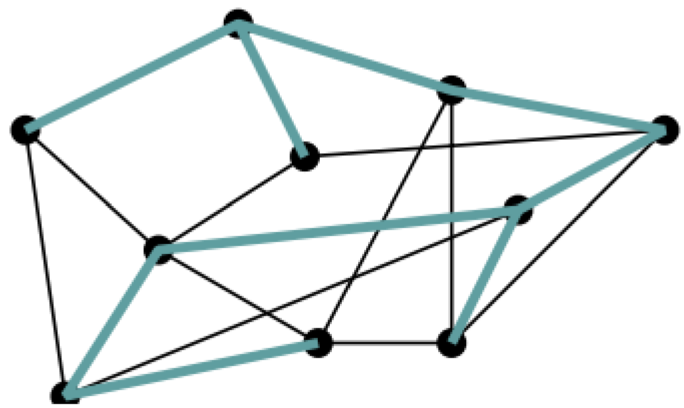
Alberi Minimi Ricoprenti

Albero ricoprente

Dato un grafo **non orientato connesso**, definiamo l'**albero ricoprente** come un **sottografo** che:

- è **aciclico**
- è **connesso**
- contiene **tutti** i nodi



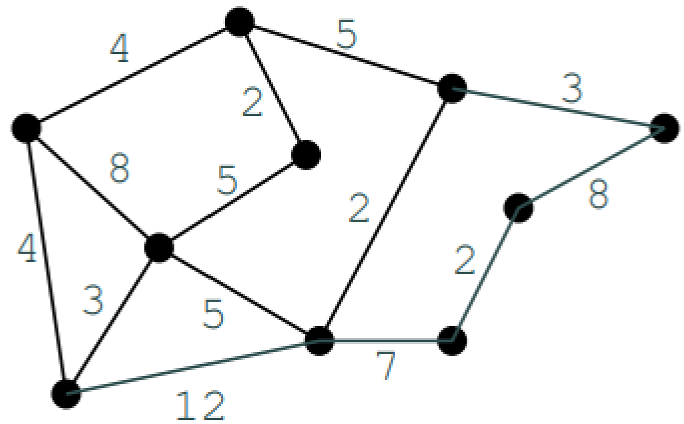
Evidenziato in celeste l'albero ricoprente del grafo.

Peso di un grafo

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato pesato con funzione peso W, definiamo il peso del grafo come

$$\sum_{e \in E} W(e)$$

ovvero sommando i pesi di tutti gli archi che costituiscono il grafo.



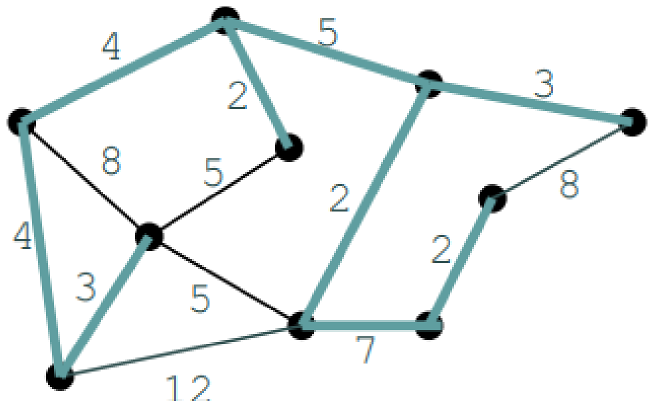
$W(G) = 70$

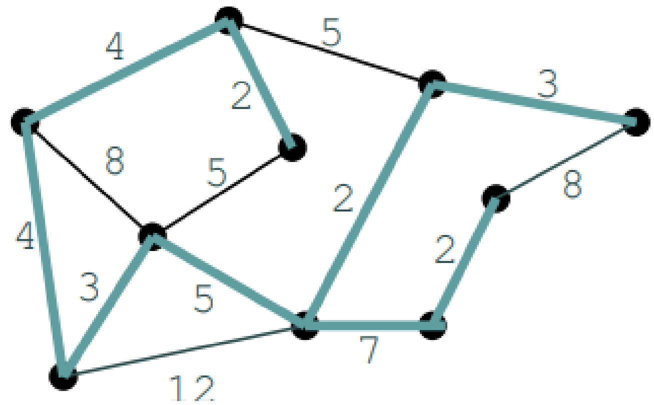
Esempio del peso di un grafo

Minimo Albero Ricoprente

Dato un albero ricoprente, definiamo il **minimo albero ricoprente** se è l'albero ricoprente con il peso minore tra tutti quelli possibili.
Gli alberi minimi ricoprenti non sono unici.
In inglese si chiamano **MST**, Minimum Spanning

Tree.





Algoritmo per trovare il minimo albero ricoprente

```
MINIMO_ALBERO_RICOPRENTE(G)
  A ← ∅
  while A non è un albero ricoprente do
    trova un arco (u, v) che sia “sicuro” per A
    A ← A ∪ (u, v)
```

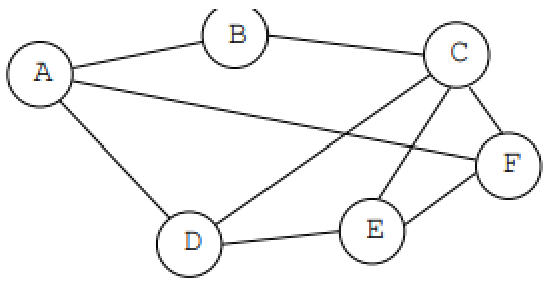
A all'inizio è un albero vuoto.
Finchè A **non è** un albero ricoprente(ovvero finchè non contiene tutti i nodi), trovo un arco (u,v) che sia **sicuro** per A e **glie lo aggiungo.**

Alla fine dell'algoritmo, il grafo $T = (V, A)$ è un albero minimo ricoprente.
Tuttavia bisogna prima capire come trovare gli archi **sicuri.**

Taglio di un grafo

Il taglio di un grafo G è una partizione di V in due insiemi: X e $V - X$.
Un arco (u, v) attraversa il taglio se $u \in X$ e $v \in V - X$, ovvero l'arco *inizia* da una partizione e *finisce* nell'altra.

Esempio:

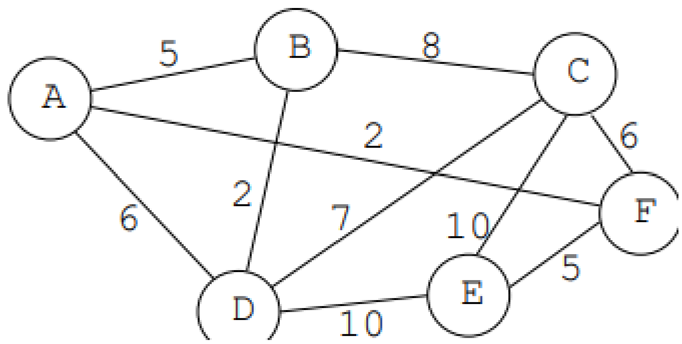


$X = \{A, C, E\}, V - X = \{B, D, F\}$
l'arco (A, F) *parte da* X *e arriva in* $V - X$.

Inoltre un taglio **rispetta** un insieme di archi A se nessuno di questi archi attraversa il taglio.

Definiamo infine un **arco leggero** l'arco con peso **minimo** tra quelli che attraversa il taglio.

Esempio 2:



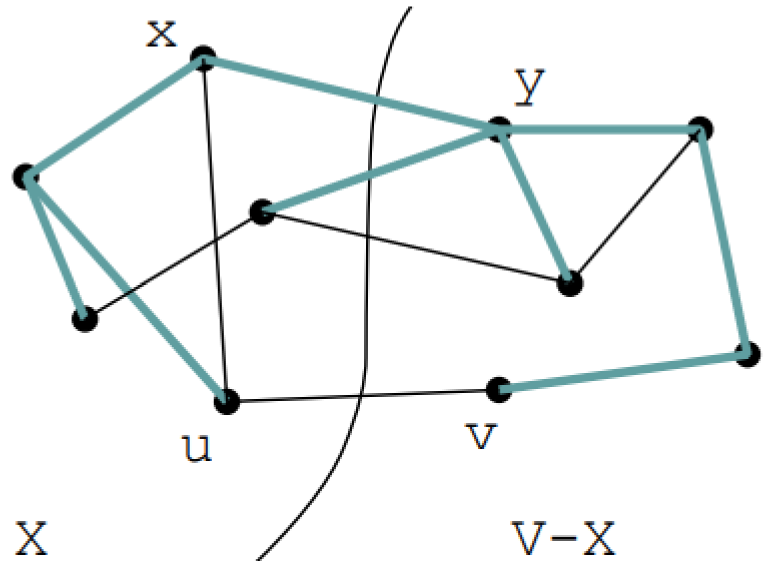
$X = \{A, C, E\}, V - X = \{B, D, F\}$
Il taglio rispetta l'insieme di archi $\{(C, E), (B, D)\}$
ma non l'insieme $\{(A, F), (B, C)\}$.
Inoltre notiamo che tra tutti gli archi che non rispettano il taglio, l'arco (A, F) *è quello con peso minimo.*

Teorema degli archi sicuri

Dato $G = (V, E)$ non orientato, connesso e aciclico.
Definiamo A un sottoinsieme di E contenuto in qualche **MST.**
Definiamo inoltre un taglio $(X, V - X)$ che rispetta A.
Se l'arco (u, v) è un **arco leggero** che attraversa $(X, V - X)$ allora è **sicuro** per A

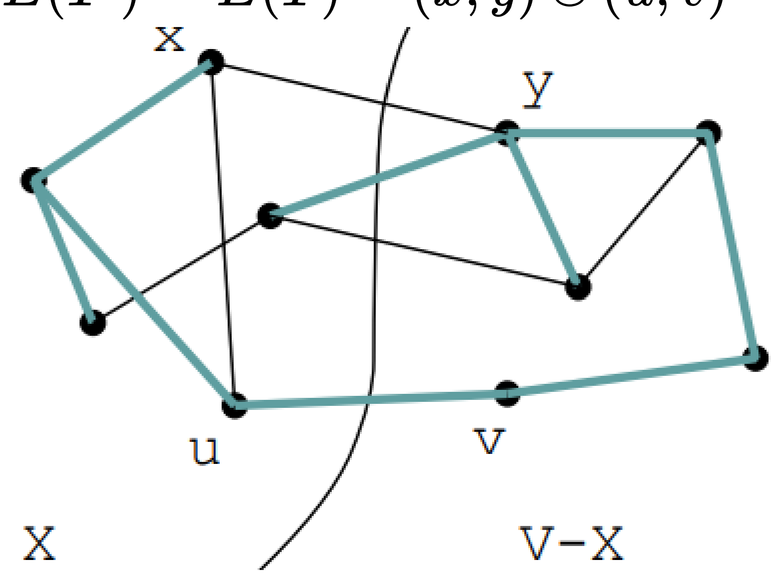
Dimostrazione del teorema

Sia T un **MST** che contiene A.
Se T contiene (u, v) allora l'arco è sicuro per A
Assumiamo allora che T non contenga (u, v).



Se T è un **MST**, allora deve esistere un cammino da u a v contenente almeno un arco (x, y) con $x \in X$ e $y \in V - X$.

Consideriamo ora T' con archi
$E(T') = E(T) - (x, y) \cup (u, v)$



Il peso di T' $W(T')$ dunque è dato dal peso di T sostituendo il peso di (x, y) con (u, v):

$$W(T') = W(T) - W(x, y) + W(u, v)$$

(u, v) è un arco leggero che attraversa il taglio
ma anche l'arco (x, y) attraversa il taglio.
dunque $W(T') \leq W(T)$
ma dal momento che T è un **MST** allora
$W(T') = W(T)$.
Dunque $T' = (V, A \cup (u, v) \subseteq E(T'))$ è un **MST** →
(u, v) arco sicuro.

Corollario

corollario I:

- sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, connesso e pesato
- sia A un sottoinsieme di E contenuto in un albero di copertura minimo
- sia C una componente connessa (un albero) nella foresta $G(A) = (V, A)$
- sia (u, v) è un arco leggero che connette C a una qualche altra componente connessa di $G(A)$
- allora l'arco (u, v) è sicuro per A

Algoritmo Kruskal