Dimostrazione di proprietà per tipi ricorsivi

Analogamente alle liste, anche per i tipi ricorsivi ci sarà un **passo base** e un **passo induttivo.**
Prendiamo come esempio il seguente tipo

```
data Tree a = Leaf | Branch a (Tree a) (Tree a)
```

che rappresenta un classico **albero binario.******
Valgono dunque le seguenti proprietà per il principio di induzione:

principio di induzione sugli alberi

Data una proprietà $P(t)$ degli alberi, se

- $P(\texttt{Leaf})$ e
- $P(t_1) \wedge P(t_2)$ implica $P(\texttt{Branch}\ x\ t_1\ t_2)$ per ogni x, t_1 e t_2

allora $P(t)$ per ogni albero (finito) t.

$P(Leaf)$ *equivale a* $P(0)$ *mentre*
$P(t_1) \wedge P(t_2)$ *equivale a* $P(n)$ *e invece*
$P(\text{Branch}\ x\ t_1\ t_2)$ *sarebbe* $P(n+1)$

Funzioni tipiche degli alberi:

```
leaves :: Tree a → Int
leaves Leaf = 1
leaves (Branch _ t₁ t₂) = leaves t₁ + leaves t₂
```

```
branches :: Tree a → Int
branches Leaf = 0
branches (Branch _ t₁ t₂) = 1 + branches t₁ + branches t₂
```

Vorremmo dimostrare la seguente proprietà:

- $\forall t : \texttt{leaves}\ t = 1 + \texttt{branches}\ t$

$P(t) = \texttt{leaves}\ t = 1 + \texttt{branches}\ t$

$$
\begin{aligned}
&P(\texttt{Leaf}) \\
&\texttt{leaves Leaf} \\
&\quad = 1 && (\texttt{leaves.1}) \\
&\quad = 1 + 0 && (\text{proprietà di } +) \\
&\quad = 1 + \texttt{branches Leaf} && (\text{branches.1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(t_1) \wedge P(t_2) \Rightarrow P(\texttt{Branch}\ x\ t_1\ t_2) \\
&\texttt{leaves}\ (\texttt{Branch}\ x\ t_1\ t_2) \\
&\quad = \texttt{leaves}\ t_1 + \texttt{leaves}\ t_2 && (\texttt{leaves.2}) \\
&\quad = (1 + \texttt{branches}\ t_1) + (1 + \texttt{branches}\ t_2) && (\text{ipotesi induttiva}) \\
&\quad = 1 + (1 + \texttt{branches}\ t_1 + \texttt{branches}\ t_2) && (\text{proprietà di } +) \\
&\quad = 1 + \texttt{branches}\ (\texttt{Branch}\ x\ t_1\ t_2) && (\texttt{branches.2})
\end{aligned}
$$

Dimostrazioni di proprietà per funzioni di ordini superiore

Vorremmo, ad esempio, dimostrare che $\forall f : f . id = f$, tuttavia le definizioni di id e . non aiutano.

Principio di estensionalità

Definizione (principio di estensionalità)

*Due funzioni f e g sono **uguali** se producono lo stesso risultato quando sono applicate allo stesso argomento. Formalmente:*

$$(\forall x : f\ x = g\ x) \iff f = g$$

Nota bene: *questo è il principio che giustifica la* η-riduzione *nel* λ-*calcolo*

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
&\forall f : f\ .\ \texttt{id} = f \\
&(f\ .\ \texttt{id})\ x \\
&\quad = f\ (\texttt{id}\ x) && (.) \\
&\quad = f\ x && (\texttt{id})
\end{aligned}
$$

Dobbiamo dimostrare dunque che $f(id\ x) = f\ x$.
Procediamo quindi a riscrivere $(f . id)x$ *usando la prima e unica equazione di (.)*

Dimostrazione dell'associatività

$\forall f, g, h : f \ . \ (g \ . \ h) = (f \ . \ g) \ . \ h$ lato sinistro

$$
\begin{aligned}
&(f \ . \ (g \ . \ h))\ x \\
&\quad = f\ ((g \ . \ h)\ x) && (.) \\
&\quad = f\ (g\ (h\ x)) && (.)
\end{aligned}
$$

$\forall f, g, h : f \ . \ (g \ . \ h) = (f \ . \ g) \ . \ h$ lato destro

$$
\begin{aligned}
&((f \ . \ g) \ . \ h)\ x \\
&\quad = (f \ . \ g)\ (h\ x) && (.) \\
&\quad = f\ (g\ (h\ x)) && (.)
\end{aligned}
$$

Nel lato sinistro, arriviamo ad un punto dove non è immediato capire come procedere, quindi procediamo dal lato destro per arrivare al punto di convergenza

Teorema della legge di fusione

Teorema (legge di fusione)

Se

1. $f\ a = b$
2. $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$

allora

3. $f \ . \ \texttt{foldr}\ g\ a = \texttt{foldr}\ h\ b$

Passo base:

$P(xs) = (f \ . \ \text{foldr}\ g\ a)\ xs = \text{foldr}\ h\ b\ xs$

$P([])$

$$
\begin{aligned}
&(f \ . \ \text{foldr}\ g\ a)\ [] \\
&= f\ (\text{foldr}\ g\ a\ []) && (.) \\
&= f\ a && \text{foldr} . 1 \\
&= b && \text{ipotesi } 1 \\
&= \text{foldr}\ h\ b\ [] && \text{foldr} . 1
\end{aligned}
$$

Passo induttivo:

$$P(xs) \Rightarrow P(x:xs)$$

$$
\begin{aligned}
& (f \,.\, foldr\ g\ a)\ (x:xs) & \\
&= f\ (foldr\ g\ a\ (x:xs)) & (.) \\
&= f\ (g\ x\ (foldr\ g\ a\ xs)) & foldr.2 \\
&= h\ x\ (f\ (foldr\ g\ a\ xs)) & ipotesi.2 \\
&= h\ x\ ((f \,.\, foldr\ g\ a)\ xs) & (.) \\
&= h\ x\ (foldr\ h\ b\ xs) & ip.\ ind. \\
&= foldr\ h\ b\ (x:xs) & foldr.2
\end{aligned}
$$

Dimostrazione di sum (+) = foldr (+)

$$(+1) \,.\, sum = foldr\ (+)\ 1$$

$$(+1) \,.\, foldr\ (+)\ 0 = foldr\ (+)\ 1$$

$$
\begin{aligned}
f &= (+1) \qquad (\lambda x.\ x+1) \\
g &= (+) \\
a &= 0 \\
h &= (+) \\
b &= 1
\end{aligned}
$$

① $f\ a = b$

② $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$

Dobbiamo prima trasformare sum, secondo la sua definizione, in foldr.

Poi verifichiamo che le prime due proprietà della legge della fusione valgano.

① $f\ a = (+1)\ 0$

$= 0 + 1$ β rid.

$= 1$ prop. di +

$= b$

② $f\ (g\ x\ y) = (+1)\ ((+)\ x\ y)$

$= (+1)\ (x+y)$ (+)

$= (x+y) + 1$

$h\ x\ (f\ y) = (+)\ x\ ((+1)\ y)$

$= (+)\ x\ (y+1)$ β rid.

$= x + (y+1)$ (+)

$= (x+y) + 1$ assoc. +

Dimostrazioni delle due proprietà.
La prima è abbastanza intuitiva, mentre nella seconda usiamo una beta-riduzione per trasformare (+), ovvero $\lambda x. x + 1$*,applicato a* y *in* $(y + 1)$