第三章
线性方程组的数值解法

龚　怡

2167570874@qq.com

计算机学院

问题的提出

作业：
手动解下面有500个未知数的方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + \cdots + 0.2x_{500} = 3.6 \\ -0.2x_1 + 9x_2 + \cdots + x_{500} = 9 \\ \cdots \\ 8x_1 + 5x_2 + \cdots - 7x_{500} = -2 \end{cases}$$

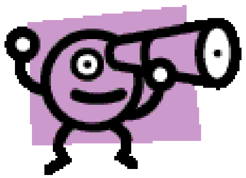
当你遇到的方程组不是中学测验题中的“小儿科”，而是现实生活中大型的线性方程组时，你就遇到麻烦了……

你会想到使用计算机……

计算方法中求解大规模线性方程组有**直接法**和**迭代法**。

这样是不是好点？

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 4x_2 + \cdots + 0.2x_{500} = 3.6 \\ \qquad 9.3x_2 + \cdots + 1.0x_{500} = 9.2 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad 4x_{499} + \quad 3x_{500} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 7x_{500} = 2 \end{cases}$$



来是$x_1=1, x_2=1, x_3=1$

怎么计算机解出来是

$x_1=19.3, x_2=-10, x_3=0$呢？

使用上述计算方法解方程组时，计算过程中**误差**的影响不容忽视，还有可能出现严重病态的解。

主要内容

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）
  - 矩阵三角分解法（LU分解）

- 2. 解线性方程组的误差分析
  - 向量、矩阵范数
  - 系数矩阵的条件数

主要内容

- 3. 解线性方程组的迭代法
  - 迭代法的基本概念
  - 雅克比迭代法
  - 高斯-赛德尔迭代法

线性方程组的数值解法

（1）直接法

指经过有限步算术运算，(假设计算过程中无舍入误差)可求得方程组精确解的方法。

由于实际计算中受字长限制，难免存在舍入误差，因此一般直接法也只能求得近似解。

代表算法：高斯（Gauss）消去法及其变形

（2）迭代法

指用某种极限过程去逐步逼近线性方程组精确解的方法。

优点是所需计算机存储单元小，程序设计简单，原始系数矩阵在计算过程中始终不变等。但存在收敛性与收敛速度的问题。

例 1

◆解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 5x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

对于计算机来说，以增广矩阵（Enlarged Coefficient Matrix）的形式求解。

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 & (2) \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 & (3) \end{cases}$$

写成增广矩阵的形式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \\ 5 & 1 & 2 & 13 \end{array}\right]$$

消元

解：　用(2) – (1)，得

$$-x_2 + 3x_3 = 7 \qquad (4)$$

用(3) – 5×(1)，得

$$-14x_2 - 3x_3 = -37 \qquad (5)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ \boxed{0} & -1 & 3 & 7 \\ \boxed{0} & -14 & -3 & -37 \end{array}\right]$$

消去 x_1

用(5) – 14×(4)，得

$$-45x_3 = -135 \qquad (6)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{0} & -45 & -135 \end{array}\right]$$

消去 x_2

写成增广矩阵的形式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \\ 5 & 1 & 2 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

写成通用格式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

消元

用(2) – (1)，

(3) – 5×(1)，得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -14 & -3 & -37 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

消去 x_1

用(5) – 14×(4)，得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -45 & -135 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (6) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & b_3^{(3)} \end{array}\right]$$

消去 x_2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \quad x_3 = 10 & (1) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 & (2) \\ 5x_1 + \quad x_2 + 2x_3 = 13 & (3) \end{cases}$$

回代

由(6)，得 $x_3 = 3$

求出x_3并回代

用 $x_3 = 3$ 代入 (4)，得

$$x_2 = 2$$

用 $x_3 = 3$，$x_2 = 2$ 代入 (1)，得

$$x_1 = 1$$

求出x_2并回代

目　录

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）

1　解线性方程组的直接法

/* Direct Method for Solving Linear Systems */

§1.1　高斯消去法 /* Gaussian Elimination */

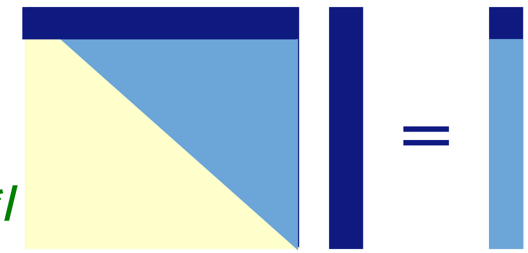
求解　$A\vec{x} = \vec{b}$

思路

首先将 A 化为上三角阵 /* upper-triangular matrix */

消去过程

再回代求解 /* backward substitution */



回代过程

高斯消去法

加上消元标号

用矩阵形式表示 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix}$$

消去过程

记 $A^{(1)} = A = (a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ ， $\vec{b}^{(1)} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$

即 $A^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)}$

第一次消元：消去 x_1 （a_{11}以下元素为0）

消元过程

第一次消元：消去 x_1 （a_{11}以下元素为0）

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，计算因子

$$l_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \quad (i = 2, \ldots, n)$$

将增广矩阵/* augmented matrix */ 第i 行 $-\ l_{i1} \times$ 第1行，消去第 i 行的 x_1，得到

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

记为 $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}$，其中

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1} b_1^{(1)} \end{cases}$$

$$(i, j = 2, \ldots, n)$$

消元过程　第 k 次消元（$1 \le k \le n-1$）：

设第 k 步计算已完成，即已计算出 $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}^{(k)}$

$$
\left[A^{(k)} \mid \vec{b}^{(k)}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k)} \quad \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{nk}^{(k)} \quad \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{array}\right]
$$

设 $a_{kk}^{(k)} \ne 0$，计算因子

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \ldots, n)$$

将增广矩阵第i行 $- \, l_{ik} \times$第k行，消去第 i 行的 x_k，得到

$A^{(k+1)}\vec{x} = \vec{b}^{(k+1)}$，其中 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \end{cases}$

$(i, j = k+1, \ldots, n)$

消元过程

共进行 $n-1$ 次消元

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

得到 $A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$

总结出消元公式（$k = 1,2,\cdots,n-1$）

$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \ldots, n)$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} \quad (i, j = k+1, \ldots, n)$$

回代过程

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \qquad (i = n-1, \ldots, 1) \end{cases}$$

定理 若A的所有顺序主子式 /* determinant of leading principal submatrices */ 均不为0，则高斯消元无需换行即可进行到底，得到唯一解。

$$\det(A_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

回代过程

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \end{cases} \qquad (i = n-1, \ldots, 1)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

如果 $a_{nn}^{(n)} = 0$ ？

那么解就不唯一

如果 $a_{ii}^{(i)} = 0$ ？

这样只要找出与第 i 行最近的那一行 $k \geq i$ 对应的 $a_{ki}^{(i)} \neq 0$

交换这第 k 行与第 i 行

如果找不到这样的 k 呢 ？

这样解就不唯一了。

例 题

◆ **采用高斯消去法求解下列方程组，计算过程中保留2位小数。**

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \quad x_3 = 14 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 32 \end{cases}$$

解：实际计算时只需对增广矩阵的行进行初等变换。

$$[\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 14 \\ 2 & 7 & 4 & 28 \\ 2 & 3 & 8 & 32 \end{array}\right] \Rightarrow [\boldsymbol{A}^{(2)} \mid \boldsymbol{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 5.8 & 3.6 & 22.4 \\ 0 & 1.8 & 7.6 & 26.4 \end{array}\right] \Rightarrow [\boldsymbol{A}^{(3)} \mid \boldsymbol{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 5.8 & 3.6 & 22.4 \\ 0 & 0 & 6.48 & 19.45 \end{array}\right]$$

进行回代，得解

$$x_3 = 3.00 \text{ ，} x_2 = 2.00 \text{ ，} x_1 = 1.00$$

计算量分析

由于计算机中乘除运算的时间远远高于加减运算的时间，故估计某种算法的运算量时，往往只估计乘除的次数，而且通常以乘除次数的最高次幂为运算量的数量级。

Gaussian Elimination:

Step k: 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算因子 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \dots, n)$

$(n-k)$ 次

且计算 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} \quad (i, j = k+1, \dots, n)$

$(n-k)^2$ 次

$(n-k)$ 次

共进行 $n-1$ 步

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

计算量分析

由于计算机中乘除运算的时间远远高于加减运算的时间，故估计某种算法的运算量时，往往只估计乘除的次数，而且通常以乘除次数的最高次幂为运算量的数量级。

Gaussian Elimination:

Step k：设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算因子 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \ldots, n)$

且计算 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \\ (i, j = k+1, \ldots, n) \end{cases}$

共进行 $n-1$ 步 →

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$(n-k)\,(n-k+2)$ 次

消元乘除次数：

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6} n$$

计算量分析

由于计算机中乘除运算的时间远远高于加减运算的时间，故估计某种算法的运算量时，往往只估计乘除的次数，而且通常以乘除次数的最高次幂为运算量的数级。

Gaussian Elimination:

Step k: 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算因子 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \dots, n)$

且计算 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \\ (i, j = k+1, \dots, n) \end{cases}$ $\Bigg\}$ $(n-k)(n-k+2)$ 次

共进行$n-1$步

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \dots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

消元乘除次数：

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6} n$$

$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$ 1 次

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad (i = n-1, \dots, 1)$$ $(n-i+1)$ 次

计算量分析

由于计算机中乘除运算的时间远远高于加减运算的时间，故估计某种算法的运算量时，往往只估计乘除的次数，而且通常以乘除次数的最高次幂为运算量的数量级。

高斯消去法的总乘除次数为 $\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{1}{3}n$ ，运算量为 $\frac{n^3}{3}$ 级。

Gaussian Elimination:

Step k: 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算因子 $l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \ldots, n)$

且计算 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)} \\ (i, j = k+1, \ldots, n) \end{cases}$ $\Bigg\}$ $(n-k)\,(n-k+2)$ 次

共进行 $n-1$ 步

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ldots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

消元乘除次数：

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad (i = n-1, \ldots, 1)$$

回代乘除次数：

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

目　录

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）

§1.2 矩阵的三角分解 /* Matrix Factorization */

高斯消去法的消元过程相当于对系数矩阵 A 实现初等行变换，相当于用**初等变换矩阵左乘** A

第一次消元用矩阵的形式可表示为

$$L_1[A^{(1)} \mid \vec{b}^{(1)}] = [A^{(2)} \mid \vec{b}^{(2)}]$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / a_{11} \quad (a_{11} \neq 0)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)}$$

$$(i, j = 2, \dots, n)$$

§2 矩阵的三角分解 /* Matrix Factorization */

第 k 次消元相当于

$$L_k[A^{(k)} \mid \vec{b}^{(k)}] = [A^{(k+1)} \mid \vec{b}^{(k+1)}]$$

其中

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -l_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

重复该过程，最后得

$$L_{n\text{-}1} \cdots L_2 L_1 [A^{(1)} \mid \vec{b}^{(1)}] = [A^{(n)} \mid \vec{b}^{(n)}]$$

§2 矩阵的三角分解 /* Matrix Factorization */

$$L_{n-1}\cdots L_2 L_1 [A^{(1)} \mid \vec{b}^{(1)}] = [A^{(n)} \mid \vec{b}^{(n)}]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

由于 $A=A^{(1)}$，那么

$$A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L\text{ 为单位下三角矩阵}} \underline{A^{(n)}} = LU$$

上三角矩阵

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & \vdots & & & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

定理（矩阵的LU分解）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \dots & \\ l_{n1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \dots & \vdots \\ & & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

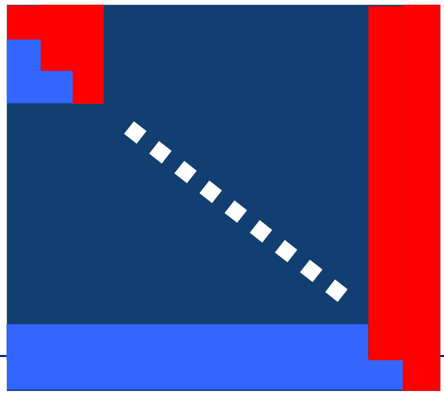
设A为 n 阶矩阵，若A的所有顺序主子式均不为0，则 A 可分解为一个单位下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，且这种分解是唯一的。

a

$$\Rightarrow \quad u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \qquad i = 1,2,\dots,n \quad j = 1,2,\dots,i$$

b

$$\Rightarrow \quad l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} \qquad i = 2,3,\dots,n \quad j = 1,2,\dots,i-1$$



利用矩阵的LU分解对解方程组有什么作用?

对于要求解一组方程组

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}_1$$
$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}_2$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}_k$$

采用如LU分解等三角分解法具有优越性。

例题：解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ 6x_1 - x_2 + 18x_3 = 2 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 18x_3 = 1 \end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{A}\vec{x} = \boldsymbol{LU}\vec{x} = \vec{b}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$

令 $\boldsymbol{U}\vec{x} = \vec{y}$，则 $\boldsymbol{L}\vec{y} = \vec{b}_i$

解出 $\vec{y}$ 代入上式即得 $\vec{x}$，那么解方程组变成相继解两个三角方程组。

LU分解求解方程组

对于

$$\boldsymbol{L}\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{b}}_i \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

有

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

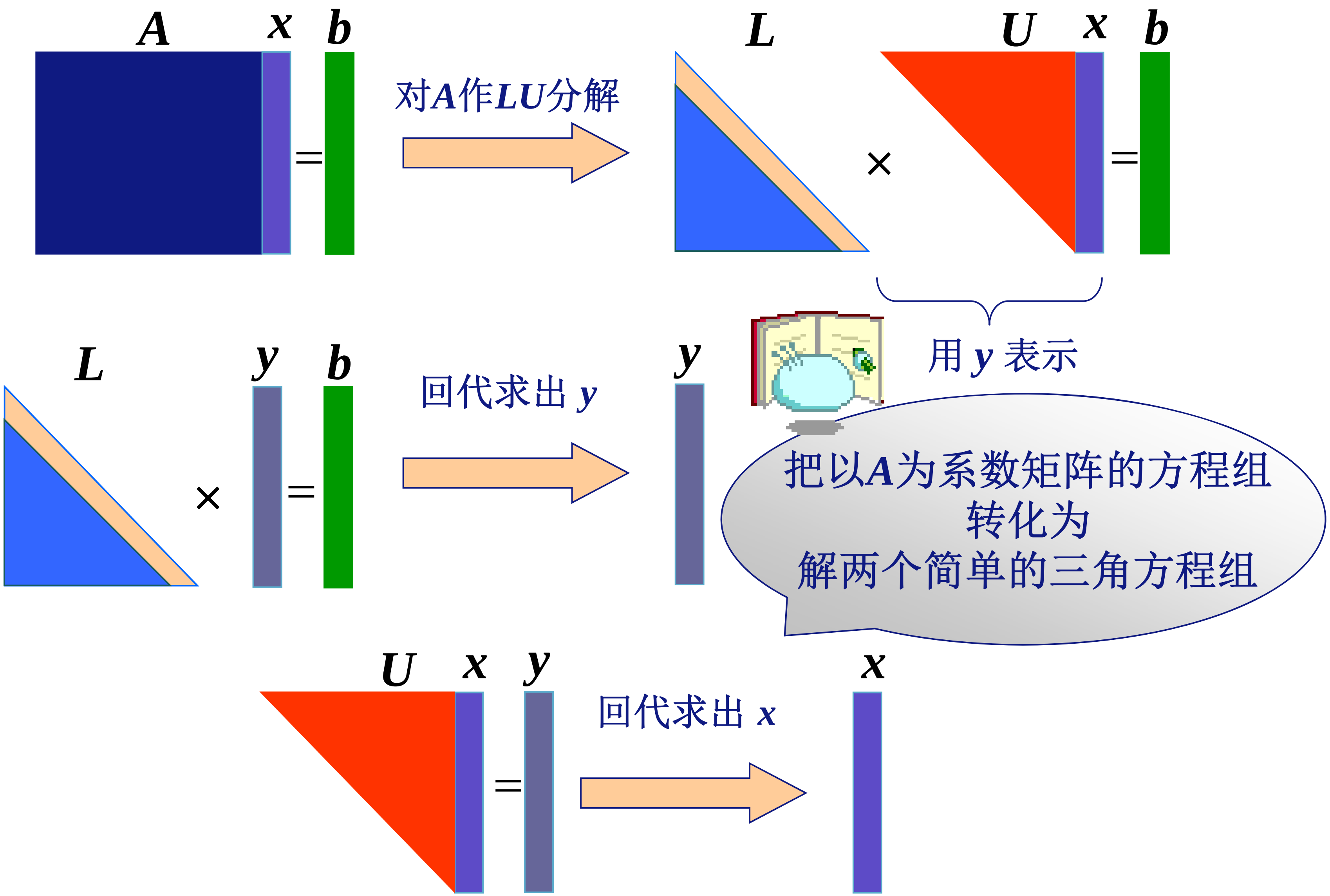
对于

$$\boldsymbol{U}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}} \qquad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

有

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k) / u_{ii} \qquad i = n, n-1, \cdots, 1$$

LU分解法解方程组


A x b
对A作LU分解
L U x b
用 y 表示
L y b
回代求出 y
y
把以A为系数矩阵的方程组
转化为
解两个简单的三角方程组
U x y
回代求出 x
x

例 题

◆ **采用*LU*分解法求解下列方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

解：先求出系数矩阵的 ***LU*** 分解。

$$l_{21} = a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} = 1/1 = 1 \qquad l_{31} = a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} = 5/1 = 5$$

$$A^{(2)} = L_1 A^{(1)} = L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

$$l_{32} = a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} = -14 / (-1) = 14$$

例 题

◆ **采用LU分解法求解下列方程组**

$$\begin{cases} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

故

$$U = A^{(3)} = L_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

例 题

◆ **采用*LU*分解法求解下列方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

得 $LU\vec{x} = \vec{b}$，设 $\vec{y} = U\vec{x}$

再利用***L***回代求出 $\vec{y}$，得

$$y_1 = b_1 = 10$$

$$y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = 17 - 1\times 10 = 7$$

$$y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = 13 - 5\times 10 - 14\times 7 = -135$$

再利用***U***回代求出 $\vec{x}$，得

$$x_3 = y_3 / u_{33} = -135/(-45) = 3$$

$$x_2 = (y_2 - u_{23}x_3)/u_{22} = (7 - 3\times 3)/(-1) = 2$$

$$x_1 = (y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3)/u_{11} = (10 - 3\times 2 - 1\times 3)/1 = 1$$

计算量分析
/* Amount of Computation */

$$u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad j = 1,2,\cdots,i$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}, \quad i = 2,3,\cdots,n, \quad j = 1,2,\cdots,i-1$$

A的*LU*分解需作

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2(j-1) = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

次乘除法。求 $\vec{y}$ 和 $\vec{x}$ 的乘除法计算量是

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

总乘除法计算量为

$$\frac{n(n^2-1)}{3} + n^2 = \frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

与高斯消去法的计算量相同。

其他矩阵的三角分解法*

对特殊的矩阵还有其他三角分解法，比如用于**对称正定矩阵**的LDL^{T}分解法和LL^{T}分解法，它们可以进一步改进提高解方程的效率。

目　录

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）

§1.3 选主元消去法 /* Pivoting Strategies */

例：单精度解方程组 $\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

/* 精确解为 $x_1 = \dfrac{1}{1-10^{-9}} = 1.\overbrace{00\ldots0}^{8个}100\ldots$ 和 $x_2 = 2 - x_1 = 0.\overbrace{99\ldots9}^{8个}899\ldots$ */

用Gaussian Elimination计算：

$$l_{21} = a_{21}/a_{11} = 10^9$$

$$a_{22} = 1 - l_{21} \times 1 = 0.\overbrace{0\ldots0}^{8个}1 \times 10^9 - 10^9 \doteq -10^9$$

小数被吃掉了

$$b_2 = 2 - l_{21} \times 1 \doteq -10^9$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix}$$

小主元 /* Small pivot element */ 可能导致计算失败，出现"大吃小"的情况

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 0$$

为什么x_1的解会这样？

定义：$a_{kk}^{(k)}$ 称为主元素（作为除数的元素）。

当除数很小时，作除法舍入误差大，会影响后续的消元值，使计算解不可靠。

方法2：利用行互换，避免绝对值小的元素作为主元

上例：$\begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 交换第1,2行 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{bmatrix}$

找出按列最大的主元

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

回代得到

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1 \quad ✓$$

列主元消去法 /* Partial Pivoting, or *maximal column pivoting* */

每次消元前选出待消元（按列）的未知数对应的系数中绝对值最大的元素为主元素，然后交换两行后再消元。

Step k: ① 选取 $|a_{i_k,k}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}| \neq 0$

② If $i_k \neq k$ then 交换第 k 行与第 i_k 行;

③ 消元

例题：用列主元高斯消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解 将方程的系数矩阵和右端项合在一起写为增广矩阵，然后按下列步骤求解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 列的主元为 4，交换第 1,2 行}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-\frac{1}{2}(1);(3)-\frac{1}{4}(1)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 0.5 & -1 \\ 0 & 1.5 & -1.25 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{主元为 }-2\text{，不变，}(3)+\frac{1.5}{2}(2)} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & -0.875 & 5.25 \end{bmatrix}$$

列主元高斯消去法的计算量：

比高斯消去法多出 $O(n^2/3)$ 的比较步骤

- 全主元消去法 /* Complete Pivoting */

  每一步都选择余下待消元（行列都考虑）的系数矩阵中绝对值最大的元素作为主元。

  最稳定，但行列交换需花费较多时间。

目　录

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）

§1.4 高斯-若当消去法 /* Gauss-Jordan Method */

与 高斯消去法 的主要区别：

- ☞ 每步不计算 l_{ik}，而是先将当前主元 $a_{kk}^{(k)}$ 变为 1
- ☞ 把 $a_{kk}^{(k)}$ 所在列的上、下元素全消为0

$$A\vec{x}=\vec{b} \quad\Rightarrow\quad I\,\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

即把系数矩阵消元为 **解方程时比高斯消去法更好吗?**

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & & & \\ & a_{22}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix} b_1^{(n+1)} \\ b_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n+1)} \end{bmatrix}$$

例题：用列主元Gauss-Jordan方法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解　其增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 列的主元为 4，对调第 1,2 行}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1) \div 4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2;(3)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{主元为}-2,(2)\div(-2)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)\times\frac{1}{2};\,(3)-(2)\times\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)\div(-\frac{7}{8})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(3)\times\frac{11}{8}\quad(2)+(3)\times\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

写为方程形式即

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

高斯-若当消去法 /* Gauss-Jordan Method */

➢ 运算量 /* Amount of Computation */

消去第 k 步需计算$(n-k+1)n$ 个系数，每计算1个系数需1次乘除法（第 k 列不用计算，默认为$(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)^T$，总乘除法次数为

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

比高斯消去法多 $(n^3-3n^2+2n)/6$ 次乘除法。故通常只用于求逆矩阵，而不用于解方程组。

求逆矩阵即 $[\,A\,|\,I\,]\Rightarrow[\,I\,|\,A^{-1}]$

高斯-若当消去法用于求逆矩阵

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[\text{高斯-若当法}]{} [I_n \mid T]$$

则

$$T = A^{-1}$$

这里，I_n为n阶单位矩阵。

例题：用Gauss-Jordan方法求出以下矩阵的逆矩阵。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 3 & 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 4 & & 1 & \\ 5 & 1 & 2 & & & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & & \\ 0 & \underline{-1} & 3 & -1 & 1 & \\ 0 & -14 & -3 & -5 & & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 10 & -2 & 3 & \\ & 1 & -3 & 1 & -1 & \\ & & \underline{-45} & 9 & -14 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & -0.1 & 0.2 \\ & 1 & & 0.4 & -0.07 & -0.07 \\ & & 1 & -0.2 & 0.31 & -0.02 \end{array}\right]$$

主要内容

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
- 2. 解线性方程组的误差分析
  - 向量、矩阵范数
  - 系数矩阵的条件数

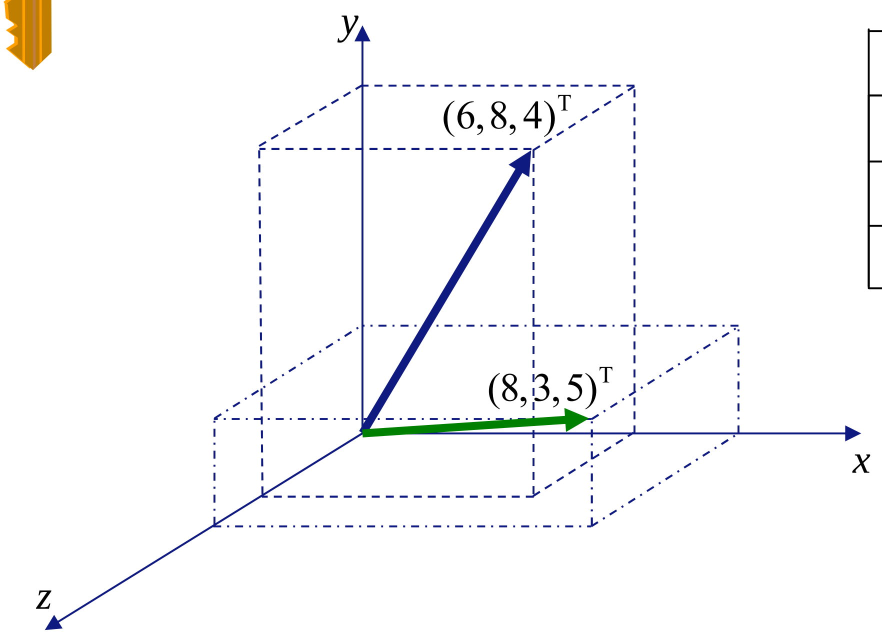
2.1 向量与矩阵的范数

很容易比较出单个实数的大小，但是，如果要比较大小的是向量（或矩阵），又或者要比较不同向量（或不同矩阵）之间的差异，怎么办呢？

根据向量的范数值，就可以比较出向量的“大小”了

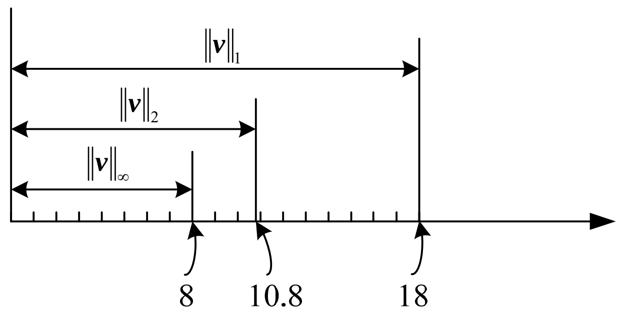
定义一种新的衡量标准

三元向量 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 对应一个三维空间



对应的范数大小		$(6,8,4)^{\mathrm{T}}$	$(8,3,5)^{\mathrm{T}}$
1范数	$\\|\boldsymbol{v}\\|_1=\|x\|+\|y\|+\|z\|$	18	16
2范数	$\\|\boldsymbol{v}\\|_2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	10.8	9.9
∞ 范数	$\\|\boldsymbol{v}\\|_\infty=\max(\|x\|,\|y\|,\|z\|)$	8	8

以$(6,8,4)^{\mathrm{T}}$为例，以上范数的几何意义以下



向量和矩阵范数 /* Norms of Vectors and Matrices */

——为了误差的度量

➢ 向量范数 /* vector norms */

定义 R^n空间的向量范数 $\|\cdot\|$ 对任意$x, y \in R^n$ 满足下列条件：

(1) $\|x\| \ge 0$； $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ （正定性 /* positive definite */）

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ 对任意 $\alpha \in C$ (齐次性 /* homogeneous */)

(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ （三角不等式 /* triangle inequality */ ）

常用向量范数：

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

注：$\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

➢ 矩阵范数 /* matrix norms */

定义 $R^{m\times n}$空间的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $A, B \in R^{m\times n}$ 满足：

(1) $\|A\| \geq 0$；$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ （正定性 /* positive definite */)

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ 对任意$\alpha \in C$ (齐次性 /* homogeneous */)

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ （三角不等式 /* triangle inequality */)

(4)* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ （相容 /* consistent */ 当 $m = n$ 时)

本例 Python代码

```python
# 运用高斯消元法解方程组

# 全局变量
N = 3        # 解n元方程组

R = [[1, 3, 1, 10],      #系数的增广矩阵
     [1, 2, 4, 17],
     [5, 1, 2, 13]]

def gaussForward(R):
    r = R
    # 向前消元
    for i in range(0, N):
        rii = r[i][i]
        for j in range(i, N+1):
            r[i][j] /= rii      #行i的系数乘以rii
        for k in range(i+1, N): #i+1行以下的处理
            rki = r[k][i]
            for j in range(i, N+1):
                r[k][j] -= r[i][j] * rki  #消去第一项
    return r
# gaussForward函数结束

def gaussBackward(r,x):
    # 回代
    for i in range(N-1, -1, -1): #以下段依次向上段代入
        sum = 0.0
        for j in range(i+1, N):
            sum += r[i][j] * x[j] #各项之和
        x[i] = r[i][N] - sum      #计算xi
# gaussBackward函数结束


#主执行部分
x = [0] * N          #未知变量
r = gaussForward(R)  #向前消元
gaussBackward(r, x)   #回代

#输出结果
print(r)
print(x)
```

作业

- 见CG系统