广东工业大学 Guangdong University of Technology

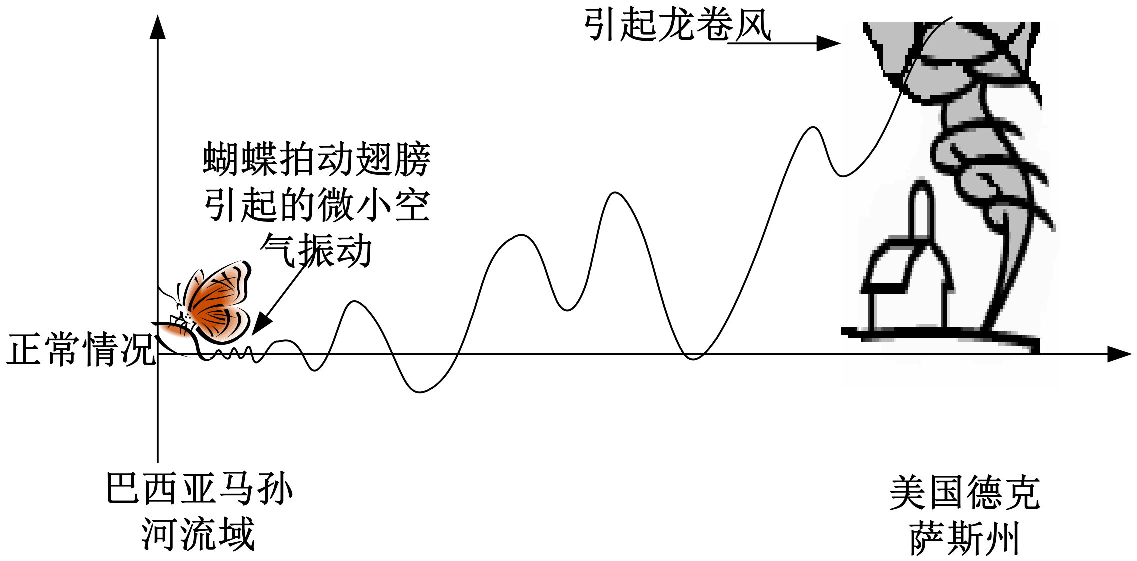
计算方法
(Numerical Methods)

龚怡

2167570874@qq.com

3.7 误差的积累与传播

- 蝴蝶效应：一只蝴蝶在巴西轻拍翅膀，可以导致一个月后德克萨斯州的一场龙卷风。



- 计算方法中的蝴蝶效应：
  - 极其微小的误差在计算过程中不断积累与传播，最终导致计算结果与理论结果严重偏离，使得计算方法完全失效
    —— 这种现象称为计算方法的病态性

误差——积累与传播

- 例：设计一个计算方法求解定积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+100}\mathrm{d}x$

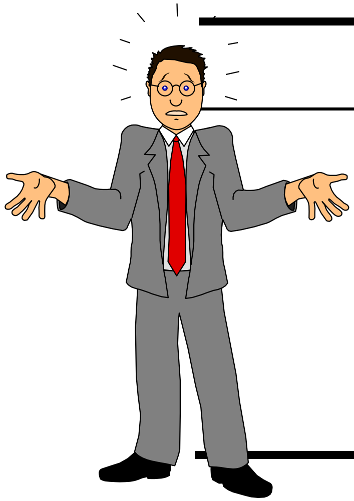
  $n = 0, 1, 2, \cdots$

注意此公式**精确**成立

解：利用递推关系 $I_n = \frac{1}{n} - 100 I_{n-1}$

取递推初值 $I_0^* = 0.995033\times10^{-2}$，其绝对误差限是

$|e(I_0^*)| = |I_0^* - I_0| \le 5\times10^{-9}$，代入递推公式计算可得：



n	I_n^*	n		I_n^*
0	0.995033×10^{-2}	4	?!	-0.833333×10^{-1}
1	0.496700×10^{-2}	5	?!	8.53333
2	0.330000×10^{-2}	6	?!	-853.167
3	0.333333×10^{-2}			

$I_6^* = 0.141618\times10^{-2}$

误差——积累与传播

- 出现误差的原因：

$$|I_1 - I_1^*| = |(1-100I_0) - (1-100I_0^*)| = 100|I_0 - I_0^*|$$

$$|I_2 - I_2^*| = \left|(\frac{1}{2} - 100I_1) - (\frac{1}{2} - 100I_1^*)\right| = 100|I_1 - I_1^*| = 100^2|I_0 - I_0^*|$$

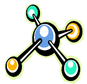
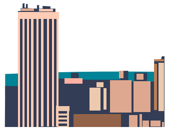
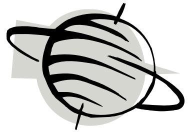
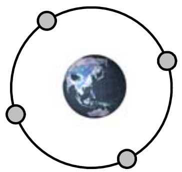
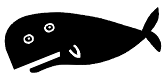
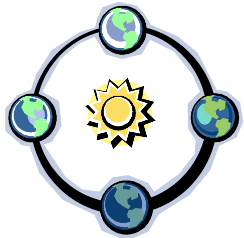
……

$$|I_n - I_n^*| = 100|I_{n-1} - I_{n-1}^*| = 100^n|I_0 - I_0^*|$$

误差以100的指数级增长！！

误差——积累与传播

❖ 即使 I_0^* 的误差非常微小，但随着 n 的增大，误差成为了天文数字（例子中以“米”作为单位）

n	误差大小			n	误差大小		
$n=0$	10E-9		分子的直径	$n=7$	10E5		特大城市的直径
$n=1$	10E-7		病毒的直径				
$n=2$	10E-5		细胞的直径	$n=8$	10E7		类地行星直径
$n=3$	10E-3		细线的直径				
$n=4$	0.1		树叶的长度	$n=9$	10E9		地月系统直径
$n=5$	10		鲸鱼的长度	$n=10$	10E11		日地距离
$n=6$	1000		公园的直径				

误差——积累与传播

❖ 如果已知 $I_6^* = 0.141618 \times 10^{-2}$ ，取递推公式 $I_n^* = \frac{1}{100}(\frac{1}{n+1} - I_{n+1}^*)$ ，$n = 5, 4, 3, 2, 1, 0$，可得：

n	I_n^*	n	I_n^*
6	0.141618×10^{-2}	2	0.330853×10^{-2}
5	0.165250×10^{-2}	1	0.496691×10^{-2}
4	0.198347×10^{-2}	0	0.995033×10^{-2}
3	0.248017×10^{-2}		

误差——积累与传播

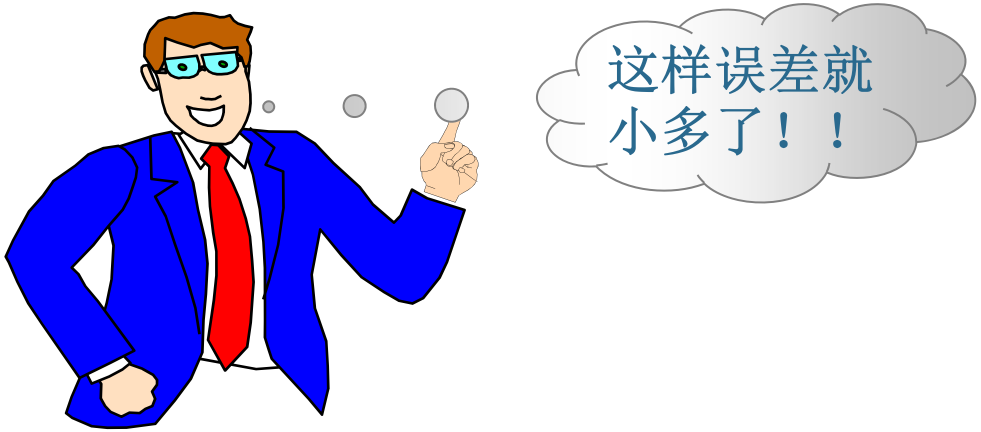
❖ 误差减小的原因：

$$\left|I_5 - I_5^*\right| = \frac{1}{100}\left|I_6 - I_6^*\right|$$

$$\left|I_4 - I_4^*\right| = \left(\frac{1}{100}\right)^2\left|I_6 - I_6^*\right|$$

……

$$\left|I_0 - I_0^*\right| = \left(\frac{1}{100}\right)^6\left|I_6 - I_6^*\right|$$



通过上述例子可知，在我们今后的讨论中，误差将不可回避，算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

3.8 四则运算的误差估计

- 和或差的绝对误差限不超过各项绝对误差限之和

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)$$

$$\begin{aligned}\left|e(x^* + y^*)\right| &= \left|(x+y) - (x^* + y^*)\right| = \left|(x - x^*) + (y - y^*)\right| \\ &\leq \left|x - x^*\right| + \left|y - y^*\right| = \left|e(x^*)\right| + \left|e(y^*)\right| \\ &\leq \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)\end{aligned}$$

3.8 四则运算的误差估计

- 和或差的绝对误差限不超过各项绝对误差限之和

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)$$

- 两个数的符号相同时，和的相对误差限不超过相加各项中最不正确的一项的相对误差限
- 被减数和减数相差很大时，其中大数的相对误差起决定性作用
- 应尽量避免两个相近的数相减

- 例：设 x = 18.496，y = 18.493，取4位有效数字，分析 x 和 y 的近似值相减后的绝对误差和相对误差。

3.8 四则运算的误差估计

- 乘积的相对误差是各乘数的相对误差之和。
- 乘积的绝对误差限为

$$\varepsilon(x^*y^*)=\left|x^*\right|\varepsilon(y^*)+\left|y^*\right|\varepsilon(x^*)$$

$$\begin{aligned}
\left|e(x^*y^*)\right| &= \left|xy-x^*y^*\right| = \left|(x^*+x-x^*)(y^*+y-y^*)-x^*y^*\right| \\
&= \left|(x^*+e(x^*))(y^*+e(y^*))-x^*y^*\right| \\
&= \left|x^*y^*+x^*e(y^*)+y^*e(x^*)+e(x^*)e(y^*)-x^*y^*\right| \\
&\le \left|x^*e(y^*)\right|+\left|y^*e(x^*)\right|+\left|e(x^*)e(y^*)\right| \\
&\le \left|x^*\right|\varepsilon(y^*)+\left|y^*\right|\varepsilon(x^*)+\underline{\varepsilon(x^*)\varepsilon(y^*)} \quad \text{很小忽略不计}
\end{aligned}$$

3.8 四则运算的误差估计

- **商的相对误差**是被除数与除数相对误差之差。
- **商的绝对误差限**为

$$\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right)=\frac{\left|x^*\right|\varepsilon(y^*)+\left|y^*\right|\varepsilon(x^*)}{\left|y^*\right|^2},\quad y\neq 0,\ y^*\neq 0$$

3.8 四则运算的误差估计

- 一般地，任意多次连乘、连除所得结果的相对误差限不超过参与运算的各数的相对误差限之和。

- 在实际计算时，为了保证结果的精度，只需视计算量的大小，多取一至二位有效数字运算即可。

3.8 四则运算的误差估计

- 例：测量得长方体的三条边长为10 ± 0.1，20 ± 0.1，50 ± 0.2，试估计长方体的表面积和体积的绝对误差限。
- 解：设三条边的边长为x，y，z，近似值为 $x^*=10$，$y^*=20$，$z^*=50$，绝对误差限为 $\varepsilon(x^*)=0.1$，$\varepsilon(y^*)=0.1$，$\varepsilon(z^*)=0.2$。

  可以估算得长方体表面积的绝对误差限是

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(2x^*y^*+2x^*z^*+2y^*z^*) &= 2[\varepsilon(x^*y^*)+\varepsilon(x^*z^*)+\varepsilon(y^*z^*)] \\
&= 2[|x^*|\varepsilon(y^*)+|y^*|\varepsilon(x^*)+|x^*|\varepsilon(z^*)+|z^*|\varepsilon(x^*)+|y^*|\varepsilon(z^*)+|z^*|\varepsilon(y^*)] \\
&= 2(10\times0.1+20\times0.1+10\times0.2+50\times0.1+20\times0.2+50\times0.1) \\
&= 38
\end{aligned}
$$

3.8 四则运算的误差估计

- 类似地，可以估算得长方体体积的绝对误差限是

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x^* y^* z^*) &= \varepsilon[(x^* y^*) z^*] = |x^* y^*| \varepsilon(z^*) + |z^*| \varepsilon(x^* y^*) \\
&= |x^* y^*| \varepsilon(z^*) + |z^*| [|x^*| \varepsilon(y^*) + |y^*| \varepsilon(x^*)] \\
&= |x^* y^*| \varepsilon(z^*) + |x^* z^*| \varepsilon(y^*) + |y^* z^*| \varepsilon(x^*) \\
&= 200 \times 0.2 + 500 \times 0.1 + 1000 \times 0.1 \\
&= 190
\end{aligned}
$$

4 设计计算方法的原则

- 计算方法的评价标准

稳定性

精度

计算量大小

存储量大小

逻辑复杂性

良好的计算方法

在设计计算方法时，往往难以兼顾上述要求，因此要根据实际情况衡量，并作取舍。

4 设计计算方法的原则

（1）避免两个相近的数相减

常常使用如下的变换公式：

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}},\quad \varepsilon\to 0$$

$$\ln(x+\varepsilon)-\ln x=\ln(1+\frac{\varepsilon}{x}),\quad \varepsilon\to 0\text{且}|x|>>0$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\qquad x\to 0$$

$$e^x-1=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)-1=x(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\cdots),\quad x\to 0$$

$$\begin{array}{r} 123.456 \\ -123.455 \\ \hline 0.001 \end{array}$$

6位有效数字

只有1位有效数字！

例：计算$10^7\times(1-\cos 2^\circ)$。

解：直接计算，可得$10^7\times(1-\cos 2^\circ)=10^7\times(1-0.9994)=6\times 10^3$

1位有效数字

变换后再计算，取$\sin 1^\circ=0.0175$，可得

$10^7\times(1-\cos 2^\circ)=10^7\times 2\times(0.0175)^2=6.125\times 10^3$

4位有效数字

4 设计计算方法的原则

（2）防止大数吃小数

$$\begin{array}{rl} 1.000000000 & \times 10^{10} \\ +\ 0.000000000\boxed{1} & \times 10^{10} \\ \hline 1.000000000 & \times 10^{10} \end{array} \Rightarrow 10^{10}+1$$

例：在有10位十进制有效数字的计算机上解 $x^2-(10^{10}+1)x+10^{10}=0$

（易知精确解为 $x_1=10^9, x_2=1$）

大数吃小数，$b=10^{10}$

✍ 算法1：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

✍ 算法2：变换求根公式

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-2c}{b-\mathrm{sgn}(-b)\sqrt{b^2-4ac}} \\ x_2=\dfrac{c}{ax_1} \end{cases}, \mathrm{sgn}(-b)=\begin{cases} 1, & -b\ge 0 \\ -1, & -b<0 \end{cases}$$

这样能得到准确解！

4 设计计算方法的原则

（2）防止大数吃小数（续）

例：在有10位十进制有效数字的计算机上解 $10^{10}+1+2+3+4$

解：直接计算

$$
\begin{aligned}
10^{10}+1+2+3+4 &= 10^{10}+0.000000000\times 10^{10}+2+3+4 \\
&= 10^{10}+0.000000000\times 10^{10}+3+4 \\
&= 10^{10}+0.000000000\times 10^{10}+4 \\
&= 10^{10}+0.000000000\times 10^{10} \\
&= 10^{10}
\end{aligned}
$$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

$$
\begin{aligned}
1+2+3+4+10^{10} &= 10+10^{10} \\
&= 0.000000001\times 10^{10}+10^{10} \\
&= 1.000000001\times 10^{10}
\end{aligned}
$$

4 设计计算方法的原则

（3）避免采用绝对值很小的数作除数

当采用绝对值很小的数作为分母时，容易产生浮点溢出现象，同时也可能引起大数吃小数的情况出现，导致误差很大。

4 设计计算方法的原则

（4）简化运算步骤，减少运算次数

- 良好的计算方法应该具有可接受的时间复杂度和（存储）空间复杂度。
- 简化运算步骤不但能够有效地减少运算时间，同时也能减少舍入误差的积累，是设计计算方法所必须遵循的原则。一般来说，计算机处理下列运算的速度为 $(+,-)>(\times,\div)>(\exp)$
- 因此，在设计计算方法时应该尽量使用速度较快的加减运算。

4 设计计算方法的原则

- **例：** 试设计一个计算方法，尽可能地减少求多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 的运算次数。

解： 如果分别计算 $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \cdots, a_n x^n$ 的值，再相加，则需要

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

次乘法运算及 n 次加法运算。

4 设计计算方法的原则

- **例：** 试设计一个计算方法，尽可能地减少求多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 的运算次数。

解： 如果按照如下的方法计算

$$\begin{cases} S_n = a_n \\ S_k = xS_{k+1}+a_k, \quad k=n-1,n-2,\cdots,1,0 \\ P_n(x)=S_0 \end{cases}$$

这样只需要执行 n 次加法和 n 次乘法。

4 设计计算方法的原则

（5）控制计算方法的误差传播，保证计算方法的稳定性 （续）

- 通常，我们把在运算过程中误差逐步衰减的算法称为稳定性算法，把误差的积累越来越大的算法称为不稳定算法。
- 在设计计算方法时必须研究误差的积累与传播过程，尽可能减少误差，采用稳定性算法，避免使用“病态”的不稳定的计算方法。

4 设计计算方法的原则

（5）控制计算方法的误差传播，保证计算方法的稳定性 （续）

特别是在运用递推公式来建立计算方法时，必须先分析递推公式中误差积累的过程，不能选用误差随着递推过程不断增大的递推公式，而应该采用误差逐渐减少的递推公式。

小结

计算方法：在计算机上求解数学问题的数值近似方法

特点：① 严谨性 ② 实践性 ③ 近似性 ④ 结构性

误差来源：① 观察误差 ② 模型误差 ③ 截断误差 ④ 舍入误差

误差的基本概念：

- 绝对误差：准确值与近似值之差 $e(x^*) = x - x^*$
- 绝对误差限：绝对误差的绝对值的上限 $|e(x^*)| = |x - x^*| \le \varepsilon(x^*)$
- 相对误差：绝对误差与准确值之比（一般用绝对误差与近似值之比代替）

$$e_r(x^*) = \frac{e(x^*)}{x} = \frac{x - x^*}{x}$$

- 相对误差限：相对误差的绝对值的上限 $|e_r(x^*)| = \frac{|x - x^*|}{|x|} \le \frac{\varepsilon^*}{|x|} = \varepsilon_r(x^*)$
- 有效数字与误差

x^*具有n位有效数字 $\Rightarrow$ 绝对误差限 $|e(x^*)| \le \varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times r^{m-n}$

x^*具有n位有效数字 $\Rightarrow$ 相对误差限 $|e_r(x^*)| \le \varepsilon_r(x^*) = \frac{1}{2a_1} \times r^{-(n-1)}$

相对误差限 $|e_r(x^*)| \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times r^{-(n-1)} \Longrightarrow$ x^*具有n位有效数字

小结

误差的传播：

- 四则运算的误差传播：

加减法： $$\varepsilon(x^* \pm y^*) = \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*)$$

乘法： $$\varepsilon(x^* y^*) = \left|x^*\right|\varepsilon(y^*) + \left|y^*\right|\varepsilon(x^*)$$

除法： $$\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{\left|x^*\right|\varepsilon(y^*) + \left|y^*\right|\varepsilon(x^*)}{\left|y^*\right|^2},\ \ y \neq 0,\ \ y^* \neq 0$$

小结

设计计算方法的基本原则

① 避免两个相近的数相减

② 防止大数吃小数

③ 避免采用绝对值很小的数作为除数

④ 简化运算步骤，减少运算次数

⑤ 控制计算方法的误差传播，保证计算方法的稳定性

作业

-
- 接使用二次方程$ax^2+bx+c=0$的解公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

恐怕会出现有效位丢失的问题。请写出避免有效位丢失的二次方程的解法程序。