

O Pêndulo Duplo

Um estudo computacional do comportamento caótico do sistema físico

GUILHERME DAMACENA DE CASTRO, 11224150

Instituto de Física, Universidade de São Paulo -SP

Maio, 2022

Resumo

O sistema físico do pêndulo duplo é muito rico pois permite explorar, através do estudo de um objeto familiar inclusive ao público não acadêmico, fenômenos avançados em física, como o caos. Neste estudo, é apresentado um método numérico de solução do pêndulo duplo, além de uma análise computacional do sistema. Isso permite confirmar a grande sensibilidade da evolução temporal das coordenadas generalizadas às condições iniciais, o que caracteriza o sistema como caótico.

I. INTRODUÇÃO

O pêndulo duplo é um sistema físico bastante interessante pois é capaz de juntar conceitos físicos complexos, como o caos, com ideias comuns para o público não acadêmico, afinal, quem nunca viu um pêndulo numa feira de ciências? Para estudarmos o pêndulo duplo, é necessário definir algumas coisas. Suponha que uma haste rígida e leve (virtualmente sem massa) de comprimento l_1 está presa em uma ponta na origem de um referencial (cartesiano usual 2D, como na figura 1. Na outra ponta da haste há uma massa m_1 . Há ainda uma segunda haste ideal de comprimento l_2 presa à massa m_1 em uma ponta, enquanto tem, na outra ponta, uma segunda massa m_2 .

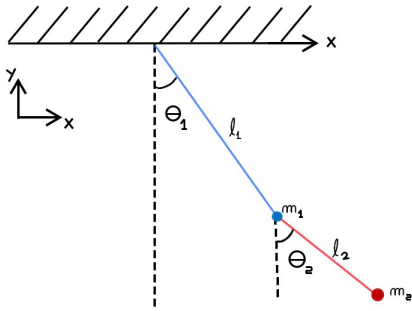


Figura 1: Esquema de pêndulo duplo.

Apesar de podermos atrelar às massas coordenadas cartesianas comuns x_1, y_1 e x_2, y_2 , o sistema pode ser completamente descrito usando as coordenadas generalizadas θ_1 e θ_2 . Fica claro, ainda, que valem as identidades 1.

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

Assim, a lagrangiana \mathcal{L} (equação 2, onde g é a aceleração da gravidade e v_i é a velocidade da massa i .) pode ser escrita em termos das coordenadas generalizadas θ_1 e θ_2 [1], o que permite que obtenhamos, através das equações de **Euler-Lagrange**, os momentos conjugados p_{θ_1} e p_{θ_2} .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \quad (2)$$

O sistema é completamente descrito pelo sistema de equações 3, onde $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, M é a massa total $m_1 + m_2$, e g é a aceleração da gravidade.

$$\begin{cases} p_{\theta_1} = M l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\Delta\theta) \\ p_{\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \Delta\theta \\ \frac{dp_{\theta_1}}{dt} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\Delta\theta) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - M g l_1 \sin(\Delta\theta) \\ \frac{dp_{\theta_2}}{dt} = m_2 l_1 l_2 \sin(\Delta\theta) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin(\Delta\theta) \end{cases} \quad (3)$$

Desejamos resolver o sistema de equações 3 numericamente usando o **Método Runge-Kutta** (RK2) [2]. Para isso, é necessário expressar as derivadas dos θ_i explicitamente. inicialmente, é interessante estudar o limite em que $m_1 \gg m_2$. Nesse caso, vale $M \approx m_1$. Portanto, temos as derivadas das coordenadas generalizadas e dos momentos conjugados dadas pelas equações 4.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\Delta\theta) \\ \dot{\theta}_2 = \frac{p_{\theta_2}}{m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta_1}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\Delta\theta) \\ \dot{p}_{\theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \sin(\Delta\theta) \\ \dot{p}_{\theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2}}{m_1 l_1 l_2} \sin(\Delta\theta) \end{cases} \quad (4)$$

As equações 4 serão o tema de grande parte das discussões desenvolvidas no presente trabalho. No entanto, vale a pena comentar que o caso completo (que não leva em conta a aproximação $m_1 \gg m_2$) também pode ser resolvido numericamente usando o método RK2. Para obtermos as equações completas, devemos calcular o hamiltoniano \mathcal{H} dado pela equação 5 e, então, calcular as derivadas temporais das coordenadas generalizadas e dos momentos conjugados.

$$\mathcal{H} = \dot{\theta}_1 p_{\theta_1} + \dot{\theta}_2 p_{\theta_2} - \mathcal{L} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{d\mathcal{H}}{dp_{\theta_1}} \\ \dot{\theta}_2 = \frac{d\mathcal{H}}{dp_{\theta_2}} \\ \dot{p}_{\theta_1} = -\frac{d\mathcal{H}}{d\theta_1} \\ \dot{p}_{\theta_2} = -\frac{d\mathcal{H}}{d\theta_2} \end{cases} \quad (6)$$

O pêndulo duplo permite que estudemos como pequenas mudanças nas condições iniciais de um sistema físico podem alterar radicalmente sua evolução temporal.

II. DESCRIÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

O Método Runge-Kutta é um método numérico muito conhecido e útil para simular a evolução temporal de sistemas físicos. Ele leva vantagens sobre o também famoso método de Euler pois melhora a precisão dos resultados sem que seja necessária grande diminuição do intervalo de iteração da simulação, o que faz com que o processo computacional seja muito mais eficiente [2].

Para estudar o pêndulo simples, o método escolhido é o Runge-Kutta de segunda ordem. Uma breve descrição do método é apresentada em seguida.

Seja uma grandeza física $\phi(t)$ que evolui no tempo e tem primeira derivada $\dot{\phi}(t)$ bem conhecida. É possível estimar $\phi(t + dt)$ como descrito pelas equações 8.

$$\begin{cases} \phi(t + dt) = \phi(t) + \dot{\phi}(t + \frac{dt}{2}) \cdot dt \\ \phi(t + \frac{dt}{2}) = \phi(t) + \dot{\phi}(t) \cdot \frac{dt}{2} \end{cases} \quad (7)$$

É possível perceber que, na prática, calculamos um valor $\phi_{1/2}$ chamado de valor a **meio-passo** da grandeza. O valor a meio passo é calculado utilizando o método de Euler usual! Em seguida, o a derivada temporal do valor a meio passo é utilizada para calcular a iteração completa.

Isso pode ser feito de forma mais clara definindo fatores k_1 e k_2 da grandeza.

$$\begin{cases} k_{1_\phi} = \dot{\phi}(t) \cdot dt \\ \phi_{1/2} = \phi(t) + \frac{k_{1_\phi}}{2} \\ k_{2_\phi} = \dot{\phi}_{1/2} \cdot dt \\ \phi(t + dt) = \phi(t) + k_{2_\phi} \end{cases} \quad (8)$$

É por isso que foi necessário definir explicitamente as grandezas derivadas temporais das coordenadas generalizadas utilizadas. Assim, é possível, iterativamente, descrever a evolução temporal da grandeza física de interesse.

Para o caso do pêndulo duplo, suponha que conheçamos as condições iniciais do problema: $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$, $p_{\theta_1}(0)$ e $p_{\theta_2}(0)$. Para o caso $m_1 \gg m_2$, calculamos, através das equações 4, as derivadas temporais iniciais (ou as equações 6 para o caso completo). Isso permite que calculemos os valores das grandezas físicas num tempo $t = 0 + dt$. Em seguida, o processo é repetido até um tempo final T_f determinado. A expressão explícita para os k_1 e k_2 estão disponíveis no apêndice A.

Foi desenvolvido um algoritmo em Python para realizar as simulações numéricas. O algoritmo é público e está disponível [aqui](#). Há também um manual do usuário para esse algoritmo disponível no apêndice B.

Um fator importante das simulações numéricas realizadas é a escolha do passo adequado. Afinal, se o passo for grande demais, a simulação pode ser muito imprecisa. No entanto, se ele for pequeno demais, a simulação pode consumir muito tempo. Assim, para cada conjunto de condições iniciais escolhidas, foram realizados testes com diferentes passos temporais até que fosse encontrado um passo a partir do qual o comportamento do sistema era virtualmente o mesmo. Esse passo foi o passo escolhido para cada uma das simulações descritas nesse trabalho.

III. RESULTADOS E DISCUSSÃO

I. Massa 1 muito maior que massa 2

Começamos nosso estudo com uma simulação bastante simples. Supondo que o sistema parte do repouso com completa amplitude angular. As figura 2 e 3 mostram a evolução temporal das coordenadas nos primeiros 10 segundos de simulação. Um pequeno filme da simulação pode ser encontrado [aqui](#).

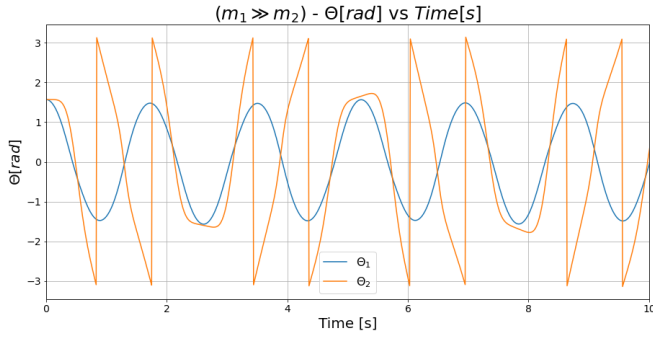


Figura 2: Evolução temporal simulada do comportamento das variáveis $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passos $dt = 0.01s$

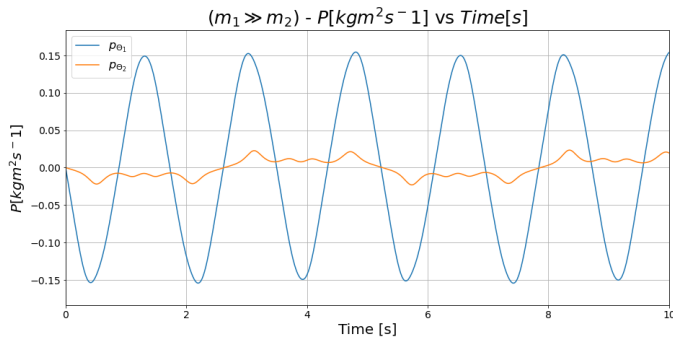


Figura 3: Evolução temporal simulada do comportamento das variáveis $p_{\theta_1}(t)$ e $p_{\theta_2}(t)$ considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passos $dt = 0.01s$

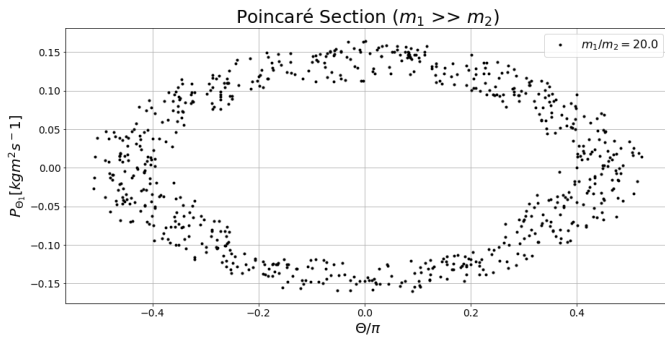
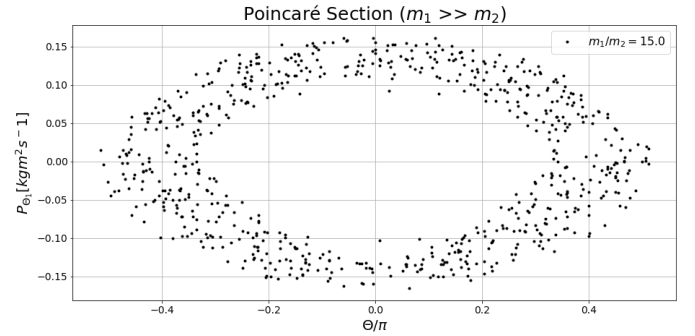


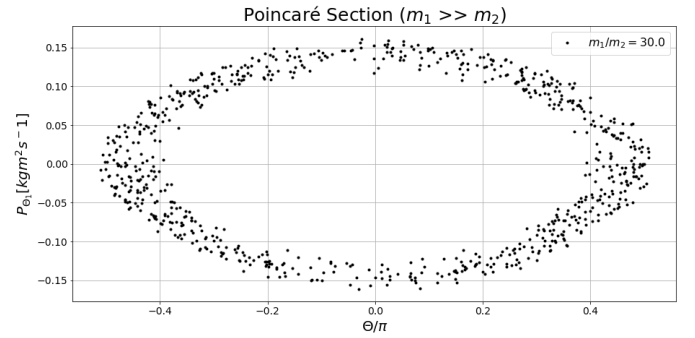
Figura 4: Seção de Poincaré considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passo $dt = 0.01s$

No estudo do pêndulo duplo, é difícil visualizar o espaço de fases, afinal, esse é um espaço de 4 dimensões. Sendo assim, podemos utilizar um outro recurso chamado Seção de

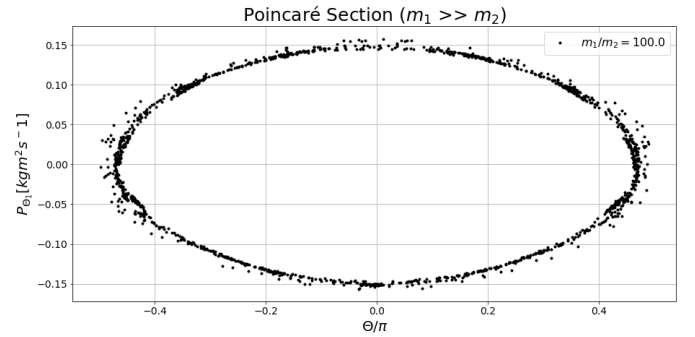
Poincaré, que mostra um corte do espaço de fases (θ_1, p_{θ_1}) quando a trajetória de θ_2 o cruza indo no sentido positivo. Na figura 4 está a seção de Poincaré para a primeira simulação.



(a)



(b)



(c)

Figura 5: Seções de Poincaré para diferentes valores de $\frac{m_1}{m_2}$. 5a com $\frac{m_1}{m_2} = 15$, 5b com $\frac{m_1}{m_2} = 30$ e 5c com $\frac{m_1}{m_2} = 100$.

Estudaremos agora a dependência com a razão entre as massas. Na figura 5, vemos 3 seções de Poincaré. Uma para $\frac{m_1}{m_2} = 15$, uma para $\frac{m_1}{m_2} = 30$ e uma para $\frac{m_1}{m_2} = 100$. É possível ver uma clara tendência da forma da seção de Poincaré a tomar um formato de elipse para $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty$. Isso é coerente! Afinal, para massas m_2 cada vez mais leves, o

sistema se torna cada vez mais próximo de um pêndulo simples com massa m_1 , para o qual o espaço de fases é uma elipse (garantida a conservação da energia).

Podemos ainda estudar a sensibilidade do sistema a pequenas variações nas condições iniciais. Para isso, tomamos $\delta\theta = \frac{\pi}{400}$. Isto é, 0.5% do $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ usado na simulação da figura 2. Foi feita uma nova simulação alterando apenas as condições iniciais $\theta_1(0) \rightarrow \theta_1(0) + \delta\theta$ e $\theta_2(0) \rightarrow \theta_2(0) - \delta\theta$. O comportamento do sistema nos primeiros 10 segundos de simulação é mostrado na figura 6. Como esperado, dada a variação mínima, não há diferenças claras entre o comportamento com ou sem a perturbação $\delta\theta$. No entanto, quando olhamos para os 10 segundos seguintes (figura 7), vemos que o comportamento é notavelmente diferente. Isso reflete o fato do pêndulo duplo ser um sistema caótico, o que significa que é altamente sensível às condições iniciais do problema [3]. Se, por acaso, aumentássemos o valor da perturbação para $\delta\theta = 2\%\theta_1(0)$, diferenças grandes no comportamento do sistema são notáveis mesmo nos primeiros 10 segundos de evolução temporal (figura 9).

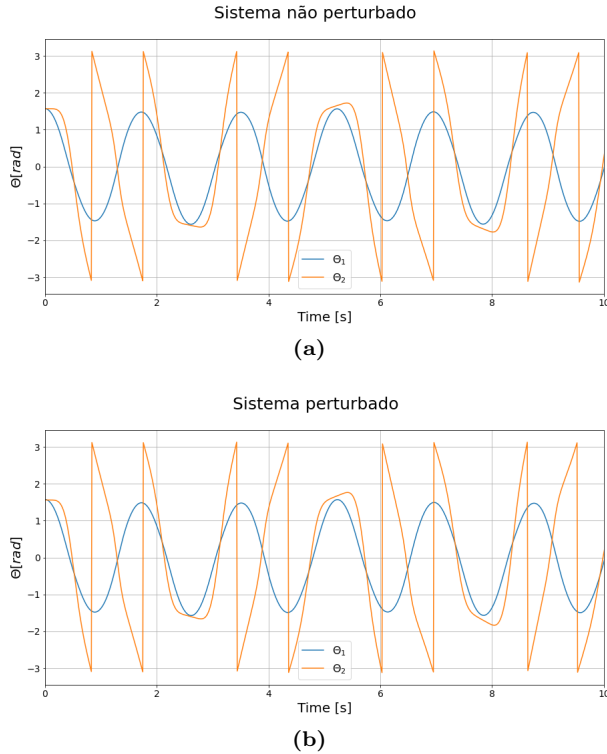


Figura 6: Comportamento dos 10 primeiros segundos de simulação para os sistemas não perturbado 6a e perturbado 6b com perturbação de 0.5% nos valores de θ iniciais.

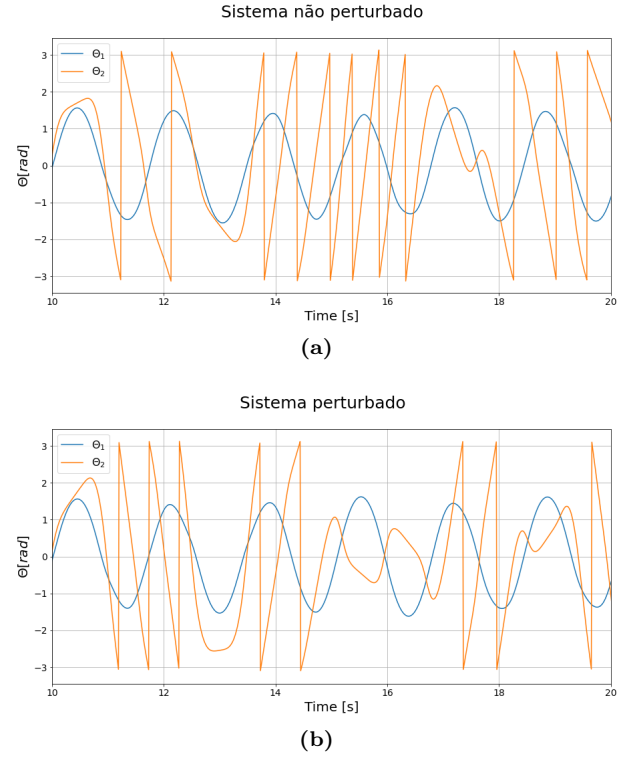


Figura 7: Comportamento no intervalo entre 10 e 20 segundos de simulação para os sistemas não perturbado 7a e perturbado 7b com perturbação de 0.5% nos valores de θ iniciais.

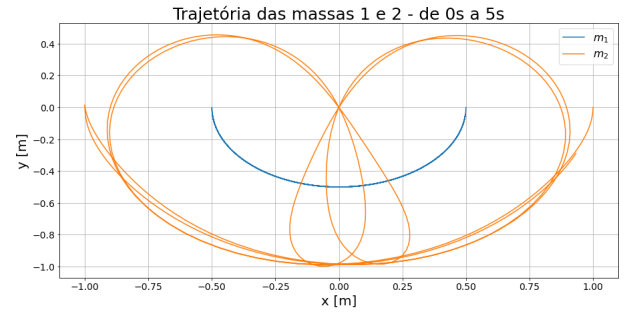


Figura 8: Trajetória das massas 1 e 2 entre 0s e 5s quando soltas partindo do repouso em $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$. Os comprimentos dos fios são $l_1 = l_2 = 0.5m$ e as massas $m_1 = 100g$ e $m_2 = 5g$.

Filmes dos primeiros 20 segundos do comportamento do sistema estão disponíveis aqui (vídeo 1) e **aqui** (vídeo 2). Além disso, é possível verificar que mudanças leves nos outros parâmetros causam efeitos semelhantes. O leitor pode realizar testes utilizando o código disponível no apêndice B.

Na figura 8 é também disponibilizada uma ilustração da trajetória percorrida pelas massas com as condições iniciais

partindo do repouso sobre o eixo y.

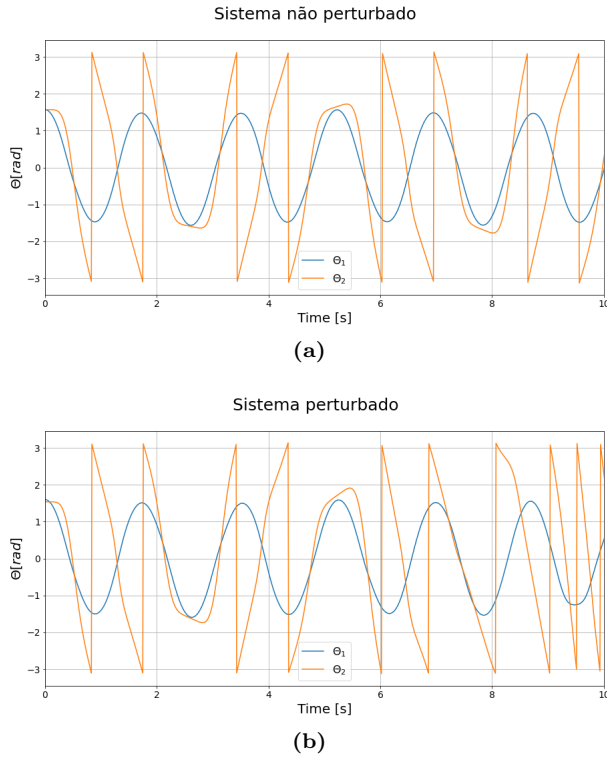


Figura 9: Comportamento nos 10 primeiros segundos de simulação para os sistemas não perturbado 9a e perturbado 9b com perturbação de 2% nos valores de θ iniciais

II. Caso completo

O primeiro passo interessante é tentar verificar a coerência entre o comportamento da simulação aproximada e da completa.

Para isso, foram realizados testes da simulação completa, baseada na aplicação do método RK2 às equações 6, usando os mesmos parâmetros das simulações anteriores.

Ao comparar as figuras 10 e 2, é possível constatar que para os primeiros 2 segundos de simulação, os métodos são bastante coerentes. No entanto, para tempos mais altos, há divergência. Isso se reflete nas trajetórias bastante diferentes vistas nas figuras 8 e 13. O motivo para tamanha diferença pode estar sobre o fato de que a razão de massas $\frac{m_1}{m_2} = 20$ não representa uma razão suficientemente grande para que o limite seja válido.

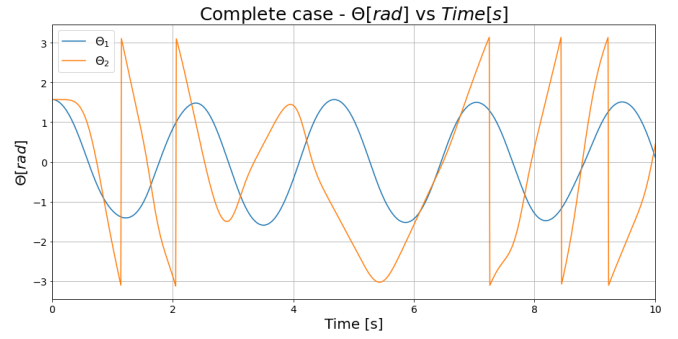


Figura 10: Evolução temporal simulada para o caso completo do comportamento das variáveis $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passos $dt = 0.01s$

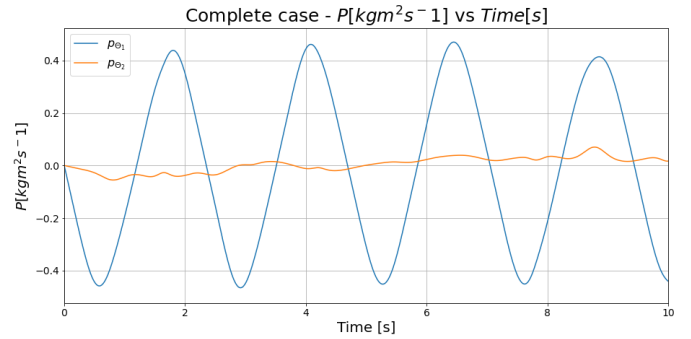


Figura 11: Evolução temporal simulada para o caso completo do comportamento das variáveis $p_{\theta_1}(t)$ e $p_{\theta_2}(t)$ considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passos $dt = 0.01s$

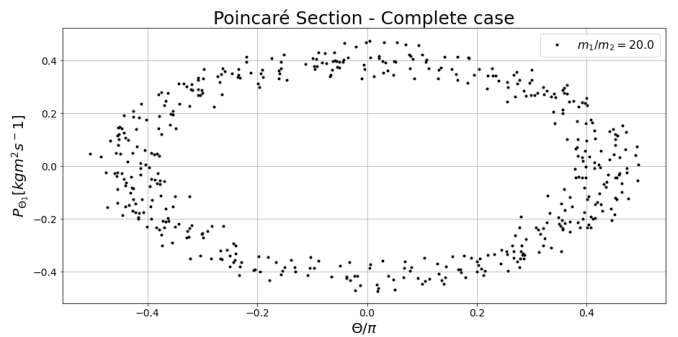


Figura 12: Seção de Poincaré para o caso completo considerando $m_1 = 20 \cdot m_2 = 5g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ e $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$ (repouso) e passo $dt = 0.01s$

Para testar essa hipótese, foi realizado uma nova si-

mulação usando $\frac{m_1}{m_2} = 100$. Para essa nova simulação, o passo adequado encontrado foi $dt = 0.001s$. Na figura 14 é visível que, apesar do comportamento ser coerente nos primeiros instantes, rapidamente os resultados das simulações divergem. A suposta incoerência entre os métodos pode ser explicada pela sensibilidade do sistema a quaisquer parâmetros que sejam mudados nas simulações. São necessários estudos mais aprofundados para investigar a origem dessas divergências.

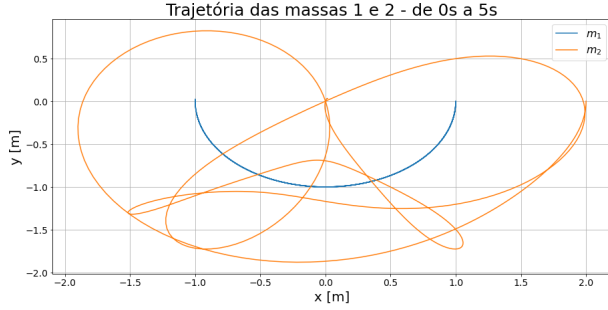


Figura 13: Trajetória das massas 1 e 2 entre 0s e 5s quando soltas partindo do repouso em $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$ para o caso completo. Os comprimentos dos fios são $l_1 = l_2 = 0.5m$ e as massas $m_1 = 100g$ e $m_2 = 5g$.

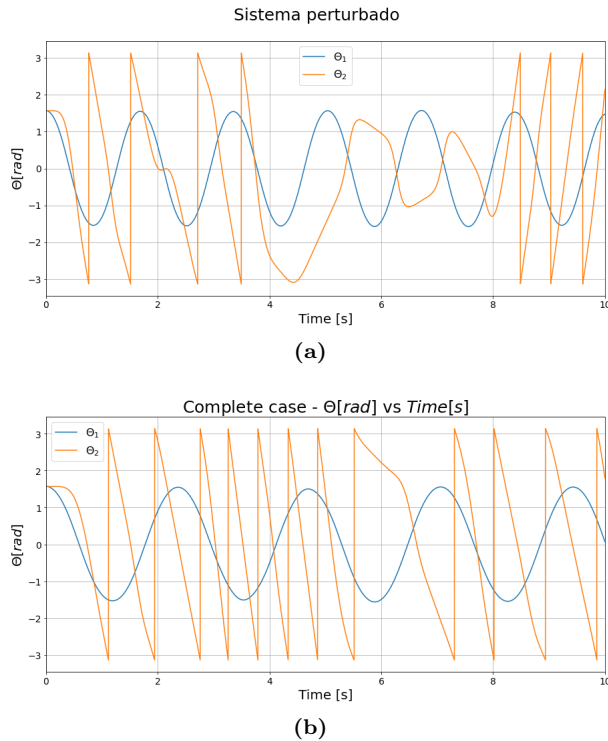


Figura 14: Comparação entre o comportamento previsto pelas simulações aproximada 14a e completa 14b.

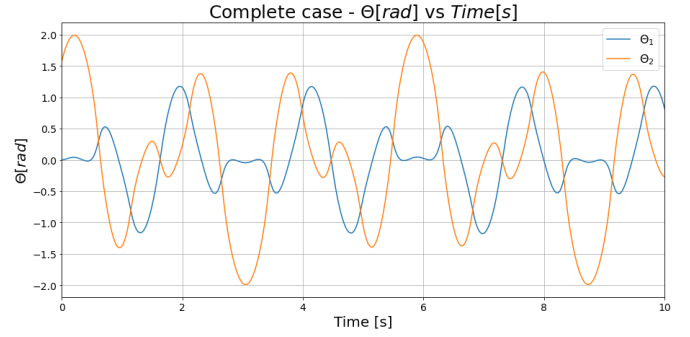


Figura 15: Evolução temporal simulada para o caso completo do comportamento das variáveis $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ considerando $m_1 = m_2 = 100g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = 0rad$, $\theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$, $p_{\theta_1}(0) = 0kgm^2s^{-1}$, $p_{\theta_2}(0) = 0.1kgm^2s^{-1}$ e passos $dt = 0.01s$

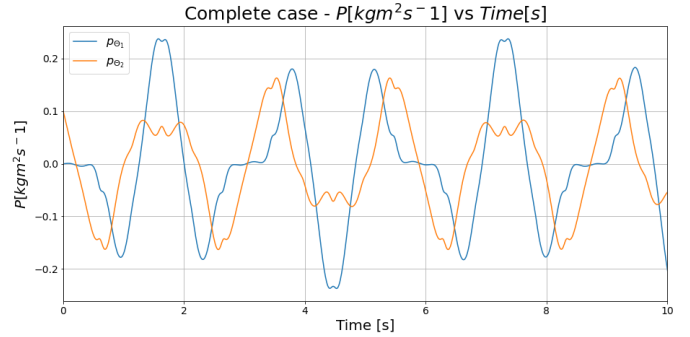


Figura 16: Evolução temporal simulada para o caso completo do comportamento das variáveis $p_{\theta_1}(t)$ e $p_{\theta_2}(t)$ considerando $m_1 = m_2 = 100g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$, $p_{\theta_1}(0) = 0kgm^2s^{-1}$, $p_{\theta_2}(0) = 0.1kgm^2s^{-1}$ e passos $dt = 0.01s$

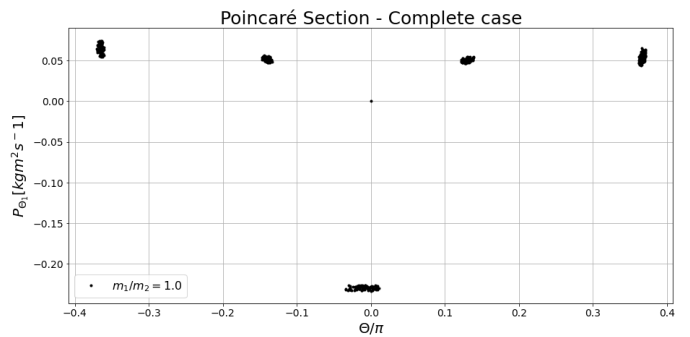


Figura 17: Seção de Poincaré para o caso completo considerando $m_1 = m_2 = 100g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$, $p_{\theta_1}(0) = 0kgm^2s^{-1}$, $p_{\theta_2}(0) = 0.1kgm^2s^{-1}$ e passos $dt = 0.01s$

Com o método completo, podemos utilizar parâmetros

mais realistas como $m_1 = m_2 = 100g$ para o pêndulo. Ainda, utilizamos $l_1 = l_2 = 0.5m$. As condições iniciais escolhidas são $\theta_1(0) = 0rad$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}rad$, $p_{\theta_2}(0) = 0.01kgm^2s^{-1}$ e $p_{\theta_1}(0) = 0kgm^2s^{-1}$. Para esses parâmetros, o passo mais adequado é $dt = 0.01s$.

Essas condições iniciais formam uma trajetória bastante interessante que pode ser encontrada na figura 19 e no filme disponível [aqui](#).

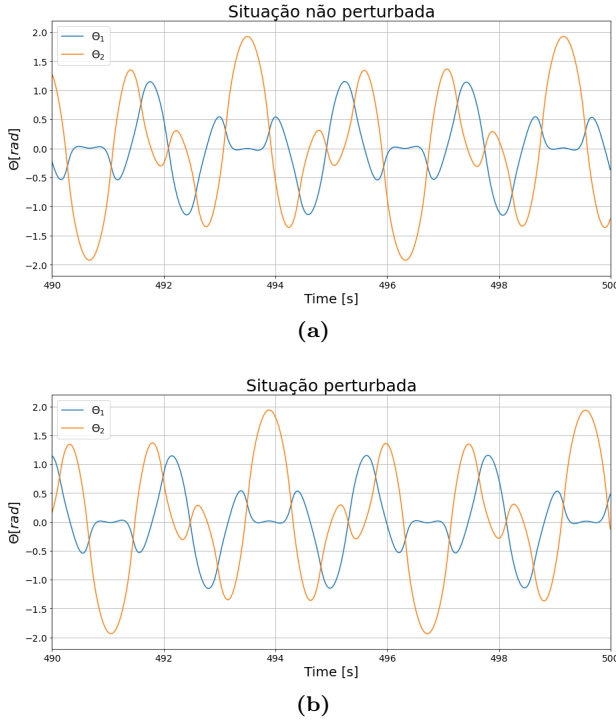


Figura 18: Comparação entre o comportamento para tempos longos $t \rightarrow 500s$ entre a solução não perturbada 18a e a perturbada 18b.

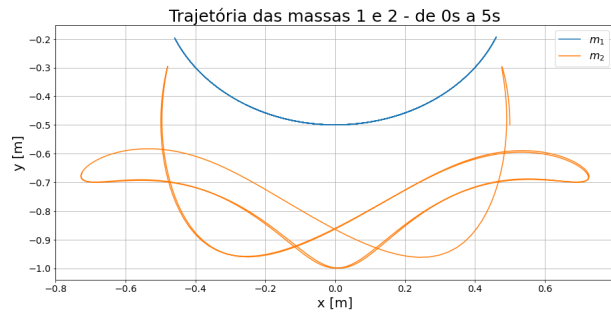


Figura 19: Trajetória das massas 1 e dois entre 0s e 5s quando soltas partindo de $\theta_1(0) = 0rad$, $\theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$, considerando $m_1 = m_2 = 100g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $p_{\theta_1}(0) = 0kgm^2s^{-1}$, $p_{\theta_2}(0) = 0.1kgm^2s^{-1}$ e passos $dt = 0.01s$

A seção de Poincaré é particularmente curiosa, mostrando apenas algumas concentrações de pontos. A seção de Poincaré estar bastante concentrada parece indicar que estamos em uma situação singular em que a trajetória é pouco afetada por perturbações mínimas nas condições iniciais, como se tivéssemos atingido um movimento periódico! Evidência disso é disposta na figura 18 onde é notável que não há grande diferença entre o comportamento do sistema perturbado e do não perturbado (a perturbação aqui indica aumento de 1% no momento inicial da massa 2).

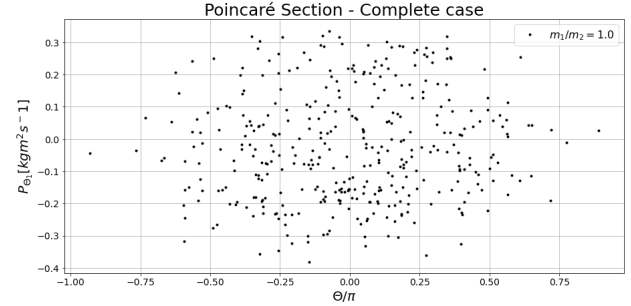


Figura 20: Seção de Poincaré para $m_1 = m_2 = 100g$, $l_1 = l_2 = 0.5m$, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi$, $p_{\theta_1}(0) = 0.05$ e $p_{\theta_2}(0) = 0$.

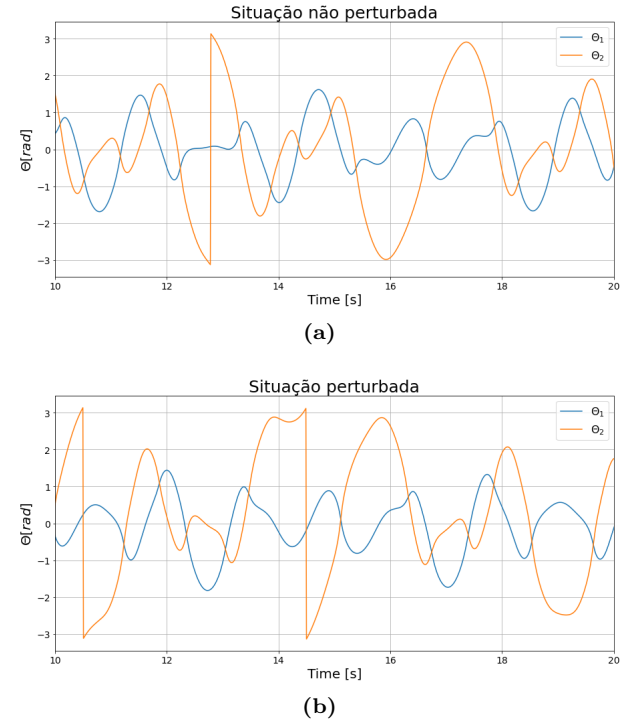


Figura 21: Comparação entre o comportamento para tempos entre $t = 10s$ e $t = 20s$ entre a solução não perturbada 21a e a perturbada 21b.

Isso não acontece na maioria dos casos. Um exemplo mais comum pode ser obtido mantendo os parâmetros dos fios e das massas mas mudando as condições iniciais para: $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \pi$, $p_{\theta_1}(0) = 0.05$ e $p_{\theta_2}(0) = 0$. Para esse caso, a seção de Poincaré é bastante dispersa, como é possível ver na figura 20. Nesse caso, para os instantes entre 10s e 20s o comportamento é bastante influenciado pela perturbação (aumento de 1% no momento inicial da massa 1), como evidenciado pela figura 21.

IV. CONCLUSÃO

Foi desenvolvido um estudo computacional da evolução temporal de um rico sistema físico: O pêndulo duplo. O método computacional utilizado, Runge-Kutta de segunda ordem foi descrito e explorado. Através de simulações computacionais, foi possível demonstrar a natureza caótica do pêndulo duplo através de pequenas mudanças nas condições iniciais do problema. Para isso, foram desenvolvidos dois algoritmos: Um aproximado (para $m_1 \gg m_2$ e completo. A coerência entre as duas soluções foi discutida e mostrada válida para tempos não muito longos. O material desenvolvido para a produção desse documento está disponível **aqui**.

REFERÊNCIAS

- [1] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [2] John Butcher. Runge-kutta methods. *Scholarpedia*, 2(9):3147, 2007.
- [3] Fernanda Hüller N. Heitor Ernandes Ana Carolina B. Dantas, Danielle de Brito Silva. *Sistemas Caóticos em Mecânica Clássica*. Instituto de Física, Universidade de São Paulo.

A. DESCRIÇÃO DETALHADA

Para a aproximação $m_1 \gg m_2$, vale:

$$\begin{cases} k_{\theta_1}^1 = \left(\frac{p_{\theta_1}(t)}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}(t)}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right) \cdot dt \\ k_{\theta_2}^1 = \left(\frac{p_{\theta_2}(t)}{m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta_1}(t)}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right) \cdot dt \\ k_{p_{\theta_1}}^1 = \left(-m_1 g l_1 \sin(\theta_1(t)) - \frac{p_{\theta_1}(t) p_{\theta_2}(t)}{m_1 l_1 l_2} \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right) \cdot dt \\ k_{p_{\theta_2}}^1 = \left(-m_2 g l_2 \sin(\theta_2(t)) + \frac{p_{\theta_1}(t) p_{\theta_2}(t)}{m_1 l_1 l_2} \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right) \cdot dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1^{1/2} = \theta_1(t) + \frac{k_{\theta_1}^1}{2} \\ \theta_2^{1/2} = \theta_2(t) + \frac{k_{\theta_2}^1}{2} \\ p_{\theta_1}^{1/2} = p_{\theta_1}(t) + \frac{k_{p_{\theta_1}}^1}{2} \\ p_{\theta_2}^{1/2} = p_{\theta_2}(t) + \frac{k_{p_{\theta_2}}^1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{\theta_1}^2 = \left(\frac{p_{\theta_1}^{1/2}}{m_1 l_1^2} - \frac{p_{\theta_2}^{1/2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1^{1/2} - \theta_2^{1/2}) \right) \cdot dt \\ k_{\theta_2}^2 = \left(\frac{p_{\theta_2}^{1/2}}{m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta_1}^{1/2}}{m_1 l_1 l_2} \cos(\theta_1^{1/2} - \theta_2^{1/2}) \right) \cdot dt \\ k_{p_{\theta_1}}^2 = \left(-m_1 g l_1 \sin(\theta_1^{1/2}) - \frac{p_{\theta_1}^{1/2} p_{\theta_2}^{1/2}}{m_1 l_1 l_2} \sin(\theta_1^{1/2} - \theta_2^{1/2}) \right) \cdot dt \\ k_{p_{\theta_2}}^2 = \left(-m_2 g l_2 \sin(\theta_2^{1/2}) + \frac{p_{\theta_1}^{1/2} p_{\theta_2}^{1/2}}{m_1 l_1 l_2} \sin(\theta_1^{1/2} - \theta_2^{1/2}) \right) \cdot dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(t+dt) = \theta_1(t) + k_{\theta_1}^2 \\ \theta_2(t+dt) = \theta_2(t) + k_{\theta_2}^2 \\ p_{\theta_1}(t+dt) = p_{\theta_1}(t) + k_{p_{\theta_1}}^2 \\ p_{\theta_2}(t+dt) = p_{\theta_2}(t) + k_{p_{\theta_2}}^2 \end{cases}$$

B. MANUAL DO USUÁRIO

- O material utilizado para a produção deste trabalho está disponível **aqui**.
- O código está bem comentado e deve ser razoavelmente intuitivo para qualquer um que tem alguma familiaridade com programação em python.
- O arquivo está dividido em duas partes. A primeira parte se trata da solução aproximada do pêndulo duplo para $m_1 \gg m_2$.
- Para utilizar o código e simular várias situações físicas, basta alterar como quiser as linhas de código evidenciadas pelo comentário "**# Set This**".
- Há duas seções grandes comentadas no algoritmo. Essas seções são referentes à geração de filmes animados da situação física. Foi decidido que é melhor mantê-las comentadas pois consomem muito tempo. No entanto, se o leitor desejar usá-las, é possível e intuitivo. Basta descomentá-las.
- Uma recomendação interessante é: Se desejar rodar apenas uma parte do código (a simulação completa ou a aproximada), comente a outra usando "**'' texto texto texto ''**". O algoritmo será melhorado no futuro. Novas versões deles serão publicadas. Para obter uma cópia, entre em contato com o autor do trabalho.