

Definizione di CFC

Due nodi u e v sono mutualmente raggiungibili se u è raggiungibile da v e v è raggiungibile da u .

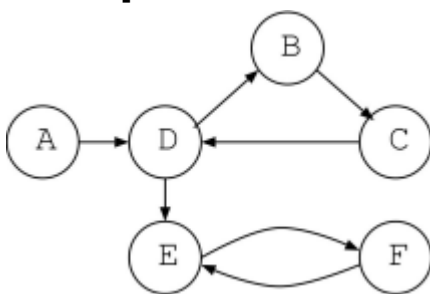
La relazione binaria *mutualmente raggiungibili* è di **equivalenza**:

- **Riflessiva**: A è raggiungibile da A e viceversa
- **Simmetrica**: Se A è raggiungibile da B , allora anche B è raggiungibile da A
- **Transitiva**: Se A è raggiungibile da B e B è raggiungibile da C , allora A è raggiungibile da C .

Le **componenti fortemente connesse** sono dunque la classe della relazione d'equivalenza su $V \times V$ sopra descritta.

Con la notazione $u \leftrightarrow v$ indichiamo che i vertici u e v sono mutualmente raggiungibili e fanno parte della stessa **CFC**.

Esempio:



$\{E, F\}$ formano un ciclo quindi fanno parte della stessa CFC.

Anche $\{D, B, C\}$ formano un ciclo e fanno quindi parte della stessa CFC. Rimane soltanto A che quindi farà parte della CFC $\{A\}$.

Dunque le CFC sono: $\{A\}, \{D, B, C\}, \{E, F\}$.

Calcolo di una CFC dato un vertice

Dato x un vertice del grafo G .

1. Calcolo l'insieme $D(x)$ dei vertici che posso raggiungere da x .
2. Calcolo l'insieme $A(x)$ dei vertici da cui x è raggiungibile.
3. Calcolo $D(x) \cap A(x)$ ovvero l'insieme dei vertici che sono sia raggiungibili da x sia che posso raggiungere x

Ha complessità $O(|V| + |E|)$

Calcolo di tutte le CFC

Per ogni vertice $x \in G$ non ancora marcato, calcolo la sua **CFC**.

La complessità è quella del calcolo di una **CFC** dato un vertice moltiplicata per la cardinalità dei vertici:

$$(|V| + |E|) \cdot |V| = |V^2| + |V| \cdot |E| = O(|V^2| + |V| \cdot |E|)$$

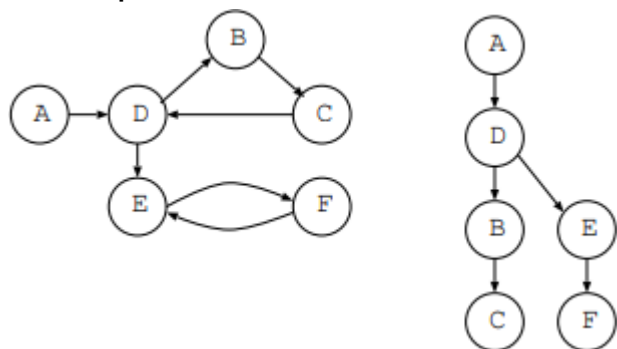
tuttavia questo (semplice) algoritmo ha una complessità quadratica sul numero di vertici.

DFS per il calcolo delle CFC

Teorema I:

In una qualunque **DFS** di un grafo **G** orientato tutti i vertici di una **cfc** vengono collocati nello stesso albero.

Esempio:



Albero di scoperta generato dalla visita a partire da A .

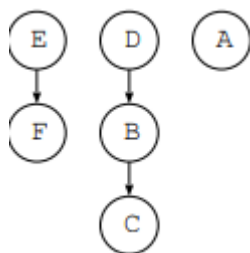
Tuttavia, ciò non ci permette di separare le diverse **CFC**.

Nell'esempio sopra mostrato, diventa difficile dividere le **CFC** guardando solo l'albero.

Quello che vogliamo è una foresta di alberi dove ogni albero rappresenta una singola **CFC**.

Per fare ciò dobbiamo trovare un *ordine giusto* di visita dei nodi bianchi.

Ad esempio, con il seguente ordine: E, F, D, B, C, A otteniamo la seguente foresta:

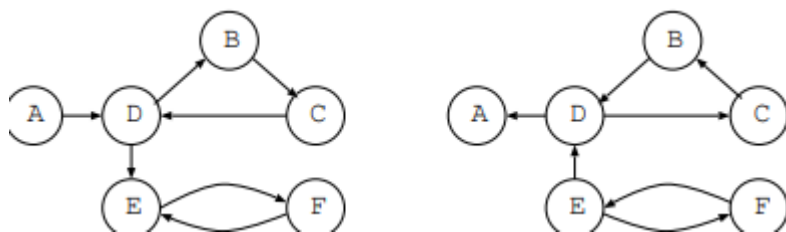


dove ogni albero della foresta rappresenta una **CFC** diversa.

Però, non conosciamo l'ordine giusto!

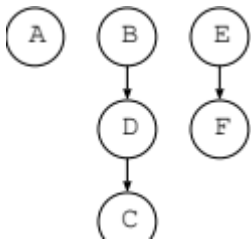
Utilizzo di un grafo trasposto

Dato un grafo G , definiamo il suo **grafo trasposto** G^T dove ogni arco viene *invertito*



Esempio di grafo trasposto(a destra)

Applicando ora una visita **DFS** con i vertici in ordine alfabetico otteniamo la seguente foresta:



Tuttavia anche in questo caso esistono degli ordini *non giusti*.

Idea finale

Possiamo:

1. Effettuare **una prima visita DFS** sul grafo G preparando una lista di vertici in ordine decrescente (dei tempi di *fine_visita*)
2. **Costruire** G^T
3. **Visitare** G^T in profondità considerando la **lista di vertici** restituita dal passo 1 per quanto riguarda la scelta del nodo bianco da dove far **ripartire la visita**.

Ha una complessità lineare $O(|V| + |E|)$!

Balzo le dimostrazioni perchè sono lunghe zzz