Problemi Computazionali

Un problema computazionale è una collezione di

- **Istanze**(input)
- **Risposte**(output)
- **Criterio** per valutare la correttezza delle risposte

MCD

- **Input**: coppia di interi non negativi *a* e *b* non entrambi nulli
- **Uscita**: un intero che soddisfa il seguente **criterio**:
    1. **c** divide sia *a* che *b*
    2. non esiste $d > c$ che divide sia *a* che *b*

Un problema è una **relazione binaria**
$R = \{(input, output)|istanza,risposta\ soddisfano..\}$

Dominio della relazione:
$dom(R) =\{\ \exists r.\ (i, r)\}\in R\}$
R è **univoca** se *ogni* istanza ammette una sola risposta

Esempi di Problemi Computazionali

- **Moltiplicazione** fra due interi
- **Fattorizzazione**
- **Sorting** (ordinamento)
- **Shortest Path** (percorso ottimo in un grafo)

Terminologia

- **Procedura**: sequenza finita di operazioni meccanicamente eseguibili che produce un'uscita a parte da certi ingressi
- **Algoritmo**: procedura che termina per ogni ingresso ammissibile

Peak Finding

- **Input**: un vettore A[0.. n-1] di interi positivi
- **Output**: un intero $0 \le p < n$ tale che $A[p-1] \le A[p] \ge A[p+1]$ dove A[-1]=A[n]=-∞
  Ovvero nella posizione *p* si trova un picco

Left Peak Finding

$\textsc{Peak-Find-Left}(A, n) \qquad \triangleright\ n \ge 1$
$p \leftarrow 0$
$k \leftarrow 1$
while $k \le n-1 \wedge A[p] < A[k]$ **do**
    $p \leftarrow k$
    $k \leftarrow k+1$
end while
return p

ritorna il picco più a sinistra di A[0..n-1]
Best Case: p=0 è un picco
Worst Case: p=n-1 (il vettore è in ordine crescente)

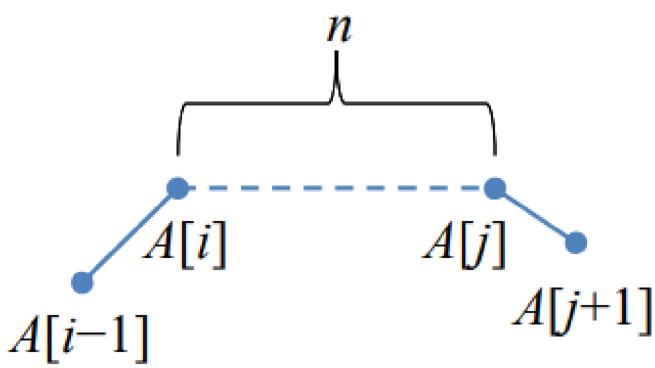
Max Peak Finding

$\textsc{Peak-Find-Max}(A, n) \qquad \triangleright\ n \ge 1$
$p \leftarrow 0$
for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    if $A[p] < A[k]$ **then**
        $p \leftarrow k$
    end if
end for
return p

ritorna il picco più alto
In ogni caso, si effettuano n-1 confronti → lo stesso del worst case di left peak finding.
Dunque è "migliore" questo algoritmo.

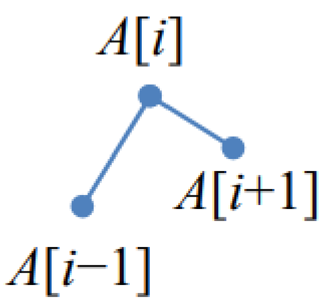
Teoremi del Peak Finding

Teorema. Siano $i \leq j$. Se $A[i-1] < A[i]$ e $A[j] > A[j+1]$ allora esiste $i \leq p \leq j$ tale che $A[p-1] \leq A[p] \geq A[p+1]$ ossia p è un picco in $A[i..j]$.



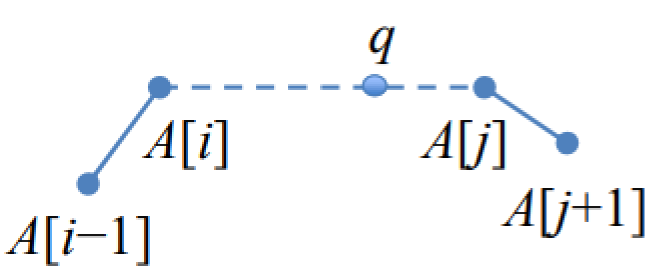
Ovvero, preso un intervallo qualunque, se $estremo\_sinistro - 1 < estremo\_sinistro$ e $estremo_destro > estremo\_destro + 1$ allora esiste un picco in tale intervallo.

Nel caso in cui $i = j$ ovvero $n = 1$, il caso è banale. La posizione i stessa è un picco



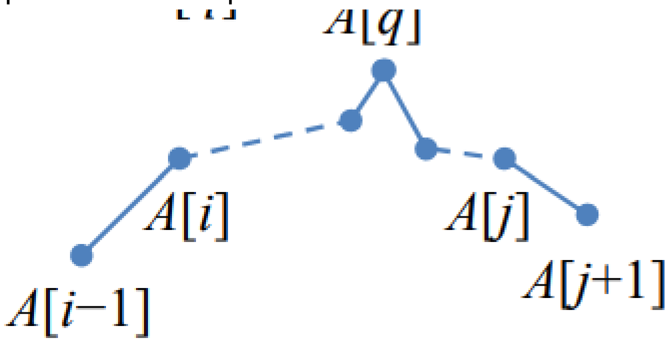
Non è altrettanto banale nel caso in cui $i < j$ ovvero $n > 1$

Scelgo una posizione q tale che $i \leq q \leq j$

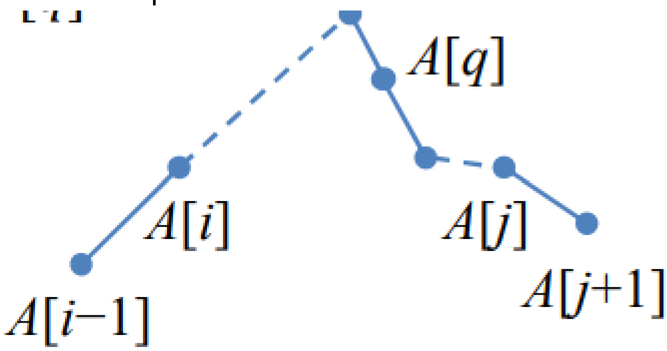


Abbiamo due casi:

- q stesso può essere un picco



- q non è un picco:



  Dunque ripetero il procedimento iniziale e mi scelgo di nuovo un intervallo
  Posso :
  - prendere come estremo sinistro $A[i]$ ed estremo destro $A[q-1]$
  - prendere come estremo sinistro $A[q+1]$ ed estremo destro $A[j]$

Ricapitolando

- Se $n=1$ il picco si trova in $i=j=p$
- Se $n<1$ scelgo un q tale che $i \leq q \leq j$:
  - se q è picco mi fermo
  - se q non è picco reitero sul segmento $i..q-1$ oppure sul segmento $q+1..j$.

Ciò garantisce di trovare un picco

Peak Finding Divide et Impera

Una scelta vantaggiosa di *q* potrebbe essere la posizione centrale:

$\textsc{Peak-DI}(A, i, j) \qquad \triangleright\ i \leq j$

$p \leftarrow (i+j)/2$

$\textbf{if}\ A[p-1] \leq A[p] \geq A[p+1]\ \textbf{then}$

$\quad \textbf{return}\ p$

$\textbf{else} \qquad \triangleright\ A[p-1] > A[p] \vee A[p] < A[p+1]$

$\quad \textbf{if}\ A[p-1] > A[p]\ \textbf{then}$

$\qquad \textbf{return}\ \textsc{Peak-DI}(A, i, p-1)$

$\quad \textbf{else}$

$\qquad \textbf{return}\ \textsc{Peak-DI}(A, p+1, j)$

$\quad \textbf{end if}$

$\textbf{end if}$

$\textsc{Peak-Find-DI}(A, n) \qquad \triangleright\ n \geq 1$

$\textbf{return}\ \textsc{Peak-DI}(A, 0, n-1)$

Se $n = 1$, allora servirà soltanto 1 confronto per trovare il picco: il picco è,ovviamente, l'unico elemento presente.
Tuttavia se $n > 1$, ad ogni confronto, divido il range(che all'inizio sarà $[0, n-1]$) in due.
Dunque:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Se ad esempio $n = 8$:

$$\begin{aligned} T(8) &= T(4) + 1 \\ &= (T(2) + 1) + 1 \\ &= ((T(1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 \\ &= \log_2 8 + 1 \end{aligned}$$

Nel caso peggiore quindi, dovremmo effettuare $\log_2 n + 1$ confronti dove n è il numero di elemento dell'array

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right)+1 \\
&= T\left(\frac{n}{4}\right)+1+1 \\
&= T\left(\frac{n}{8}\right)+1+1+1 \\
&= T\left(\frac{n}{2^3}\right)+3 \\
&= T\left(\frac{n}{2^k}\right)+k \qquad\qquad \text{per } 1 \leq k \leq \log_2 n \\
&= T(1)+\log_2 n \\
&= 1+\log_2 n
\end{aligned}
$$

Analisi di Peak Divide et Impera

Left-Peak-Finding(nel caso peggiore) e **Max-Peak-Finding** effettuano $n-1$ confronti mentre **Peak-Finding DI**(Divide et Impera) circa $\log_2 n$ confronti.
Con un vettore di 1000 elementi servono circa 10 confronti invece di 1000