

(6) 数字高通滤波器的设计方法与步骤。

以上滤波器的设计中均要使用 MATLAB 信号处理工具函数, 掌握编程方法。

数字滤波器可分为无限长单位脉冲响应数字滤波器(记为 IIR - DE: Infinite Impulse Response Digital Filter)和有限长单位脉冲响应数字滤波器(记为 FIR - DF: Finite Impulse Response Digital Filter)。这两种滤波器的设计方法和性能特点也大不相同, 我们分两章分别讲述它们的设计方法。

IIR 数字滤波器的设计方法有两类: 间接设计法和直接设计法。间接设计法借助模拟滤波器的设计方法, 先根据数字滤波器设计指标设计相应的模拟滤波器, 再将模拟滤波器转换成数字滤波器。直接设计法是在时域或频域直接设计数字滤波器。

由于模拟滤波器设计理论非常成熟, 而且有多种性能优良的典型滤波器供我们选择, 设计公式图表完善, 因此间接设计法得到广泛应用。而直接设计法要求迭代求解联立方程, 必须采用计算机辅助设计。在计算机普及的今天, 各种设计方法都有现成的设计程序(或设计函数)供我们调用。所以, 只要掌握了滤波器基本设计原理, 在工程实际中采用计算机辅助设计滤波器是很容易的事。

本章主要介绍模拟滤波器设计, IIR 数字滤波器的间接设计法, 并简要介绍相应的 MATLAB 工具箱函数。

8.1 滤波的基本概念

从傅立叶分析理论知道, 信号波形是由许多不同频率、不同幅度和不同初相位的正弦波叠加构成的。例如, 图 8.1.1(a)是信号加噪声的时域波形, 经过频谱分析得到其频谱如图 8.1.1(b)所示, 由频谱图可以看出, 该波形是单一频率正弦波调制的双边带信号与宽带

噪声干扰的叠加，双边带信号的载波频率为 100 Hz，而干扰噪声的频率大于 170 Hz；图 8.1.2(a)是两路不同载波频率的双边带信号叠加的时域波形，其频谱如图 8.1.2(b)所示，由频谱图可以看出，该两路信号载波频率分别是 250 Hz 和 1000 Hz，调制信号均为单一频率正弦波。

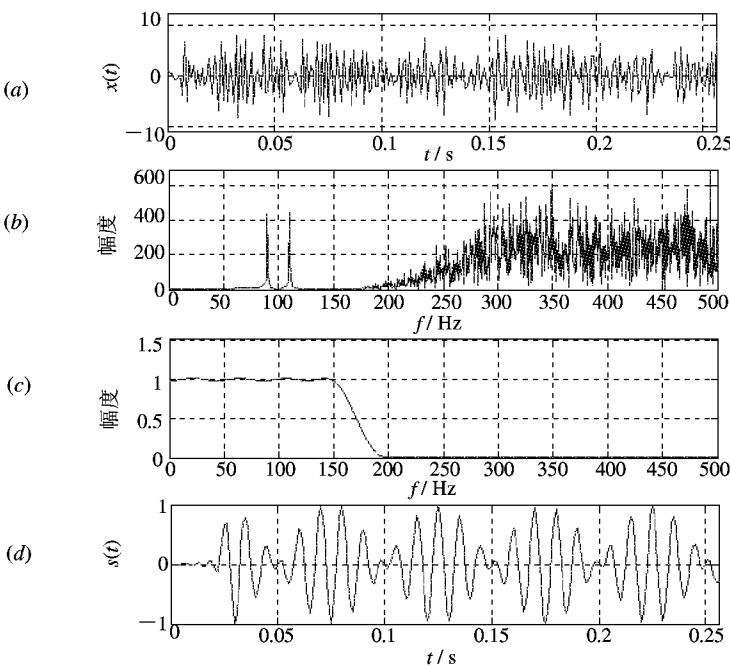


图 8.1.1 滤波器用于从噪声中提取信号的时、频域解释

(a) 信号加噪声波形；(b) 信号加噪声的频谱
(c) 低通滤波器的幅频特性；(d) 滤除噪声后的信号波形

滤波就是提取输入信号中有用的频率成分，抑制无用的频率成分的信号处理过程。数字滤波是通过数值运算对输入信号序列进行滤波的数字信号处理。数字滤波器是实现数字滤波的数字部件或程序。与模拟滤波器比较，数字滤波器精度高，稳定可靠，灵活，便于集成化、小型化，不需要阻抗匹配，可以实现模拟滤波器无法实现的复杂滤波功能。

例如，假设数字滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，输入信号为 $x(n)$ ，则对 $x(n)$ 滤波的计算为

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$y(n)$ 为滤波器输出信号，是对 $x(n)$ 滤波后的结果。如前述，数字滤波器也可以用差分方程描述，差分方程的一般形式如下：

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

上面的卷积和求解差分方程的计算就是对 $x(n)$ 的滤波，滤波特性由 $h(n)$ 或 a_k 和 b_k 决定。

后面会看到，所谓数字滤波器设计，就是根据滤波要求，寻找滤波器单位脉冲响应

$h(n)$ ，或滤波器系统函数 $H(z)$ (由 a_k 和 b_k 确定) 的有效方法。

滤波器可用于波形形成、调制解调、信号提取、信号分离和信道均衡等。所以，学习滤波器的设计与实现是必不可少的。

例如，要用滤波器从图 8.1.1 (a) 所示的信号 $x(t)$ 中提取双边带信号，抑制高频噪声干扰。由图 8.1.1 (b) 知道，有用的双边带信号位于 120 Hz 以下，而干扰噪声频谱位于 170 Hz 以上。所以要求滤波器通过输入信号中 120 Hz 以下的频率成分，抑制(滤除) 170 Hz 以上的频率成分。这样的滤波器称为低通滤波器，其幅频特性如图 8.1.1 (c) 所示。将 $x(t)$ 加到低通滤波器的输入端，滤波器输出信号的频谱等于 $x(t)$ 的频谱与滤波器频率响应函数的乘积。由于双边带信号频谱在滤波器通带(幅度为 1 的频段)内，可以顺利通过并到达输出端，而噪声信号频谱位于滤波器阻带频段(幅度接近 0 的频段)，所以不能通过滤波器(被滤除)，达到从噪声中提取有用信号的目的。滤波器输出的双边带信号 $s(t)$ 如图 8.1.1 (d) 所示。

要用滤波器分离图 8.1.2 (a) 所示的信号 $x(t)$ 中两路载波频率不同的双边带信号，就必须设计两个滤波器。 $x(t)$ 通过幅频特性如图 8.1.2 (c) 所示的低通滤波器，滤除载波频率为 1000 Hz 的双边带信号，输出载波频率为 250 Hz 的双边带信号 $s_1(t)$ ，如图 8.1.2 (d) 所示。 $x(t)$ 通过幅频特性如图 8.1.2 (e) 所示的带通滤波器，滤除载波频率为 250 Hz 的双边带信号，输出载波频率为 1000 Hz 的双边带信号 $s_2(t)$ ，如图 8.1.2 (f) 所示。这样，通过适当的滤波器，就可将时域完全混叠但频谱不混叠的两路双边带信号分离开。

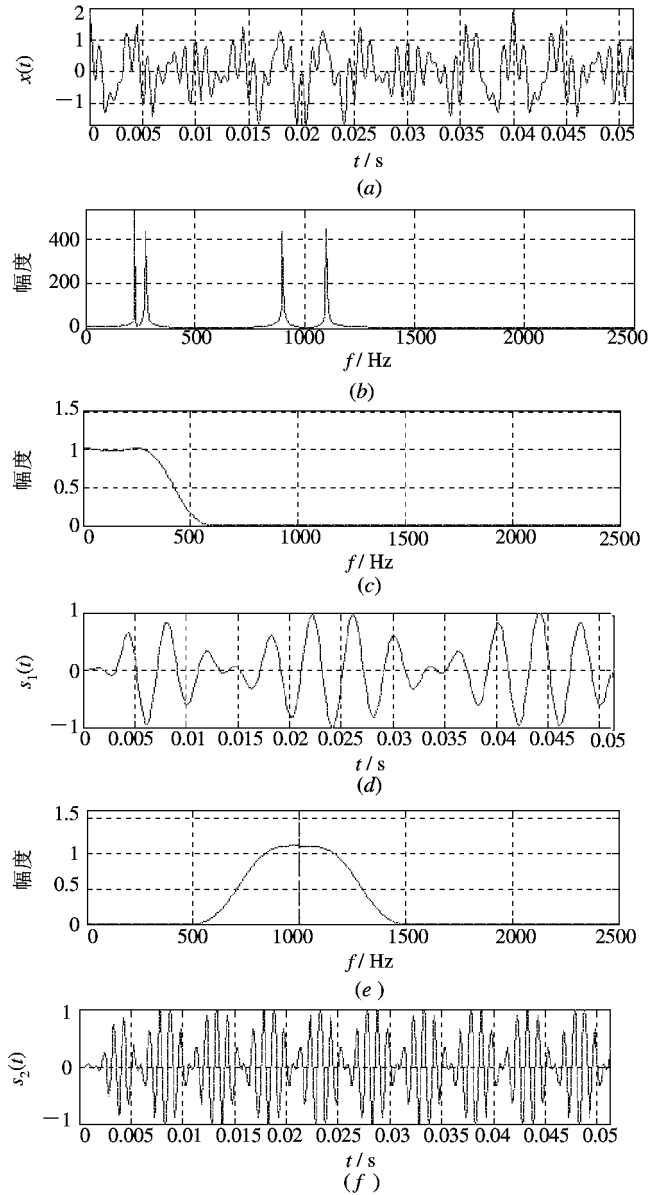


图 8.1.2 滤波器用于分离两路位于不同频段的信号的时、频域解释

- (a) $x(t)$ 的波形；
- (b) $x(t)$ 的频谱；
- (c) 低通滤波器的幅频特性；
- (d) 低通滤波后分离出的信号波形；
- (e) 带通滤波器的幅频特性；
- (f) 带通滤波后分离出的信号波形

8.2 模拟滤波器的技术指标

模拟滤波器和数字滤波器的设计指标(滤波性能)都是在频域给出的。由于 IIR 数字滤波器可以从模拟滤波器设计,因此本章先讨论模拟滤波器的设计方法。为了叙述方便,先规定两个符号:

$H_a(s)$: 模拟滤波器系统函数;

$H_a(j\Omega)$: 模拟滤波器频率响应函数(传输函数)。

模拟滤波器的设计指标一般由幅频特性函数 $|H_a(j\Omega)|$ 来描述。这是因为多年来已经研究出多种性能优良、各具特色的模拟滤波器,这些模拟滤波器的系统函数满足硬件综合实现条件,其通带相位特性确定。所以,模拟滤波器的设计过程就是根据工程需要选择滤波器的种类,再根据设计指标(对幅频特性的要求)计算滤波器阶数,最后查表并进行适当的频率变换即可得到模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。另外,为了压缩幅频特性曲线的刻度范围,直观地看出通带和阻带的频响曲线,一般用幅频函数的衰减 dB(分贝)值描述设计指标。

$|H_a(j\Omega)|$ 相对于通带中心幅频函数模值 $|H_a(j\Omega_0)|$ 的衰减 dB 值定义如下:

$$\begin{aligned}\alpha &= -20 \lg \left| \frac{H_a(j\Omega)}{H_a(j\Omega_0)} \right| \text{ dB} \\ &= 20 \lg \left| \frac{H_a(j\Omega_0)}{H_a(j\Omega)} \right| \text{ dB}\end{aligned}\quad (8.2.1)$$

其中, Ω_0 为通带中心频率(对低通滤波器, $\Omega_0 = 0$)。一般滤波器幅频特性是归一化的,即 $|H_a(j\Omega_0)| = 1$, 这时,

$$\alpha = -20 \lg |H_a(j\Omega)| \text{ dB} \quad (8.2.2)$$

为了直观形象地说明用衰减 dB 曲线的优点,画出同一滤波器的幅频函数曲线及其衰减 dB 曲线,如图 8.2.1 所示。图 8.2.1(a)显示不出 0.001 以下的阻带响应曲线(近似与零值坐标轴重合),而图 8.2.1(b)清楚地显示出阻带 -60 dB (-60 dB 与 0.001 的幅度等价)以下的响应曲线,这样便于观察检验和描述滤波器频率响应特性。所以,在后面的模拟与数字滤波器设计中,用幅频响应函数的衰减 dB 值描述设计指标。

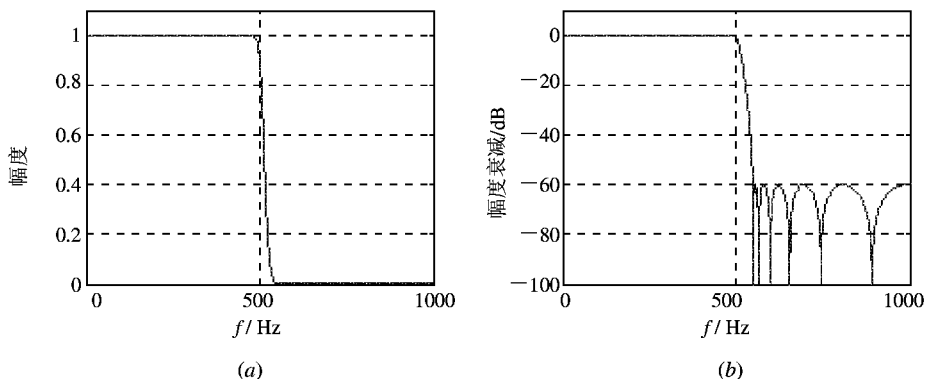


图 8.2.1 幅频特性曲线(a)与幅度衰减 dB 曲线(b)

根据滤波器的幅频特性，一般将滤波器分为四类：低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器。理想低通、高通、带通和带阻滤波器的幅频特性函数如图 8.2.2 所示。

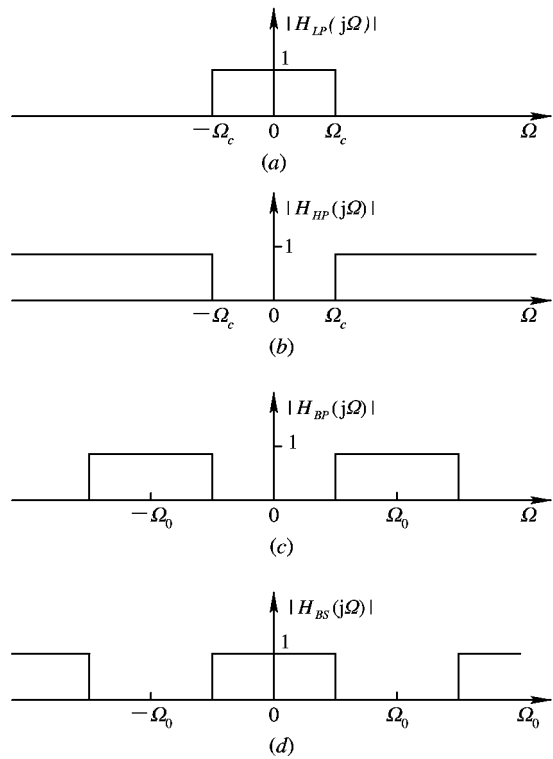


图 8.2.2 理想滤波器分类示意图(幅频特性曲线)

(a) 低通；(b) 高通；(c) 带通；(d) 带阻

下面以低通滤波器为例来介绍模拟滤波器技术指标的描述参数。在滤波器设计中，一般要求满足所谓的片段常数特性，如图 8.2.3 所示。

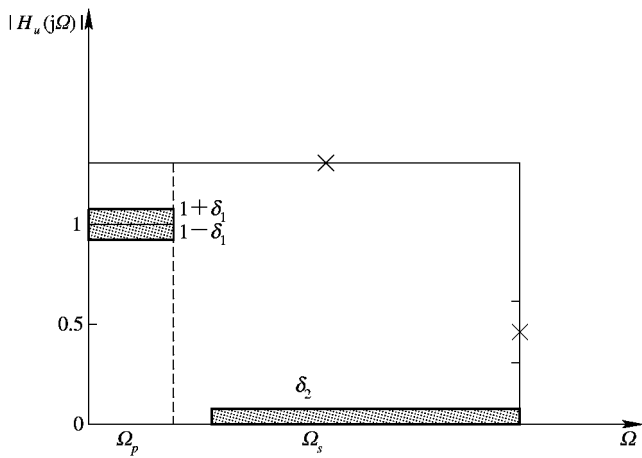


图 8.2.3 低通滤波器指标示意图

图 8.2.3 中, 频段 $[0, \Omega_p]$ 称为通带, Ω_p 称为通带边界频率。希望输入信号落在通带中的频率成分通过滤波器后衰减足够小。如果要求通带衰减不超过 1 dB(即要求图 8.2.3 中的 $\delta_1 = 10.87\%$), 则称通带最大衰减为 1 dB。一般用 α_p 表示通带最大衰减, 即 $\alpha_p = 1$ dB。频段 $[\Omega_s, \infty)$ 称为阻带, Ω_s 称为阻带截止频率。要求输入信号落在阻带中的频率成分通过滤波器后衰减足够大。如果要求阻带至少衰减 60 dB(即要求图 8.2.3 中的 $\delta_2 = 1\%$), 则称阻带最小衰减为 60 dB。一般用 α_s 表示通带最小衰减, 即 $\alpha_s = 60$ dB, 频段 $[\Omega_p, \Omega_s]$ 称为过渡带。当然, 过渡带越窄越好。但是后面会看到, 当通带和阻带指标不变, 过渡带越窄时, 要求滤波器阶数越高。所以, 滤波器技术指标要根据工程需要确定, 而不是一味地追求高指标。通常将 Ω_p 和 Ω_s 称为边界频率, $\alpha = 3$ dB 时对应的频率称为 3 dB 截止频率(因为幅度衰减 3 dB 时, 对应功率衰减 1/2, 所以又称为半功率点频率), 记为 Ω_c , 它是滤波器最重要的技术参数之一。

用数学方法描述低通滤波器的指标如下:

通带内($0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p$),

$$\alpha = -20 \lg \left| \frac{H_a(j\Omega)}{H_a(j0)} \right| \leq \alpha_p \quad (8.2.3)$$

或以幅频函数描述为

$$1 - \delta_1 \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1 + \delta_1 \quad (8.2.4)$$

阻带内($\Omega_s \leq |\Omega|$),

$$\alpha = -20 \lg \left| \frac{H_a(j\Omega)}{H_a(j0)} \right| \geq \alpha_s \quad (8.2.5)$$

或以幅频函数描述为

$$|H_a(j\Omega)| \leq \delta_2 \quad (8.2.6)$$

综上所述, 滤波器的技术指标的特点是, 通带频段内衰减要小于一常数 α_p , 阻带频段内衰减要大于常数 α_s , 但对通带和阻带的频响曲线形状没有具体要求。我们把这种特性要求称为片段常数特性要求。对低通滤波器而言, 其技术指标完全由 Ω_p 、 α_p 、 Ω_s 和 α_s 四个常数确定。

8.3 模拟滤波器的设计

设计模拟滤波器时, 不但要求频率响应指标满足信号处理的要求, 而且设计的系统函数能用硬件实现。往往从信号处理角度认为最好的滤波器却无法用硬件实现, 理想滤波器(通带内幅度为 1, 阻带内幅度为 0, 过渡带宽度为 0 的滤波器)就是如此。不过该问题已经解决, 经过多年研究开发, 已经找到了多种逼近理想滤波特性的滤波器函数, 其滤波特性各有特色, 而且这些模拟滤波器的系统函数满足硬件综合实现条件^[3]。本章介绍几种常用滤波器的特点及其设计方法。

(1) 巴特沃斯(Butterworth)滤波器: 其特点是从通带中心向两边幅频特性单调下降。

(2) 切比雪夫 I 型(Chebyshev I)滤波器: 通带内有等波纹幅频特性函数, 阻带内有单调下降的幅频特性函数。

(3) 切比雪夫 II 型(Chebyshev II)滤波器: 通带内有单调下降的幅频特性函数, 阻带内

有等波纹幅频特性函数。

(4) 椭圆滤波器(又称考尔(Cauer)滤波器或双切比雪夫滤波器)：通带和阻带内均有等波纹幅频特性。

(5) 贝塞尔(Bessel)滤波器(又称最大平坦群时延滤波器)：其特点是在 Ω_0 附近逼近线性相位特性。

可以证明，一个系统函数不能同时逼近理想滤波器的幅度特性和相位特性^[3]。以上 5 种典型滤波器中，前 4 种是逼近幅度特性，第 5 种逼近相位特性。对相同的指标要求，对前 4 种幅度特性逼近滤波器，巴特沃斯滤波器阶数最高，切比雪夫次之，椭圆滤波器阶数最低。当阶数相同时，巴特沃斯滤波器截止特性最平坦(过渡带最宽)，椭圆滤波器截止特性最陡峭(即过渡带最窄)。

十阶巴特沃斯、切比雪夫和椭圆滤波器的幅频特性曲线分别如图 8.3.1 中的实线、虚线和点划线所示。如果设计指标如下：

通带截止频率： $f_p=1\text{ kHz}$ ，通带最大衰减： $\alpha_p=1\text{ dB}$

阻带截止频率： $f_s=1.5\text{ kHz}$ ，阻带最小衰减： $\alpha_s=60\text{ dB}$

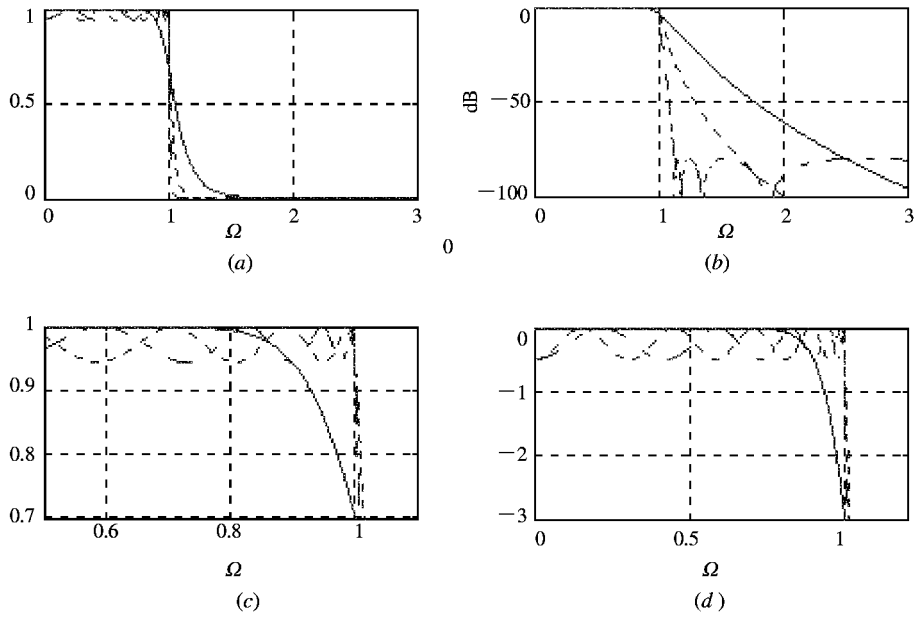


图 8.3.1 十阶巴特沃斯、切比雪夫和椭圆滤波器的幅频特性曲线
(a) 幅频特性曲线；(b) 幅度衰减曲线；
(c) 通带截止频率附近的幅频特性；(d) 通带衰减特性放大显示图

则计算阶数和 3 dB 截止频率的 MATLAB 程序如下：

```
%三种滤波器阶数比较
fp=1000; rp=1; fs=1500; rs=60;
[Nb, wcb]=buttord(fp, fs, rp, rs, 's')
[Ncl, wcl]=cheblord(fp, fs, rp, rs, 's')
```

$[Nc2, wc2] = \text{cheb2ord}(fp, fs, rp, rs, 's')$

$[Ne, we] = \text{ellipord}(fp, fs, rp, rs, 's')$

运行程序求出巴特沃斯、切比雪夫和椭圆滤波器的阶数及通带截止频率如下：

巴特沃斯滤波器： $Nb = 19, \Omega_c = 1.0428e+003$

切比雪夫 I 型滤波器： $Nc1 = 9, \Omega_p = 1000$

切比雪夫滤波器 II 型： $Nc2 = 9, \Omega_p = 1000$

椭圆滤波器： $Ne = 6, \Omega_p = 1000$

读者试验证，当滤波器指标更高时，三种滤波器的阶数差别就更大。

8.3.1 概述

模拟滤波器的一般设计过程如下：

- (1) 根据信号处理要求确定设计指标；
- (2) 选择滤波器类型；
- (3) 计算滤波器阶数；
- (4) 通过查表或计算确定滤波器系统函数 $H_a(s)$ ；
- (5) 综合实现并装配调试。

上述(5)属于网络综合课程。计算滤波器阶数和求系统函数的公式和方法与选择的滤波器类型有关。下面主要介绍巴特沃斯滤波器的设计方法。其实，对每种滤波器，都有相应的计算机辅助设计程序或设计函数，因此，最主要的是掌握滤波器设计的基本原理与方法，至于那些复杂的计算公式及其计算，在实际设计中都是由计算机完成的。

8.3.2 巴特沃斯滤波器的设计

1. 巴特沃斯滤波器的幅频特性函数和相频特性函数

巴特沃斯低通滤波器系统函数为^[1]

$$H_a(s) = \frac{\Omega_s^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \quad (8.3.1)$$

其中， N 为巴特沃斯滤波器的阶数， N 只能取自然数， Ω_c 为 3 dB 截止频率， s_k 为 $H_a(s)$ 的极点，

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (8.3.2)$$

s_k 均匀分布在左半平面半径为 Ω_c 的半圆周上，且对称于实轴。

当(8.3.1)式中的 $s = j\Omega$ 时，可得到巴特沃斯滤波器的频率响应函数：

$$H_a(j\Omega) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (j\Omega - s_k)} \quad (8.3.3)$$

$N=3, \Omega_c=1$ 时， $H_a(s)$ 的幅频特性曲线、相频特性曲线和极点分布图分别如图 8.3.2(a)、(b)和(c)所示。图 8.3.2(d)画出了 $N=2, 4, 20$ 时的幅频特性曲线，由此图可见阶数 N 越大，通带越平坦，过滤带越窄。

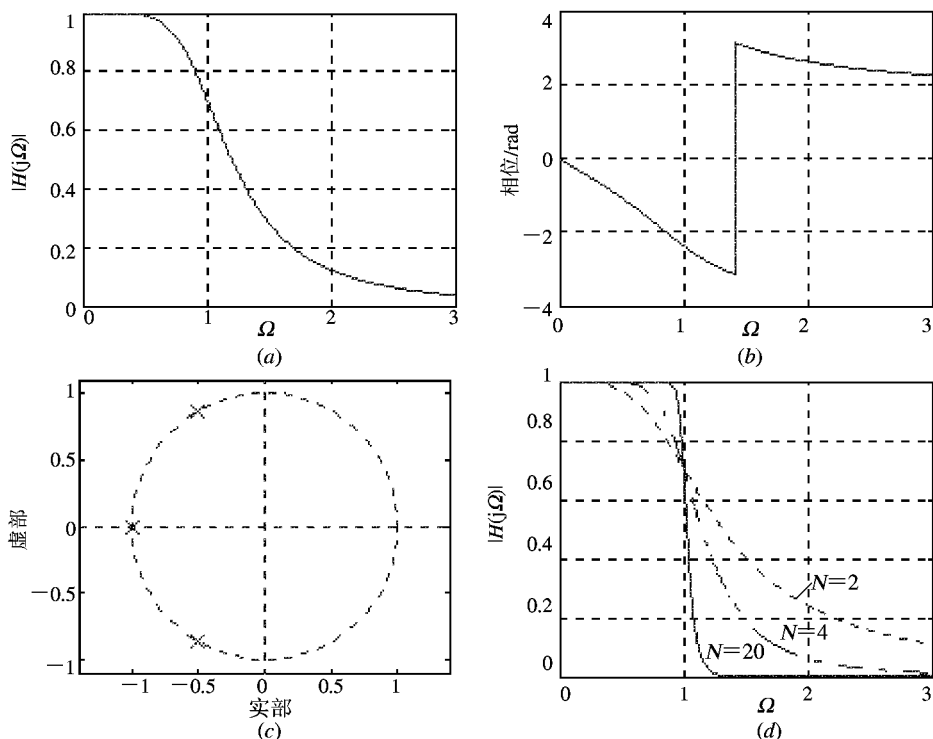


图 8.3.2 巴特沃斯滤波器极点分布及频率响应特性曲线图

(a) 三阶幅频曲线; (b) 三阶相频曲线; (c) 极点分布图; (d) 二阶、四阶、二十阶幅频曲线

2. 巴特沃斯低通滤波器设计

由(8.3.1)~(8.3.3)式可见, 巴特沃斯低通滤波器系统函数完全由阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c 确定, 所以设计巴特沃斯低通滤波器就是根据设计指标求阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c , 然后按(8.3.2)式求出极点, 按(8.3.1)式得到系统函数。实际设计更为方便, 滤波器设计手册一般会以表格形式列出各阶巴特沃斯归一化($\Omega_c=1$)低通滤波器的各种参数(见表 8.3.1)。

由表 8.3.1 中参数可以写出 N 阶巴特沃斯归一化低通原型系统函数 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)} \quad (8.3.4)$$

或

$$G(p) = \frac{1}{B(p)} \quad (8.3.5)$$

(8.3.5)式中的分母可选择表中的分母多项式和分母因式两种形式。

所以, 只要求得阶数 N 值, 查表得到 N 阶巴特沃斯归一化低通滤波器的系统函数 $G(p)$, 最后经过频率变换即可得到所要求的各种系统函数 $H_a(s)$ 。综上所述, 只要导出计算阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c 以及频率变换公式, 借助表 8.3.1 就可以设计各种巴特沃斯滤波器。

表 8.3.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

极点位置 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4				
1	-1.0000								
2	$-0.7071 \pm \mathrm{j}0.7071$								
3	$-0.5000 \pm \mathrm{j}0.8660$	-1.0000							
4	$-0.3827 \pm \mathrm{j}0.9239$	$-0.9239 \pm \mathrm{j}0.3827$							
5	$-0.3090 \pm \mathrm{j}0.9511$	$-0.8090 \pm \mathrm{j}0.5878$	-1.0000						
6	$-0.2588 \pm \mathrm{j}0.9659$	$-0.7071 \pm \mathrm{j}0.7071$	$-0.9659 \pm \mathrm{j}0.2588$						
7	$-0.2225 \pm \mathrm{j}0.9749$	$-0.6235 \pm \mathrm{j}0.7818$	$-0.9010 \pm \mathrm{j}0.4339$	-1.0000					
8	$0.1951 \pm \mathrm{j}0.9808$	$0.5556 \pm \mathrm{j}0.8315$	$-0.8315 \pm \mathrm{j}0.5556$	$-0.9808 \pm \mathrm{j}0.1951$					
9	$-0.1736 \pm \mathrm{j}0.9848$	$-0.5000 \pm \mathrm{j}0.8660$	$-0.7660 \pm \mathrm{j}0.6428$	$-0.9397 \pm \mathrm{j}0.3420$	-1.0000				
分母多项式 系数阶数 N	$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \cdots + b_1p + b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588
分母因式 阶数 N	$B(p) = B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$								
	$B(p)$								
1	$(p+1)$								
2	$(p^2+1.4142p+1)$								
3	$(p^2+p+1)(p+1)$								
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$								
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$								
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$								
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$								
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$								
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$								

下面仅推导计算阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c 的公式，并举例说明设计低通巴特沃斯滤波器的全过程。

1) 计算阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c 的公式

根据(8.2.3)和(8.2.5)式，并考虑巴特沃斯滤波器的单调下降特性(边界频率点若满

足指标, 则其他频率点必然满足要求。)以及 $H(j0)=1$, 可以得到

$$\alpha_p = -20 \lg |H_a(j\Omega_p)| = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2$$

$$\alpha_s = -20 \lg |H_a(j\Omega_s)| = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2$$

由于巴特沃斯滤波器的幅度平方函数为^[1]

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

因此

$$\alpha_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2 = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \right]$$

$$\alpha_s = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2 = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \right]$$

上式两边取指数得到:

$$10^{0.1\alpha_p} = 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} \quad (8.3.6)$$

$$10^{0.1\alpha_s} = 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} \quad (8.3.7)$$

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\alpha_p} - 1 \quad (8.3.8)$$

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\alpha_s} - 1 \quad (8.3.9)$$

(8.3.8)式除以(8.3.9)式消去 Ω_c , 得到只有一个未知量 N 的方程:

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} \quad (8.3.10)$$

令

$$\lambda_{ps} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}, \quad k_{ps} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}}$$

则

$$N = \frac{\lg k_{ps}}{\lg \lambda_{ps}} \quad (8.3.11)$$

除了用(8.3.11)式计算 N 外, 当阶数较低时, 可以用曲线图计算阶数 N 。工程实际中用 MATLAB 信号处理工具箱函数 buttord 计算阶数 N ^[4]。一阶至十阶巴特沃斯归一化低通滤波器的幅度衰减(dB)曲线如图 8.3.3 所示。

当给定滤波器技术指标和 3 dB 截止频率 Ω_c 时, 可以由图 8.3.3 求出阶数 N 。因为幅度衰减曲线图是对频率关于 Ω_c 归一化的, 所以求阶数时要用到归一化频率 $\lambda (\lambda = \Omega/\Omega_c)$ 。下面通过例题说明求阶数 N 的方法。

例 8.3.1 巴特沃斯低通滤波器的技术指标:

通带边界频率 $f_p=400$ Hz, 通带最小衰减 $a_p=0.5$ dB

阻带截止频率 $f_s=1000$ Hz, 阻带最小衰减 $a_s=40$ dB

3 dB 截止频率 $f_c=500$ Hz

求满足指标的最小阶数 N 。

解 (1) 为了利用图 8.3.3 求出阶数 N , 先求出归一化边界频率的值:

归一化通带边界频率

$$\lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_c} = \frac{400}{500} = 0.8$$

归一化阻带边界频率

$$\lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c} = \frac{1000}{500} = 2$$

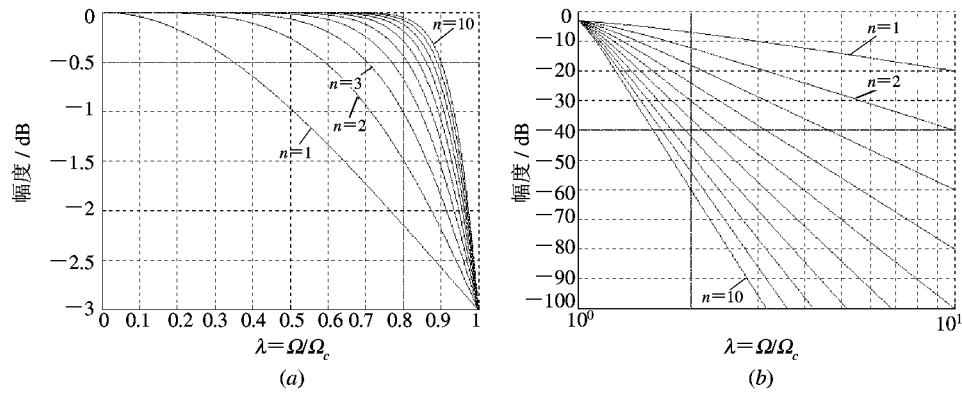


图 8.3.3 巴特沃斯归一化低通滤波器的幅度衰减 dB 曲线

(a) 通带衰减曲线; (b) 阻带衰减曲线

(2) 图 8.3.3(a)中画两条直线：① 频率 $\lambda = \lambda_p = 0.8$ ，② 衰减 $a = -a_p = -0.5$ dB，交点位于 $n=4$ 和 $n=5$ 的幅度曲线之间，即要求阶数 N_1 满足 $4 < N_1 < 5$ ，所以应取 $N_1 = 5$ 。

(3) 图 8.3.3(b)中画两条直线：① 频率 $\lambda = \lambda_s = 2$ ，② 衰减 $a = -a_s = -40$ dB，交点位于 $n=6$ 和 $n=7$ 的幅度曲线之间，即要求 $6 < N_2 < 7$ ，所以应取 $N_2 = 7$ 。

(4) 取 $N = \max[N_1, N_2] = 7$ 。在后面的例 8.3.2 中会看到用公式计算的结果与此相同。

调用 MATLAB 工具箱函数计算阶数更容易。程序及计算结果如下：

```
%pexample831.m
wp= 2 * pi * 400; ws=2 * pi * 1000;
rp=0.5; rs=40;
[N,wc]=buttord(wp, ws, rp, rs, 's') %求阶数 N 和 3 dB 截止频率 wc
```

运行结果：N=7，同时(根据式(8.3.13))计算出 3 dB 截止频率 $wc = 3.2544e + 003 \text{ rad/s}$ 。函数 buttord 见后面介绍。

求得 N 后，由(8.3.8)和(8.3.9)式均可求得 Ω_c ：

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1a_p} - 1}} \quad (8.3.12)$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1a_s} - 1}} \quad (8.3.13)$$

用(8.3.12)和(8.3.13)式所求的 Ω_c 均满足指标要求,只是用(8.3.12)式求 Ω_c 时,通带指标刚好满足要求,阻带指标有富余量;用(8.3.13)式求 Ω_c 时,阻带指标刚好满足要求,通带指标有富余量。实际设计时根据工程需求灵活选择。MATLAB 信号处理工具箱函数 buttord 按式(8.3.13)计算 Ω_c 。

现在设计巴特沃斯低通滤波器的条件完全具备。下面归纳具体设计步骤,并举例说明设计过程。

2) 巴特沃斯低通滤波器的设计步骤

(1) 根据技术指标求出滤波器阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c ;

(2) 求系统函数 $H_a(s)$ 。可以用下面两种方法:

(a) 查表法: ① 查表 8.3.1 得到 N 阶巴特沃斯归一化低通滤波器参数,代入(8.3.10)式或(8.3.11)式写出巴特沃斯归一化低通滤波器系统函数 $G(p)$; ② 去归一化得到 3 dB 截止频率为 Ω_c 的低通滤波器系统函数:

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=s/\Omega_c} \tag{8.3.14}$$

(b) 直接计算极点法: ① 将 N 和 Ω_c 代入(8.3.8)式求出极点 S_k ; ② 将 S_k 代入(8.3.7)式求出系统函数 $H_a(s)$ 。

例 8.3.2 设计巴特沃斯低通滤波器,技术指标与例 8.3.1 相同(但不给出 Ω_c)。

解 (1) 求阶数 N 和 3 dB 截止频率 Ω_c , 因为

$$\begin{aligned} \lambda_{ps} &= \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{400}{1000} = 0.4 \\ k_{ps} &= \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.05} - 1}{10^4 - 1}} = 0.0035 \\ N &= \frac{\lg k_{ps}}{\lg \lambda_{ps}} = \frac{\lg 0.0035}{\lg 0.4} = 6.1737 \end{aligned}$$

所以取 $N=7$ 。

按(8.3.19)式计算 3 dB 截止频率 Ω_c

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = \frac{2\pi \times 1000}{\sqrt[14]{10^4 - 1}} = 3.2544 \times 10^3$$

(2) 求系统函数。查表 8.3.1 得到($N=7$):

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940

所以

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{p^7 + b_6 p^6 + b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \\ H_a(s) &= G(p) \Big|_{p=s/\Omega_c} \\ &= \frac{b}{s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^5 + a_0} \end{aligned} \tag{8.3.15}$$

其中， $b=3.8662\times10^{24}$ ；分母多项式系数如下表：

a_7	a_6	a_5	a_4
1	1.4625×10^4	1.069×10^8	5.0294×10^{11}
a_3	a_2	a_1	a_0
1.6368×10^{15}	1.6368×10^{15}	5.3388×10^{21}	3.8662×10^{24}

由此例可见，阶数较高时，计算量很大，而且数据范围也很大，所以，实际工作中，根据技术指标，直接调用 MATLAB 语言信号处理工具箱函数 buttord 和 butter 设计巴特沃斯滤波器。

建立了巴特沃斯滤波器的设计概念和设计过程与设计公式后，我们介绍 MATLAB 语言信号处理工具箱函数 buttord 和 butter。在滤波器设计实验中也要用它们直接设计 IIRDF。

MATLAB 工具箱函数 buttord、butter 就是根据上述原理和设计公式，来设计巴特沃斯模拟和数字滤波器的。该函数的功能和调用格式说明如下：

buttord：

功能：计算巴特沃斯模拟和数字滤波器的阶数 N 和 3 dB 截止频率 ω_c 。

调用格式：

- (1) $[N, \omega_c]=\text{buttord}(\omega_p, \omega_s, R_p, A_s)$
- (2) $[N, \omega_c]=\text{buttord}(\omega_p, \omega_s, R_p, A_s, 's')$

说明：

(1)为数字域格式，返回数字滤波器阶数 N 和 3 dB 截止频率 ω_c 。调用参数 ω_p 和 ω_s 分别为通带边界频率和阻带边界频率的归一化值，要求 $0\leq\omega_p\leq1, 0\leq\omega_s\leq1$ ，1 表示数字频率 π (对应模拟频率 $f_s/2$)。 R_p 和 A_s 分别为通带和阻带衰减(dB)。当 $\omega_s\leq\omega_p$ 时，为高通滤波器；当 ω_p 和 ω_s 为二元矢量时，为带通或带阻滤波器，这时 ω_c 也是二元向量。N 和 ω_c 作为 butter 函数的调用参数。

(2)为模拟域格式， ω_p 、 ω_s 和 ω_c 可以是实际模拟频率(Hz，rad/s)。其他同格式(1)。

butter：

功能：设计巴特沃斯模拟和数字滤波器。

调用格式：

- (1) $[B,A]=\text{butter}(N,\omega_c,'ftype')$
- (2) $[B,A]=\text{butter}(N,\omega_c,'ftype', 's')$

说明：

(1)为数字域格式，返回数字滤波器系统函数的分子和分母多项式系数向量 B 和 A。调用参数 N 和 ω_c 分别为巴特沃斯数字滤波器的阶数和 3 dB 截止频率的归一化值(关于 π 归一化)，一般为函数 buttord 的返回结果。由 B 和 A 可以写出系统函数 $H(z)$ ：

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{B(1)+B(2)z^{-1}+\cdots+B(N)z^{-(N-1)}+B(N+1)z^{-N}}{A(1)+A(2)z^{-1}+\cdots+A(N)z^{-(N-1)}+A(N+1)z^{-N}} \tag{8.3.16}$$

式中， $B(k)$ 和 $A(k)$ 分别为向量 B 和 A 的第 k 个元素。

(2)为模拟域格式,返回模拟滤波器系统函数的分子和分母多项式系数向量 B 和 A。调用参数 N 和 wc 分别为巴特沃斯模拟滤波器的阶数和 3 dB 截止频率。由返回的系数向量 B 和 A 写出系统函数 $H_a(s)$ 为

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(1)s^N + B(2)s^{N-1} + \cdots + B(N)s + B(N+1)}{A(1)s^N + A(2)s^{N-1} + \cdots + A(N)s + A(N+1)} \quad (8.3.17)$$

由于仅由 wc 不能区别高通和低通,也不能区分带通和带阻,所以用参数 ftype 来区分。

Ftype=high 时,设计出 3 dB 截止频率为 wc 的高通滤波器。缺省 ftype,设计出低通。

Ftype=stop 时,设计出 3 dB 截止频率为 wc 的带阻滤波器,此时 wc 为二元向量 [wcl, wcu]。缺省 ftype,设计出带通滤波器。通带为频率区间 [wcl, wcu]。应当注意, butter 设计的带通和带阻滤波器是 2N 阶的。

求解例 8.3.2 的设计程序 example832.m 如下:

```
%example832.m
wp= 2 * pi * 400; ws=2 * pi * 1000;
rp=0.5; rs=40;
[N,wc]=buttord(wp, ws, rp, rs, 's')    %求阶数 N 和 3 dB 截止频率 wc
[B,A]=butter(N, wc, 's')               %求系统函数
```

运行结果:

```
N=7
B=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3.8662×1024]
A=[1, 1.4625×104, 1.0695×108, 5.0294×1011, 1.6368×1015,
    1.6368×1015, 5.3388×1021, 3.8662×1024]
```

根据(8.3.17)式,由系数向量 B 和 A 写出的系统函数与计算所得式(8.3.15)相同。其中 $b=B(8)$, $a_k=A(7-k+1)$, $k=0, 1, \cdots, 7$ 。读者试在程序 example832.m 之后加入计算幅频特性函数和绘图语句,画出滤波器的幅度衰减曲线,验证设计结果是否满足设计指标。

8.3.3 切比雪夫滤波器的设计

由于巴特沃斯滤波器的幅频特性是单调下降的,因此在通带或阻带边界频率点满足指标时,在通带或阻带内其余频率处指标有较大的富余量。所以,如果能将误差指标均匀地分布在整个通带和阻带上,则必定会使滤波器阶数大大下降,从而使滤波器性能价格比大大提高。切比雪夫滤波器只能实现在通带内等波纹或在阻带内等波纹;椭圆滤波器通带和阻带内均有等波纹幅频特性,即逼近误差指标能均匀地分布在整个通带和阻带内。所以,对相同的技术指标要求,巴特沃斯滤波器阶数最高,切比雪夫次之,椭圆滤波器阶数最低。当阶数相同时,巴特沃斯滤波器截止特性最平坦,椭圆滤波器截止特性最陡峭(即选择性最好)。

本节介绍切比雪夫 I 型低通滤波器的设计方法,下一节介绍椭圆滤波器的设计方法。但是,切比雪夫滤波器和椭圆滤波器的设计公式的推导证明很复杂^[3],因此,本节仅给出滤波器的设计指标参数,并简要介绍调用 MATLAB 信号处理工具箱函数设计切比雪夫滤波器和椭圆滤波器的方法。

工程实际中一般用 MATLAB 语言信号处理工具箱函数 `cheblord` 和 `cheby1` 求切比雪夫 I 型滤波器的阶数 N 和系统函数的分子分母多项式系数。`cheb2ord` 和 `cheby2` 求切比雪夫 II 型滤波器的阶数 N 和系统函数的分子分母多项式系数。所以，下面先介绍工具箱函数 `cheblord` 和 `cheby1`。

调用格式：

$[N, wp] = \text{cheblord}(\Omega_p, \Omega_s, a_p, a_s, 's');$;

$[B, A] = \text{cheby1}(N, a_p, wp, 'ftype', 's');$;

`cheblord` 的调用参数 Ω_p 和 Ω_s 分别为通带截止频率和阻带截止频率， a_p 和 a_s 分别为通带最大衰减和阻带最小衰减。 $'s'$ 表示设计模拟滤波器(缺省表示设计数字滤波器，这时，通带和阻带边界频率要求是关于 π 归一化的数字频率，取值在 0 到 1 之间，1 对应与数字频率 π rad)。`cheblord` 函数返回滤波器阶数 N 和通带截止频率 wp (实质上 $wp = \Omega_p$)。

工程实际中也可以在模拟滤波器设计手册中查到对各种常用通带波纹的切比雪夫滤波器的幅度衰减曲线，以辅助计算滤波器阶数 N (请查阅文献[3])。

`cheby1` 的调用参数中，`ftype` 表示滤波特性类型，对低通和带通滤波器可以缺省，对高通和带阻滤波器 `ftype` 分别取 `high` 和 `stop`，`s` 表示设计模拟滤波器，缺省则设计数字滤波器(这时，通带和阻带边界频率要求是关于 π 归一化的数字频率，取值在 0 到 1 之间，1 对应与数字频率 π rad)。返回结果($N+1$ 维向量) B 和 A 分别为系统函数 $H_a(s)$ 的分子和分母多项式系数。更详细的功能说明见 `help` 文件。

设计滤波器时，先根据设计指标调用 `cheblord` 求出 $[N, wp]$ ，再以 $[N, wp]$ 作为参数调用 `cheby1`，得到系统函数 $H_a(s)$ 的分子和分母多项式系数向量 B 和 A 。

设计模拟滤波器时，由返回的系数向量 B 和 A 写出系统函数 $H_a(s)$ 为(8.3.17)式。

设计数字滤波器时，由 B 和 A 写出系统函数 $H(z)$ 为(8.3.16)式。

例 8.3.3 设计切比雪夫 I 型低通滤波器。通带截止频率 $f_p = 100$ Hz，通带波纹 $\alpha_p = 1$ dB，阻带截止频率 $f_s = 200$ Hz，阻带最小衰减 $\alpha_s = 60$ dB。试求出系统函数。

解 用 MATLAB 语言信号处理工具箱函数 `cheblord` 和 `cheby1` 设计，程序如下：

```
%exampg33.m 切比雪夫 I 低通滤波器设计
```

```
fp=100; fs=200; rp=1; rs=60;
```

```
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;      %pi=π
```

```
[N,wo]=cheblord(wp, ws, rp, rs, 's');
```

```
[B,A]=cheby1(N, rp, wo, 's');
```

运行结果：

```
N=7
```

```
B=1.0e+018 * [0 0 0 0 0 0 0 1.1871]
```

```
A=[1 580.0156 8.5908e+005 3.5441e+008 2.1158e+011 5.3724e+013 1.3147e+016  
1.1871e+018]
```

将 B 和 A 代入(8.3.17)式，写出系统函数

$$H_a(s) = \frac{1.1871 \times 10^{18}}{a_7 s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad a_k = A(7 - k + 1)$$

所设计的滤波器频率响应特性如图 8.3.4 所示。

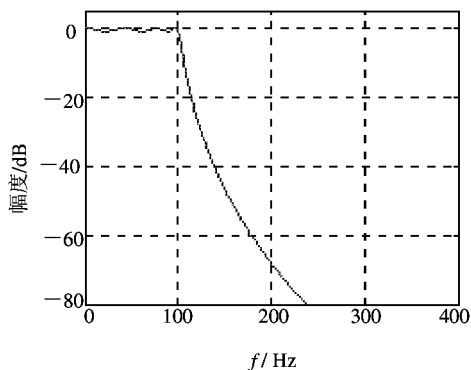


图 8.3.4 七阶切比雪夫 I 型低通滤波器频响特性

例 8.3.4 设计切比雪夫高通滤波器, $f_p = 200$ Hz, $f_s = 100$ Hz, $\alpha_p = 1$ dB, $\alpha_s = 40$ dB。

解 MATLAB 设计程序如下:

```
%examp734.m 切比雪夫 I 高通滤波器设计
```

```
fp=200; fs=100; rp=1; rs=40;
```

```
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;
```

```
[N, wo]=cheblord(wp, ws, rp, rs, 's');
```

```
[B, A]=cheby1(N, rp, wo, 'high', 's');
```

运行结果:

```
N=5
```

```
wo=1.2566e+003
```

```
B=[1 0 0 0 0 0]
```

```
A=[1 5.9394e+003 1.2527e+007 2.7285e+010 1.9020e+013 2.5513e+016]
```

由系数向量 B 和 A 写出系统函数:

$$H_a(s) = \frac{s^5}{s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad a_k = A(5 - k + 1)$$

滤波器幅频特性曲线如图 8.3.5 所示。

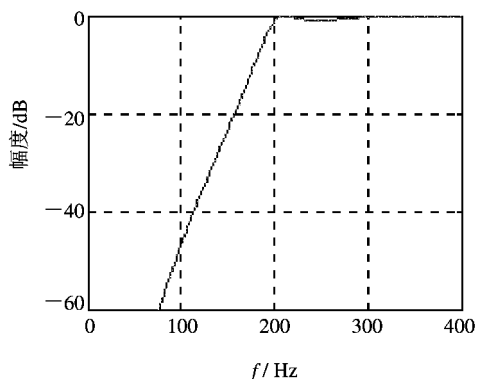


图 8.3.5 五阶切比雪夫高通滤波器幅频特性曲线

8.3.4 椭圆滤波器的设计

如前所述,椭圆滤波器在通带和阻带内都具有等波纹幅频特性,所以该滤波器可以获得对理想滤波特性幅频响应更好的逼近,是一种性能价格比最高的滤波器,应用非常广泛。由于其极点位置与经典场论中的椭圆函数有关,因而由此取名为椭圆滤波器。又因为在1931年考尔(Cauer)首先对这种滤波器进行了理论证明,所以其另一个通用名字为考尔滤波器。

1. 椭圆低通滤波器的设计指标参数

(1) 通带波纹: 通带内极小值相对极大值的衰减分贝值(即通带最大衰减),记为 α_p dB。

(2) 通带截止频率: Ω_p rad/s。

(3) 阻带波纹: 阻带内极大值相对通带极大值的衰减分贝值(即阻带最小衰减),记为 α_s dB。

(4) 阻带截止频率: Ω_s rad/s。

椭圆低通滤波器的阶数就是由上述指标参数确定的。

2. ellipord 和 ellip 介绍

椭圆滤波器的设计过程是先根据设计指标求出阶数 N ,然后再由阶数 N 和通带截止频率 Ω_p 求出系统函数 $H_a(s)$ 。MATLAB信号处理工具箱函数ellipord的功能是计算椭圆滤波器的阶数 N 和通带截止频率 Ω_p ,而ellip的功能是计算椭圆滤波器的系统函数。其调用格式如下:

$[N, wp] = \text{ellipord}(\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s, 's');$

$[B, A] = \text{ellip}(N, \alpha_p, \alpha_s, wp, 'ftype', 's')$

应当注意,程序中不能用希腊字母,编程序时应用英文字母表示调用参数变量,对带通和带阻滤波器,调用参数 Ω_p 和 Ω_s 为2个元素的向量, $\Omega_p = [\Omega_{pl}, \Omega_{ph}]$, $\Omega_s = [\Omega_{sl}, \Omega_{sh}]$, Ω_{pl} 和 Ω_{ph} 分别为通带下截止频率和通带上截止频率, Ω_{sl} 和 Ω_{sh} 分别为阻带下截止频率和阻带上截止频率,其具体含义在下一节介绍。's'表示设计模拟滤波器,缺省时设计数字滤波器,要求通带和阻带截止频率是对 π 归一化的数字频率。ellipord返回参数中, N 为所需最小阶数,wp为通带截止频率。 N 和wp作为函数ellip的调用参数。

Ellip调用参数中,ftype表示滤波器类型,对低通和带通滤波器,该参数缺省;对高通滤波器,ftype=high;对带阻滤波器,ftype=stop。其他调用参数含义与ellipord相同。返回 $N+1$ 个元素的向量B和A分别为滤波器系统函数的分子和分母多项式系数。

例 8.3.5 椭圆滤波器指标如下,分别确定各种指标下的滤波器阶数 N 。

① $f_p = 500$ Hz, $a_p = 1$ dB, $f_s = 600$ Hz, $a_s = 40$ dB;

② $f_p = 500$ Hz, $a_p = 1$ dB, $f_s = 700$ Hz, $a_s = 40$ dB;

③ $f_p = 500$ Hz, $a_p = 1$ dB, $f_s = 600$ Hz, $a_s = 60$ dB;

④ $f_p = 500$ Hz, $a_p = 0.1$ dB, $f_s = 600$ Hz, $a_s = 40$ dB。

解 调用MATLAB函数ellipord,得到:

① $N = 6$, $wp = 3.1416e+003$

- ② $N=5$, $w_p=3.1416e+003$
- ③ $N=7$, $w_p=3.1416e+003$
- ④ $N=7$, $w_p=3.1416e+003$

其中, w_p 为通带截止频率。由此例可以看出, 滤波器阶数与通带波纹、阻带波纹和过渡带宽度都有关系。实际上, 无论是由设计指标求滤波器阶数, 还是求 N 阶椭圆滤波器系统函数, 其运算都相当复杂, 必须借助计算机。

3. 设计举例

例 8.3.6 试设计低通椭圆滤波器, 要求通带截止频率 $f_p=500\text{ Hz}$, 通带波纹 $a_p=1\text{ dB}$, 阻带截止频率 $f_s=700\text{ Hz}$, 阻带波纹 $a_s=40\text{ dB}$ 。

解 设计程序如下:

```
%examp836.m(椭圆滤波器设计举例)
fp=500; rp=1;
fs=700; rs=40;
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;
[N, wn]=ellipord(wp, ws, rp, rs, 's')
[B,A]=ellip(N, rp, rs, wn, 's')
运行结果:
N=5
wp=3.1416e+003
B=1.0e+016 * [ 0      0.0000  -0.0000  0.0000  0.0000  8.0340]
A=[1  2.9009e+003  1.8230e+007  3.5013e+010  8.6771e+013  8.0340e+016]
```

由 B 和 A 写出系统函数:

$$H_a(s) = \frac{8.034 \times 10^{16}}{s^5 + 2.9009 \times 10^3 s^4 + 1.823 \times 10^7 s^3 + 3.5013 \times 10^{10} s^2 + 8.6771 \times 10^{13} s + 8.034 \times 10^{16}}$$

所设计的滤波器幅度和相位特性曲线如图 8.3.6 所示。由图可以看出过渡带宽度比指标要求窄近 100 Hz 。

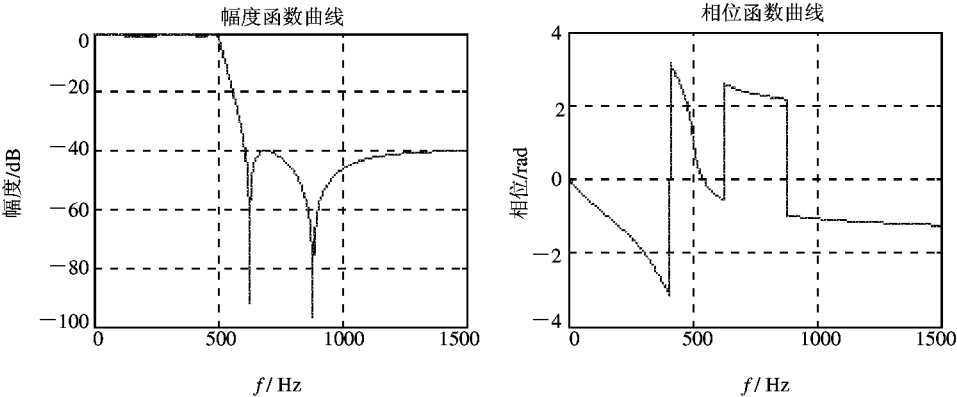


图 8.3.6 五阶低通椭圆滤波器幅度和相位特性曲线(通带波纹为 1 dB)

8.3.5 频率变换与高通、带通、带阻滤波器的设计

先介绍高通、通带、带阻滤波器概念及其指标参数。高通、带通、带阻滤波器的幅频响应曲线及边界频率分别如图 8.3.7、8.3.8 和图 8.3.9 所示。

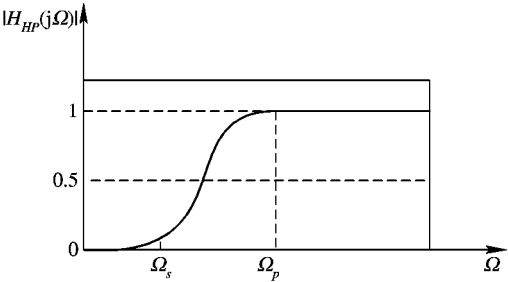


图 8.3.7 高通滤波器

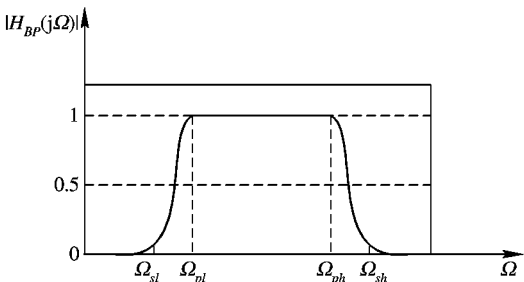


图 8.3.8 带通滤波器

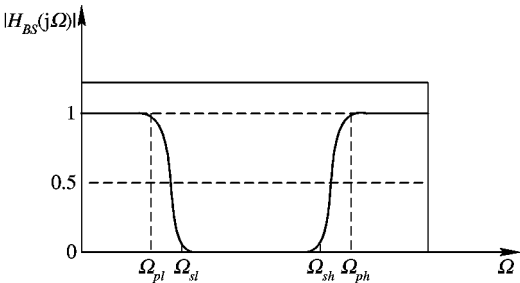


图 8.3.9 带阻滤波器

高通、带通、带阻滤波器的通带最大衰减和阻带最小衰减仍分别用 α_p 和 α_s 表示。对带通和带阻滤波器， Ω_{pl} 和 Ω_{ph} 分别称为通带下截止频率和通带上截止频率， Ω_{sl} 和 Ω_{sh} 分别称为阻带下截止频率和阻带上截止频率。

从原理上讲，通过频率变换公式，可以将模拟滤波器归一化低通原型系统函数变换成所要求的低通、高通、带通和带阻滤波器系统函数。在模拟滤波器设计手册中，各种经典滤波器的设计公式都是针对低通滤波器的，并提供低通原型到其他各种滤波器的转换公式。所以，设计高通、带通和带阻滤波器的一般过程是：① 先将设计指标转换为相应的低通滤波器指标；② 套用低通滤波器设计公式得到相应的归一化低通原型系统函数 $G(p)$ ；③ 对 $G(p)$ 进行频率变换，得到满足设计要求的滤波器系统函数 $H_a(s)$ 。设计过程中涉及的频率变换公式和指标转换公式较复杂，其推导更为复杂。幸好一些资深工程师们已经开发出根据设计指标直接设计高通、带通和带阻滤波器的 CAD 程序函数，只要根据设计指标直接调用 CAD 程序，就可以得到高通、带通和带阻滤波器系统函数。前面所提到的 MATLAB 信号处理工具箱函数：butter, cheby1, cheby2 和 ellip，都有这样的功能。

本节先简要介绍模拟滤波器的频率变换公式，再举例说明调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 bytter, cheby1, cheby2 和 ellip 直接设计高通、带通和带阻滤波器的方法。对那些繁杂的设计公式推导不做叙述，有兴趣的读者请参阅相关书籍。

用 $H_L(s)$ 表示低通模拟滤波器的系统函数，其 3 dB 截止频率为 Ω_p ，例如

$$H_L(s) = \frac{\Omega_p}{s + \Omega_p} \quad (8.3.18)$$

1. 低通到高通的频率变换

只要将 $H_L(s)$ 中的每个 s 用 $\Omega_p \Omega_{ph} / s$ 替换, 就将 $H_L(s)$ 转换为通带截止频率为 Ω_{ph} 的高通滤波器系统函数 $H_H(s)$, 即

$$H_H(s) = H_L\left(\frac{\Omega_p \Omega_{ph}}{s}\right) \quad (8.3.19)$$

2. 低通到带通的频率变换

只要将 $H_L(s)$ 中的每个 s 用

$$\Omega_p \frac{s^2 + \Omega_{pl} \Omega_{ph}}{s(\Omega_{ph} - \Omega_{pl})}$$

替换, 就将 $H_L(s)$ 转换为带通滤波器系统函数 $H_{BP}(s)$, Ω_{pl} 和 Ω_{ph} 分别为带通滤波器的通带下截止频率和通带上截止频率, 即

$$H_{BP}(s) = H_L(\Omega_p) \frac{s^2 + \Omega_{pl} \Omega_{ph}}{s(\Omega_{ph} - \Omega_{pl})} \quad (8.3.20)$$

3. 低通到带阻的频率变换

$$H_{BS}(s) = H_L(\Omega_p) \frac{s(\Omega_{ph} - \Omega_{pl})}{s^2 + \Omega_{pl} \Omega_{ph}} \quad (8.3.21)$$

$H_{BS}(s)$ 表示带阻滤波器系统函数, Ω_{pl} 和 Ω_{ph} 分别为带阻滤波器的通带下截止频率和通带上截止频率。

由式(8.3.20)和(8.3.21)可见, 低通到带通和低通到带阻的频率变换公式较复杂, 而且变换后阶数是原低通滤波器的两倍。所以对高阶滤波器手算设计是困难的。实际中一般借助计算机, 调用 CAD 设计程序直接设计高通、带通和带阻滤波器。下面举例说明这种设计方法。

例 8.3.7 试设计高通椭圆滤波器, 要求通带截止频率 $f_p = 200$ Hz, 通带波纹 $\alpha_p = 1$ dB, 阻带截止频率 $f_s = 100$ Hz, 阻带波纹 $\alpha_s = 40$ dB。

解 MATLAB 设计程序如下:

```
%examp737.m
fp=200; rp=1;
fs=100; rs=40;
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;
[N,wn]=ellipord(wp, ws, rp, rs, 's') %计算阶数 N 和通带截至频率 wn
[B,A]=ellip(N,rp,rs,wn,'high','s') %计算滤波器系统函数的分子和分母多项式系数向量 B 和 A
f=0:400; w=2 * pi * f; %以下程序段计算频响函数, 并绘制频响曲线图
H=freqs(B,A,w); %计算频率响应, freqs 见实验七说明
subplot(2,2,1);
plot(f, 20 * log10(abs(H)))
axis([0,400,-80,0]);
xlabel('f/Hz'); ylabel('幅度/dB');
```

grid on

程序运行结果：

N=4

wn=1.2566e+003 rad/s

B=[0.8913 -2.0210e-011 6.5658e+005 -1.0507e-005 6.9046e+010]

A=[1 2.7957e+003 6.6170e+006 5.1588e+009 6.9030e+012]

由 B 和 A 写出系统函数为

$$H_a(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s^5 + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^5 + a_0}$$

式中

$$b_k = B(5 - k + 1), \quad a_k = A(5 - k + 1)$$

程序 7~13 行用于计算所设计的滤波器频率响应函数并绘制幅频响应曲线，所设计的高通滤波器幅频特性曲线如图 8.3.10 所示。

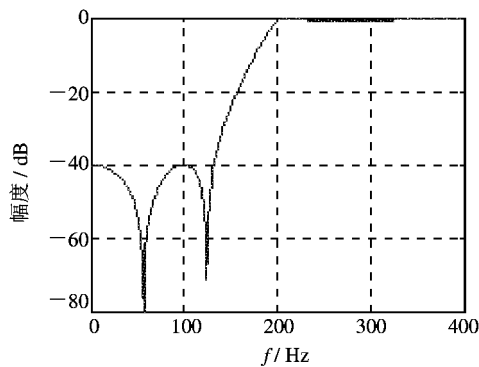


图 8.3.10 四阶椭圆高通滤波器幅频特性曲线

由图可见，通带和阻带衰减满足要求，过渡带宽度比指标要求窄 20 多赫兹。这是因为按公式计算的阶数一般为小数，取整数后实际阶数 N 值一般比指标要求的阶数大，所以设计结果使技术指标有富余。

例 8.3.8 试设计带通椭圆滤波器，要求通带下截止频率 $f_{pl}=2$ kHz，通带上截止频率 $f_{ph}=5$ kHz，通带波纹 $a_p=1$ dB，阻带下截止频率 $f_{sl}=1.5$ kHz，阻带上截止频率 $f_{sh}=5.5$ kHz，阻带波纹 $a_s=40$ dB。

解 MATLAB 设计程序如下(省去绘图部分)：

```
%examp738.m
fp=[2000,5000]; rp=1;
fs=[1500, 5500]; rs=40;
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;
[N,wn]=ellipord(wp,ws,rp,rs,'s')
[B,A]=ellip(N,rp,rs,wn,'s')
```

程序运行结果：

N=5

wn=1.0e+004 * [1.2566 3.1416]

```
B=[0 885.5052 -4.3778e-008 2.8722e+012 -45.9019 2.5387e+021
6.8105e+009 4.4765e+029 2.1007e+018 2.1509e+037 3.3061e+025]
A=[1 1.7406e+004 2.6302e+009 3.5049e+013 2.4353e+018 2.2795e+022
9.6143e+026 5.4625e+030 1.6183e+035 4.2279e+038 9.5896e+042]
```

由运行结果可见，带通滤波器系统函数的分子和分母多项式系数向量 B 和 A 都有 11 个元素，即带通滤波器系统函数的分子和分母是 s 的 10 次多项式。所以计算出 N 后，设计得到的带通滤波器是 $2N$ 阶的。实质上所求阶数 N 是相应的低通滤波器的阶数，参阅模拟滤波器设计中低通到带通的频率变换公式可知，N 阶低通变换成带通就是 $2N$ 阶。其物理解释是带通滤波器由一个 N 阶低通滤波器和一个 N 阶高通滤波器级联实现的，所以是 $2N$ 阶。

带通滤波器幅频特性曲线如图 8.3.11 所示。

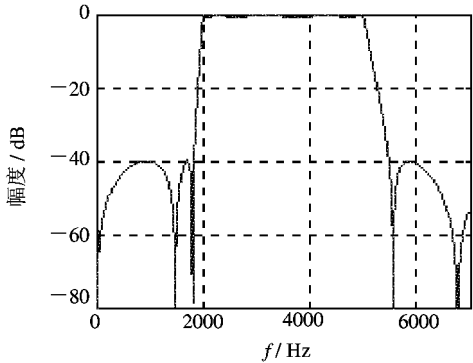


图 8.3.11 带通滤波器幅频特性曲线

例 8.3.9 试设计带阻椭圆滤波器，要求通带频段为 $[0, 1\text{kHz}]$ 和 $[6\text{kHz}, \infty]$ ，通带波纹 $a_p=1\text{ dB}$ ；阻带频段为 $[2\text{kHz}, 5\text{kHz}]$ ，阻带波纹 $a_s=40\text{ dB}$ 。

解 只要将例 8.3.8 程序最后一行加入滤波器类型 'stop' (当然，滤波器技术指标要根据本例要求赋值)，即可得到设计带阻椭圆滤波器的 MATLAB 设计程序如下(省去绘图部分)：

```
%examp739.m
fs=[2000,5000]; rs=40;
fp=[1000,6000]; rp=1;
wp=2 * pi * fp; ws=2 * pi * fs;
[N,wn]=ellipord(wp,ws,rp,rs,'s')
[B,A]=ellip(N,rp,rs,wn,'stop','s')
```

程序运行结果：

```
N=5
wn=1.0e+004 * [1.0472 3.7699]
B=[1 2.1007e-011 2.6837e+009 0.0671 2.5115e+018 6.4563e+007
9.9148e+026 1.2601e+016 1.6512e+035 6.9005e+023 9.5896e+042]
A=[1 9.3357e+004 5.6159e+009 3.0962e+014 8.0796e+018 2.8046e+023
3.1897e+027 4.8256e+031 3.4554e+035 2.2677e+039 9.5896e+042]
```

幅频响应和相频响应曲线如图 8.3.12 所示。

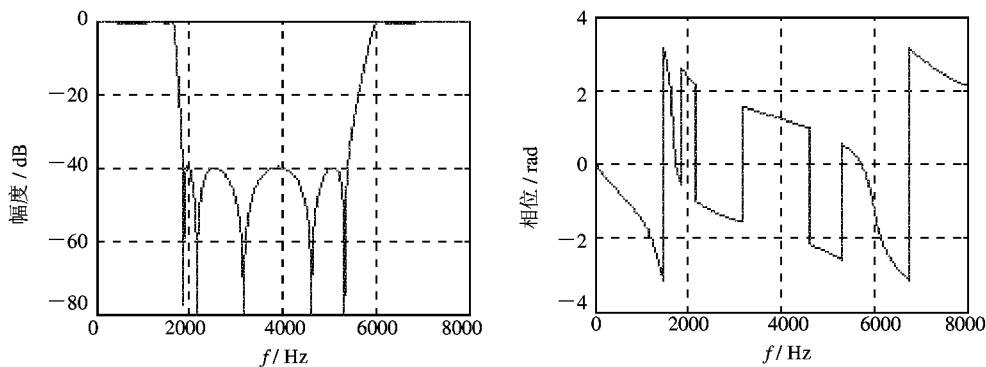


图 8.3.12 椭圆带阻滤波器频率响应曲线

8.4 IIR 数字滤波器的设计

如前所述, IIR 数字滤波器的设计方法有间接设计法和直接设计法。间接设计法有两种: 脉冲响应不变法和双线性变换法。本节重点介绍这两种设计方法, 并分析设计效果。

间接设计法的基本步骤如下:

- (1) 将数字滤波器设计指标转换为相应的模拟滤波器指标;
- (2) 设计相应的模拟滤波器, 得到模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$;
- (3) 将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

其中第(2)步前面已详细讲述过, 第(1)、(3)步与选择的转换方法有关。本节介绍两种常用的转换方法(脉冲响应不变法和双线性变换法), 并证明它们各有特点, 而且都满足以下转换要求。

对转换方法的要求:

- (1) 因果稳定的模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 仍因果稳定;
- (2) 数字滤波器的频率响应特性近似模拟 $H_a(s)$ 的片断常数频率响应特性。

8.4.1 用脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器

脉冲响应不变法实际上是模拟滤波器离散化(将模拟滤波器转换成数字滤波器)的一种方法。这种转换方法的基本思想是波形逼近, 使离散化后的数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 最逼近模拟滤波器单位冲激响应 $h_a(t)$ 。

设模拟滤波器系统函数为 $H_a(s)$, 单位冲激响应为 $h_a(t)$ 。

$$H_a(s) = \text{LT}[h_a(t)]$$

LT[·]表示拉氏变换。用脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$, 为了使离散化后的数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 最逼近模拟滤波器单位冲激响应 $h_a(t)$, 取 $h(n)$ 等于 $h_a(t)$ 的等间隔采样, 即

$$h(n) = h_a(nT)$$

$$H(z) = \text{ZT}[h(n)]$$

这样就可以将模拟滤波器 $H_a(s)$ 离散化, 得到数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。但是, 模拟滤波

器都是在频域设计, 设计结果是系统函数 $H_a(s)$, 所以下面根据上述设计思想, 推导出用脉冲响应不变法直接从 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 的公式。推导思路如图 8.4.1 所示。

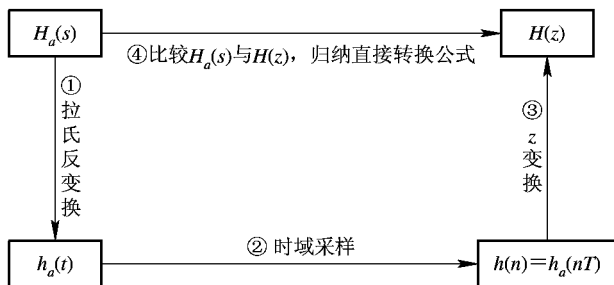


图 8.4.1 用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$ 的推导思路

为了简化推导, 设模拟滤波器 $H_a(s)$ 只有单阶极点 $s_k (k=1, 2, \dots, N)$, 且分母多项式阶次高于分子多项式阶次, 则 $H_a(s)$ 可以用如下部分分式表示:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (8.4.1)$$

(1) 对 $H_a(s)$ 拉氏逆变换, 求得单位冲激响应 $h_a(t)$:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (8.4.2)$$

(2) 对 $h_a(t)$ 采样得到数字滤波器单位脉冲响应 $h(n)$:

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT) \quad (8.4.3)$$

(3) 对 $h(n)$ 进行 Z 变换得到数字滤波器系统函数 $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (8.4.4)$$

(4) 对比(8.4.1)和(8.4.4)式可知, 用脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 的公式与方法是先按(8.4.1)式将 $H_a(s)$ 部分分式展开, 再按(8.4.4)式得到数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。由如上转换公式可以看出, 脉冲响应不变法将 s 平面的极点 s_k 映射到 z 平面的映像极点为 $z_k = e^{s_k T}$ 。对 $H_a(s)$ 有多阶极点以及分子阶次高于分母阶次的复杂情况, 其设计公式推导较为复杂, 请有兴趣的读者参考文献[2]或其他教材。

下面分析脉冲响应不变法的转换性能。

由以上分析得出 s 平面到 z 平面的极点映射关系: $z_k = e^{s_k T}$ 。可以证明^[1], 用脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 时, 整个 s 平面到 z 平面的映射关系为

$$z = e^{sT} \quad (8.4.5)$$

设 $s = \sigma + j\Omega$, $z = re^{j\omega}$, 则

$$re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

所以

$$r = e^{\sigma T} \quad (8.4.6)$$

$$\omega = \Omega T \quad (8.4.7)$$

(8.4.7)式表明, 数字频率与模拟频率之间是线性关系, 这是脉冲响应不变法的优点之一。

由(8.4.6)式可知,

$\sigma=0$ 时, $r=1$, s 平面的虚轴映射为 z 平面的单位圆;

$\sigma<0$ 时, $r<1$, s 平面的左半映射为 z 平面的单位圆内;

$\sigma>0$ 时, $r>1$, s 平面的右半映射为 z 平面的单位圆外。

我们知道, 模拟系统因果稳定的条件是所有极点位于左半平面, 数字系统因果稳定的条件是所有极点位于单位圆内, 所以如果模拟滤波器因果稳定, 则用脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 仍然因果稳定。

根据时域采样理论可以得到数字滤波器频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 与模拟滤波器频率响应函数 $H_a(j\Omega)$ 的关系。因为 $h(n)=h_a(nT)$, 所以

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad (8.4.8)$$

代入 $\omega=\Omega T$, 得到:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j \frac{\omega - 2\pi k}{T}\right) \quad (8.4.9)$$

(8.4.8)和(8.4.9)式说明数字滤波器频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓函数。所以, 如果模拟滤波器具有带限特性, 而且 T 满足采样定理, 则数字滤波器频率响应完全模仿了模拟滤波器频率响应(因子 $1/T$ 除外, 工程实际中可以去掉)。这是脉冲响应不变法的最大优点。但是, 有限阶数的模拟滤波器不是带限的, 实际上总是存在频谱混叠失真, 如图 8.4.2 所示。

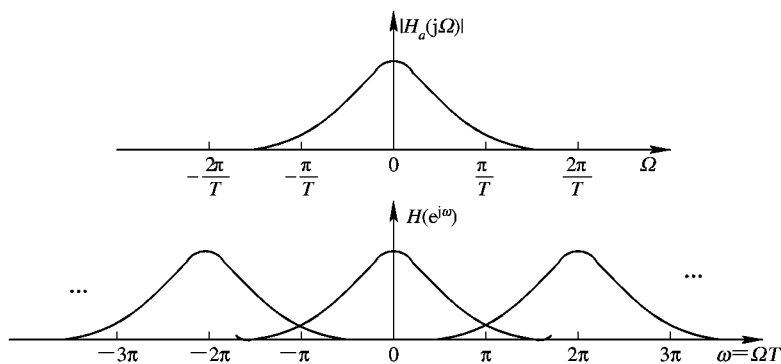


图 8.4.2 脉冲响应不变法的频谱混叠失真示意图

由图 8.4.2 可见, 频谱混叠失真会使数字滤波器在 $\omega=\pi$ 附近的频率响应偏离模拟滤波器频响特性曲线, 混叠严重时使数字滤波器不满足阻带衰减指标。所以, 脉冲响应不变法不适合设计高通和带阻滤波器。

为了减少频谱混叠失真, 通常采取以下措施:

- (1) 选用具有锐截止特性的模拟滤波器;
- (2) 提高采样频率($1/T$);
- (3) 采用双线性变换法(此法可彻底消除频谱混叠失真)。

由(8.4.9)式可见, 数字滤波器的频率响应增益与模拟滤波器频响增益相差常数因子

$1/T$, 因此, 数字滤波器的频率响应增益随 T 变化, 特别是 T 很小时增益很大, 容易造成溢出, 所以, 工程实际中采用以下实用公式:

$$h(n) = Th_a(nT)$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (8.4.10)$$

这时

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j \frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

数字滤波器的频率响应增益与模拟滤波器频响增益相同, 符合实际应用要求。

与工程实现相关的另一个问题是, (8.4.10)式中的 A_k 和 s_k 大多为复数, 所以, 直接画出的并联型结构中要用复数乘法器, 这是希望避免的情况。但是, 一般 $h(t)$ (或 $h(n)$) 是实函数, A_k 和 s_k 除了实数外, 均呈复共轭对出现, 这时只要将 (8.4.10) 式中 A_k 为复共轭对 (此时, s_k 必为共轭对) 的项两两通分合并, 则得到只有实系数的二阶分式之和构成的 $H(z)$, 对应的实现结构便是由无复数乘法器的二阶并联支路构成的并联结构。

例 8.4.1 二阶巴特沃斯低通模拟滤波器系统函数如下式:

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

试用脉冲响应不变法将其转换成数字滤波器 $H(z)$, 并对采样周期 T 取不同值, 观察频谱混叠失真现象。

解 采用待定系数法将 $H_a(s)$ 部分分式展开:

$H_a(s)$ 极点为

$$s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j), s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) = s_1^*$$

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2}$$

$$= \frac{(A_1 + A_2)s - (A_1 s_2 + A_2 s_1)}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

比较分子分母系数, 得到关于待定系数 A_1 和 A_2 的方程组:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -(A_1 s_2 + A_2 s_1) = 1 \end{cases}$$

代入 s_1 和 s_2 的值求解, 得到:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}j, \quad A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}j$$

按 (8.4.4) 式得到数字滤波器系统函数:

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - e^{s_1 T} z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - e^{s_2 T} z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}j}{2 - 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)T} z^{-1}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}j}{2 - 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)T} z^{-1}} = \frac{bz^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

其中

$$b = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}T/2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right)$$

$$a_1 = -2e^{\sqrt{2}T/2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right)$$

$$a_2 = e^{\sqrt{2}T}$$

T 分别取 0.2 s、0.1 s、0.05 s 时, 模拟滤波器和数字滤波器的幅频特性曲线如图 8.4.3 所示。采样周期 T 越小, 频谱混叠失真越小。

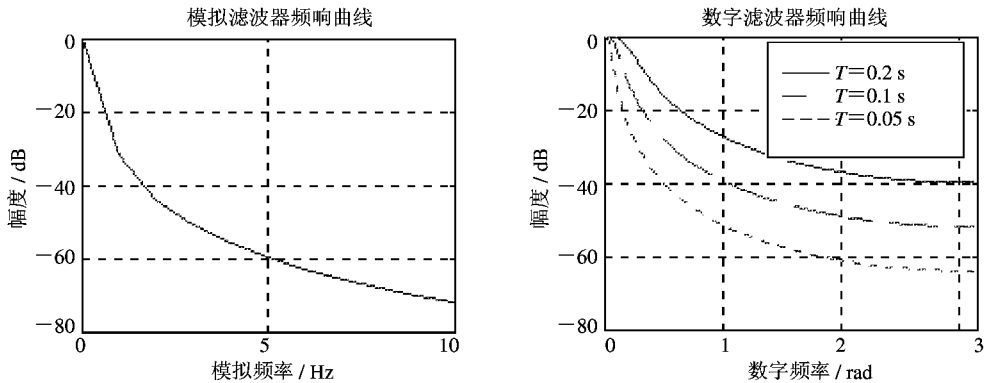


图 8.4.3 模拟与数字滤波器频率响应比较

例 8.4.2 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器, 要求通带和阻带具有单调下降特性, 指标参数如下:

$$\omega_p = 0.2 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.35 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

解 根据间接设计法的基本步骤求解:

(1) 将数字滤波器设计指标转换为相应的模拟滤波器指标。设采样周期为 T , 则

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.2 \pi}{T} \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.3 \pi}{T} \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

(2) 设计相应的模拟滤波器, 得到模拟系统函数 $H_a(s)$ 。根据单调下降要求, 选择巴特沃斯滤波器。取 $T=1$ s, 则

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.2 \pi}{T} = 0.2 \pi \text{ rad/s}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.3 \pi}{T} = 0.35 \pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda_{ps} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{0.2 \pi}{0.35 \pi} = 0.5714,$$

$$k_{ps} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.1696$$

代入(8.3.11)式, 得到阶数 N :

$$N = \frac{\lg k_{ps}}{\lg \lambda_{ps}} = \frac{\lg 0.1696}{\lg 0.5714} = 3.1703$$

取 $N=4$ 。由 (8.3.13) 式求出 3 dB 截止频率：

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.8355$$

查表得到四阶巴特沃斯归一化低通原型：

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{p^4 + 2.6131p^3 + 3.4142p^2 + 2.6131p + 1} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{p - p_k} \end{aligned}$$

其中

$$A_1 = 0.3536 + j0.3536$$

$$A_2 = 0.3536 - j0.3536$$

$$A_3 = -0.8536 + j0.8536$$

$$A_4 = -0.8536 - j0.8536$$

$$p_1 = -0.3827 + j0.9239$$

$$p_2 = -0.3827 - j0.9239$$

$$p_3 = -0.9239 + j0.3827$$

$$p_4 = -0.9239 - j0.3827$$

去归一化：

$$\begin{aligned} H_a(s) &= G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_c A_k}{s - \Omega_c p_k} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{s - s_k} \quad s_k = \Omega_c p_k, \quad B_k = \Omega_c A_k \end{aligned}$$

(3) 将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$ ：

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}} \\ &= \frac{0.0456z^{-1} + 0.1027z^{-2} + 0.0154z^{-3}}{1 - 1.9184z^{-1} + 1.6546z^{-2} - 0.6853z^{-3} + 0.1127z^{-4}} \end{aligned}$$

如果取 $T=0.1$ s，可得到同样的设计结果。这说明当给定数字滤波器指标时，采样周期的取值不影响频谱混叠程度（见后面解释）。用 $T=1$ s 和 $T=0.1$ s 设计的模拟滤波器和数字滤波器幅频特性曲线如图 8.4.4 所示。图中数字滤波器基本满足指标要求，但是，由于频谱混叠失真，使数字滤波器在 $\omega=\pi$ 附近衰减明显小于模拟滤波器在 $f=f_s/2$ 附近的衰减。

应当说明，本例对简单滤波器的设计计算相当麻烦，设计高阶滤波器的计算就更加复杂，上面的结果实质上是调用 MATLAB 信号处理工具箱函数来计算的。

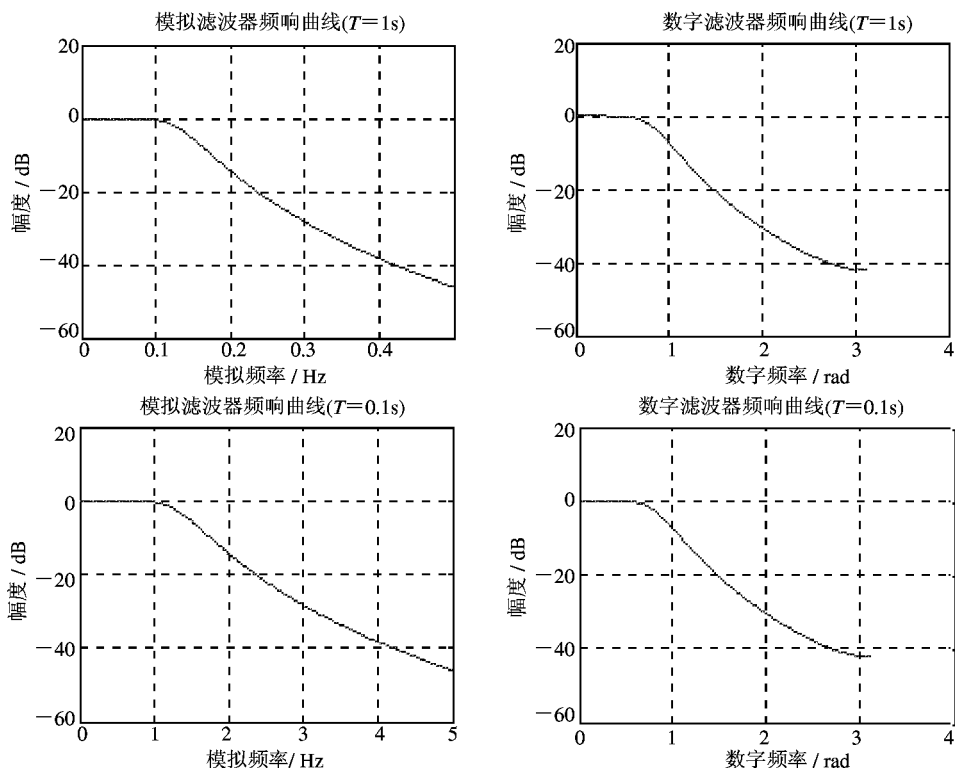


图 8.4.4 四阶模拟、数字滤波器幅频特性曲线

8.4.2 用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器

脉冲响应不变法的最大缺点是存在频率混叠失真。由图 8.4.2 容易看出，当 $|\Omega| \geq \pi/T$ 时，如果 $|H_a(j\Omega)| \neq 0$ ，则产生频谱混叠。所以，对有限阶的模拟滤波器，都会产生不同程度的频谱混叠。这种混叠是因为数字滤波器频响函数是相应的模拟滤波器频响函数的周期延拓形成的，延拓周期为 $2\pi/T$ 。为了消除这种混叠影响，我们希望模拟频率与数字频率的映射关系满足如下要求：

s 平面整个虚轴 $\longrightarrow z$ 平面单位圆一周；

$\Omega=0 \longrightarrow \omega=0$

$\Omega: 0 \rightarrow \infty \longrightarrow \omega: 0 \rightarrow \pi$

$\Omega: 0 \rightarrow -\infty \longrightarrow \omega: 0 \rightarrow -\pi$

我们知道， $\tan(\pm\pi/2) = \pm\infty$ ，所以数字频率与模拟频率之间的映射关系为

$$\Omega = K \tan \frac{\omega}{2} \quad (8.4.11)$$

式中， K 为任意正实常数，当 $K=2/T$ 时，具有明确的算法逼近背景(见后面解释)。由 (8.4.11) 式画出 Ω 与 ω 的映射关系曲线如图 8.4.5 所示，满足上述要求。现在只要给定数字滤波器设计指标(例如 $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$)，则按 (8.4.11) 式求出相应的模拟滤波器指标($\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s$)，在 s 域设计过渡模拟滤波器 $H_a(s)$ ，最后再将过渡模拟滤波器映射成 z 域的数

字滤波器 $H(z)$ ，只要 s 与 z 的映射关系对应的频率关系满足(8.4.11)式，则所得数字滤波器必然满足所给设计指标。因此，下面根据(8.4.11)式导出 s 与 z 的映射关系式——“双线性变换式”。

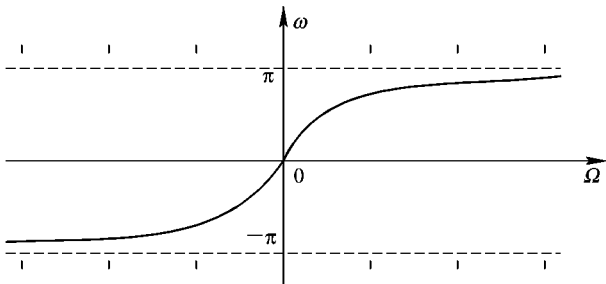


图 8.4.5 Ω 与 ω 的映射关系曲线图

(8.4.11)式两边乘以 j ，得

$$\begin{aligned} j\Omega &= jK \tan \frac{\omega}{2} = Kj \frac{\sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} = K \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} \\ &= K \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

因为我们只希望 s 平面虚轴与 z 平面单位圆满足(8.4.11)式，所以，可以取上式中 $s=j\Omega$ ， $z=e^{j\omega}$ ，则上式变为

$$s = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{8.4.12}$$

(8.4.12)式是 s 与 z 之间的双线性变换映射公式。现在可以方便地将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 映射成数字滤波器系统函数 $H(z)$ ：

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=K \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{8.4.13}$$

1. 双线性变换映射公式的时域解释

设一阶模拟滤波器系统函数为

$$H_a(s) = \frac{b}{s + a}$$

对应的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

对微分方程进行算法逼近，以实现模拟滤波器离散化。对微分方程中各项做如下近似：

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &: \frac{y(n) - y(n-1)}{T}, \quad y(n) = y(nT) \\ y(t) &: \frac{y(n) + y(n-1)}{2} \\ x(t) &: \frac{x(n) + x(n-1)}{2}, \quad x(n) = x(nT) \end{aligned}$$

则微分方程可用下面的差分方程近似：

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{T} + \frac{a[y(n) + y(n-1)]}{2} = \frac{b[x(n) + x(n-1)]}{2}$$

两边取 Z 变换得到近似逼近微分方程的数字滤波器系统函数：

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a} = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

这正是(8.4.12)式中 $K=2/T$ 的映射关系，通常取 $K=2/T$ 就是源于这种算法逼近。由此可见，双线性变换法是一种算法逼近的设计方法，而脉冲响应不变法是一种波形逼近的设计方法。

常数 K 只影响过渡模拟滤波器的设计结果，但是不影响最终数字滤波器的设计结果。为了方便，可取 $K=1$ 。

从上述两种间接设计法可见，设计过程中(双线性变换法中 $K=2/T$ 时)都涉及到采样间隔 T ，那么， T 值大小对设计结果有什么影响？如何选择 T 的值？

如果是单方向将给定的模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ ，则 T 的取值对转换结果有影响，即 T 不同，则 $H(z)$ 不同，频率响应当然也不同。特别是对脉冲响应不变法， T 值越大，会使频谱混叠失真越严重，一般要求 $\pi/T > \Omega_s$ 。

但是，如果给定数字滤波器技术指标，则 T 可以任意选取。这是因为数字滤波器最高频率为 π ，所以， $\omega_s < \pi$ ，对脉冲响应不变法， $\Omega_s = \omega_s/T < \pi/T$ ，只要阻带衰减 α_s 足够大，则频谱混叠失真引起数字滤波器阻带的衰减变化足够小，满足设计指标。而双线性变换法无频谱混叠，所以 T 可以任意选取。

2. 双线性变换法的转换性能

由(8.4.11)式可知，数字频率与模拟频率之间是非线性关系，而且频率越高，非线性越严重。所以，用双线性变换法设计的数字滤波器不能模仿过渡模拟滤波器的频响特性曲线的形状。这就是双线性变换法的最大缺点，因而双线性变换法，仅适用于设计片段常数特性要求的数字滤波器。片段常数特性数字滤波器是应用最广泛的滤波器。正是这种非线性频率映射关系，彻底消除了频谱混叠失真，这就是双线性变换法的最大优点。因此，双线性变换法得到广泛应用。绝大部分间接法设计程序都默认采用双线性变换法，如 MATLAB 信号处理工具箱函数 `butter`、`cheby1` 和 `cheby2` 等用于直接设计巴特沃斯、切比雪夫 I 型和切比雪夫 II 型数字滤波器时，都是采用双线性变换法。

由(8.4.12)式可以求出

$$z = \frac{1 + Ks}{1 - Ks} \quad (8.4.14)$$

将 s 和 z 看成 s 平面和 z 平面的一般复变量

$$s = \sigma + j\Omega, \quad z = re^{j\omega}$$

则(8.4.14)式变成：

$$re^{j\omega} = \frac{1 + K(\sigma + j\Omega)}{1 - K(\sigma + j\Omega)}$$

$$r = \sqrt{\frac{(1 + K\sigma)^2 + (K\Omega)^2}{(1 - K\sigma)^2 + (K\Omega)^2}}$$

由上式可知：

$\sigma=0$ 时, $r=1$, s 平面的虚轴映射为 z 平面的单位圆;

$\sigma<0$ 时, $r<1$, s 平面的左半映射为 z 平面的单位圆内;

$\sigma>0$ 时, $r>1$, s 平面的右半映射为 z 平面的单位圆外。

所以如果模拟滤波器因果稳定, 则用双线性变换法将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ 后仍然因果稳定。

例 8.4.3 用双线性变换法设计一个低通数字滤波器, 要求在通带 $[0, 0.2\pi]$ 内衰减不大于 3 dB, 在阻带 $[0.6\pi, \pi]$ 内衰减不小于 40 dB。而且幅频特性单调下降。

解 仍按间接设计法的设计步骤设计。

(1) 将数字滤波器设计指标转换为相应的模拟滤波器指标。数字滤波器指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.6\pi \text{ rad}, \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

由(8.4.11)式得到相应的模拟滤波器指标($K=1$):

$$\Omega_p = \tan \frac{0.2\pi}{2} = 0.3249 \text{ rad/s}, \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \tan \frac{0.6\pi}{2} = 1.3764 \text{ rad/s}, \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

(2) 设计相应的模拟滤波器, 得到模拟系统函数 $H_a(s)$ 。按题意选择巴特沃斯滤波器:

$$\lambda_{ps} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{0.3249}{1.3764} = 0.2361, \quad k_{ps} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.0100$$

代入(8.3.11)式, 得到阶数 N :

$$N = \frac{\tan k_{ps}}{\tan \lambda_{ps}} = \frac{\lg 0.0100}{\lg 0.2361} = 3.1903$$

取 $N=4$ 。由(8.3.13)式求出 3 dB 截止频率:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.4324$$

查表得到四阶巴特沃斯归一化低通原型:

$$G(p) = \frac{1}{p^4 + 2.6131p^3 + 3.4142p^2 + 2.6131p + 1}$$

去归一化:

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{\Omega_c^4}{s^4 + 2.6131\Omega_c s^3 + 3.4142\Omega_c^2 s^2 + 2.6131\Omega_c^3 s + \Omega_c^4}$$

(3) 将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=K\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{0.0118 + 0.0473z^{-1} + 0.0709z^{-2} + 0.0473z^{-3} + 0.0118z^{-4}}{1 - 1.8778z^{-1} + 1.6214z^{-2} - 0.6630z^{-3} + 0.1087z^{-4}} \end{aligned}$$

实际中, 用双线性变换法设计数字滤波器时, 根据数字滤波器设计指标调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 buttord 和 butter 就可得到 $H(z)$ 的分子、分母多项式系数。下面给出程序(MATLAB 程序为 examp843.m, 其中省去绘图部分):

%examp843.m: 用双线性变换法设计 DF

wp=0.2; ws=0.6; rp=3; rs=40; %DF 指标, 注意 wp 和 ws 是关于 π 归一化的值

`[N,wc]=buttord(wp,ws,rp,rs); %调用 buttord 计算 DF 阶数 N 和 3 dB 截止频率 wc`

`[B,A]=butter(N,wc); %调用 butter 计算 DF 系统函数系数向量 B 和 A`

程序运行结果：

`N=4`

`wc=0.2613`，实际 3 dB 截止频率应为 0.2613π rad

`B=[0.0118 0.0473 0.0709 0.0473 0.0118]`

`A=[1.0000 -1.8778 1.6214 -0.6630 0.1087]`

数字滤波器幅频特性曲线如图 8.4.6 所示。图(a)中， $\omega=\pi$ 附近曲线极为迅速地下降到零，无频谱混叠失真，这正是双线性变换法对模拟频率进行非线性压缩的结果。由图(b)可清楚地看出，阻带指标刚好，通带指标有富余($\omega_c=0.2613\pi$)。

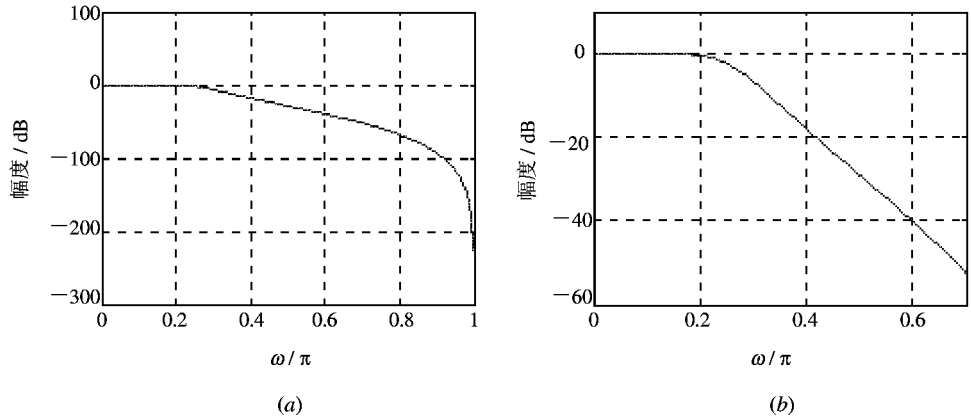


图 8.4.6 四阶巴特沃斯数字滤波器幅频响应曲线

(a) 幅频特性全景图；(b) 边界频率附近幅频特性

例 8.4.4 要求用数字滤波器对模拟信号进行低通滤波处理，等效的模拟低通滤波指标是 $f_p=100$ Hz， $\alpha_p=1$ dB， $f_s=250$ Hz， $\alpha_s=60$ dB，采样周期 $T=1$ ms。试用双线性变换法设计该数字滤波器，要求滤波器阶数最低。

解 由题意选用椭圆滤波器。由于 MATLAB 信号处理工具箱函数 `ellipord` 和 `ellip` 可以直接设计数字椭圆滤波器(默认用双线性变换法)。所以本例先由给定的设计指标确定数字滤波器指标，再调用 `ellipord` 和 `ellip` 求得 $H(z)$ 的分子、分母多项式系数。

根据模拟信号的数字处理系统中，数字滤波器频响函数与等效模拟系统频响函数的关系，求得数字滤波器指标：

$$\begin{aligned}\omega_p &= 2\pi f_p T = 200\pi \times 0.001 \\ &= 0.2\pi \text{ rad}, \alpha_p = 1 \text{ dB} \\ \omega_s &= 2\pi f_s T = 500\pi \times 0.001 \\ &= 0.5\pi \text{ rad}, \alpha_s = 60 \text{ dB}\end{aligned}$$

MATLAB 程序为 `examp844.m`，其中省去绘图部分。

`%examp844.m: 用双线性变换法设计椭圆 DF`

`fp=100; fs=250; Ts=0.001;`

```
wp=2*fp*Ts; ws=2*fs*Ts; rp=1; rs=60; %计算 DF 指标(对 π 归一化)
[N,wc]=ellipord(wp,ws,rp,rs); %调用 ellipord 计算 DF 阶数 N 和 3dB 截止频率 wc
[B,A]=ellip(N,rp,rs,wc); %调用 ellip 计算 DF 系统函数系数向量 B 和 A
程序运行结果:
```

```
N=4
wc=0.2000
B=[0.0059    0.0053    0.0096    0.0053    0.0059]
A=[1.0000   -3.0477    3.8240   -2.2926    0.5523]
```

与例 8.4.3 比较，本例中设计指标提高了很多，但是阶数相同(若用巴特沃斯滤波器，阶数 $N=7$)，这说明椭圆滤波器是一种性能价格比很高的滤波器，因而在工程上得到广泛应用。

由 B 和 A 写出系统函数：

$$H(z) = \frac{0.0059 + 0.0053z^{-1} + 0.0096z^{-2} + 0.0053z^{-3} + 0.0059z^{-4}}{1.0000 - 3.0477z^{-1} + 3.8240z^{-2} - 2.2926z^{-3} + 0.5523z^{-4}}$$

滤波器幅频特性曲线如图 8.4.7 所示。由图可见过渡带指标还有富余。

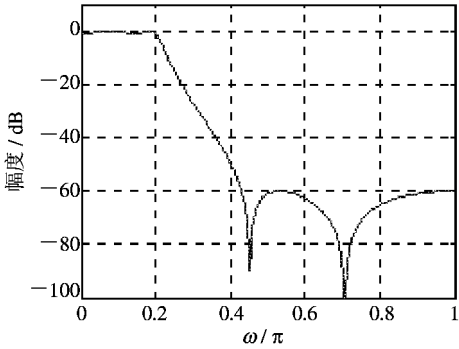


图 8.4.7 四阶椭圆滤波器数字滤波器幅频响应曲线

8.4.3 高通、带通和带阻 IIR 数字滤波器的设计

从原理上讲，用双线性变换法设计高通、带通和带阻 IIR 数字滤波器的设计知识已经具备，下面归纳设计步骤，并举例说明调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 ellipord 和 ellip 直接设计高通、带通和带阻数字椭圆滤波器的方法和程序。

高通、带通和带阻数字滤波器的设计步骤(技术指标以带通滤波器为例)如下：

(1) 确定数字滤波器技术指标：

$$\omega_{pl}, \omega_{pu}, \omega_{sl}, \omega_{su}, \alpha_p, \alpha_s$$

(2) 按双线性变换的非线性关系进行指标转换，得到相应的模拟滤波器技术指标：

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2), \quad \Omega_{pu} = \tan(\omega_{pu}/2), \quad \alpha_p$$
$$\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2), \quad \Omega_{su} = \tan(\omega_{su}/2), \quad \alpha_{sp}$$

(3) 设计相应的模拟滤波器，得到 $H_a(s)$ ，即：

① 将带通指标转换为相应的低通指标，设计低通滤波器得到模拟低通原型 $G(p)$ ；

② 频率变换得到 $H_a(s) = G(p) \big|_{p=\text{Tf}(s)}$ 。

其中, $\text{Tf}(s)$ 表示频率变换公式, (8.3.19)、(8.3.20)、(8.3.21) 式给出了低通到高通、带通和带阻滤波器的频率变换公式。模拟滤波器设计手册也提供从归一化低通原型到各种滤波器的转换公式。带通和带阻滤波器频率变换公式较复杂。

设计带通和带阻模拟滤波器计算相当繁杂, 本书不作详细介绍。

(4) 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$:

$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

(3) 是设计难点, 公式及其推导过程复杂, 计算量大。好在一些专家已经开发并提供以上设计过程的 MATLAB 信号处理工具箱函数, 我们可以简单调用相关的函数程序, 直接设计各种典型的高通、带通和带阻数字滤波器, 而不必考虑中间过程。当然, 对专门研究滤波器设计的学者就必须深入学习掌握设计过程及其理论。例如, 调用 `ellipord` 和 `ellip` 就可以直接设计高通、带通和带阻数字椭圆滤波器。

例 8.4.5 希望对输入模拟信号采样并进行数字高通滤波, 系统采样频率 $F_s = 15 \text{ kHz}$, 要求保留 4.5 kHz 以上的频率成分, 幅度失真小于 1 dB ; 要求滤除直流到 3.4 kHz 的频率成分, 衰减大于 40 dB 。试设计数字高通滤波器。

解 由题目要求知道系统中高通数字滤波器技术指标为

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{F_s} = \frac{2\pi \times 4500}{15000} = 0.6 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1$$

$$\omega_s = \frac{2\pi f_s}{F_s} = \frac{2\pi \times 3400}{15000} = 0.4533 \pi, \quad \alpha_s = 40$$

MALAB 设计程序为 `examp845.m`, 除了第 5 行加入滤波器类型 `'high'` 和指标参数不同外, 程序与例 8.4.4 的程序相同。

`%examp845.m: 用双线性变换法设计椭圆高通 DF`

`fp=4500; %通带截止频率`

`fs=3400; %阻带截止频率`

`Fs=15000; %采样频率`

`wp=2 * fp/Fs; ws=2 * fs/Fs; rp=1; rs=40; %DF 指标(对 π 归一化)`

`[N,wp]=ellipord(wp,ws,rp,rs) %调用 buttord 计算 DF 阶数 N 和 3 dB 截止频率 wc`

`[B,A]=ellip(N,rp,rs,wp,'high'); %调用 butter 计算 DF 系统函数系数向量 B 和 A`

程序运行结果:

`N=4`

`wp=0.6 π rad`

`B=0.0619 -0.1103 0.1521 -0.1103 0.0619`

`A=1.0000 1.5035 1.7320 0.9858 0.3146`

由 B 和 A 写出系统函数:

$$H(z) = \frac{0.0619 - 0.1103z^{-1} + 0.1521z^{-2} - 0.1103z^{-3} + 0.0619z^{-4}}{1 + 1.5035z^{-1} + 1.7320z^{-2} + 0.9858z^{-3} + 0.3146z^{-4}}$$

高通滤波器幅频特性如图 8.4.8 所示。

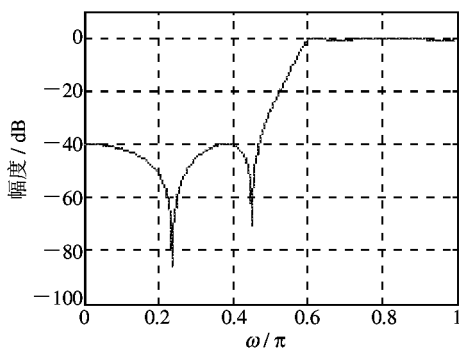


图 8.4.8 四阶椭圆高通数字滤波器的幅频特性曲线

例 8.4.6 某通信系统一个具体带通滤波器要求如下：

采样频率： $F_s = 8$ kHz；

通带：频率为 2025~2225 Hz，最大衰减为 $\alpha_p = 1$ dB；

阻带：频率为 0~1500 Hz, 2700 Hz 以上，最小衰减为 $\alpha_s = 40$ dB。

试设计一个数字滤波器满足以上要求。

解 这是一个用数字滤波器对模拟信号进行带通滤波处理的应用实例(先对模拟信号进行 A/D 变换, 再进行数字带通滤波处理)。首先确定数字滤波器技术指标：

$$\omega_{pl} = \frac{2\pi f_{pl}}{F_s} = \frac{2\pi \times 2025}{8000} = 0.5062 \pi$$

$$\omega_{pu} = \frac{2\pi f_{pu}}{F_s} = \frac{2\pi \times 2225}{8000} = 0.5563 \pi$$

$$\omega_{sl} = \frac{2\pi f_{sl}}{F_s} = \frac{2\pi \times 1500}{8000} = 0.3750 \pi$$

$$\omega_{su} = \frac{2\pi f_{su}}{F_s} = \frac{2\pi \times 2700}{8000} = 0.6750 \pi$$

$$\alpha_p = 1 \text{ dB}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

MALAB 设计程序为 exam846.m, 除了第 3 行中通带截止频率 wp 和阻带截止频率 ws 变成向量及指标参数不同外, 程序与例 8.4.4 的程序相同。

%exam846.m: 用双线性变换法设计椭圆带通 DF

fpl=2025; fpu=2225; fsl=1500; fsu=2700; Fs=8000;

wp=[2 * fpl/Fs, 2 * fpu/Fs]; ws=[2 * fsl/Fs, 2 * fsu/Fs]; rp=1; rs=40; %DF 指标(对 π 归一化)

[N,wpo]=ellipord(wp,ws,rp,rs) %调用 ellipord 计算 DF 阶数 N 和通带截止频率 wp

[B,A]=ellip(N,rp,rs,wpo); %调用 ellip 计算 DF 系统函数系数向量 B 和 A

程序运行结果：

N=3

wpo=0.5062 0.5563

ws=0.3750 0.6750

B=0.0053 0.0020 0.0045 0.0000 -0.0045 -0.0020 -0.0053

由系数向量 B 和 A 可知，系统函数分子分母是 2N 阶多项式：

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5} + a_6 z^{-6}}$$

其中 $b_k = B(k+1)$, $a_k = A(k+1)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

带通数字滤波器幅频响应特性曲线如图 8.4.9 所示。

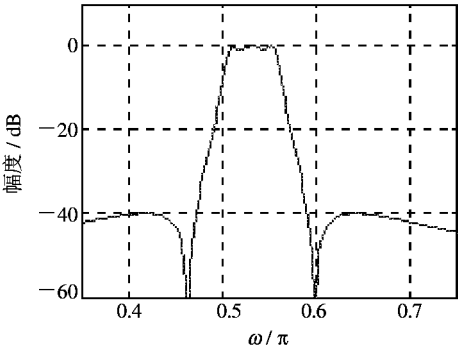


图 8.4.9 六阶带通数字椭圆滤波器幅频响应特性曲线

除了本章所介绍的间接设计方法外，IIR 数字滤波器直接设计方法有零极点累试法、频域幅度平方误差最小 CAD 设计法、时域逼近设计法等。由于篇幅及教学要求所限，本书未介绍这些方法。

间接法和直接法各有特点。间接法可以充分利用模拟滤波器成熟的设计理论和几种优良的典型滤波器，但是滤波器频响特性受到所选模拟滤波器频响特性的限制。而直接法可以设计具有任意幅度响应特性(或任意波形的单位脉冲响应)的数字滤波器。

习题与上机题

1. 简述滤波的基本概念，试举几个例子说明滤波的工程实际应用。
2. 简述数字滤波器与模拟滤波器的异同点和数字滤波器的优点。
3. 简述数字滤波器和模拟滤波器的技术指标描述参数，并归纳各种技术指标参数的计算公式和物理意义。
4. 简述 IIR 数字滤波的设计方法、设计步骤和各种设计方法的优缺点。
5. 设计一个巴特沃斯模拟低通滤波器，要求通带截止频率 $f_p = 6$ kHz，通带最大衰减 $\alpha_p = 3$ dB，阻带截止频率 $f_s = 12$ kHz，阻带最小衰减 $\alpha_s = 25$ dB。求出滤波器系统函数 $H_a(s)$ ，画出其幅频特性和相频特性函数曲线图。
6. 设计一个比雪夫 I 型模拟高通滤波器，要求通带截止频率 $f_p = 12$ kHz，通带最大衰减 $\alpha_p = 1$ dB，阻带截止频率 $f_s = 6$ kHz，阻带最小衰减 $\alpha_s = 40$ dB。求出滤波器系统函数 $H_a(s)$ ，画出其幅频特性和相频特性函数曲线图。

7. 设计椭圆模拟带通滤波器, 设计指标如下:

$$f_{pl} = 20 \text{ kHz}, \quad f_{pu} = 40 \text{ kHz}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$f_{sl} = 10 \text{ kHz}, \quad f_{su} = 50 \text{ kHz}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

求出滤波器系统函数 $H_a(z)$, 画出其幅频特性和相频特性函数曲线图。

8. 设计巴特沃斯模拟带通滤波器, 设计指标与 7 题相同。将设计结果与题 7 比较, 说明巴特沃斯滤波器和椭圆滤波器的优缺点。

9. 设计巴特沃斯数字低通滤波器, 设计指标如下:

$$\omega_p = 0.4 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 0.5 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.6 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 50 \text{ dB}$$

求出滤波器系统函数 $H(z)$, 画出其单位脉冲响应序列、幅频特性和相频特性函数曲线图。要求先手工计算设计(用双线性变换法), 后调用工具箱函数直接设计, 比较设计结果。

10. 设计切比雪夫 I 型数字带阻滤波器, 设计指标如下:

$$\omega_{pl} = 0.25 \pi \text{ rad}, \quad \omega_{pu} = 0.75 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_{sl} = 0.35 \pi \text{ rad}, \quad \omega_{su} = 0.65 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

求出滤波器系统函数 $H(z)$, 画出其单位脉冲响应序列、幅频特性和相频特性函数曲线图。

11. 设计椭圆数字带通滤波器, 设计指标如下:

$$\omega_{pl} = 0.35 \pi \text{ rad}, \quad \omega_{pu} = 0.65 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_{sl} = 0.25 \pi \text{ rad}, \quad \omega_{su} = 0.75 \pi \text{ rad}, \quad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

求出滤波器系统函数 $H(z)$, 画出其单位脉冲响应序列、幅频特性和相频特性函数曲线图。

12. 要求对输入模拟信号采样并进行低通数字滤波, 系统采样频率 $F_s = 15 \text{ kHz}$; 要求保留 4.5 kHz 以下的频率成分, 幅度失真小于 0.1 dB ; 要求滤除 5.5 kHz 以上的频率成分, 衰减大于 40 dB 。试设计数字滤波器。

第九章 FIR 数字滤波器的设计

【本章重点和难点】

- (1) 线性相位滤波器的特点，线性相位结构。
- (2) 用窗函数法设计 FIR 滤波器的方法和步骤，几种典型窗函数(矩形窗、三角形窗、汉宁窗、海明窗和布莱克曼窗)的特点，设计中窗函数的选取。
- (3) 等波纹最佳一致逼近法的基本思想；给定技术指标，利用 MATLAB 信号工具箱设计等波纹最佳滤波器。

有限长单位脉冲响应数字滤波器(简称 FIRDF: Finite Impulse Response Digital Filter)的最大优点是可实现线性相位滤波。而 IIRDF 只能对幅频特性逼近，相频特性存在不同程度的非线性。我们知道，无失真传输与处理的条件是在信号的有效频谱范围内系统幅频响应为常数，相频响应为频率的线性函数(即具有线性相位)。在数字通信和图像传输与处理等应用场合都要求滤波器具有线性相位。另外，FIRDF 是全零点滤波器，硬件和软件实现结构简单，不用考虑稳定性问题。所以，FIRDF 是一种很重要的滤波器，在数字信号处理领域得到广泛应用。当幅频特性指标相同(不考虑相位特性)时，FIRDF 的阶数比 IIRDF 高得多。但是同时考虑线性相位时，IIRDF 要附加复杂的相位校正网络，而且难以实现严格线性相位特性。所以，在要求线性相位滤波的应用场合，一般都用 FIRDF。

到目前为止，FIRDF 的设计方法主要是基于逼近理想频率响应特性的几种方法，有窗函数法、频率采样法和等波纹最佳一致逼近法。本章主要讨论线性相位 FIRDF 及其特点，以及窗函数法和等波纹最佳一致逼近法，侧重于滤波器的设计方法和 CAD 函数的介绍，以培养学生的工程设计能力。

9.1 线性相位 FIR 数字滤波器及其特点

1. 线性相位 FIRDF

设 FIRDF 的单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N ，则其频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (9.1.1)$$

一般将 $H(e^{j\omega})$ 表示成如下形式：

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (9.1.2)$$

式中， $H_g(\omega)$ 称为幅度特性函数，是 ω 的实函数(可以取负值)，与 $|H(e^{j\omega})|$ 不同； $\theta(\omega)$ 称为相位特性函数。

线性相位 $FIRDF$ 的相位特性函数为

$$\theta(\omega) = -\omega\tau$$

τ 是用采样点数表示的常数。

定义系统的群时延为 $\tau(\omega) = -d\theta(\omega)/d\omega$, $\tau(\omega)$ 表示频率为 ω 的正弦序列通过系统后在时域的延迟(样点数)。所以线性相位 $FIRDF$ 的群时延是常数 τ 。即所有不同频率的正弦序列通过线性相位 $FIRDF$ 的时延相同。因此又称线性相位滤波器为恒定群延时滤波器。

2. 线性相位条件对 $FIRDF$ 时域和频域的约束

1) 对 $h(n)$ 的约束

设线性相位 $FIRDF$ 的单位脉冲响应为 $h(n)$, $h(n)$ 长度为 N 。下面推导线性相位条件对 $h(n)$ 的约束。

已知 $\theta(\omega) = -\omega\tau$, 则由(9.1.1)式和(9.1.2)式得到:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= H_g(\omega) e^{-j\omega\tau} \\ \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos\omega n - j \sin\omega n] &= H_g(\omega) [\cos\omega\tau - j \sin\omega\tau] \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

由(9.1.3)式得到:

$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\omega n \\ H_g(\omega) \sin\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\omega n \end{cases} \quad (9.1.4)$$

(9.1.4)式中两式相除,得

$$\frac{\cos\omega\tau}{\sin\omega\tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\omega n}$$

或

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\omega n \sin\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\omega n \cos\omega\tau$$

移项并用三角公式化简,得

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\omega(n-\tau) = 0 \quad (9.1.5)$$

被求和函数 $h(n) \sin\omega(n-\tau)$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称是满足(9.1.5)式的一组解,即要求:

$$\begin{cases} \tau = \frac{N-1}{2}, \theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (9.1.6)$$

由以上推导结论知道,如果要求单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N 的 $FIRDF$ 具有严格线性相位特性,则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点偶对称。当 N 确定时, $FIRDF$ 的相位特性是一个确知的线性函数 $\theta(\omega) = -\omega(N-1)/2$ 。

N 为奇数和偶数时, $h(n)$ 的对称情况分别如图 9.1.1(a)和 9.1.1(b)所示。

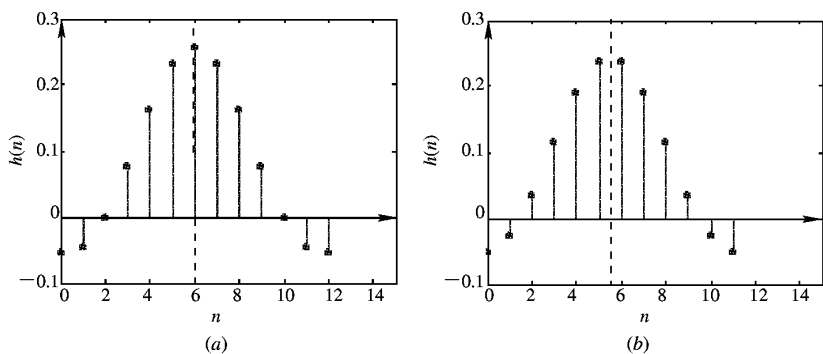


图 9.1.1 线性相位 FIRDF 的 $h(n)$ 的对称情况

(a) $N=13$; (b) $N=12$

2) 对幅度特性 $H_g(\omega)$ 的约束

将时域约束条件 $h(n)=h(N-1-n)$ 代入(9.1.1)式, 而且设 $h(n)$ 为实序列, 即可推导出线性相位条件对 FIRDF 的幅度特性 $H_g(\omega)$ 的约束^[1]. N 取奇数和偶数, 对 $H_g(\omega)$ 的约束不同. 这些推导全是数学推演, 所以略去, 下面只给出结论, 以便指导读者正确设计线性相位 FIRDF.

N 为奇数时, $H_g(\omega)$ 可用下式表示:

$$H_g(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos \omega n \quad (9.1.7)$$

(9.1.7) 式表明 $H_g(\omega)$ 的特点: $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称. 所以, $N=$ 奇数的线性相位 FIRDF 可以实现各种(低通, 高通, 带通, 带阻)滤波特性.

N 为偶数时, $H_g(\omega)$ 可用下式表示:

$$H_g(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos \omega\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (9.1.8)$$

即 $H_g(\omega)$ 的特点是: $H_g(\pi)=0$, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称, 关于 $\omega=0, 2\pi$ 偶对称, 所以, 不能实现高通和带阻滤波特性. 对于 $N=13$ 和 $N=12$ 的低通情况, $H_g(\omega)$ 分别如图 9.1.2 (a) 和 (b) 所示.

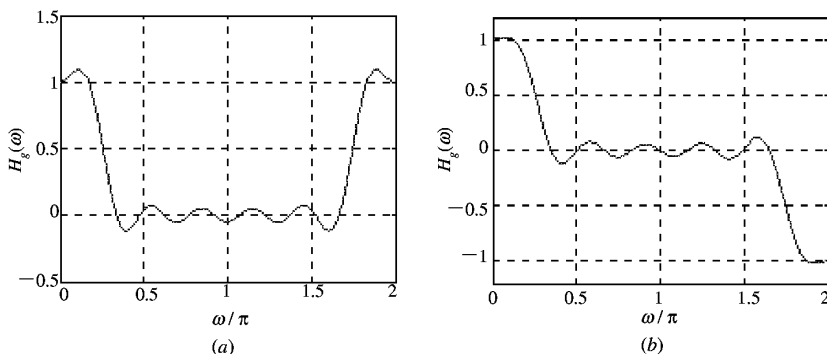


图 9.1.2 线性相位 FIRDF 的幅度特性举例

(a) $N=13$ 时的幅度特性曲线; (b) $N=12$ 时的幅度特性曲线

3. 线性相位 FIRDF 的零点分布特点

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

代入 $h(n)=h(N-1-n)$, 得到:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

即
$$H(z) = z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (9.1.9)$$

由(9.1.9)式可以看出, 如果 z_k 是 $H(z)$ 的零点, 则 z_k^{-1} 也是 $H(z)$ 的零点, 通常 $h(n)$ 是实序列, $H(z)$ 的零点呈复共轭对出现, 因此 z_k^* 和 $(z_k^*)^{-1}$ 也是 $H(z)$ 的零点。所以 $H(z)$ 的零点一般按上述约束关系四个为一组出现, 只要确定其中一个, 其他三个也就随之确定了。对于一些特殊情况, 可具体分析处理。例如, 单位圆上的复数零点以共轭对出现, 单位圆上的实数零点单个出现。线性相位 FIRDF 的零点分布规律如图 9.1.3 所示。

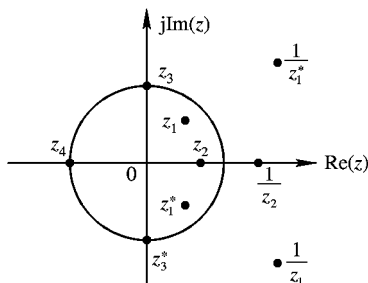


图 9.1.3 线性相位 FIRDF 的零点分布示意图

4. 线性相位网络结构

前面(9.1.6)式说明线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 对 $n=(N-1)/2$ 偶对称, 其中 N 是 $h(n)$ 的长度, 根据这一特点, 可以推导出它的系统函数服从下列式^[1]:

当 N 为偶数时,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-n-1)}] \quad (9.1.10)$$

当 N 为奇数时,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-n-1)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (9.1.11)$$

利用(9.1.10)式画出的网络结构, 相对于 FIR 直接型结构可以节约一半的乘法器, 利用(9.1.11)式画出的网络结构, 相对于 FIR 直接型结构可以节约近一半的乘法器。下面举例说明。设 $N=4$, 代入(9.1.10)式, 得到:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^1 h(n)[z^{-n} + z^{-(3-n)}] \\ &= h(0)[1 + z^{-3}] + h(1)[z^{-1} + z^{-2}] \end{aligned}$$

按照上面公式, 画出网络结构如图 9.1.4(a)所示, 它的直接型网络结构如图 9.1.4(b)所示。比较这两个网络结构, 图 9.1.4(a)要用 3 个加法器、2 个乘法器、3 个单位延时器; 图 9.1.4(b)要用 3 个加法器、4 个乘法器、3 个单位延时器。因此线性相位结构比直接型结构可节约一半的乘法器。如果 $N=5$, 画出线性网络结构和直接型网络如图 9.1.5 所示。在该图中, 线性网络结构用 3 个乘法器, 而直接型网络结构要用 5 个乘法器, 节约了近一半的乘法器。

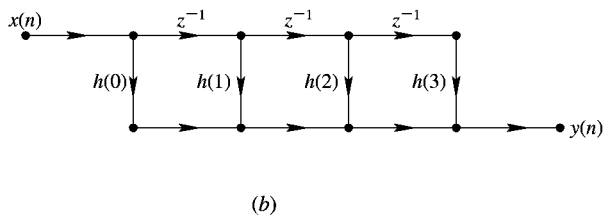
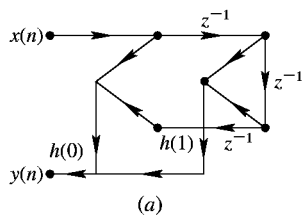


图 9.1.4 $N=4$ 时的线性相位结构

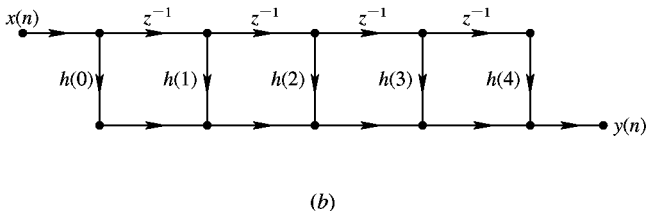
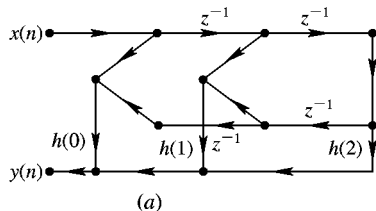


图 9.1.5 $N=5$ 时的线性相位结构

9.2 用窗函数法设计 FIR 数字滤波器

窗函数设计法的基本思想是用 FIRDF 近似实现希望逼近的滤波特性。设希望逼近的滤波器频率响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，则其单位脉冲响应 $h_d(n)$ 为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

为了设计简单方便，通常选择 $H_d(e^{j\omega})$ 为具有片段常数特性的理想滤波器，因此， $h_d(n)$ 是无限长非因果序列，不能直接作为 FIRDF 的单位脉冲响应。下面以低通滤波器为例，介绍窗函数设计法的基本设计过程、设计性能分析和各种常用窗函数。

9.2.1 基本方法

1. 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$

一般选择线性相位理想低通滤波器，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.2.1)$$

2. 求出 $h_d(n)$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)} \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

3. 加窗得到 FIRDF 单位脉冲响应 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (9.2.3)$$

(9.2.3) 式中， $w(n)$ 为窗函数， $w(n)$ 长度为 N 。如果要求设计线性相位 FIRDF，则要求

$h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 点偶对称, 而 $h_d(n)$ 关于 $n=\tau$ 点偶对称, 所以要求 $\tau=(N-1)/2$, 且 $w(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 点偶对称。后面会看到, 各种常用窗函数都满足这种要求。

$H_d(e^{j\omega})$ 为理想低通, 用矩形窗函数 $w_R(n)=R_N(n)$ 时, 设计过程中的时域波形如图 9.2.1 所示。

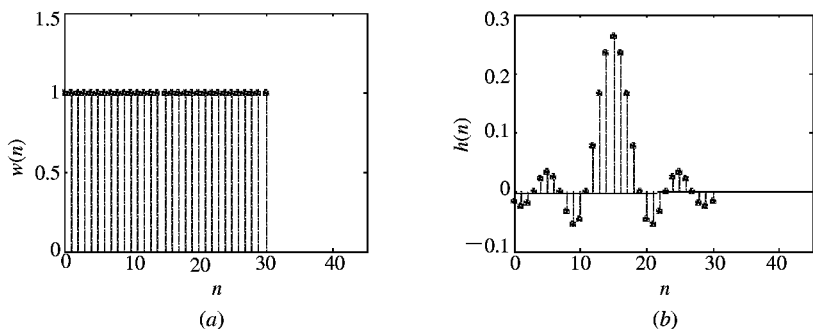


图 9.2.1 窗函数法设计过程中的时域波形

(a) 矩形窗波形; (b) $h_d(n)w(n)$ 波形

如果 $H(e^{j\omega})=\text{FT}[h(n)]$ 满足设计指标, 则由 (9.2.3) 式所得 $h(n)$ 就作为设计结果。可以由 $h(n)$ 画出硬件实现结构, 或编写程序(用时域卷积或快速卷积)实现滤波。但是 $H(e^{j\omega})$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 的误差有多大? 误差与哪些因素有关? 下面就讨论该问题。

9.2.2 窗函数法的设计性能分析

由 (9.2.3) 式可知, 逼近误差与窗函数 $w(n)$ 直接相关。所以逼近误差实质上就是加窗的影响。

设 $w(n)$ 为矩形窗函数, 用 $w_R(n)$ 表示,

$$w_R(n) = R_N(n)$$

因为 $h(n)=h_d(n)w_R(n)$, 所以

$$H(e^{j\omega}) = \text{FT}[h(n)] = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) \quad (9.2.4)$$

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \text{FT}[w_R(n)] = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \\ &= W_{Rg}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad \tau = \frac{N-1}{2} \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

其中

$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (9.2.6)$$

$W_{Rg}(\omega)$ 为矩形窗函数的幅度特性函数, 如图 9.2.2(b) 所示。我们将 $\omega=0$ 左右两个零点之间的部分称为主瓣, 主瓣宽度为 $4\pi/N$, 其余震荡部分称为旁瓣, 每个旁瓣宽度均为 $2\pi/N$ 。将 $H_d(e^{j\omega})$ 也表示成幅度函数与相位因子的乘积:

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad \tau = \frac{N-1}{2} \quad (9.2.7)$$

将 (9.2.5) 式和 (9.2.7) 式代入 (9.2.4) 式, 得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\tau} W_{Rg}(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\tau} d\theta \\
&= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \\
&= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} H_{dg}(\omega) * W_{Rg}(\omega) \\
&= e^{j\theta(\omega)} H_g(\omega) \\
&\left. \begin{aligned} H_g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} H_{dg}(\omega) * W_{Rg}(\omega) \\ \theta(\omega) &= \frac{-\omega(N-1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.8)
\end{aligned}$$

以上推导结果说明， $H_g(\omega)$ 等于希望逼近的滤波器幅度特性函数 $H_{dg}(\omega)$ 与窗函数的幅度特性函数 $W_{Rg}(\omega)$ 的卷积，而相位特性保持严格线性相位。所以，只需要分析幅度逼近误差就可以了。当 $H_{dg}(\omega)$ 为理想低通滤波器时， $H_{dg}(\omega)$ 、 $W_{Rg}(\omega)$ 和 $H_g(\omega)$ 以及卷积过程的波形如图 9.2.2 所示。

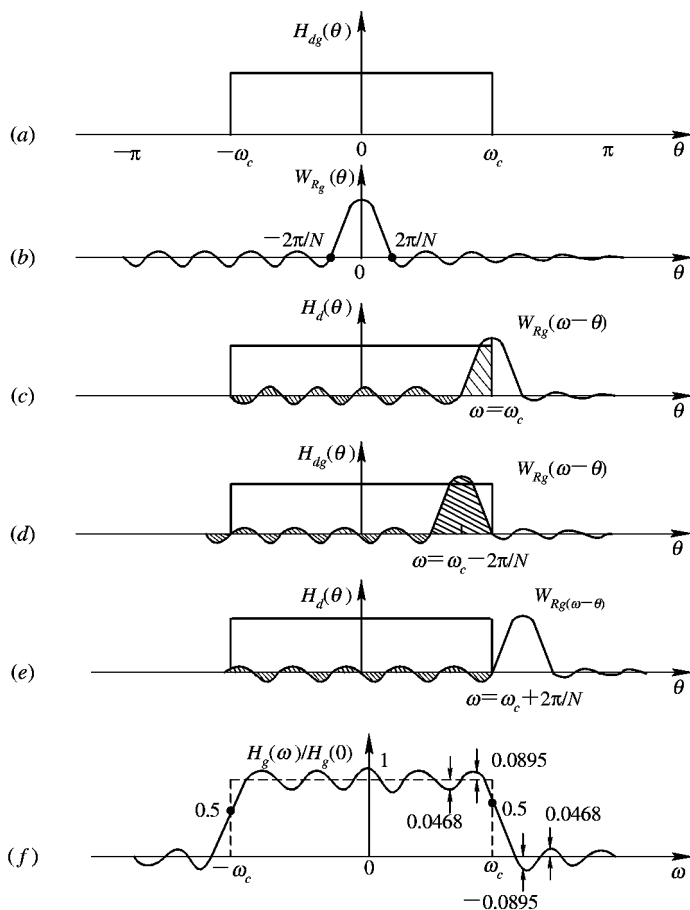


图 9.2.2 矩形窗加窗影响

当 $\omega_c = \pi/4$, $N=31$ 时, 对 $|H_g(\omega)|$ 以 dB 表示的幅频特性如图 9.2.3 所示。

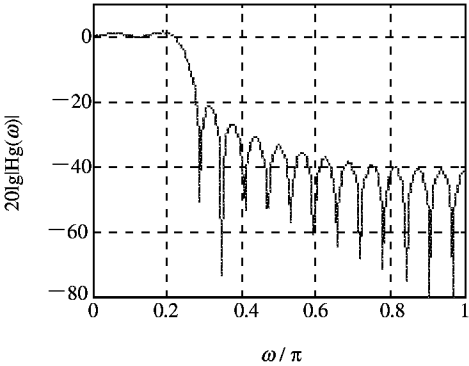


图 9.2.3 用矩形窗设计的 FIRDF 的幅频特性

由图 9.2.2 和图 9.2.3 可知, 加矩形窗引起的幅度误差有以下两点:

- (1) 理想低通滤波器过渡带宽度为零, 但是 $H_g(\omega)$ 在 $\omega = \omega_c$ 附近形成过渡带, 过渡带宽度近似等于 $W_{Rg}(\omega)$ 的主瓣宽度, 记为 $\Delta B = 4\pi/N$ 。
- (2) 理想低通滤波器通带和阻带幅度恒定, 而 $H_g(\omega)$ 在通带和阻带均有波动。这些波动是由 $W_{Rg}(\omega)$ 的旁瓣引起的, 旁瓣幅度越大, 波动就越大。

以上两点误差是由加窗截断引起的, 所以称为加窗效应。显然, 加窗效应与窗函数形状(类型)及长度 N 有关。一般设计指标对过渡带宽度和通带最大衰减以及阻带最小衰减提出了要求, 所以对有些类型的窗函数, 加窗效应可能使设计的滤波器不满足指标要求。由图 9.2.3 可见, 用矩形窗函数设计的 FIRDF 的阻带最小衰减只有 21 dB, 过渡带宽度为 $4\pi/N$, 阻带最小衰减不满足一般工程实际滤波要求。因此, 研究各种典型的窗函数是窗函数设计法的重要内容。下面会看到时域波形较平滑的窗函数的幅度特性函数的的主瓣所包含的能量较多, 旁瓣较小, 但是窗函数长度固定时其主瓣宽度也较宽, 所以加窗后使 $H_g(\omega)$ 通带和阻带的波动较小(即通带最大衰减较小, 阻带最小衰减较大), 但是(窗函数长度 N 固定时)其过渡带宽度也较宽。因此说, 在窗函数设计法中, 通带和阻带的波动的改善是以加宽过渡带为代价的。下面分别介绍几种典型的窗函数及其幅度特性, 并给出用这些窗函数设计的 FIRDF 的性能指标, 以便指导选择窗函数类型和长度。

9.2.3 典型窗函数

由于设计过程中只用到窗函数的时域表达式, 因此下面对每种窗函数给出时域表达式、时域波形、幅度特性函数(衰减 dB)曲线, 以及用各种窗函数设计的 FIRDF 的单位脉冲响应和幅度特性函数(衰减以 dB 计量)曲线。为了叙述简单, 我们把这组波形图简称为“四种波形”。(注: 下面均以低通为例, $H_d(e^{j\omega})$ 取理想低通, $\omega_c = \pi/2$, 窗函数长度 $N=31$ 。)

1. 矩形窗(Rectangle Window)

$$w_R(n) = R_N(n)$$

前面(9.2.6)式已经求得

$$\begin{aligned}
 W_R(e^{j\omega}) &= \text{FT}[w_R(n)] = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2} \\
 &= W_{Rg}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad \tau = \frac{N-1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{9.2.9}$$

矩形窗的四种波形如图 9.2.4 所示。

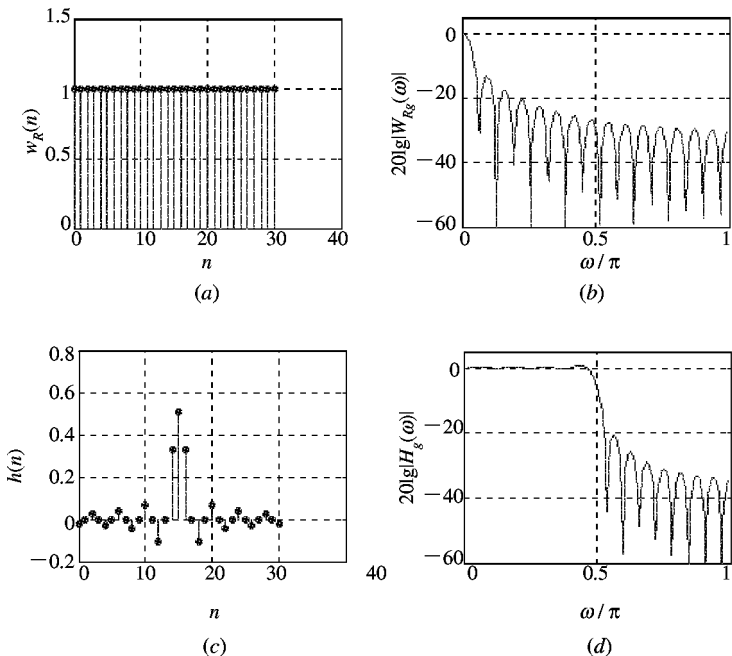


图 9.2.4 矩形窗的四种波形

为了描述方便，定义窗函数的几个参数名词如下：

旁瓣峰值 α_n ：窗函数的幅频函数 $|W_g(\omega)|$ 的最大旁瓣的最大值相对主瓣最大值的衰减
值(dB)；

过渡带宽度 ΔB ：用该窗函数设计的 FIRDF 的过渡带宽度；

阻带最小衰减 α_s ：用该窗函数设计的 FIRDF 的阻带最小衰减。

图 9.2.4 说明矩形窗的参数如下：

$$\alpha_n = -13 \text{ dB}$$

$$\Delta B = \frac{4\pi}{N}$$

$$\alpha_s = -21 \text{ dB}$$

$N=21, 31, 63$ 时，矩形窗函数的幅频特性分别如图 9.2.5(a)、(b)、(c)所示。由该图可以看出主瓣宽度与 N 成反比，即滤波器过渡带宽度与 N 成反比(后面将看到，不同类型的窗函数，它们的比例常数也不同)，但是旁瓣峰值并不随 N 增大而变化，所以要改善阻带衰减特性，必须选择其他类型(形状)的窗函数。这就是我们选择窗函数类型和长度的依据，而且这一结论对各种窗函数都成立。

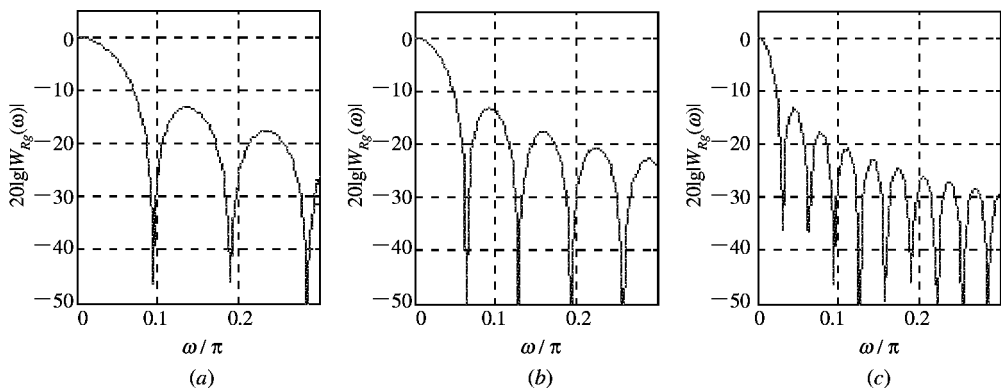


图 9.2.5 窗函数长度 N 对幅度特性的影响(矩形窗)

2. 三角窗(Bartlett Window)

$$w_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \end{cases} \quad (9.2.10)$$

$$W_B(e^{j\omega}) = \text{FT}[w_B(n)] = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N/4)}{\sin(\omega/2)} \right]^2 e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (9.2.11)$$

$$W_{B_g}(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N/4)}{\sin(\omega/2)} \right]^2 \quad (9.2.12)$$

三角窗的四种波形如图 9.2.6 所示, 参数如下:

$$\alpha_n = -25 \text{ dB}, \Delta B = \frac{8\pi}{N}, \alpha_s = -25 \text{ dB}$$

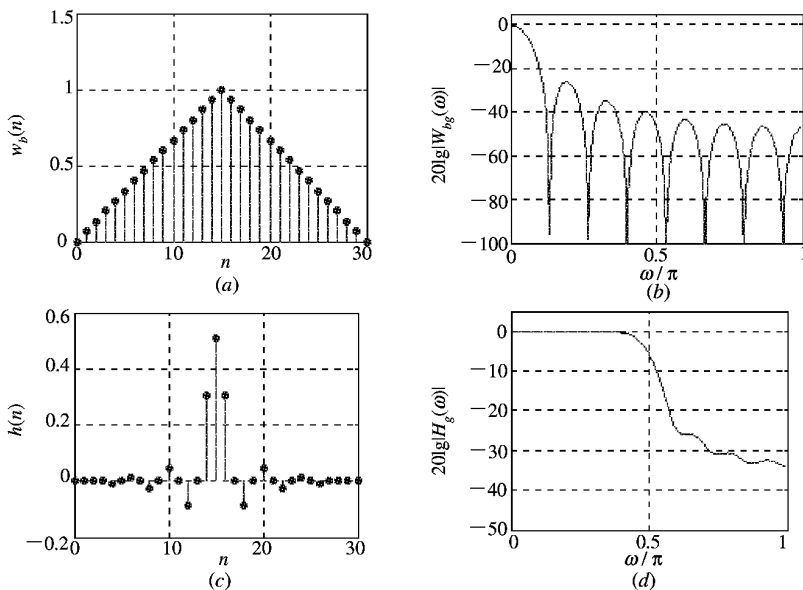


图 9.2.6 三角窗的四种波形

3. 升余弦窗(汉宁窗, hanning window)

$$w_{hm}(n) = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (9.2.13)$$

汉宁窗的四种波形如图 9.2.7 所示, 参数如下:

$$\alpha_n = -31 \text{ dB}, \Delta B = \frac{8\pi}{N}, \alpha_s = -44 \text{ dB}$$

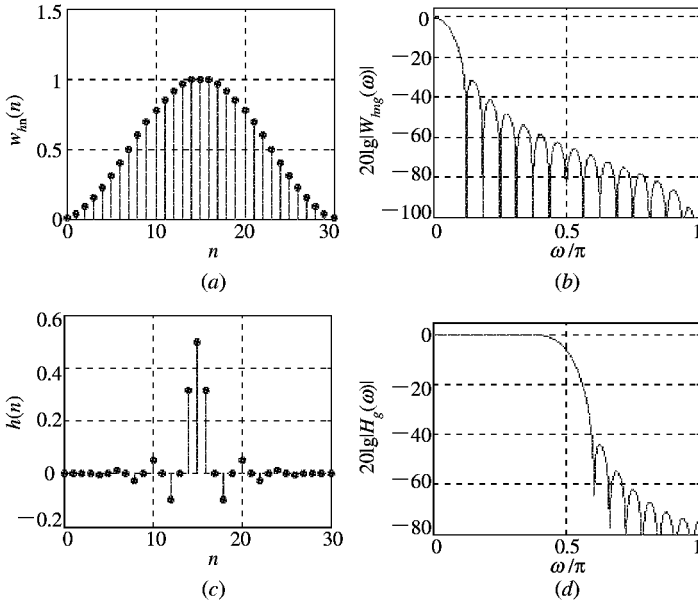


图 9.2.7 汉宁窗的四种波形

4. 改进升余弦窗(海明窗, hamming window)

$$w_{hm}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (9.2.14)$$

海明窗的四种波形如图 9.2.8 所示, 参数如下:

$$\alpha_n = -41 \text{ dB}, \Delta B = \frac{8\pi}{N}, \alpha_s = -53 \text{ dB}$$

由上述知道, 三角窗、汉宁窗和海明窗的过渡带宽度相同, 但是海明窗的阻带衰减最大 (53 dB), 所以一般都选择海明窗, MATLAB 的窗函数设计函数 `firl` 默认使用海明窗。

5. 布莱克曼窗(blackman window)

$$w_{hk}(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (9.2.15)$$

布莱克曼窗的四种波形如图 9.2.9 所示, 参数如下:

$$\alpha_n = -57 \text{ dB}, \Delta B = \frac{12}{N}, \alpha_s = -74 \text{ dB}$$

布莱克曼窗阻带衰减比海明窗大 21 dB, 但过渡带宽度增加 $4\pi/N$ 。

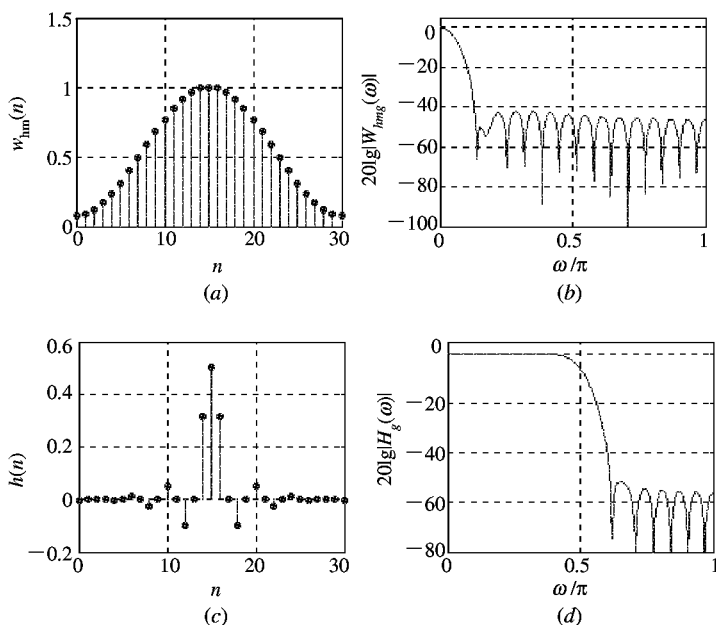


图 9.2.8 海明窗的四种波形

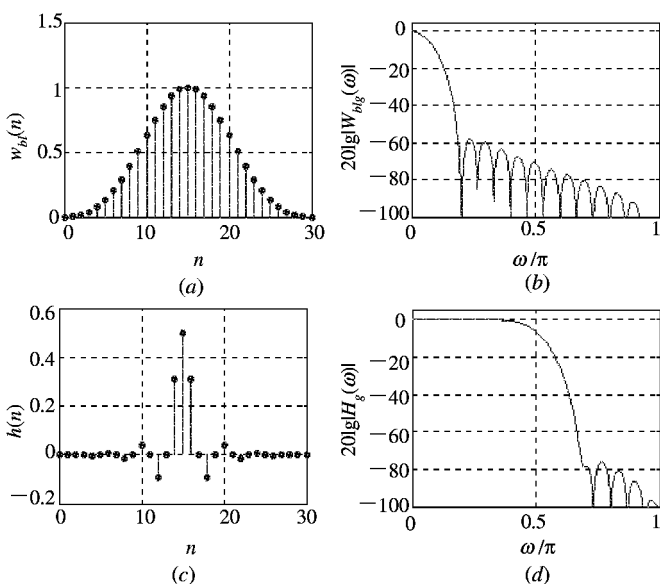


图 9.2.9 布莱克曼窗的四种波形

为了便于比较选择，将上述五种窗函数的基本参数列于表 9.2.1 中。设计过程中根据阻带最小衰减选择窗函数的类型，再根据过渡带宽度确定所选窗函数的长度 N 。在表 9.2.1 中的五种窗函数中，矩形窗过渡带最窄，阻带最小衰减最小；布莱克曼窗的过渡带最宽，但是阻带最小衰减最大。为了达到相同的过渡带宽度，布莱克曼窗的长度是矩形窗的 3 倍。

例如，技术指标：阻带最小衰减 $\alpha_s \geq 60$ (dB)；过渡带宽度 $\Delta B \leq 0.1 \pi$ rad，则根据表 9.2.1，必须选布莱克曼窗，表中给出布莱克曼窗的过渡带宽度 $\Delta B = 12\pi/N$ ，所以

$$\Delta B = \frac{12\pi}{N} \leq 0.1 \pi$$

求解得

$$N = 120$$

表 9.2.1 五种窗函数基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 α_n /dB	过渡带宽度 ΔB	阻带最小衰减 α_s /dB
矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	-44
海明窗	-41	$8\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	-74

随着数字信号处理技术的不断发展，学者们提出的窗函数已多达几十种，除了上述 5 种窗函数外，比较有名的还有^{[5][6]} Kaiser 窗、Chebyshev 窗、Gaussian 窗、凯塞-贝塞尔窗 (Kaiser - Basel Window)^[1]，其中凯塞-贝塞尔窗由参数控制，可以使滤波器过渡带宽度为 $3\pi/N \sim 11\pi/N$ ，相应的阻带最小衰减达到 $-30 \sim -100$ dB。MATLAB 信号处理工具箱函数提供了以下 14 种窗函数的产生函数，括弧内是相应窗函数的 MATLAB 信号处理工具箱函数名，调用格式及参数可以用“help 函数名”命令查阅。

- Bartlett-Hanning(barthannwin)
- Bartlett(bartlett)
- Blackman(blackman)
- Blackman-Harris(blackmanharris)
- Bohman(bohmanwin)
- Chebyshev(chebwin)
- Gaussian(gausswin)
- Hamming(hamming)
- Hanning(hanning)
- Kaiser(kaiser)
- Nuttall's Blackman-Harris(nuttallwin)
- Rectangular(rectwin)
- Tapered cosine(tukeywin)
- Triangular(triang)

窗函数的调用格式非常简单，例如，`hn = hanning(N)`产生长度为 N 的 hanning 窗函数列向量 `hn`。运行下面三行程序即可产生并图示汉宁窗函数，如图 9.2.10 所示。

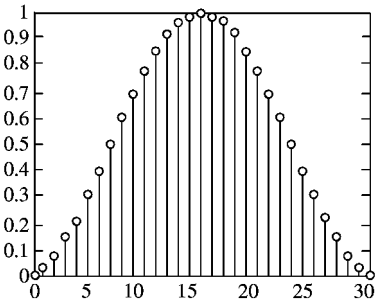


图 9.2.10 hanning 窗函数(N=31)

hn=hanning(31);

n=0:30;

Stem(n,hn)

9.2.4 设计步骤

综上所述,可以归纳出用窗函数法设计 FIRDF 的步骤:

(1) 选择窗函数类型和长度,写出窗函数 $w(n)$ 表达式。根据阻带最小衰减选择窗函数 $w(n)$ 的类型,再根据过渡带宽度确定所选窗函数的长度 N 。

(2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 。根据设计需要,一般选择相应的线性相位理想滤波器(理想低通,理想高通,理想带通,理想带阻)。应当注意,理想滤波器的截止频率 ω_c 点(对低通滤波器 $H_g(\omega_c) \approx \frac{1}{2} H_g(0)$)近似为最终设计的 FIRDFD 的 -6 dB 频率。

(3) 计算:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

(4) 加窗得到设计结果:

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

例 9.2.1 用窗函数法设计线性相位高通 FIRDF,技术指标如下:

通带截止频率: $\omega_p = \frac{\pi}{2}$ rad

阻带截止频率: $\omega_s = \frac{\pi}{4}$ rad

通带最大衰减: $\alpha_p = 1$ dB

阻带最小衰减: $\alpha_s = 40$ dB

解 按上述步骤设计:

(1) 选择窗函数 $w(n)$ 。已知阻带最小衰减 $\alpha_s = 40$ dB,由表(9.2.1)可知汉宁窗和海明窗均满足要求,我们选海明窗。本例中过渡带宽度 $\Delta B \leq \omega_p - \omega_s = \pi/4$,海明窗的过渡带宽度 $\Delta B = 8\pi/N$,所以要求

$$\Delta B = \frac{8\pi}{N} \leq \frac{\pi}{4}$$

解之得

$$N \geq 32$$

对高通滤波器, N 必须取奇数,所以, $N = 33$ 。

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{\pi n}{16}\right) \right] R_{33}(n)$$

$$(2) H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

其中

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

$$\omega_c = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{33} = \frac{29\pi}{66}$$

注意构造 $H_d(e^{j\omega})$ 时截止频率的计算方法。当 $\omega_c = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta B}{2}$ 时, 衰减为 6 dB; 当 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 时, 衰减很小, 可以满足通带要求。

(3) 求出 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right) \\ &= \frac{\sin\pi(n-\tau)}{\pi(n-\tau)} - \frac{\sin\omega_c(n-\tau)}{\pi(n-\tau)} \end{aligned}$$

$\tau=16$, 所以

$$h_d(n) = \delta(n-16) - \frac{\sin\left[\frac{29\pi}{66}(n-16)\right]}{\pi(n-16)}$$

$\delta(n-16)$ 对应全通滤波器。

$$\frac{\sin\left[\frac{29\pi}{66}(n-16)\right]}{\pi(n-16)}$$

是截止频率为 $29\pi/66$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应, 二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。这就是求理想高通滤波器单位脉冲响应的另一个公式。

(4) 加窗:

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n)w(n) \\ &= \left\{ \delta(n-16) - \frac{\sin\left[\frac{29\pi}{66}(n-16)\right]}{\pi(n-16)} \right\} \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{\pi n}{16}\right) \right] R_{33}(n) \end{aligned}$$

实际设计时, 一般用 MATLAB 工具箱函数实现。步骤(1)由设计者根据设计指标完成, 步骤(2)~(4)的解题过程可调用设计函数 fir1 来实现。

fir1 是用窗函数法设计线性相位 FIRDF 的工具箱函数, 调用格式如下:

$$hn=fir1(N,wc,'ftype',window)$$

fir1 实现线性相位 FIR 滤波器的标准窗函数法设计。“标准”是指在设计低通、高通、带通和带阻 FIR 滤波器时, $H_d(e^{j\omega})$ 分别取相应的理想低通、高通、带通和带阻滤波器, 故而设计的滤波器的频率响应称为标准频率响应。

$hn=fir1(N,wc)$ 可得到 6 dB 截止频率为 wc 的 N 阶(单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 $N+1$) FIR 低通滤波器, 默认(缺省参数 windows)选用 hamming 窗。其单位脉冲响应 $h(n)$ 为

$$h(n)=hn(n+1), \quad n=0,1,2,\cdots,N$$

而且满足线性相位条件:

$$h(n)=h(N-1-n)$$

其中 wc 为对 π 归一化的数字频率, $0\leq wc\leq 1$ 。

当 $wc=[wc1,wc2]$ 时, 得到的是带通滤波器, 其 6 dB 通带为 $wc1\leq\omega\leq wc2$ 。

$hn=fir1(N,wc,'ftype')$ 可设计高通和带阻滤波器。

- 当 $ftype=high$ 时, 设计高通 FIR 滤波器;

• 当 $\text{ftype}=\text{stop}$ 时, 设计带阻 FIR 滤波器。

应当注意, 在设计高通和带阻滤波器时, 阶数 N 只能取偶数 ($h(n)$ 长度 $N+1$ 为奇数)。不过, 当用户将 N 设置为奇数时, fir1 会自动对 N 加 1。

$\text{hn}=\text{fir1}(N,\text{wc},\text{window})$ 可以指定窗函数向量 window 。如果缺省 window 参数, 则 fir1 默认为 hamming 窗。可用的其他窗函数有 Boxcar, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser 和 Chebwin 窗。这些窗函数的使用很简单(可用 help 命令查到), 例如:

$\text{hn}=\text{fir1}(N,\text{wc},\text{bartlett}(N+1))$ 使用 Bartlett 窗设计;

$\text{hn}=\text{fir1}(N,\text{wc},\text{chebwin}(N+1,R))$ 使用 Chebyshev 窗设计。

$\text{hn}=\text{fir1}(N,\text{wc},'\text{ftype}',\text{window})$ 通过选择 wc 、 ftype 和 window 参数(含义同上), 可以设计各种加窗滤波器。

Fir2 可以指定任意形状的 $H_d(e^{j\omega})$, 用 help 命令查阅其调用格式。

本例设计程序为 examp921.m 。

```
%examp921.m
wc=29/66;N=32;           %N=h(n)的长度-1
hn=fir1(N,wc,'high');    %注意, 调用参数 N 等于 h(n)的长度减 1
```

运行程序得到 $h(n)$ 的 33 个值:

$h(n)=0.0002$	-0.0018	-0.0012	0.0030	0.0043	-0.0041	-0.0109	0.0023
0.0214	0.0067	-0.0345	-0.0293	0.0475	0.0822	-0.0570	-0.3094
0.5599	-0.3094	-0.0570	0.0822	0.0475	-0.0293	-0.0345	0.0067
0.0214	0.0023	-0.0109	-0.0041	0.0043	0.0030	-0.0012	-0.0018
0.0002							

$h(n)$ 及其幅频特性曲线如图 9.2.11 所示。

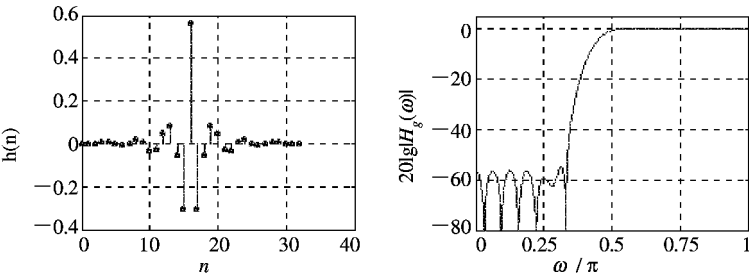


图 9.2.11 高通 FIRDF 的 $h(n)$ 及幅频特性

例 9.2.2 用窗函数法设计一个 FIR 带通滤波器。指标如下:

阻带下截止频率: $\omega_{ls}=0.2 \pi$

通带下截止频率: $\omega_{lp}=0.35 \pi$

通带上截止频率: $\omega_{up}=0.65 \pi$

阻带上截止频率: $\omega_{us}=0.8 \pi$

通带最大衰减: $\alpha_p=1 \text{ dB}$

阻带最小衰减: $\alpha_s=60 \text{ dB}$

解 本例调用 fir1 函数设计。

因为阻带最小衰减 $\alpha_s=60\text{ dB}$ ，所以选择 blackman 窗，再根据过渡带宽度选择滤波器长度 N ，blackman 窗的过渡带宽度 $\Delta B=12\pi/N$ ，所以

$$\Delta B=\frac{12\pi}{N}\leqslant \omega_{lp}-\omega_{ls}=0.35\pi-0.2\pi=0.15\pi$$

解之得， $N=80$ 。调用参数 ω_c 计算如下：

$$\omega_c=\frac{\left[\omega_{lp}-\frac{\Delta B}{2},\omega_{up}+\frac{\Delta B}{2}\right]}{\pi}$$

设计程序为 `examp922.m`，参数计算也由程序计算。

```
%examp922.m
wls=0.2 * pi; wlp=0.35 * pi; wup=0.65 * pi;
B=wlp-wls; %过渡带宽度
N=ceil(12 * pi/B); %计算阶数 N, ceil(x)取大于等于 x 的整数
wp=[wlp/pi-6/N,wup/pi+6/N]; %设置理想带通截止频率(关于 pi 归一化)
hn=fir1(N-1,wp,blackman(N));
```

程序运行结果：

$N=80$ ，由于 $h(n)$ 数据量太大，所以仅给出其波形和幅频特性曲线，如图 9.2.12 所示。

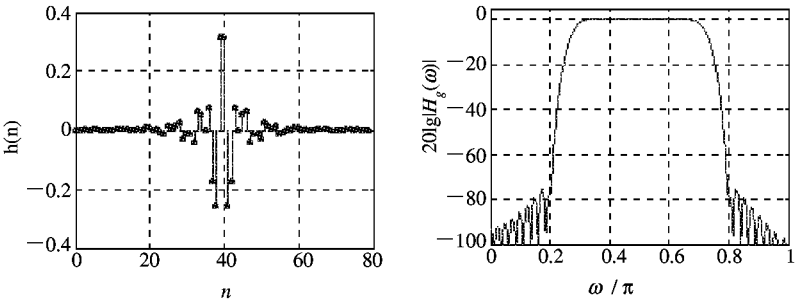


图 9.2.12 带通 FIRDF 时域频域波形

例 9.2.3 用窗函数法设计线性相位 FIR 低通数字滤波器，实现对模拟信号采样后进行数字低通滤波，对模拟信号的滤波要求如下：

- 通带截止频率： $f_p=2\text{ kHz}$
- 阻带截止频率： $f_s=3\text{ kHz}$
- 阻带最小衰减：40 dB
- 采样频率： $F_s=10\text{ kHz}$

选择合适的窗函数及其长度，求出 $h(n)$ ，并画出幅频特性衰减(dB)曲线和相频特性曲线。

解 （1）根据本题所给滤波要求确定相应的数字滤波器指标：

通带截止频率：
$$\omega_p=\frac{2\pi f_p}{F_s}=\frac{4000\pi}{10000}=0.4\pi$$

阻带截止频率：
$$\omega_s=\frac{2\pi f_s}{F_s}=\frac{6000\pi}{10000}=0.6\pi$$

阻带最小衰减: 40 dB

过渡带宽度: $B = \omega_s - \omega_p = 0.2 \pi$

(2) 选择窗函数 $w(n)$, 计算窗函数长度 N 。由阻带衰减为 40 dB 知道, hanning 和 hamming 窗函数都满足要求, 这两种窗函数过渡带宽度相同, 所以选 hamming 窗。

hamming 窗函数的过渡带宽度为 $8\pi/N$, 所以应当满足:

$$\frac{8\pi}{N} \leq B$$

解之得到

$$N \geq \frac{8\pi}{B} = 40$$

(3) 确定希望逼近的理想低通滤波器截止频率 ω_c , 调用 fir1 完成本题设计要求。

由图 9.2.2 知道, 频率点 ω_c (该点为过渡带中心) 处滤波器频响幅度为 0.5 (等价于衰减 6 dB), 所以

$$\omega_c = \omega_p + \frac{B}{2} = 0.4\pi + 0.1\pi = 0.5\pi$$

以 N 和 ω_c 为参数, 调用函数 fir1 的设计程序为 examp923.m, 以上参数计算也由程序计算。

```
%examp923.m
fp=2000; fs=3000; Fs=10000;
wp=2 * pi * fp/Fs; ws=2 * pi * fs/Fs;
B=ws-wp; %过渡带宽度
N=ceil(8 * pi/B); %计算阶数 N, ceil(x)取大于等于 x 的整数
wc=(wp+B/2)pi; %设置理想带通截止频率(关于 pi 归一化)
hn=fir1(N-1,wc);
M=1024; %以下为计算频率相应函数和绘图部分
hk=fft(hn,M);
n=0:N-1;
subplot(2,2,1); stem(n,hn,'. ');
xlabel('n'); ylabel('h(n)');
grid on
k=1:M/2+1;
w=2 * (0:M/2)/M;
subplot(2,2,2); plot(w,20 * log10(abs(hk(k))));
axis([0,1,-100,5]); xlabel('w/pi'); ylabel('20lg|Hg(w)|');
grid on
```

程序运行结果:

h(n)=	[-0.0009	-0.0010	0.0013	0.0018	-0.0025	-0.0034	0.0047	0.0062
		-0.0081	-0.0104	0.0133	0.0168	-0.0211	-0.0267	0.0341	0.0443
		-0.0598	-0.0869	0.1483	0.4503	0.4503	0.1483	-0.0869	-0.0598
		0.0443	0.0341	-0.0267	-0.0211	0.0168	0.0133	-0.0104	-0.0081
		0.0062	0.0047	-0.0034	-0.0025	0.0018	0.0013	-0.0010	-0.0009]

$h(n)$ 和 $20 \lg(|H(e^{j\omega})|)$ 波形分别如图 9.2.13(a)和(b))所示。

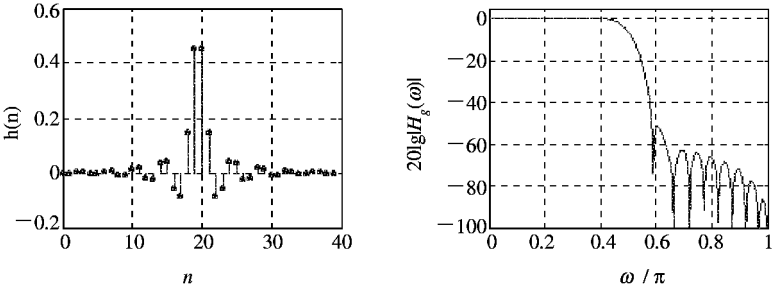


图 9.2.13 低通 FIRDF 时域频域波形

窗函数设计法简单、方便、实用，但滤波器边界频率不易精确控制。另外，不论选择什么类型的窗函数，所设计的滤波器在阻带边界频率附近的衰减最小，距阻带边界频率越远，衰减越大。所以，如果在阻带边界频率附近的衰减刚好达到设计指标要求，则阻带中其他频段的衰减就有很大富余量。这就说明窗函数设计法存在较大的资源浪费，或者说设计的滤波器性能价格比低。

例如，为了达到 60 dB 的阻带最小衰减指标，必须选择 Blackman 窗；为了达到过渡带指标要求，窗函数长度 N 较大(如上例中， $\Delta B=0.15 \pi$ ， $N=80$)，从而使滤波器成本较大。下面介绍一种能克服上述缺点的设计方法。

9.3 利用等波纹最佳一致逼近法设计 FIR 数字滤波器

FIRDF 设计的本质是寻找一种长度为 N 的单位脉冲响应 $h(n)$ ，使 $h(n)$ 的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与希望逼近的片段恒定常数滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的误差满足指标要求。前面介绍的设计方法，逼近误差在整个频域分布极不均匀，如果在误差最大的频段刚好达到指标，但是在误差最小的频段则远远优于指标，从而造成资源浪费。

等波纹最佳一致逼近法使最大误差最小化，并在整个逼近频段上均匀分布。用等波纹最佳一致逼近法设计的 FIRDF 幅频响应在通带和阻带都是等波纹的，这就是等波纹的含义。最佳一致逼近指在滤波器长度给定条件下使波纹幅度最小。由于这种设计法使误差均匀分布，所以设计的滤波器性能价格比最高。指标相同时这种设计法使滤波器阶数最低，阶数相同时这种设计法使滤波器的最大逼近误差最小，即通带最大衰减最小，阻带最小衰减最大。

本节略去等波纹最佳一致逼近法复杂的数学推导，只介绍其基本思想和实现线性相位 FIRDF 的等波纹最佳一致逼近设计的 MATLAB 信号处理的工具箱函数 Remez。Remez 函数采用数值分析中的 remez 多重交换迭代算法求解切比雪夫最佳一致逼近问题，求得满足等波纹最佳一致逼近准则的 FIRDF 的单位脉冲响应 $h(n)$ 。

9.3.1 等波纹最佳一致设计的基本思想

用 $H_d(\omega)$ 表示希望逼近的幅度特性函数，要求设计线性相位 FIRDF 时， $H_d(\omega)$ 必须满足线性相位约束条件。用 $H_g(\omega)$ 表示实际设计的滤波器幅度特性函数，定义加权误差函

数为

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H_g(\omega)] \tag{9.3.1}$$

$W(\omega)$ 称为误差加权函数，用来控制不同频段(一般指通带和阻带)的逼近精度。 $W(\omega)$ 取值越大，表示相应频段逼近精度越高，开始根据逼近精度要求确定 $W(\omega)$ ，设计过程中 $W(\omega)$ 是已知函数。

等波纹最佳一致逼近法就是在通带和阻带以 $|E(\omega)|$ 的最大值最小化为准则，求解滤波器系数 $h(n)$ 。把通带和阻带称为逼近(或研究)区域，把过渡带称为无关区域。应当注意，设计过程中无关区不能为零，即 $H_d(\omega)$ 不能是理想滤波特性。

利用等波纹最佳一致逼近准则设计线性相位 FIRDF 的数学模型建立及其求解算法的推导复杂，求解计算必须借助计算机。幸好滤波器设计专家已经开发出 MATLAB 工具箱函数 `remezord` 和 `remez`，工程师们现在可以不关心复杂的数学模型与求解算法，只要简单地调用这两个函数就可以完成线性相位 FIRDF 的等波纹最佳一致逼近设计。

在介绍 MATLAB 工具箱函数 `remezord` 和 `remez` 之前，先介绍等波纹滤波器的技术指标及其描述参数。等波纹滤波器的幅频特性函数曲线如图 9.3.1 所示。

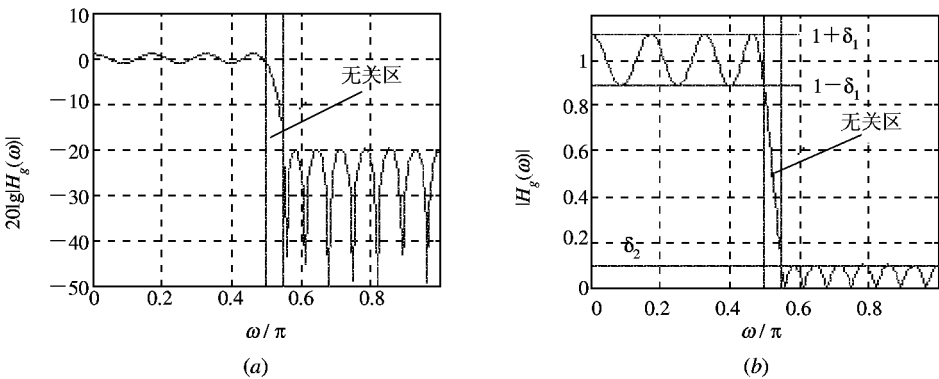


图 9.3.1 等波纹滤波器的幅频特性函数曲线

图 9.3.1 给出了等波纹滤波器技术指标的两种描述参数。图 9.3.1(a)用衰减 dB 数描述：

通带截止频率： $\omega_p = \frac{\pi}{2}$

通带最大衰减： $\alpha_p = 2 \text{ dB}$

阻带截止频率： $\omega_s = \frac{11\pi}{20}$

阻带最小衰减： $\alpha_s = 20 \text{ dB}$

这是工程实际中常用的指标描述方法。但是，等波纹最佳一致逼近设计法中求滤波器阶数 N 和误差加权函数 $W(\omega)$ 时，要求给出滤波器通带和阻带的振荡波纹幅度 δ_1 和 δ_2 。图 9.3.1(b)给出用通带和阻带的振荡波纹幅度 δ_1 和 δ_2 描述的技术指标。显然，两种描述参数之间可以换算。如果设计指标以 α_p 和 α_s 给出，为了调用 MATLAB 工具箱函数 `remezord` 和 `remez` 进行设计，就必须由 α_p 和 α_s 换算出通带和阻带的振荡波纹幅度 δ_1 和 δ_2 。

对比图 9.3.1(a)和(b)，得出关系式：

$$\alpha_p = -20 \lg \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1} = 20 \lg \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \quad (9.3.2)$$

$$\alpha_s = -20 \lg \frac{\delta_2}{1 + \delta_1} \approx -20 \lg \delta_2 \quad (9.3.3)$$

由(9.3.2)和(9.3.3)式得到：

$$\delta_1 = \frac{10^{\alpha_p/20} - 1}{10^{\alpha_p/20} + 1} \quad (9.3.4)$$

$$\delta_2 = 10^{-\alpha_s/20} \quad (9.3.5)$$

用(9.3.4)和(9.3.5)式计算得到图 9.3.1(b)中的参数： $\delta_1 = 0.1146$ ， $\delta_2 = 0.1000$ 。实际中， δ_1 和 δ_2 一般很小，这里是为了观察等波纹特性及参数 δ_1 和 δ_2 的含义，特意取较大值的。

下面举例说明误差加权函数 $W(\omega)$ 的作用，滤波器阶数 N 与波纹幅度 δ_1 和 δ_2 的制约关系。

设希望逼近的通带和阻带分别为 $[0, \pi/4]$ 和 $[5\pi/16, \pi]$ ，对四种不同的指标参数，等波纹最佳一致逼近的幅频特性曲线分别如图 9.3.2(a)、(b)、(c)和(d)所示。

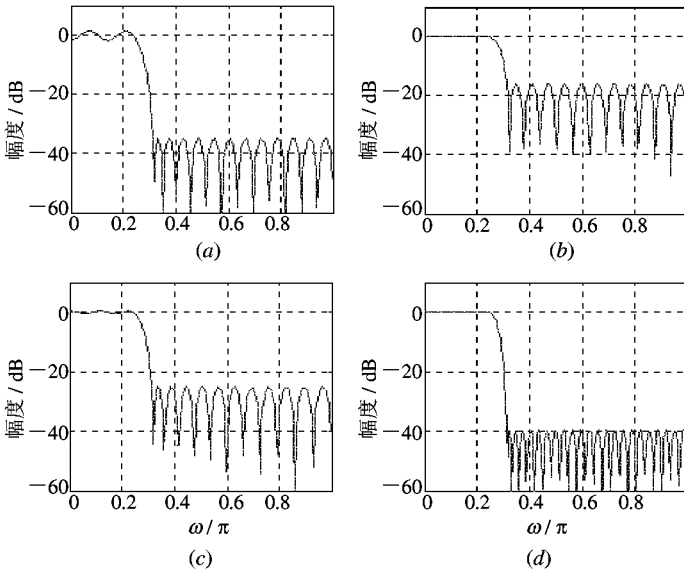


图 9.3.2 误差加权函数 $W(\omega)$ 和滤波器阶数 N 对逼近精度的影响

(a) $N=33$, $W=[1,10]$; (b) $N=33$, $W=[10,1]$; (c) $N=33$, $W=[1,1]$; (d) $N=63$, $W=[1,1]$

图 9.3.2 中， $W=[a,b]$ 表示通带误差加权函数 $W(\omega)=a$ ，阻带误差加权函数 $W(\omega)=b$ 。比较图 9.3.2(a)、(b)、(c)和(d)，可以得出结论：

误差加权函数 $W(\omega)$ 较大的频带逼近精度较高， $W(\omega)$ 较小的频带逼近精度较低。当滤波器阶数 N 固定时，如果改变 $W(\omega)$ ，使通(阻)带逼近精度提高，则必然使阻(通)带逼近精度降低。滤波器阶数 N 增大才能使通带和阻带逼近精度同时提高。所以， $W(\omega)$ 和 N 是由滤波器设计指标(即 α_p 和 α_s 以及过渡带宽度)确定的。

9.3.2 remez 函数和 remezord 函数

1. remez

功能：采用 remez 算法实现线性相位 FIR 数字滤波器的等波纹最佳一致逼近设计。

调用格式：

```
hn=remez(N,f,m,w,'ftype')
```

返回单位脉冲相应向量 hn。调用参数含义如下：

N: FIRDF 阶数，设计结果 hn 长度为 N+1；

f、m: 给出希望逼近的幅度特性。f 为边界频率向量， $0 \leq f \leq 1$ ，要求 f 为单调增向量（即 $f(k) < f(k+1)$ ）。换言之，f 中不能出现重复频点，即 remez 函数不能逼近过渡带宽度为零的频响特性），而且从 0 开始，以 1 结束。1 表示数字频率 $\omega = \pi$ 。m 是与 f 对应的幅度向量，m 与 f 等长度，m(k) 表示频点 f(k) 的幅频响应值。期望逼近的幅频响应值位于 f(k) 与 f(k+1) (k 为奇数) 之间的频段上 [即 (f(k), m(k)) 与 (f(k+1), m(k+1)) 两点间的连线]，而 f(k+1) 与 f(k+2) 之间为无关区（过渡带）。Plot(f,m) 命令画出的幅频响应曲线中，奇数频段为逼近区，偶数频段为无关区（从 f(1)=0 开始为第一段）。

例如，对图 9.3.2, $f=[0, 1/4, 5/16, 1]$;
 $m=[1, 1, 0, 0]$; plot(f, m) 画出的幅度特性如图 9.3.3 所示，图中第一、三段的水平幅度为希望逼近的幅度特性，第二段斜直线为无关部分，逼近时不考虑该频段的逼近误差。

w 为误差加权向量，其长度为 f 的一半。
w(k) 表示对 m 中第 k (k 为奇数) 个常数片段的逼近精度加权值。对图 9.3.2(a), $w=[1,10]$ 。缺省值为全 1。

ftype 用于指定滤波器类型，与 fir1 中类似（请用 help 命令查看）。

Remez 函数的调用参数 (N,fo,mo,w) 可以通过调用 Remezord 函数求得。

2. Remezord

功能：用于估算 FIR 数字滤波器的等波纹最佳一致逼近设计的最低阶数 N，误差加权向量 w，归一化边界频率向量 fo，从而使滤波器在满足指标的前提下造价最低。其返回参数作为 remez 函数的调用参数。

调用格式：

```
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, rip, Fs)
```

参数说明：

返回参数作为 remez 函数的调用参数，设计的滤波器可以满足由参数 f、m、rip 和 Fs 指定的指标。f 和 m 与 remez 中的类似，这里 f 可以是模拟频率 (Hz) 或归一化数字频率，但必须以 0 开始，以 $F_s/2$ (用归一化频率时对应 1) 结束，而且其中省略了 0 和 $F_s/2$ 两个频点。 F_s 为采样频率，省略时默认为 2 Hz。但是这里 f 的长度是 m 的两倍，即 f 中一对边界

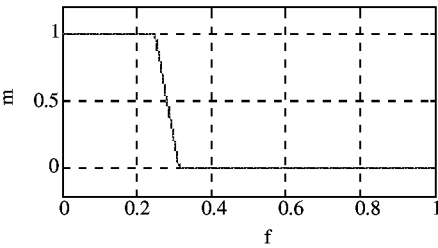


图 9.3.3 调用参数 f 和 m 含义图解

频率($f(k)$, $f(k+1)$, k 为奇数)描述的一个逼近频段对应 m 的一个元素 $\left(m\left(k-\frac{k-1}{2}\right)\right)$ 。

注意:

- ① 省略 F_s (或 $F_s=2$)时, f 中必须为归一化数字频率。
- ② 估算的阶数 N 常常略小, 使设计结果达不到指标要求, 这时要取 $N+1$ 或 $N+2$ (必须注意对 N 的奇偶性要求)。所以必须检验设计结果。
- ③ 如果无关区(过渡带)太窄, 或截止频率接近零频率和 $F_s/2$, 则设计结果不正确。

rip 为 f 和 m 描述的各逼近频段允许的波纹振幅(幅频响应偏差), f 的长度是 rip 的两倍。

以 `remezord` 函数返回的参数作为 `remez` 的调用参数, `remez` 使用格式如下:

`hn=remez(N, fo, mo, w)`

由此可清楚地看出 `remezord` 返回参数 N 、 f_o 、 m_o 和 w 的含义。

综上所述, 调用 `remezord` 和 `remez` 函数设计线性相位 FIRDF, 关键是根据设计指标求出 `remezord` 函数的调用参数 f 、 m 、 rip 和 F_s , 其中, F_s 一般是题目给定的, 或根据实际信号处理要求(按照采样定理)确定。下面对各种数字滤波器给出确定 `remezord` 调用参数 f 、 m 、 rip 的公式, 程序时直接套用即可。

9.3.3 各类滤波器的设计指标

1. 低通滤波器的设计指标

逼近通带: $[0, \omega_p]$

通带最大衰减: α_p dB

逼近阻带: $[\omega_s, \pi]$

阻带最小衰减: α_s dB

`remezord` 函数的调用参数:

$$\begin{cases} f = [\omega_p/\pi, \omega_s/\pi] \\ m = [1, 0] \\ rip = [\delta_1, \delta_2] \end{cases} \quad (9.3.6)$$

其中, f 向量省去起点频率 0 和终点频率 1, $m(1)=1$ 表示频段 $[0, \omega_p]$ 上的逼近幅度为 1, $m(2)=0$ 表示频段 $[\omega_s, \pi]$ 上的逼近幅度为 0。 δ_1 和 δ_2 分别由(9.3.4)和(9.3.5)式计算, 下面相同。

2. 高通滤波器设计指标

逼近通带: $[\omega_p, \pi]$

通带最大衰减: α_p dB

逼近阻带: $[0, \omega_s]$

阻带最小衰减: α_s dB

`remezord` 函数的调用参数:

$$\begin{cases} f = [\omega_s/\pi, \omega_p/\pi] \\ m = [0, 1] \\ rip = [\delta_1, \delta_2] \end{cases} \quad (9.3.7)$$

3. 带通滤波器设计指标

逼近通带: $[\omega_{lp}, \omega_{up}]$

通带最大衰减: α_p dB

逼近阻带: $[0, \omega_{ls}], [\omega_{us}, \pi]$

阻带最小衰减: α_s dB

remezord 函数的调用参数:

$$\begin{cases} f = [\omega_{ls}/\pi, \omega_{lp}/\pi, \omega_{up}/\pi, \omega_{us}/\pi] \\ m = [0, 1, 0] \\ rip = [\delta_2, \delta_1, \delta_2] \end{cases} \quad (9.3.8)$$

4. 带阻滤波器设计指标

逼近阻带: $[\omega_{ls}, \omega_{us}]$

阻带最小衰减: α_s dB

逼近通带: $[0, \omega_{lp}], [\omega_{up}, \pi]$

通带最大衰减: α_p dB

调用参数:

$$\begin{cases} f = [\omega_{lp}/\pi, \omega_{ls}/\pi, \omega_{us}/\pi, \omega_{up}/\pi] \\ m = [1, 0, 1] \\ rip = [\delta_1, \delta_2, \delta_1] \end{cases} \quad (9.3.9)$$

工程实际中常常给出对模拟信号的滤波指标, 要求设计数字滤波器, 对输入模拟信号采样后滤波。这时, 调用参数 f 可以用模拟频率表示。但是, 调用 remezord 时一定要加入采样频率参数 F_s 。这种情况的调用参数及调用格式见例 9.3.5。

9.3.4 设计举例

例 9.3.1 利用等波纹最佳一致逼近法重新设计 FIR 带通滤波器。指标与例 9.2.2 相同, 重写如下:

阻带下截止频率: $\omega_{ls} = 0.2\pi$

通带下截止频率: $\omega_{lp} = 0.35\pi$

通带上截止频率: $\omega_{up} = 0.65\pi$

阻带上截止频率: $\omega_{us} = 0.8\pi$

通带最大衰减: $\alpha_p = 1$ dB

阻带最小衰减: $\alpha_s = 60$ dB

解 调用 remezord 和 remez 函数求解。由调用格式知道, 首先要根据设计指标确定 remezord 函数的调用参数, 再直接写程序调用 remezord 和 remez 函数设计得到 $h(n)$ 。

将设计指标带入(9.3.8)式, 得到 remezord 函数的调用参数为:

$f = [0.2, 0.35, 0.65, 0.8]$, 省去了 0, 1;

$m = [0, 1, 0]$, f 的长度(包括 0 和 1 两点)是 m 的 2 倍。

由(9.3.4)和(9.3.5)式求得

$rp = 1, rs = 60, dat1 = (10^{-(rp/20)} - 1) / (10^{-(rp/20)} + 1); dat2 = 10^{-(rs/20)};$

`rip=[dat2, dat1, dat2]`，用 `dat1` 和 `dat2` 分别表示 δ_1 和 δ_2 。

本例设计程序为 `examp831.m`。

```
%examp831.m: 用 remez 函数设计带通滤波器
f=[0.2, 0.35, 0.65, 0.8];
m=[0, 1, 0];
rp=1; rs=60;
dat1=(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1); dat2=10^(-rs/20); %计算波纹幅度
rip=[dat2, dat1, dat2];
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, rip); N=N+2; %估算的 N 不满足指标, N+2 才满足
hn=remez(N, fo, mo, w);
```

以下绘图部分略去。

程序运行结果： $N=28$ ，即 $h(n)$ 长度为 29。 $h(n)$ 及其幅频特性如图 9.3.4 所示。例 9.2.2 中 $N=80$ ，由此例可见，等波纹最佳一致逼近设计方法可以使滤波器阶数大大降低。

注意：设计结果应当是单位脉冲响应 $h(n)$ 的数据序列，但是一般 N 较大， $h(n)$ 的数据序列占篇幅太大，而且从一大堆数据看不出 $h(n)$ 的变化规律，所以每个例题只给出其波形。

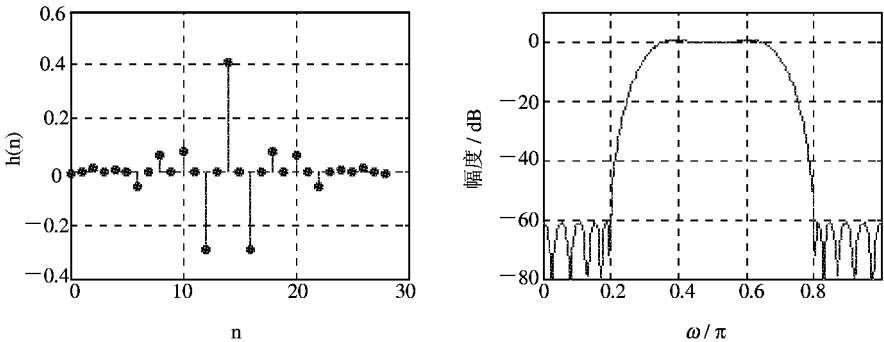


图 9.3.4 调用 `remez` 函数设计的带通 FIRDF 的时域频域波形

例 9.3.2 利用等波纹最佳一致逼近法设计 FIR 带阻滤波器。设计指标是将例 9.3.1 中的通带与阻带交换，重写如下：

逼近通带： $[0, 0.2\pi], [0.8\pi, \pi]$

逼近阻带： $[0.35\pi, 0.65\pi]$

通带最大衰减： $\alpha_p=1$ dB

阻带最小衰减： $\alpha_s=60$ dB

解 调用 `remezord` 和 `remez` 函数求解。设计程序为 `examp832.m`。

```
%examp832.m: 用 remez 函数设计带阻滤波器
clear; close all
f=[0.2, 0.35, 0.65, 0.8]; %按(9.3.9)式求调用参数 f, m, rip
m=[1, 0, 1];
rp=1; rs=60;
dat1=(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1); dat2=10^(-rs/20);
```

```
rip=[dat1, dat2, dat1];
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, rip);
hn=remez(N, fo, mo, w);
```

与例 9.3.1 的程序比较, 仅 m 和 rip 向量有相应改变, 其他行完全相同。

程序运行结果: $N=28$, 即 $h(n)$ 长度为 29。 $h(n)$ 及其幅频特性如图 9.3.5 所示。这次计算的阶数 N 刚好满足指标。

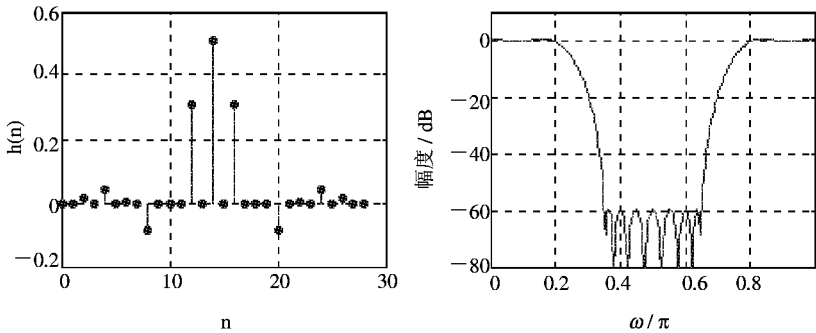


图 9.3.5 调用 remez 函数设计的带阻 FIRDF 时频域波形

例 9.3.3 利用等波纹最佳一致逼近法重新设计 FIR 高通滤波器。指标与例 9.2.1 相同, 重写如下:

通带截止频率: $\omega_p = \frac{\pi}{2}$ rad

阻带截止频率: $\omega_s = \frac{\pi}{4}$ rad

通带最大衰减: $\alpha_p = 1$ dB

阻带最小衰减: $\alpha_s = 40$ dB

解 直接写出程序 exam833.m 如下:

```
%exam833.m: 用 remez 函数设计高通滤波器
clear; close all
f=[1/4, 1/2]; %按(9.3.7)式求调用参数 f, m, rip
m=[0, 1];
rp=1; rs=40;
dat1=(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1); dat2=10^(-rs/20);
rip=[dat2, dat1];
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, rip);
hn=remez(N, fo, mo, w);
```

程序运行结果: $N=12$ (在例 9.2.1 中, $N=32$), 即 $h(n)$ 长度为 13。 $h(n)$ 及其幅频特性如图 9.3.6 所示。这次计算的阶数 N 略大, 指标富余。

例 9.3.4 利用等波纹最佳一致逼近法设计 FIR 低通滤波器。设计指标是将例 9.3.3 中的通带与阻带交换, 重写如下:

逼近通带: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

逼近阻带: $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

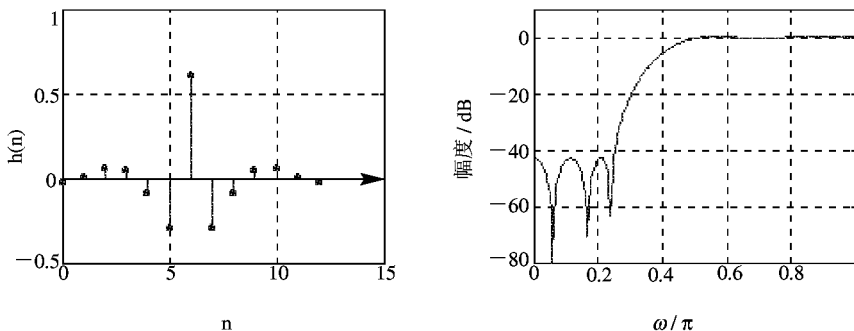


图 9.3.6 调用 remez 函数设计的高通 FIRDF 时频域波形

通带最大衰减: $\alpha_p = 1$ dB

阻带最小衰减: $\alpha_s = 40$ dB

解 直接写出程序 examp834.m 如下:

```
%examp834.m: 用 remez 函数设计低通滤波器
clear; close all
f=[1/4, 1/2]; %按(9.3.6)式求调用参数 f, m, rip
m=[1, 0];
rp=1; rs=40;
dat1=(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1); dat2=10^(-rs/20);
rip=[dat1, dat2];
[N,fo,mo,w]=remezord(f, m, rip);
N=N+3; %估算的阶数 N 太小, N+3 才刚好满足指标;
hn=remez(N, fo, mo, w);
```

程序运行结果: $N=13$, 即 $h(n)$ 长度为 14。 $h(n)$ 及其幅频特性如图 9.3.7 所示。这次估算的阶数 N 太小, $N+3$ 才刚好满足指标。

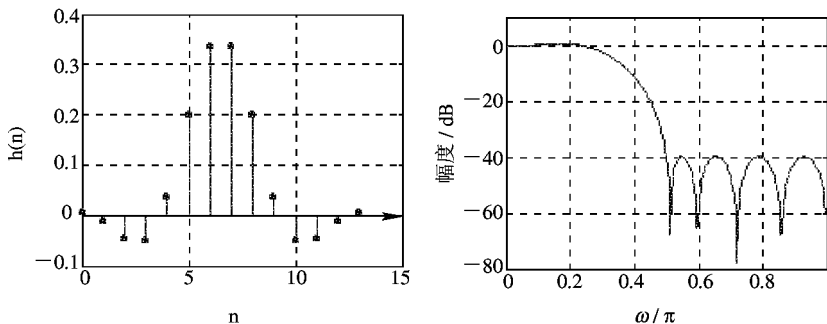


图 9.3.7 调用 remez 函数设计的低通 FIRDF 时频域波形

例 9.3.5 一数字系统的采样频率为 500 Hz, 希望设计一个多阻带数字陷波器, 以滤除信号中的工频(50 Hz)及其二次和三次谐波(100 Hz 和 150 Hz)的干扰。要求阻带尽量窄, 阻带及其两侧过渡带总宽度不超过 30 Hz, 通带最大衰减 1 dB, 阻带最小衰减 30 dB。

解 这是一个实际应用滤波器的设计问题。由于 50 Hz 交流电的频率有漂移, 所以阻带不能太窄, 我们选 4 Hz, 阻带与两侧过渡带总宽度按 30 Hz 和 20 Hz 两种情况设计, 以便观察提高滤波器幅频响应指标所付出的代价。

由题意确定调用参数：用 BS 表示阻带宽度，用 BT 表示阻带与两侧过渡带总宽度，而且记 $BS=2fa$ ， $BT=2fb$ ，则调用参数为：

```
f=[50-fb, 50-fa, 50+fa, 50+fb, 100-fb, 100-fa, 100+fa, 100+fb, 150-fb, 150-fa, 150+fa, 150+fb]
m=[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
rip=[d1, d2, d1, d2, d1, d2, d1]
```

其中，d1 和 d2 分别由(9.3.4)和(9.3.5)式求得

$$d1 = (10^{-(1/20)} - 1) / (10^{-(1/20)} + 1)$$
$$d2 = 10^{-(30/20)}$$

调用 remezord 和 remez 函数的设计程序为 examp935.m。程序中，fb=15，所以设计结果满足 BT=30 Hz，只要取 fb=10，则满足 BT=20 Hz。

```
%examp935.m: 用 remez 函数设计多阻带陷波器
clear; close all
fa=2; fb=15; %BT=30Hz 情况; 如果改为 fb=10, 则 BT=20Hz
f=[50-fb, 50-fa, 50+fa, 50+fb, 100-fb, 100-fa, 100+fa, 100+fb, 150-fb, 150-fa, 150+fa, 150+fb];
m=[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1];
rp=1; rs=30; Fs=500;
d1=(10^(rp/20)-1)/(10^(rp/20)+1); d2=10^(-rs/20);
rip=[d1, d2, d1, d2, d1, d2, d1];
[N, fo, mo, w]=remezord(f, m, rip, Fs);
hn=remez(N, fo, mo, w);
```

程序运行结果：

(1) fb=15 时，N=46，h(n)及其幅频特性如图 9.3.8(a)、(b)所示。

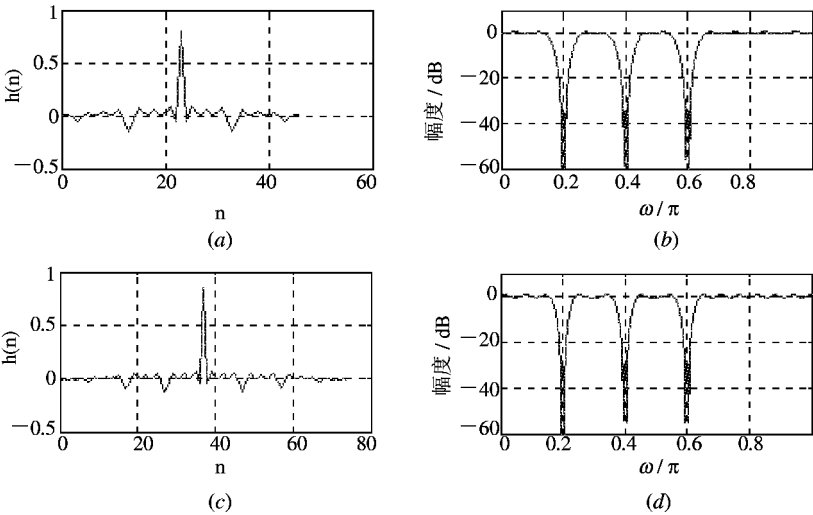


图 9.3.8 调用 remez 函数设计的多阻带陷波器时频域波形

(2) $fb=10$ 时, $N=74$, $h(n)$ 及其幅频特性如图 9.3.8(c)、(d) 所示。过渡带宽度缩小 10 Hz, 使滤波器阶数增加 28, 使滤波器成本大大增加。实质上, 这种阻带等间隔分布的陷波器用梳状滤波器实现最简单^[1]。

图中 $h(n)$ 波形是用 plot 函数绘制的 $h(n)$ 的包络曲线, 因为序列间隔太小, 用 stem 函数绘制的波形看不清楚。

从以上五个例题可以看出, 调用 remez 函数设计的 FIRDF 的 $h(n)$ 均满足偶对称条件, 所以必然具有严格线性相位特性。

9.4 FIR 滤波器与 IIR 滤波器的比较

前面我们讨论了 IIR 和 FIR 两种滤波器传输函数的设计方法。这两种滤波器究竟各自有些什么特点? 在实际应用时应该怎样去选择它们呢? 为了回答这个问题, 下面我们对这两种滤波器作一简单的比较。

首先, 从性能上来说, IIR 滤波器传输函数的极点可位于单位圆内的任何地方, 因此可用较低的阶数获得高的选择性, 所用的存储单元少, 所以既经济效率又高。但是这个高效率是以相位的非线性为代价的。选择性越好, 则相位非线性越严重。相反, FIR 滤波器却可以得到严格的线性相位, 然而由于 FIR 滤波器传输函数的极点固定在原点, 所以只能用较高的阶数达到高的选择性; 对于同样的滤波器设计指标, FIR 滤波器所要求的阶数可以比 IIR 滤波器高 5~10 倍, 结果成本较高, 信号延时也较大; 如果按相同的选择性和相同的线性相位要求来说, 则 IIR 滤波器就必须加全通网络进行相位校正, 同样要大大增加滤波器的节数和复杂性。

从结构上看, IIR 滤波器必须采用递归结构, 极点位置必须在单位圆内, 否则系统将不稳定。另外, 在这种结构中, 由于运算过程中对序列的舍入处理, 这种有限字长效应有时会引起寄生振荡。相反, FIR 滤波器主要采用非递归结构, 不论在理论上还是在实际的有限精度运算中都不存在稳定性问题, 运算误差也较小。此外, FIR 滤波器可以采用快速傅立叶变换算法, 在相同阶数的条件下, 运算速度可以快得多。

从设计工具看, IIR 滤波器可以借助于模拟滤波器的成果, 因此一般都有有效的封闭形式的设计公式可供准确计算, 计算工作量比较小, 对计算工具的要求不高。FIR 滤波器设计则一般没有封闭形式的设计公式。窗口法虽然仅仅对窗口函数可以给出计算公式, 但计算通带阻带衰减等仍无显式表达式。一般, FIR 滤波器的设计只有计算程序可循, 因此对计算工具要求较高。

另外, 也应看到, IIR 滤波器虽然设计简单, 但主要是用于设计具有片段常数特性的滤波器, 如低通、高通、带通及带阻等, 往往脱离不了模拟滤波器的格局。而 FIR 滤波器则要灵活得多, 尤其其他能易于适应某些特殊的应用, 如构成微分器或积分器, 或用于巴特沃斯、切比雪夫等逼近不可能达到预定指标的情况, 例如, 由于某些原因要求三角形振幅响应或一些复杂的幅频响应, 因而有更大的适应性和更广阔的天地。

从上面的简单比较我们可以看到, IIR 与 FIR 滤波器各有所长, 所以在实际应用时应该从多方面考虑来加以选择。例如, 从使用要求上来看, 在对相位要求不敏感的场所, 如语言通讯等, 选用 IIR 较为合适, 这样可以充分发挥其经济高效的特点, 而对于图像信号

处理，数据传输等以波形携带信息的系统，则对线性相位要求较高，如果有条件，采用 FIR 滤波器较好。当然，在实际应用中应考虑经济上的要求以及计算工具的条件等多方面的因素。

应当说明，本章所介绍的设计方法适合设计标准形状频率响应滤波器，对一些特殊形状的频响特性的滤波器(如残留边带调制滤波器要求过渡带具有奇对称形状)，要用其他方法设计。频率采样设计法^[1]适合设计这种滤波器。

习题与上机题

1. FIRDF 的差分方程如下：
$$y(n) = 0.1x(n) + 0.5x(n-1) + 0.9x(n-2) + 0.5x(n-3) + 0.1x(n-4)$$

该滤波器的单位脉冲响应长度 N 是多少？说明长度 N 与差分方程的阶数(差分方程中的最大延迟)的关系。该滤波器是否具有线性相位特性？为什么？
2. 画出理想低通滤波器的单位脉冲响应在时间区间 $[-8, 8]$ 上的波形。设理想低通滤波器的频率响应函数 $H(e^{j\omega}) = R_B(\omega)$ ， $B = \pi/2$ rad。
3. 分别画出长度为 9 的矩形窗、hanning 窗、hamming 窗和 blackman 窗的时域波形图。
4. 分别画出长度为 9 的矩形窗、hanning 窗、hamming 窗和 blackman 窗的幅频特性曲线图。
5. 对下面的每一种滤波器指标，选择满足 FIRDF 设计要求的窗函数类型和长度：
(1) 阻带衰减 20 dB，过渡带宽度 1 kHz，采样频率 12 kHz；
(2) 阻带衰减 50 dB，过渡带宽度 2 kHz，采样频率 5 kHz；
(3) 阻带衰减 50 dB，过渡带宽度 500 Hz，采样频率 5 kHz。
6. 分别用矩形窗和升余弦窗设计一个线性相位低通 FIRDF，逼近理想低通滤波器 $H_d(e^{j\omega})$ ，已知

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- (1) 求出 $h(n)$ 的表达式，确定 α 与 $h(n)$ 的长度 N 的关系式；
- (2) 已知 $N=31$ ， $\omega_c = \pi/4$ rad，画出 FIRDF 的幅频特性和相频特性曲线。
7. 设计一个线性相位低通 FIRDF，要求通带截止频率位 $\pi/4$ rad，阻带最小衰减为 45 dB，过渡带宽度为 $8\pi/51$ rad。选择合适的窗函数及其长度，求出 $h(n)$ ，并画出幅频特性衰减(dB)曲线和相频特性曲线。
8. 要求对模拟信号采样后进行数字低通滤波，对模拟信号的滤波要求如下：
通带截止频率：10 kHz
阻带截止频率：22 kHz
阻带最小衰减：75 dB
采样频率：50 kHz

用窗函数法设计低通数字滤波器，选择合适的窗函数及其长度，求出 $h(n)$ ，并画出幅频特性衰减(dB)曲线和相频特性曲线，并画出线性相位结构图。

9. 调用 MATLAB 工具箱函数 `remezord` 和 `remez` 设计线性相位低通 FIRDF, 实现对模拟信号的采样序列进行低通数字滤波处理。指标要求如下:

采样频率: 16 kHz

通带截止频率: 4.5 kHz

通带最小衰减: 1 dB

阻带截止频率: 6 kHz

阻带最小衰减: 75 dB

列出 $h(n)$ 的序列数据, 并画出幅频特性衰减(dB)曲线和相频特性曲线。

10. 调用 MATLAB 工具箱函数 `remezord` 和 `remez` 设计线性相位高通 FIRDF, 实现对模拟信号的采样序列进行高通数字滤波处理。指标要求如下:

采样频率: 16 kHz

通带截止频率: 5.5 kHz

通带最小衰减: 1 dB

过渡带宽度: ≤ 3.5 kHz

阻带最小衰减: 75 dB

列出 $h(n)$ 的序列数据, 并画出幅频特性衰减(dB)曲线和相频特性曲线。

第十章 实 验

数字信号处理是一门理论与实践紧密联系的课程，做适当的练习题和上机实验有助于深入理解和巩固验证基本理论知识。特别是通过上机实验可以使读者了解并体会数字信号处理的 CAD 手段与方法，锻炼初学者用计算机和 MATLAB 语言及其工具箱函数解决数字信号处理算法的仿真和滤波器设计问题的能力。本章结合数字信号处理的基本理论与基本内容设计了八个上机实验，每个实验对应一个主题内容。除了实验目的、内容、步骤和实验报告要求外，本章还介绍了实验中用到的 MATLAB 基本函数和信号处理工具箱函数。读者可以在西安电子科技大学网站上下载每个实验的参考程序，或者参考与本书配套的学习指导书。显然，读者自己编程序完成实验是最好的选择。

实验一 用递推法解差分方程以及用线性卷积法求线性时不变系统的输出

一、实验目的

1. 学习用递推法求解差分方程的方法。
2. 学习用线性卷积法求网络输出的方法。

二、实验原理

一般网络或系统用线性常数差分方程描述，如果已知差分方程和输入信号，用递推法求解差分方程或者求网络输出，最适合用计算机求解。但要注意 N 阶差分方程要预先给定 N 个初始条件。下面用例子说明用递推法求解差分方程的方框图。例如一个二阶差分方程如下：

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

式中，系数 a_1 、 a_2 、 b_0 、 b_1 为已知系数， $x(n)$ 是输入序列。设 $x(n)$ 是因果序列， $x(-1)=0$ ，从 $n=0$ 开始递推。当 $n=0$ 时，

$$\begin{aligned} y(0) &= a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + b_0 x(0) + b_1 x(-1) \\ &= a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + b_0 x(0) \end{aligned}$$

式中， $y(-1)$ 和 $y(-2)$ 是两个初始条件，要预先给定。这样求解网络输出的计算框图如图 10.1.1 所示。

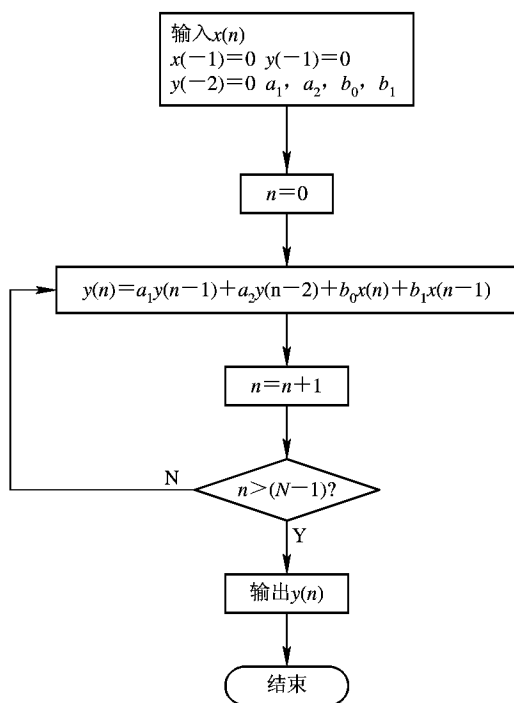


图 10.1.1 用递推法求解差分方程的框图

图中， N 表示递推了 N 步，即 $y(n)$ 的长度。

如果用差分方程求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，也可以用上面的计算框图。因为 $h(n)$ 是系统输入 $\delta(n)$ 时的零状态响应，因此计算框图中全部的初始条件为 0，且 $x(n) = \delta(n)$ 。这样递推得到的 $y(n) = h(n)$ 。

已知 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ ，求系统输出 $y(n)$ ，可以用线性卷积法进行。线性卷积的公式如下：

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) * h(n) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)
 \end{aligned}$$

计算时，关键问题是根据 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的特点，确定求和的上下限。例如， $h(n) = 0.9^n u(n)$ ， $x(n) = R_{10}(n)$ ，卷积公式为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{10}(m) 0.9^{n-m} u(n-m)$$

根据上式中的 $R_{10}(n)$ ，限制非零区间为： $0 \leq m \leq 9$ ，由 $u(n)$ 限制非零区间为： $m \leq n$ 。由上面的不等式知道 m 的取值与 n 有关，可以分几种情况：

当 $n < 0$ 时，

$$y(n) = 0$$

当 $0 \leq n < 9$ 时，

$$y(n) = \sum_{m=0}^n 0.9^{n-m}$$

当 $n \geq 9$ 时,

$$y(n) = \sum_{m=0}^9 0.9^{n-m}$$

最后得到:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{m=0}^n 0.9^{n-m} & 0 \leq n < 9 \\ \sum_{m=0}^9 0.9^{n-m} & n \geq 9 \end{cases}$$

按照上式用计算机计算 $y(n)$ 。更方便的是用 MATLAB 语言的数字信号工具箱函数 `conv` 计算两个从零开始的有限长序列的线性卷积。如果给定的 $x(n)$ 和 $h(n)$ 是一些离散数据, 更适合用该语言进行计算。

三、实验用 MATLAB 函数介绍

1. `conv`

功能: 计算离散卷积、多项式相乘。

调用格式: `yn=conv(hn, xn)`

计算向量 h_n 和 x_n 的卷积, 卷积结果向量为 y_n 。如果用 N 和 M 分别表示 h_n 和 x_n 的长度, 则 y_n 的长度为 $N+M-1$ 。如果 h_n 和 x_n 表示两个多项式的系数向量, 则 y_n 为两个多项式乘积的系数向量。

例如, 程序:

```
hn=[1, 1, 1, 1]; xn=[1, 1, 1, 1]; yn=conv(hn, xn);
```

运行结果为

```
yn=[1 2 3 4 3 2 1]
```

2. `Impz`

功能: 计算数字滤波器的单位脉冲响应。

调用格式:

`[hn, n]=impz(B, A)`: 计算出单位脉冲响应列向量 h_n , 并返回时间列向量 n 。自动选择 h_n 的样点数。调用参数 B 和 A 分别为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母多项式系数向量。

`[hn, n]=impz(B, A, N)`: 计算出单位脉冲响应 N 个样值。如果 N 是一个整数向量, 则仅计算出这些整数点的单位脉冲响应样值。

如果调用时无输出参数, 则完成相应的计算功能, 并自动调用 `stem(n, hn)` 绘图。其他调用格式用 `help` 命令查看。

例如, 本实验中, 系统的差分方程 $y_1(n)=0.9y_1(n-1)+x(n)$ 对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

计算出单位脉冲响应 50 个样值, 并给出绘图的程序如下:

```
B=1; A=[1, -0.9]; impz(B, A, 50);
```

运行结果如图 10.1.2 所示。

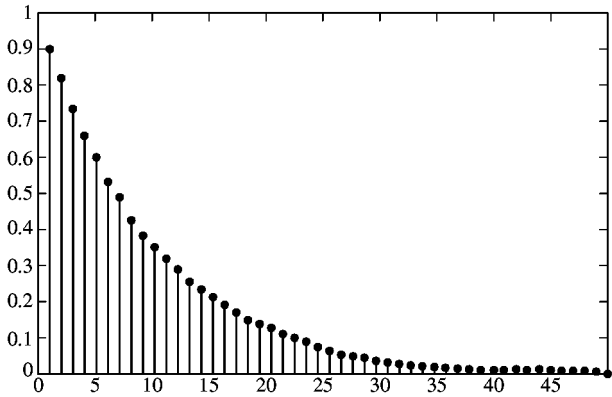


图 10.1.2

四、实验内容

1. 已知系统的差分方程如下式：

$$y_1(n) = 0.9y_1(n-1) + x(n)$$

(1) 输入信号 $x(n)=R_{10}(n)$ ，初始条件 $y_1(-1)=1$ ，试用递推法求解输出 $y_1(n)$ ；

(2) 输入信号 $x(n)=R_{10}(n)$ ，初始条件 $y_1(-1)=0$ ，试用递推法求解输出 $y_1(n)$ 。

2. 已知系统差分方程为

$$y_1(n) = 0.9y_1(n-1) + x(n)$$

用递推法求解系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，要求写出 $h(n)$ 的封闭公式，并打印 $h(n) \sim n$ 曲线。

3. 已知系统的单位脉冲响应 $h(n)=0.9^n u(n)$ ，输入信号 $x(n)=R_{10}(n)$ ，试用卷积法求解系统输出 $y(n)$ ，并打印 $y(n) \sim n$ 曲线。

五、实验报告要求

- 1. 对实验内容进行理论分析，求出前三部分的理论推导结果。
- 2. 对实验结果进行理论分析，并与理论结果进行对比。

实验二 信号与系统的傅立叶分析

一、实验目的

用傅立叶变换对信号和系统进行频域分析。

二、实验原理

对信号进行频域分析就是对信号进行傅立叶变换。对系统进行频域分析即对它的单位脉冲响应进行傅立叶变换，得到系统的传输函数。也可以由差分方程经过傅立叶变换直接

求它的传输函数。传输函数代表的就是系统的频率响应特性。但传输函数是 ω 的连续函数，计算机只能计算出有限个离散频率点的传输函数值，因此得到传输函数以后，应该在 $0 \sim 2\pi$ 之间取许多点，计算这些点的传输函数的值，并取它们的包络，该包络才是需要的频率特性。当然，点数取得多一些，该包络才能接近真正的频率特性。

注意：非周期信号的频率特性是 ω 的连续函数，而周期信号的频率特性是离散谱，它们的计算公式不一样，响应的波形也不一样。

三、实验内容

1. 已知系统用下面差分方程描述：

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

试在 $a=0.95$ 和 $a=-0.5$ 两种情况下用傅立叶变换分析系统的频率特性。要求写出系统的传输函数，并打印 $|H(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线。

2. 已知两系统分别用下面差分方程描述：

$$y_1(n) = x(n) + x(n-1)$$

$$y_2(n) = x(n) - x(n-1)$$

试分别写出它们的传输函数，并分别打印 $|H(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线。

3. 已知信号 $x(n) = R_3(n)$ ，试分析它的频域特性，要求打印 $|X(e^{j\omega})| \sim \omega$ 曲线。

4. 假设 $x(n) = \delta(n)$ ，将 $x(n)$ 以 2 为周期进行周期延拓，得到 $\hat{x}(n)$ ，试分析它的频率特性，并画出它的幅频特性。

四、实验用 MATLAB 函数介绍

1. abs

功能：求绝对值(复数的模)。

$y = \text{abs}(x)$ ：计算实数 x 的绝对值。当 x 为复数时得到 x 的模(幅度值)。

当 x 为向量时，计算其每个元素的模，返回模向量 y 。

2. angle

功能：求相角。

$\text{Ph} = \text{angle}(x)$ ：计算复向量 x 的相角(rad)。Ph 值介于 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间。

3. freqz

计算数字滤波器 $H(z)$ 的频率响应。

$H = \text{freqz}(B, A, w)$ ：计算由向量 w 指定的数字频率点上数字滤波器 $H(z)$ 的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，结果存于 H 向量中。向量 B 和 A 分别为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母多项式系数。

$[H, w] = \text{freqz}(B, A, M, 'whole')$ ：计算出 M 个频率点上的频率响应，存放在 H 向量中， M 个频率存放在向量 w 中。freqz 函数自动将这 M 个频点均匀设置在频率范围 $[0, 2\pi]$ 上。缺省 whole 时， M 个频点均匀设置在频率范围 $[0, \pi]$ 上。

调用参数 B 和 A 与系统函数的关系由下式给出：

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(1) + B(2)z^{-1} + \cdots + B(M)z^{-(N-1)} + B(M+1)z^{-M}}{A(1) + A(2)z^{-1} + \cdots + A(N)z^{-(N-1)} + A(N+1)z^{-N}} \quad (10.2.1)$$

缺省 w 和 M 时, `freqz` 自动选取 512 个频率点计算。不带输出向量的 `freqz` 函数将自动绘出幅频和相频曲线。其他几种调用格式可用命令 `help` 查阅。

`freqz` 函数用于计算模拟滤波器的频率响应函数, 详细功能及调用格式用 `help` 命令查看。

例如, 八阶梳状滤波器系统函数为

$$H(z) = B(z) = 1 - z^{-8}$$

用下面的简单程序绘出 $H(z)$ 的幅频与相频特性曲线如图 10.2.1 所示。

```
% example for freqz
B=[1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
A=1;
freqz(B, A)
```

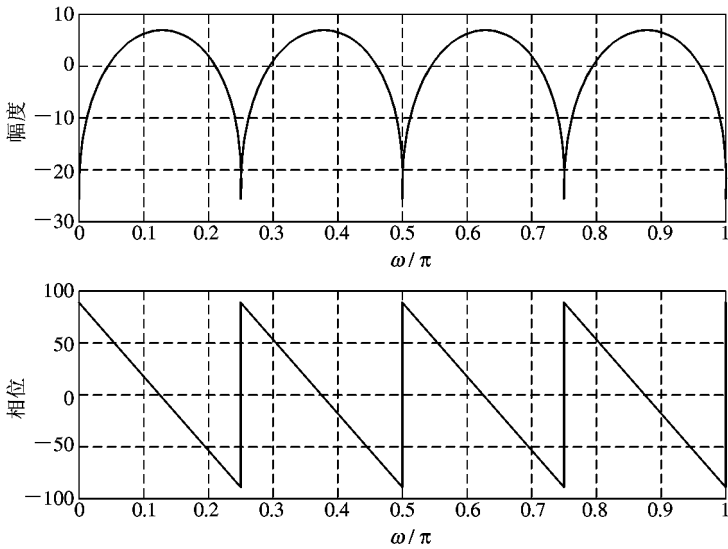


图 10.2.1 八阶梳状滤波器幅度和相位曲线

五、实验报告要求

- 1. 对各实验内容进行理论分析和推导。
- 2. 分析各实验内容, 并和理论分析推导结果进行对比。

实验三 零极点分布对系统频率响应的影响

一、实验目的

学习用分析零极点分布的几何方法分析研究信号和系统频率响应。

二、实验原理

如果知道信号的 Z 变换以及系统的系统函数 $H(z)$ ，可以得到它们的零极点分布，由零极点分布可以很方便地对它们的频率响应进行定性分析。

按照本教材(3.6.13)式，信号的幅度特性由零点矢量长度之积除以极点矢量的长度之积，当频率 ω 从 0 变化到 2π 时，观察零点矢量长度和极点矢量长度的变化，重点观察那些矢量长度较短的情况。另外，由分析知道，极点主要影响频率响应的峰值，极点愈靠近单位圆，峰值愈尖锐；零点主要影响频率特性的谷值，零点愈靠近单位圆，谷值愈深，如果零点在单位圆上，那么频率特性为零。根据这些规律可以定性画出频率响应的幅度特性。

峰值频率和谷值频率可以近似用响应的极点和零点的相角表示，例如极点 $z_1 = 0.9e^{j\pi/4}$ ，峰值频率近似为 $\pi/4$ ，极点愈靠近单位圆，估计法结果愈准确。

本实验借助计算机分析信号和系统的频率响应，目的是掌握用极、零点分布的几何分析法分析频率响应，实验时需要将 $z=e^{j\omega}$ 代入信号的 Z 变换和系统函数中，再在 $0\sim 2\pi$ 之间，等间隔选择若干点，并计算它的频率响应。

[提示：本实验可以采取两种编程方法：① 先求出系统函数 $H(z)$ ，再调用 MATLAB 函数 `freqz` 计算并绘制幅频特性和相频特性曲线；② 先求出系统的传输函数 $H(e^{j\omega})$ 的封闭表达式，再编程序计算其在给定离散频率点上的值，最后调用函数 `abs`，求出模值并打印 $|H(e^{j\omega})|\sim\omega$ 曲线。]

三、实验内容

1. 假设系统用下面差分方程描述：

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

假设 $a=0.7, 0.8, 0.9$ ，分别在三种情况下分析系统的频率特性，并打印幅度特性曲线。

2. 假设系统用下面差分方程描述：

$$y(n) = x(n) + ax(n-1)$$

假设 $a=0.7, 0.8, 0.9$ ，分别在三种情况下分析系统的频率特性，并打印幅度特性曲线。

3. 假设系统函数用下式描述：

$$y(n) = 1.273y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) + x(n-1)$$

试分析它的频率特性，要求打印其幅度特性曲线，并求出峰值频率和谷值频率。

四、实验报告要求

1. 将以上三部分分别用零、极点分布进行理论分析，画出幅度特性曲线，求出峰值频率和谷值频率。
2. 将实验结果和理论分析结果进行比较。
3. 总结零、极点分布对频率响应的影响。

实验四 时域采样定理

一、实验目的

熟悉并加深对采样定理的理解，了解采样信号的频谱和模拟信号频谱之间的关系。

二、实验原理

模拟信号经过理想采样，形成采样信号。采样信号的频谱和模拟信号频谱之间的关系如下：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - m\Omega_s))$$

此式告诉我们，采样信号的频谱是由模拟信号的频谱按照采样角频率周期性的延拓形成的，由此得到结论：采样频率必须大于等于模拟信号最高频率的两倍以上，才不会引起频率混叠。但用此式在计算机上进行计算不方便，下面我们将导出另外一个公式，以便在计算机上进行实验。

对模拟信号 $x_a(t)$ 进行理想采样的公式如下式：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (10.4.1)$$

对上式进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

将上式的积分号和求和号交换次序，得到：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt$$

在上式的积分号内，只有当 $t = nT$ 时，才有非零值，因此，

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}$$

式中， $x_a(nT)$ 在数值上等于由采样得到的时域离散信号 $x(n)$ ，如果再将 $\omega = \Omega T$ 代入，得到：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (10.4.2)$$

上式的右边就是序列的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ ，即

$$\hat{X}_a(j\Omega) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\Omega T} \quad (10.4.3)$$

上式说明采样信号的傅立叶变换可用相应序列的傅立叶变换得到，只要将自变量 ω 用 ΩT 代替即可。

这里有一个问题要解释，采样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是将模拟信号的频谱按照采样角频率为周期，进行周期性延拓形成的，而序列的傅立叶变换是以 2π 为周期，这里是否一致？

答案是肯定的。因为按照公式 $\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$ ，当 $f = f_s$ 时， $\omega = 2\pi$ ，因此序列的傅立叶变换以 2π 为周期，转换到模拟域就是以采样频率 f_s 为周期。另外， $f = f_s/2$ 是 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的折叠频率，如果产生频率混叠，就是在该处附近发生，在数字域中，就是在 $\omega = \pi$ 附近易产生频率混叠。

有了以上的公式和概念，就可以用计算机研究对模拟信号的采样定理。

三、实验用 MATLAB 函数介绍

1. fft

功能：一维快速傅立叶变换(FFT)。

$X_k = \text{fft}(x_n, N)$ ：采用 FFT 算法计算序列向量 x_n 的 N 点 DFT。缺省 N 时，fft 函数自动按 x_n 的长度计算 x_n 的 DFT。当 N 为 2 的整数次幂时，fft 按基 2 算法计算，否则用混合基算法。

2. ifft

功能：一维快速逆傅立叶变换(IFFT)。

调用格式：与 fft 相同。

四、实验内容和步骤

1. 给定模拟信号如下：

$$x_a(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\Omega_0 t)u(t)$$

假设式中 $A = 444.128$ ， $\alpha = 50\sqrt{2}$ ， $\Omega_0 = 50\sqrt{2}\pi$ rad/s，将这些参数代入上式中，对 $x_a(t)$ 进行傅立叶变换，得到 $X_a(j\Omega)$ ，画出它的幅频特性 $|X_a(jf)| \sim f$ ，如图 10.4.1 所示。根据该曲线可以选择采样频率。

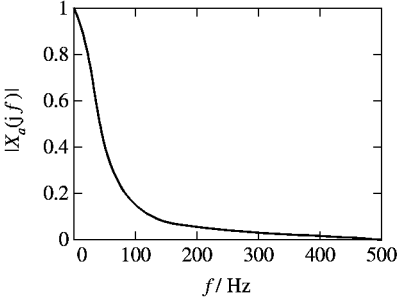


图 10.4.1 $x_a(t)$ 的幅频特性曲线

2. 按照选定的采样频率对模拟信号进行采样，得到时域离散信号 $x(n)$ ：

$$x(n) = x_a(nT) = Ae^{-\alpha nT} \sin(\Omega_0 nT)u(nT)$$

这里给定采样频率如下： $f_s = 1\text{ kHz}$ ， 300 Hz ， 200 Hz 。分别用这些采样频率形成时域离散信号，按顺序分别用 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x_3(n)$ 表示。选择观测时间 $T_p = 50\text{ ms}$ 。

3. 计算 $x(n)$ 的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ ：

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{n_i-1} Ae^{-\alpha nT_i} \sin(\Omega_0 nT_i) e^{-j\omega n} \tag{10.4.4}$$

式中， $i = 1, 2, 3$ ，分别对应三种采样频率的情况 $\left(T_1 = \frac{1}{1000}\text{s}, T_2 = \frac{1}{300}\text{s}, T_3 = \frac{1}{200}\text{s}\right)$ 。采样点数用下式计算：

$$n_i = \frac{T_p}{T_i} \tag{10.4.5}$$

(10.4.4) 式中， ω 是连续变量。为用计算机进行数值计算，改用下式计算：

$$X(e^{j\omega_k}) = \text{DFT}[x(n)]_M = \sum_{n=0}^{n_i-1} A e^{-j\omega_n T_i} \sin(\Omega_0 n T_i) e^{-j\omega_k n} \quad (10.4.6)$$

式中, $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, M-1$; $M=64$ 。可以调用 MATLAB 函数 `fft` 计算 (10.4.6) 式。

4. 打印三种采样频率的幅度曲线 $|X(e^{j\omega_k})| \sim \omega_k$, $k=0, 1, 2, 3, \dots, M-1$, $M=64$ 。

五、实验报告要求

1. 简述实验原理。
2. 针对三种采样频率情况, 进行分析讨论。
3. 主要结论。

实验五 用 DFT(FFT) 对时域离散信号进行频谱分析

1. 实验目的:

学习 DFT 的基本性质及对时域离散信号进行频谱分析的方法。

2. 实验内容

给定参考实验信号如下:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= R_4(n) \\ x_2(n) &= \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ x_3(n) &= \begin{cases} 4-n & 0 \leq n \leq 3 \\ n-3 & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ x_4(n) &= \cos \frac{\pi}{4}n \end{aligned}$$

$x_5(n)$: 用 $x_1(n)=R_4(n)$ 以 8 为周期进行周期性延拓形成的周期序列。

(1) 分别以变换区间 $N=8, 16, 32$, 对 $x_1(n)=R_4(n)$ 进行 DFT(FFT), 画出相应的幅频特性曲线;

(2) 分别以变换区间 $N=8, 16$, 对 $x_2(n), x_3(n)$ 分别进行 DFT(FFT), 画出相应的幅频特性曲线;

(3) 分别以变换区间 $N=4, 8, 16$, 对 $x_4(n)$ 分别进行 DFT(FFT), 画出相应的幅频特性曲线;

(4) 对 $x_5(n)$ 进行频谱分析, 并选择变换区间, 画出幅频特性曲线。

以上各序列的 DFT(FFT) 均可调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 `fft` 计算。

三、实验报告

1. 分析讨论。

(1) 用实验内容中的(1)分析 DFT 的变换区间对频域分析的作用, 并说明 DFT 的物理意义。

(2) 对于试验内容(2), 分析当 $N=8$ 时, 两个信号的幅频特性为什么一样, 而 $N=16$ 时又不一样。

(3) 对于实验内容(3), $x_4(n)$ 是一个周期信号, 画出它的理论幅度频谱特性。对照理论结果, 分析该周期信号的变换区间应该如何选取。如果周期信号的周期预先不知道, 如何用 DFT 分析它的频谱。

(4) 对于实验内容(4), 对照理论结果(见本书例 2.4.2)分析实验结果。

2. 根据以上的实验内容和分析讨论, 写出自己认为重要的几点结论。

四、实验用 MATLAB 函数简介

本实验要用到一维快速傅立叶变换函数 `fft`、取模(实数取绝对值)函数 `abs` 和求相位角函数 `angle`、绘图函数 `plot` 和 `stem`。这些函数都属于 MATLAB 基本函数, `fft` 和 `ifft` 已在实验三中介绍过。

下面的简单程序就可以实现计算矩形序列 $x_1(n)$ 的 32 点 FFT, 并画出幅频特性和相频特性曲线。

%ex1.m: 几个函数调用举例

```
x1n=[1 1 1 1];  
x1k=fft(x1n, 32);    %计算 32 点 fft  
x1m=abs(x1k);         %计算 32 点 fft 的模  
ph1=angle(x1k);       %计算 32 点 fft 的相位  
k=0: 31;              %以下为绘图部分  
subplot(2, 1, 1); stem(k, x1m, ' '); grid on  
xlabel('k'); ylabel('幅度')  
subplot(2, 1, 2); stem(k, ph1, ' '); grid on  
xlabel('k'); ylabel('相位')
```

运行结果如图 10.5.1 所示。

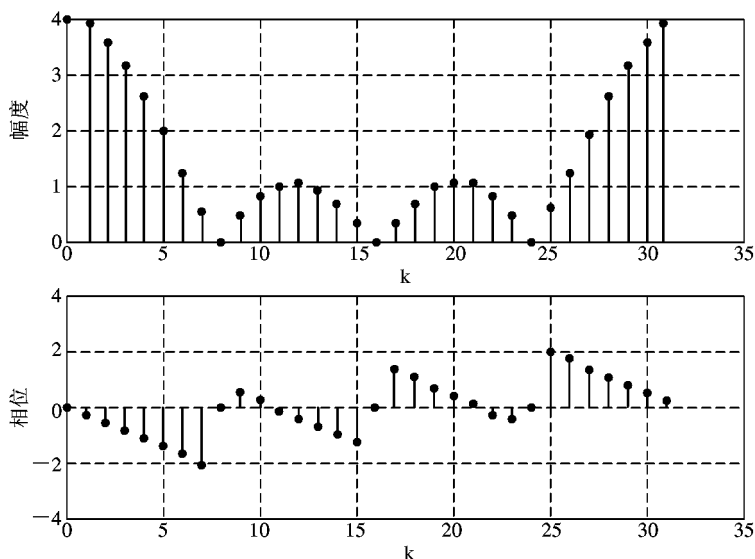


图 10.5.1 矩形序列的 32 点 DFT

实验六 用 DFT(FFT)对连续信号进行频谱分析

一、实验目的

学习用 DFT(FFT)对模拟信号进行谱分析的原理,了解可能产生的各种误差。

二、实验原理

如果用 FFT 对模拟信号进行谱分析,首先要把模拟信号转换成数字信号,转换时要求知道模拟信号的最高截止频率,以便选择满足采样定理的采样频率。一般选择采样频率是模拟信号中最高频率的 3~4 倍。另外要选择对模拟信号的观测时间,如果采样频率和观测时间确定,则采样点数也确定了。这里观测时间和对模拟信号进行谱分析的分辨率有关,最小的观测时间和分辨率成倒数关系。最小的采样点数用教材(6.7.12)式确定。要求选择的采样点数和观测时间大于它的最小值。

用 FFT 作谱分析时,要求做 FFT 的点数服从 2 的整数幂,这一点在上面选择采样点数时可以考虑满足,即使满足不了,可以通过在序列尾部加 0 完成。

如果要进行谱分析的模拟信号是周期信号,最好选择观测时间是信号周期的整数倍。如果不知道信号的周期,要尽量选择观测时间长一些,以减少截断效应的影响。

用 FFT 对模拟信号作谱分析是一种近似的谱分析。首先一般模拟信号(除周期信号以外)的频谱是连续谱,而用 FFT 作谱分析得到的是数字谱,因此应该取 FFT 的点数多一些,用它的包络作为模拟信号的近似谱。另外,如果模拟信号不是严格的带限信号,会因为频谱混叠现象引起谱分析的误差,这种情况下可以预先将模拟信号进行预滤,或者尽量将采样频率取高一些。

一般频率混叠发生在折叠频率附近,分析时要注意因频率混叠引起的误差。最后要注意一般模拟信号是无限长的,分析时要截断,截断的长度和分辨率有关,但也要尽量取长一些,取得太短因截断引起的误差会很大。举一个极端的例子,一个周期性正弦波,如果所取观察时间太短,例如取小于一个周期,它的波形和正弦波相差太大,肯定误差很大,但如果取得长一些,即使不是周期的倍数,这种截断效应也会小一些。

三、实验内容和步骤

1. 实验信号:

$$x_1(t) = R_\tau(t)$$

选择 $\tau=1.5\text{ ms}$, 式中 $R_\tau(t)$ 的波形以及幅度特性如图 10.6.1 所示。

$$x_2(t) = \sin(2\pi ft + \pi/8)$$

式中频率 f 自己选择。

$$x_3(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$$

2. 分别对三种模拟信号选择采样频率和采样点数。

对 $x_1(t)=R_\tau(t)$, 选择采样频率 $f_s=4\text{ kHz}$, 8 kHz , 16 kHz , 采样点数用 $\tau \cdot f_s$ 计算。

对 $x_2(t)=\sin(2\pi ft + \pi/8)$, 周期 $T=1/f$, 频率 f 自己选择, 采样频率 $f_s=4f$, 观测

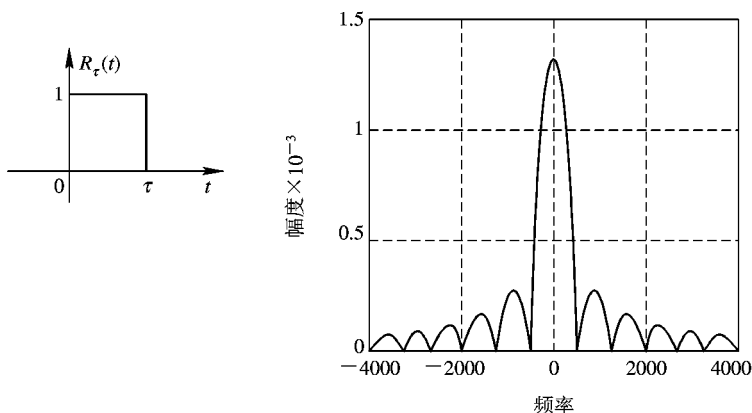


图 10.6.1 $R_\tau(t)$ 的波形及其幅度特性

时间 $T_p = 0.5T, T, 2T$, 采样点数用 $T_p f_s$ 计算。

对 $x_3(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$, 选择采样频率 $f_s = 64$ Hz, 采样点数为 16, 32, 64。

3. 分别将它们转换成序列, 按顺序用 $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ 表示。
4. 分别对它们进行 FFT。如果采样点数不满足 2 的整数幂, 可以通过序列尾部加 0 满足。
5. 计算幅度特性并进行打印。

四、实验报告要求

1. 简述实验原理, 重点放在采样频率、采样点数以及周期性信号的考虑上。
2. 针对三种不同信号和选取的不同参数进行分析讨论。
3. 主要结论。

实验七 IIR 滤波器的设计与信号滤波

一、实验目的

设计 IIR 滤波器, 实现对存在加性干扰的时域离散信号进行滤波。

二、实验内容

已知带加性干扰的信号用 $x(n)$ 表示, $x(n) = x_s(n) + \eta(n)$, 式中 $x_s(n)$ 是有用的信号, 是一个 $0 \sim 0.2 \pi$ rad 的带限信号。 $\eta(n)$ 是一个干扰信号, 其频谱分布在 0.3π rad 以上。要求设计一个巴特沃斯 IIR 数字滤波器对信号 $x(n)$ 进行滤波, 将干扰 $\eta(n)$ 滤除。要求在 $x_s(n)$ 所在的通带内滤波器幅度平坦, 在 0.2π rad 处幅度衰减不大于 1 dB, 在噪声所在的 0.3π rad 以上的频带内滤波器幅度衰减大于等于 40 dB。

三、实验步骤

- 1. 根据题目要求确定要设计的数字滤波器的技术指标；
- 2. 将上面的技术指标转换为巴特沃斯模拟滤波器的技术指标；
- 3. 设计该模拟滤波器；
- 4. 用双线性变换法将设计的模拟滤波器转换为数字滤波器，要求求出该滤波器的系统函数；
- 5. 画出该滤波器的幅度特性曲线；
- 6. 根据该滤波器的系统函数画出它的直接型网络结构图；
- 7. 根据 1 所确定的技术指标，调用 MATLAB 函数 buttord 和 butter，直接设计数字滤波器，观察设计结果与上面用双线性变换法的设计结果是否相同。
- 8. 滤波仿真：调用 MATLAB 工具箱函数 filter 对下面给出的带加性干扰的信号 $x(n)$ 进行滤波，观察滤波效果（绘制滤波前后信号的时域和频域波形）。

实验信号 $x(n)$ 的 128 个样值：

-0.0289	0.3943	0.9965	1.1266	0.9995	1.0891	1.2262	1.0699
0.8990	0.7685	0.7844	0.9471	1.4317	1.6765	1.7629	-3.2903
3.4122	4.5403	-2.1667	-2.0584	4.6694	2.0368	-0.4864	0.1427
2.5652	-1.8980	-0.0527	-1.4730	2.7884	-6.4092	2.9084	-5.1428
1.5929	0.0014	-0.6010	-4.3059	-0.4518	1.9959	-3.3526	0.5745
-3.5487	0.5913	-0.2472	-1.5479	-2.4422	2.5066	-4.2421	-2.3588
3.8869	-3.9855	0.9583	-1.2164	3.7050	1.2411	-1.7249	0.9964
3.9695	1.3400	-3.5513	5.8552	-2.8092	2.6877	0.4444	3.5641
-2.3496	3.6065	-1.7598	1.4699	3.7201	-1.1626	2.5171	-1.8247
2.5076	2.5423	-0.1164	0.3413	-2.8366	-0.5732	1.1705	-1.1689
-1.8778	-2.8823	0.1312	0.1701	-0.3147	-3.2178	-0.2897	-0.2661
-2.6156	2.5836	-6.1123	0.3611	3.8320	-5.1405	-2.4962	1.3115
0.3410	-5.0227	2.5150	-2.2485	0.8696	-0.4257	-0.2326	5.2529
-1.1389	-1.0966	4.2358	-0.8846	1.3454	2.1462	-0.2605	1.8075
-1.5669	3.4374	2.4737	-0.9521	1.0952	0.2180	0.3156	4.8910
-1.5372	1.4585	-1.0904	5.1795	-1.9366	-1.0818	1.2667	-0.4268

四、实验用 MATLAB 函数简介

filter

功能：一维数字滤波器直接 II 型实现函数。

$y_n = \text{filter}(B, A, x_n)$ ：按直接 II 型实现结构对输入信号向量 x_n 滤波，返回滤波器输出信号向量 y_n ，调用参数 B 和 A 分别为滤波器系统函数的分子和分母多项式系数向量。其实质是求解差分方程

$$A(1)y(n) = B(1)x(n) + B(2)x(n-1) + \cdots + B(M+1)x(n-M) - A(2)y(n-1) - \cdots - A(N+1)y(n-N)$$

如果 $A(1)$ 不等于 1 时，则对系数关于 $A(1)$ 归一化后计算输出信号 $y(n)$ 。当 $A=1$ 时，对

应 FIRDF 的直接 II 型实现。

五、实验报告要求

1. 写出所设计的数字滤波器的主要技术指标，它的系统函数、网络结构。
2. 写出仿真滤波试验的结果。

实验八 用窗函数法设计 FIR 滤波器

一、实验目的

复习巩固窗函数法设计 FIR 滤波器的概念和方法，观察用几种常用窗函数设计的 FIR 数字滤波器技术指标。

二、实验内容

要求用窗函数法设计一个线性相位 FIR 低通滤波器，用理想低通滤波器作为逼近滤波器，截止频率 $\omega_c = \pi/4$ rad，用四种窗函数（矩形窗，汉宁窗（升余弦窗），哈明窗（改进的升余弦窗），布莱克曼窗）设计该滤波器，选择窗函数的长度 $N=15, 33$ 两种情况。

三、实验步骤

1. 写出理想低通滤波器的传输函数和单位脉冲响应。
2. 分别写出用四种窗函数设计的滤波器的单位脉冲响应。
3. 对于 $N=15, 33$ 两种情况，利用 FFT 分别求出四种窗函数设计的滤波器的幅度特性和相位特性，并画出它们的幅度特性和相位特性曲线。
4. 调用窗函数法设计函数 fir1。

四、实验用 MATLAB 函数

可以调用 MATLAB 工具箱函数 fir1 实现本实验所要求的线性相位 FIRDF 的设计，调用一维快速傅立叶变换函数 fft 来计算滤波器的频率响应函数。工具箱函数 fir1 见 8.2 节介绍。

五、实验报告要求

1. 总结用窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤。
2. 比较四种窗函数设计的滤波器的技术指标，技术指标可以选择：阻带最小衰减和过渡带宽度。
3. 总结窗函数的形式和长度对设计滤波器的影响，及选择窗函数的依据。

参 考 文 献

- 1 丁玉美,高西全等编著. 数字信号处理. 第二版. 西安:西安电子科技大学出版社, 2001
- 2 高西全,丁玉美等编著.《数字信号处理(第二版)》学习指导. 西安:西安电子科技大学出版社, 2001
- 3 Harry Y-F Lam 著. 模拟和数字滤波器设计与实现. 冯鹞云等译. 北京:人民邮电出版社, 1985
- 4 郑君里等编. 信号与系统. 北京:高等教育出版社, 1981
- 5 Chi-Tsong Chen. 国外电子与通讯教材系列. Digital Signal Processing—Spectral Computation and Filter Design. 北京:电子工业出版社, 2002
- 6 Joyce Van de Vagte. 国外电子与通讯教材系列. Fundamentals of Digital Signal Processing. 北京:电子工业出版社, 2003
- 7 A V 奥本海姆等著, 信号与系统. 刘树棠译. 西安:西安交通大学出版社, 1985
- 8 Vinay K Ingle, John G Proakis. 数字信号处理及其 MATLAB 实现. 陈怀琛, 王朝英, 高西全, John Wiley & Sons, Inc. 译. 北京:电子工业出版社, 1998
- 9 陈怀琛, 吴大正, 高西全编著. MATLAB 及在电子信息课程中的应用. 北京:电子工业出版社, 2002
- 10 刘顺兰, 吴杰编著. 数字信号处理. 西安:西安电子科技大学出版社, 2003