第三章
线性方程组的数值解法

龚 怡

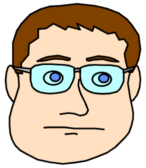
2167570874@qq.com

计算机学院

主要内容

- 1. 解线性方程组的直接法
  - Gauss消去法
  - 列主元（全主元）Gauss消去法
  - Gauss-Jordan消去法（矩阵求逆、行列式的计算）
  - 矩阵三角分解法（LU分解）
- 2. 解线性方程组的误差分析
  - 向量、矩阵范数
  - 系数矩阵的条件数

2.1 向量与矩阵的范数

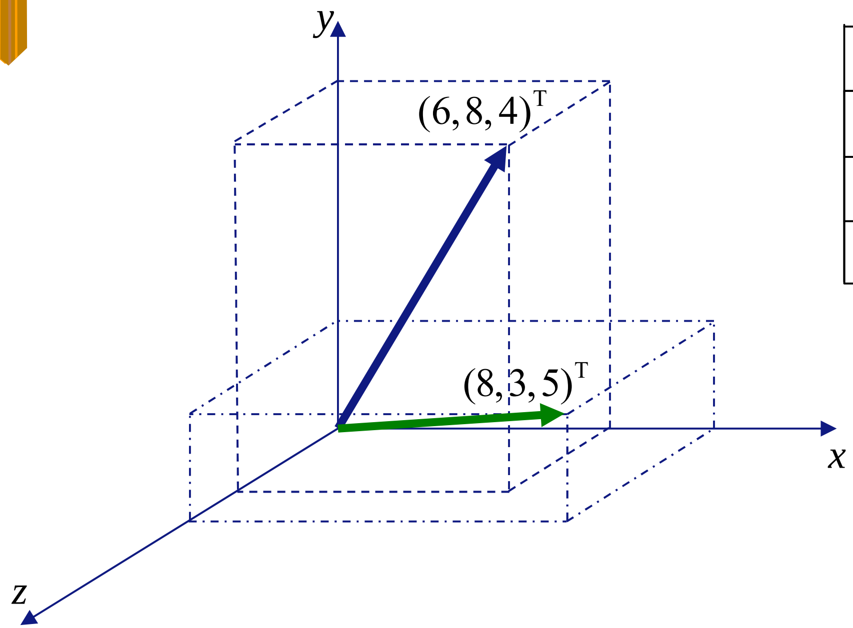


很容易比较出单个实数的大小，但是，如果要比较大小的是向量（或矩阵），又或者要比较不同向量（或不同矩阵）之间的差异，怎么办呢？

定义一种新的衡量标准

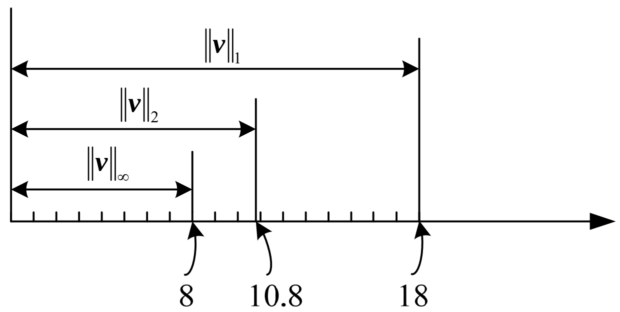
根据向量的范数值，就可以比较出向量的“大小”了

三元向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ 对应一个三维空间



对应的范数大小		$(6,8,4)^T$	$(8,3,5)^T$
1范数	$\lVert\mathbf{v}\rVert_1 = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert + \lvert z\rvert$	18	16
2范数	$\lVert\mathbf{v}\rVert_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	10.8	9.9
∞ 范数	$\lVert\mathbf{v}\rVert_\infty = \max(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert, \lvert z\rvert)$	8	8

以$(6,8,4)^T$为例，以上范数的几何意义以下



向量和矩阵范数 /* Norms of Vectors and Matrices */

——为了误差的度量

➢ 向量范数 /* vector norms */

定义 R^n空间的向量范数 $\|\cdot\|$ 对任意$x, y \in R^n$ 满足下列条件：

(1) $\|x\| \ge 0$； $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ （正定性 /* positive definite */）

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ 对任意 $\alpha \in C$ (齐次性 /* homogeneous */)

(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ （三角不等式 /* triangle inequality */）

常用向量范数：

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

注：$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

➢ 矩阵范数 /* matrix norms */

定义 $R^{m\times n}$空间的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $A, B \in R^{m\times n}$ 满足：

(1) $\|A\| \ge 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ （正定性 /* positive definite */）

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ 对任意$\alpha \in C$ (齐次性 /* homogeneous */)

(3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ （三角不等式 /* triangle inequality */ ）

(4)* $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ （相容 /* consistent */ 当 $m = n$ 时）

常用矩阵范数：

算子范数 /* operator norm */

特别有：$\| \boldsymbol{A} \|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$ （行和范数）

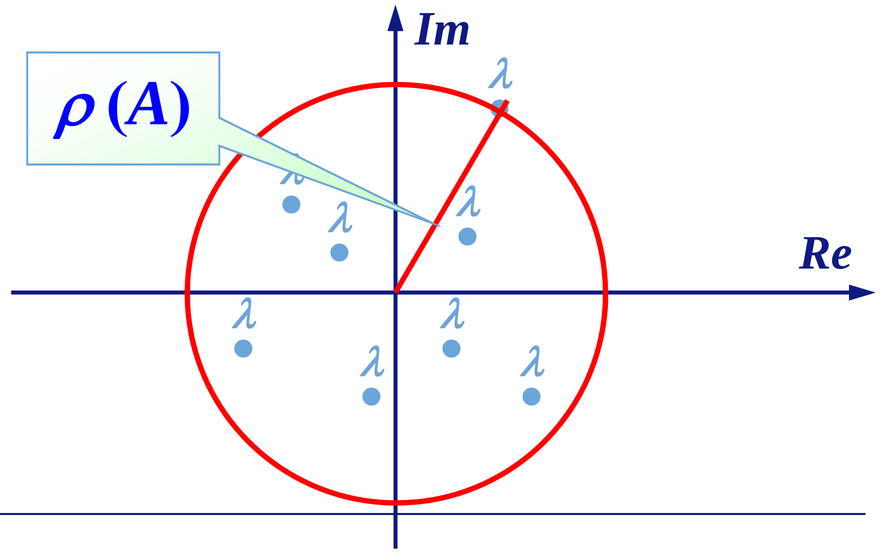
$\| \boldsymbol{A} \|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ （列和范数）

方阵 A^TA 的最大特征值的模

$\| \boldsymbol{A} \|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})}$ （谱范数 /* spectral norm */ ）

- 谱半径 /* spectral radius */

矩阵A的谱半径记为
$\rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} | \lambda_i |$，其中$\lambda_i$ 为 A 的特征值。



例题

求出下列向量和矩阵的1-范数、2-范数、∞ -范数

$$\boldsymbol{x}=(3,-2,0,1)^{\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

解：对于向量 $\boldsymbol{x}$ 来说

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=|3|+|-2|+|0|+|1|=6 \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2+1^2}=3.74$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max(|3|,|-2|,|0|,|1|)=3$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来说

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=5 \qquad \|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}=3.83$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=5$$

向量与矩阵范数的性质

定义 向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$ 是指对每一个 $1 \le i \le n$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ ， 即 $\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x} \|_\infty \to 0$

定理

$\boldsymbol{R}^n$ 上任何向量范数$\|\cdot\|$都是$\boldsymbol{n}$元连续函数。

$\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 上任何矩阵范数$\|\cdot\|$都是$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$元连续函数。

§2.2 线性方程组的误差分析

/* Error Analysis for Linear system of Equations */

为什么要研究误差问题?

由于解方程的过程中会引入舍入误差，这个误差是否会导致最终得到的解“不可靠”？

- 设 A 非奇异，已知线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$

若对方程组的系数矩阵 A 和右端项 $\vec{b}$ 作微小扰动，得

$$(A+\delta A)(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}+\delta\vec{b}$$

扰动后，方程组的解变为

$$\vec{x}^{*}=\vec{x}+\delta\vec{x}$$

$\boxed{\dfrac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\text{的值如何?}}$

求解 $A\vec{x}=\vec{b}$ 时，A 和 $\vec{b}$ 的误差对解 $\vec{x}$ 有何影响?

§2.2 线性方程组的误差分析

/* Error Analysis for Linear system of Equations */

先从两个简单情况进行分析：

- 设 A 精确，$\vec{b}$ 有误差 $\delta\vec{b}$，得到的解为 $\vec{x}+\delta\vec{x}$，即

$$A(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}+\delta\vec{b}$$

绝对误差放大因子

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{x}=A^{-1}\delta\vec{b} \qquad \Rightarrow \quad \|\delta\vec{x}\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta\vec{b}\|$$

两边取范数

又 $\|\vec{b}\|=\|A\vec{x}\|\le\|A\|\cdot\|\vec{x}\| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\|\vec{x}\|}\le\dfrac{\|A\|}{\|\vec{b}\|}$

算子范数中矩阵范数与向量范数的相容性

两式相乘

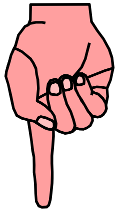
相对误差放大因子

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

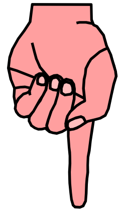
这个式子表明解的扰动与右端项扰动的关系。

另一种情况：

- 设 $\vec{b}$ 精确，A有误差δA，得到的解为$\vec{x}+\delta\vec{x}$，即



$$(A+\delta A)(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}$$



$$A(\vec{x}+\delta\vec{x})+\delta A(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}$$

$$\Rightarrow\quad \delta\vec{x}=-A^{-1}\delta A(\vec{x}+\delta\vec{x})$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}+\delta\vec{x}\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|$$

$$=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$(A+\delta A)\vec{x}+(A+\delta A)\delta\vec{x}=\vec{b}$$

$$\Rightarrow\quad (A+\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow\quad A(I+A^{-1}\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow\quad \delta\vec{x}=-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A\vec{x}$$

等等。。谁说
$(I+A^{-1}\delta A)$ 可逆?

(只要δA充分小，使得

$$\|A^{-1}\delta A\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1\ )$$

另一种情况:

- 设 $\vec{b}$ 精确，A有误差δA，得到的解为$\vec{x}+\delta\vec{x}$，即

$$(A+\delta A)(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}$$

$$A(\vec{x}+\delta\vec{x})+\delta A(\vec{x}+\delta\vec{x})=\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{x}=-A^{-1}\delta A(\vec{x}+\delta\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}+\delta\vec{x}\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|$$

$$=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$(A+\delta A)\vec{x}+(A+\delta A)\delta\vec{x}=\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad (A+\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad A(I+A^{-1}\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{x}=-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}=\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

另一种情况：

- 设 $\vec{b}$ 精确. …为 $\vec{x}+\delta\vec{x}$，即

$\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$是关键的误差放大因子，称为A的条件数，记为*cond* (A)，越**大**则 A 越病态，难得准确解。

$$A(\vec{x}+\delta\vec{x})+\delta A(\vec{x}+\ldots$$

$$(A+\delta A)\vec{x}+(A+\delta A)\delta\vec{x}=\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad (A+\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad A(I+A^{-1}\delta A)\delta\vec{x}=-\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{x}=-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\vec{x}=-A^{-1}\delta A(\vec{x}+\delta\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}+\delta\vec{x}\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\| = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|}=\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

其中:

恰如公式 $\dfrac{1}{1+a}=1-a+a^2-\cdots$ 对$|a|<1$成立，

当$\|A^{-1}\delta A\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$时，有

$$(I+A^{-1}\delta A)^{-1}=\mathrm{I}-A^{-1}\delta A+(A^{-1}\delta A)^2-\cdots$$

$$=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}(-1)^k(A^{-1}\delta A)^k$$

$$\left\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\right\|=\frac{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|^{\infty}}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}$$

$$\le\frac{1}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}$$

$$\delta\vec{x}=-(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A\vec{x}$$

$$\Rightarrow\frac{\left\|\delta\vec{x}\right\|}{\left\|\vec{x}\right\|}\le\left\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\right\|\cdot\left\|A^{-1}\delta A\right\|$$

$$\le\frac{1}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}\cdot\left\|A^{-1}\delta A\right\|$$

注： cond (A) 的具体大小与 $\|\cdot\|$ 的取法有关，但相对大小一致。

cond (A) 取决于A，与解题方法无关。

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\frac{cond\ (A)}{1-cond\ (A)\|\delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}\right)$$

常用条件数有：

$cond\ (A)_1$　$cond\ (A)_\infty$　$cond\ (A)_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)/\lambda_{\min}(A^T A)}$

特别地，若 A 对称，则 $cond\ (A)_2 = \dfrac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$

条件数的性质：

- A可逆，则 $cond\ (A)_p \ge 1$
- A可逆，$\alpha \in R$ 则 $cond\ (\alpha A) = cond\ (A)$
- A正交，则 $cond\ (A)_2=1$
- A可逆，R正交，则 $cond\ (RA)_2 = cond\ (AR)_2 = cond\ (A)_2$

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$ ， $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}$ 精确解为 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

计算 $cond\,(A)_2$ 。 注意A为对称矩阵

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix}$$

解： 考察 A 的特征根

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1.980050504 \\ \lambda_2 &= -0.000050504 \end{aligned}$$

$$cond\,(A)_2 = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \approx 39206 >> 1$$

测试病态程度：

给 $\vec{b}$ 一个扰动 $\delta \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.97 \times 10^{-4} \\ 0.106 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$， 其相对误差为

$$\frac{\| \delta \vec{b} \|_2}{\| \vec{b} \|_2} \approx 0.513 \times 10^{-4} < 0.01\%$$

此时精确解为 $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.0203 \end{pmatrix}$

$$\delta \vec{x} = \vec{x}^* - \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0203 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\| \delta \vec{x} \|_2}{\| \vec{x} \|_2} \approx 2.0102 > 200\%$$

例：Hilbert 阵 $H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$

如果方程组的系数矩阵呈现希尔伯特矩阵的形式，那么解极容易呈现病态！

$cond\,(H_2)_\infty = 27$ $\qquad$ $cond\,(H_3)_\infty \approx 748$

$cond\,(H_6)_\infty = 2.9 \times 10^6$ $\qquad$ $cond\,(H_n)_\infty \to \infty$ as $n \to \infty$

注：一般判断矩阵是否病态，并不计算A^{-1}，而由经验得出。

- 行列式很大或很小（如某些行、列近似相关）；
- 元素间相差大数量级，且无规则；
- 主元消去过程中出现小主元；
- 特征值相差大数量级。

一旦方程组呈现病态性，用直接法解方程组有可能使解严重偏离真实解。

小结

求解线性方程组的直接法：

问题表述：

解系数矩阵$\boldsymbol{A}$非奇异的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

特点：

① 经过可预先确定的有限次算术运算求出精确解；

② 实际上由于有舍入误差，只能得到近似解；

③ 需要对解得的解进行误差分析，不适合于求解病态方程组；

④ 一般适合于解系数矩阵$\boldsymbol{A}$为低阶稠密矩阵的方程组。

Gauss 迭代法	特点： ① $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$ ② 消元过程 ③ 回代过程 ④ 复杂度 $\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n\approx O(n^3)$	求解公式： 消去 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\cdot a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\cdot b_k^{(k)} \end{cases}$ $k=1,2,\cdots,n-1$, $i,j=k+1,k+2,\cdots,n$ 回代 $\begin{cases} x_n=b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \\ x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)/a_{ii}^{(i)} \end{cases}$ $i=n-1,n-2,\cdots,1$
列主元消去法	特点： ① Gauss 消去法的改进 ② 每次选择最大的列主元作除数，然后再消去 ③ 回代过程	求解公式： 每次消去前选择列主元 消元和回代同 Gauss 消去法

	特点：	求解公式：
Gauss-Jorden 法	① $Ax = b \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$ ② 无回代过程 ③ 复杂度 $(n^3 + 2n^2 - n)/2 \approx O(n^3)$	消去 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)} \end{cases}, \quad \begin{matrix} k = 1,2,\cdots,n \\ i = 1,2,\cdots,n, \ i \neq k \\ j = k+1, k+2, \cdots, n \end{matrix}$ 求解 $x_i = b_i^{(n)} / a_{ii}^{(i)}, \ i = 1,2,\cdots,n$
LU 分解法	① $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$ ② 把 A 分解后求解 ③ 复杂度 $\dfrac{1}{3}n^3 + n^2 - \dfrac{1}{3}n \approx O(n^3)$	$\begin{cases} l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}, & j = 1,2,\cdots,i-1 \\ u_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}, & j = 1,2,\cdots,i \end{cases}$ $i = 1,2,\cdots,n$ 求解 $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, \quad i = 1,2,\cdots,n$ $x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k) / u_{ii}, \quad i = n, n-1, \cdots, 1$

小结

<table>
<tr>
<td>向量与矩阵的范数</td>
<td>特点：
① 用于量度向量或矩阵的“大小”
② 向量范数具有正定性、齐次性、三角不等式的性质
③ 矩阵范数除了具有以上 3 种性质外还具有相容性</td>
<td>重点：
① 给定向量或矩阵，求出各种常用范数的值
② 矩阵范数与向量范数的相容性
③ 求出矩阵的谱半径
④ 矩阵范数与谱半径关系 $\rho(\boldsymbol{A}) < \|\boldsymbol{A}\|$</td>
</tr>
<tr>
<td>线性方程组的病态性及误差分析</td>
<td colspan="2">重点：
① 求出的计算解、系数矩阵、右端项的相对误差
② 相对误差的范围估算
③ 计算条件数 $\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$
④ 分析病态性</td>
</tr>
</table>

本例 Python代码

```python
# 运用高斯消元法解方程组

# 全局变量
N = 3        # 解n元方程组

R = [[1, 3, 1, 10],      #系数的增广矩阵
     [1, 2, 4, 17],
     [5, 1, 2, 13]]

def gaussForward(R):
    r = R
    # 向前消元
    for i in range(0, N):
        rii = r[i][i]
        for j in range(i, N+1):
            r[i][j] /= rii      #行i的系数乘以rii
        for k in range(i+1, N): #i+1行以下的处理
            rki = r[k][i]
            for j in range(i, N+1):
                r[k][j] -= r[i][j] * rki  #消去第一项
    return r
# gaussForward函数结束

def gaussBackward(r,x):
    # 回代
    for i in range(N-1, -1, -1): #以下段依次向上段代入
        sum = 0.0
        for j in range(i+1, N):
            sum += r[i][j] * x[j] #各项之和
        x[i] = r[i][N] - sum      #计算xi
# gaussBackward函数结束


#主执行部分
x = [0] * N          #未知变量
r = gaussForward(R)  #向前消元
gaussBackward(r, x)   #回代

#输出结果
print(r)
print(x)
```

前 言

数值线性代数中两个相关联的问题是如何求特征值/特征向量，以及当矩阵太大不能在计算机储存和进行Gauss消元法的工作量太大时如何求解超大型线性方程组。

这两个问题都需要迭代法，就是为解提供一个初始猜测（随机的向量），并且逐次改进这个估计直到可接受的精确水平。

本周内容

- 3. 解线性方程组的迭代法
  - 迭代法的基本概念
  - 雅克比（Jacobi）迭代法
  - 高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法
  - 迭代法的收敛性

线性方程组的数值解法

（1）直接法

指经过有限步算术运算，(假设计算过程中无舍入误差)可求得方程组精确解的方法。

由于实际计算中受字长限制，难免存在舍入误差，因此一般直接法也只能求得近似解。

代表算法：高斯（Gauss）消去法及其变形

（2）迭代法

指用某种极限过程去逐步逼近线性方程组精确解的方法。

优点是所需计算机存储单元小，程序设计简单，原始系数矩阵在计算过程中始终不变等。但存在收敛性与收敛速度的问题。

§1.1 解线性方程组的迭代法 /* Iterative Methods */

- 回顾用迭代法解一元方程 $f(x)=0$

将其改写成 $x=F(x)$

取一初值 $x^{(0)}$ 经过迭代计算 $x^{(k+1)}=F(x^{(k)})$ $,k=0,1,2,...$

迭代法的**主要特点**是**算法简单，舍入误差影响小。**

解方程组

$$\begin{cases} 10x_1-2x_2-3x_3=3 \\ -2x_1+10x_2-x_3=15 \\ -x_1-2x_2+5x_3=10 \end{cases} \xrightarrow[a_{ii}\neq 0]{\text{只要}} \begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.3 \\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+1.5 \\ x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.4x_2^{(k)}+2 \end{cases}$$

取一组近似值 $\vec{\mathbf{x}}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)})$ 代入右端，可得一组新的近似值 $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}=(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},x_3^{(k+1)})$

这种方法就是简单迭代法（也称为Jacobi迭代法）

本周内容

- 1. 解线性方程组的迭代法
  - 迭代法的基本概念
  - 雅克比（Jacobi）迭代法
  - 高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法
  - 迭代法的收敛性

1.2 雅克比（Jacobi）迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{a_{ii} \neq 0} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

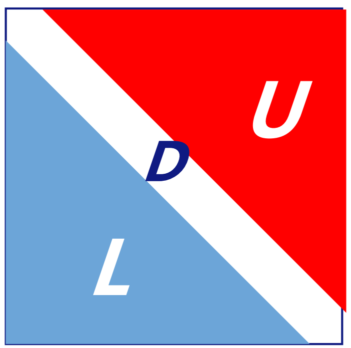
写成分量形式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i) \quad ,i = 1,2,\ldots,n \quad ,k = 0,1,\ldots$$

➢ 1.2 雅克比（Jacobi）迭代法

写成矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\
-\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\
-\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\
-\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

A= 

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (D+L+U)\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow D\vec{x} = -(L+U)\vec{x} + \vec{b}$$ 两边左乘 D^{-1}

$$\Leftrightarrow \vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{g}_J}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_J \, \boldsymbol{x}^{(k)} + \vec{g}_J$$

Jacobi 迭代矩阵

例：用Jacobi迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

要求取 $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$**，计算** $\vec{\boldsymbol{x}}^{(3)}$**，并与精确解** $\vec{\boldsymbol{x}} = (1 \quad 1 \quad 1)^{\mathrm{T}}$ **比较。**

给定一个方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

将方程组改写成

$$\begin{cases} x_1 = -0.3x_2 - 0.1x_3 + 1.4 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_3 + 0.5 \\ x_3 = -0.1x_1 - 0.3x_2 + 1.4 \end{cases} \qquad (1)$$

即

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.5 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

把初值$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)$代入式(1)的右端，得

迭代1：$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.4 \\ x_2^{(1)} = 0.5 \\ x_3^{(1)} = 1.4 \end{cases}$ 由于得到的值与初值不等，以此初值可形成迭代过程。

迭代2：把初值$\boldsymbol{x}^{(1)} = (1.4,0.5,1.4)$代入式(1)的右端，得

$$x_1^{(2)} = 1.11 \qquad x_2^{(2)} = 1.2 \qquad x_3^{(2)} = 1.11$$

迭代3：把初值$\boldsymbol{x}^{(2)} = (1.11,1.2,1.11)$代入式(1)的右端，得

$$x_1^{(3)} = 0.929 \qquad x_2^{(3)} = 1.055 \qquad x_3^{(3)} = 0.929$$

$$\vdots$$

如此迭代下去，可以得到逼近(1,1,1)的近似解

$$x_1^{(k)} \to 1 \qquad x_2^{(k)} \to 1 \qquad x_3^{(k)} \to 1$$

本周内容

- 1. 解线性方程组的迭代法
  - 迭代法的基本概念
  - 雅克比（Jacobi）迭代法
  - 高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法
  - 迭代法的收敛性

➤ 1.3 高斯-塞德尔（Gauss – Seidel）迭代法

有没有方法改进Jacobi迭代法？或者其他迭代方式？

分析Jacobi迭代公式可以看出，在迭代的每一步中用 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的全部分量来计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的所有分量。

考虑把第k+1次最新计算出来的近似值 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的分量$x_j^{(k+1)}$加以利用，就得到解方程组的**高斯-塞德尔（Gauss – Seidel）迭代法**。

➢ 1.3 高斯-塞德尔（Gauss – Seidel）迭代法

只存一组向量即可

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(\boxed{-a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(\boxed{-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3)$$

… … … …

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(\boxed{-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}} + b_n)$$

写成矩阵形式：

$$[L + D + U]x = b$$

$$Dx = -Lx - Ux + b$$

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b$$

$$\boxed{\vec{x}^{(k+1)}} = -D^{-1}(\boxed{L\vec{x}^{(k+1)}} + U\vec{x}^{(k)}) + D^{-1}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad (D + L)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}$$

$$x^{(k+1)} = B_s \quad x^{(k)} \quad + \quad \vec{g}_s$$

Gauss-Seidel迭代阵

分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

取初始值 $\vec{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$

Jacobi迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.3000	1.5000	2.0000
2	0.8000	1.7600	2.6600
3	0.9180	1.9260	2.8640
4	0.9116	1.9700	2.9540
⋮	⋮	⋮	⋮
9	0.9998	1.9998	2.9998

Gauss-Seidel迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} + 2 \end{cases}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.3000	1.5600	2.6840
2	0.8804	1.9445	2.9539
⋮	⋮	⋮	⋮
5	0.9997	1.9999	2.9999

Jacobi迭代法

$$\boxed{x^{(k+1)} = B_J\ x^{(k)} + \vec{g}_J}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}$$

Gauss-Seidel迭代法

$$\boxed{x^{(k+1)} = B_S\ x^{(k)} + \vec{g}_S}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}U\vec{x}^{(k)} + (D+L)^{-1}\vec{b}$$

迭代格式都是

$$x^{(k+1)} = \underbrace{B}_{\text{迭代矩阵}}\ x^{(k)} + \underbrace{\vec{g}_J}_{\text{常向量}}$$

二种方法都存在收敛性问题。

Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；

Jacobi法收敛时， Gauss-Seidel法也可能不收敛。

本周内容

- 1. 解线性方程组的迭代法
  - 迭代法的基本概念
  - 雅克比（Jacobi）迭代法
  - 高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法
  - 迭代法的收敛性

1.4 迭代法的收敛性 /* Convergence of Iterative methods */

$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$ **的收敛条件**

$$\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^* = (B\vec{x}^{(k)} + \vec{g}) - (B\vec{x}^* + \vec{g}) = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*) = B\vec{e}^{(k)}$$

$$\boxed{\vec{e}^{(k)} = B^k \vec{e}^{(0)}} \Rightarrow \|\vec{e}^{(k)}\| \le \|B\| \cdot \|\vec{e}^{(k-1)}\| \le \ldots \le \|B\|^k \cdot \|\vec{e}^{(0)}\|$$

充分条件: $\|B\| < 1 \Rightarrow \|B\|^k \to 0 \text{ as } k \to \infty$

$$\Rightarrow \|\vec{e}^{(k)}\| \to 0$$

必要条件: $\vec{e}^{(k)} \to \vec{0} \text{ as } k \to \infty \Rightarrow B^k \to 0$

迭代法收敛基本定理

设有方程组 $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{g}$，对任意初始向量 $\vec{x}^{(0)}$ 及任意常数向量 $\vec{g}$，解此方程组的迭代法（即 $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$，$k \to \infty$）收敛的充要条件是

$$\rho(B) < 1$$

其中 $\rho(B) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$，$\lambda_i$ 为 B 的特征值。

实际上，一个矩阵的谱半径是矩阵范数的下界，即 $\rho(B) \le \|B\|$

迭代从任意向量出发收敛 $\Rightarrow$ 充分条件：$\|B\| < 1$

迭代从任意向量出发收敛 $\xleftrightarrow{\text{等价}}$ $B^k \to 0$ $\xleftrightarrow{\text{等价}}$ $\rho(B) < 1$

例：分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法验证方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-3x_2-x_3\\ x_2=-0.5x_1-2x_3\\ x_3=-2.5x_1-0.5x_2\end{cases}$$

（1）Jacobi 迭代法的迭代矩阵是 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$，因此有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}=-\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0.5 & \\ & & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & -1\\ -0.5 & 0 & -2\\ -2.5 & -0.5 & 0\end{bmatrix}$$

那么求出 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{J}}$ 的特征根分别为 -3.14，$1.57+1.55i$，$1.57-1.55i$，因此 Jacobi 迭代法的迭代矩阵的谱半径大于 1，Jacobi 迭代法不收敛。

例：分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法验证方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$[L+D+U]x=0$$
$$Dx=-Lx-Ux$$
$$Dx^{(k+1)}=-Lx^{(k+1)}-Ux^{(k)}$$
$$x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}$$

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵是 $\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$，因此有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}=-\left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ & 0 & 4\\ & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & -1\\ 0 & 1.5 & -1.5\\ 0 & 6.75 & 3.25\end{bmatrix}$$

那么求出 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{G}}$ 的特征根分别为 0，2.38+3.06i，2.38-3.06i，因此 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵谱半径大于 1，Gauss-Seidel 迭代法不收敛。

关于收敛误差与速度

定理（充分条件）若存在一个矩阵范数使得 $\|B\|<1$，则迭代收敛，且有下列误差估计：

① $$\|\vec{x}^*-\vec{x}^{(k)}\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}^{(k-1)}\|$$

② $$\|\vec{x}^*-\vec{x}^{(k)}\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)}\|$$

可用 $\|\vec{x}^{(k)}-\vec{x}^{(k-1)}\|<\varepsilon$ **来控制精度。**

收敛速度与$\|B\|$有关，$\|B\|$越小，收敛越快。

判断迭代是否收敛需要计算迭代矩阵的谱半径计算麻烦，是否有一些特殊的迭代矩阵可以方便判断迭代是否收敛？

定理 若 A 为**严格对角占优阵** /* strictly diagonally dominant matrix */ 则解 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的Jacobi 和 Gauss - Seidel 迭代均收敛。

定义 （**严格对角占优**）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果矩阵A满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

即 A 的每一行的对角线元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称 A 为（按行）**严格对角占优**的矩阵。

若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

且至少有1个 i 使 $>$ 成立，则称 A 为（按行）**弱对角占优**的矩阵

例：试分析以下矩阵的对角占优性

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

非对角占优矩阵

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

严格对角占优矩阵

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

弱对角占优矩阵

此外，当矩阵A具有某种特殊性时，某些迭代法收敛。

定理 若A 不可约， 即不存在排列矩阵 P使

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

(即不能用初等行变换变成这种形式)，且具有（按行）弱对角占优，则解 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的Jacobi 和Gauss - Seidel 迭代均收敛。

定理 若A 为对称正定矩阵，则Gauss - Seidel 迭代收敛。

设M是n阶方阵，如果对任何非零向量z，都有$z^TMz > 0$，其中z^T 表示z的转置，就称M为正定矩阵

迭代法的优点：

1. 舍入误差影响小

2. 对于高阶方程组计算量小于直接法

3. 适合于求解稀疏矩阵问题

扩展内容：当 A 不具有强对角占优时的处理方法

① 交换方程的次序，使之强对角占优（交换A的行或列）

例如：

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2+5x_3=6 \\ 4x_1+x_2-x_3=11 \\ x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=11 \\ x_1-3x_2+x_3=2 \\ -2x_1+2x_2+5x_3=6 \end{cases}$$

② 进行线性组合，使得出的新的等价方程组具有强对角占优

例如：

$$\begin{cases} 11x_1-3x_2-2x_3=3 & (1) \\ -23x_1+11x_2+x_3=0 & (2) \\ x_1-2x_2+2x_3=-1 & (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1)\times 2+(2) \\ (1)+(2)+(3)\times 10 \end{matrix} \quad \begin{cases} 11x_1-3x_2-2x_3=3 \\ -x_1+5x_2-3x_3=6 \\ -2x_1-12x_2+19x_3=-7 \end{cases}$$

小结

问题表述：

把待求解方程组改写成其等价形式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}$，以迭代序列的形式迭代逼近方程的根。

特点：

① 构造出合适的迭代格式可加快收敛速度；

② 不容易构造能收敛到解的迭代函数；

③ 迭代收敛的充要条件是迭代矩阵的谱半径小于 1。

Jacobi 法	特点： ① 不是对所有方程组都收敛 ② 方程组的系数矩阵严格对角占优，或对角占优且不可约时收敛	求解公式： $x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$ $i=1,2,\cdots,n$ 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$
Gauss-Seidel 法	特点： ① 不是对所有方程组都收敛 ② 系数矩阵严格对角占优，或对角占优且不可约时收敛 ③ 系数矩阵对称正定时收敛	求解公式： $x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$ $i=1,2,\cdots,n$ 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$