

λ -calcolo

E' un linguaggio che permette di scrivere **ricette** di funzioni.

- Rappresentazione **estensionale** delle funzioni:
 $f(x) = \{(0, 1), (1, 2), \dots\}$
- Rappresentazione **intensionale** delle funzioni:
 $f(x) = x^2 + 1$

Il λ -calcolo usa una rappresentazione intensionale delle funzioni.

Sintassi

$M, N ::= x \mid (\lambda x. M) \mid (M, N)$

dove

- $\lambda x. M$ è un'astrazione o **funzione** con argomento x e corpo M .
Lo si può pensare come una funzione che accetta x come parametro e restituisce M
- $(M N)$ è l'**applicazione** della funzione M all'argomento N

Convenzioni sintattiche

- Parentesi più esterne omesse
 $M N = (M N)$
- Il corpo delle astrazioni **si estende a destra il più possibile**(lo scope parte subito prima del λ)
 $\lambda x. x x = (\lambda x. (x x))$

- L'applicazione è associativa a sinistra

$$M_1 M_2 M_3 = (M_1 M_2) M_3$$

Variabili libere e legate

- Una variabile x è legata in M se compare in un sotto-terminale della forma $\lambda x. N$ di M .

Banalmente, se x è vincolata dal lambda, tutte le occorrenze di x nel corpo dell'astrazione saranno legate.

- E' libera altrimenti

L'insieme delle variabili libere di un termine M , denotato da $fv(M)$, è definito induttivamente sulla struttura di M come segue:

$$fv(x) = \{x\} \quad fv(\lambda x.M) = fv(M) \setminus \{x\} \quad fv(M N) = fv(M) \cup fv(N)$$

$\lambda x.x$ nessuna variabile libera \Rightarrow termine chiuso

$x y z$ tutte le variabili sono libere

$(\lambda x.x y) x$ x occorre sia legata che libera

Primo esempio: λx indica che, nel suo corpo, la variabile x sarà legata.

Terzo esempio: λx indica che, SOLO NEL SUO CORPO, la variabile x sarà legata. Infatti l'ultima x è libera

Sostituzione

$M\{N/y\}$ si ottiene sostituendo tutte le y libere con N .

Bisogna anche far attenzione ad evitare le catture (ovvero rendere legate) delle variabili libere di N per non alterarne il significato.

$$x\{N/y\} = \begin{cases} N & \text{se } x = y \\ x & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Se $x=y$, allora sostituisco la y con N . Altrimenti rimane x

Inoltre:

$$(M_1 M_2)\{N/y\} = M_1\{N/y\} M_2\{N/y\}.$$

Infine

$$(\lambda x.M)\{N/y\} = \begin{cases} \lambda x.M & \text{se } x = y \\ \lambda x.M\{N/y\} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \notin fv(N) \\ \lambda z.M\{z/x\}\{N/y\} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \in fv(N) \\ & \text{e } z \in Var \setminus (fv(M) \cup fv(N)) \end{cases}$$

1. Se $x = y$, allora il lambda termine non cambia dal momento che x è legata (ed essendo uguale a y non faccio niente).
2. Se $x \neq y$ e $x \notin fv(N)$, allora, essendo x diversa da y e non essendo nelle variabili libere di N , sostituisco la y senza problemi.

$\lambda x. M\{N/y\}$ significa che N

3. Altrimenti, se $x \in fv(N)$, sostituisco la x dopo il **lambda** con una variabile **fresh** che non appartiene alle fv nè di N nè di M . Intuitivamente, se sostituissi y con N (dove $x \in N$, renderei N , che è libera, legata, dal momento che nel mio lambda-termine originale ho λx)

Alpha-conversione

Applicando la sostituzione, effettuiamo un α -conversione in un'altra espressione.

Due espressioni si dicono α equivalenti se

$$\lambda x. M \leftrightarrow_{\alpha} \lambda y. M\{y/x\} \text{ con } y \notin fv(M)$$

L' α -conversione \leftrightarrow_{α} è la congruenza tra λ -espressioni tale che, se $y \notin fv(M)$, allora $\lambda x.M \leftrightarrow_{\alpha} \lambda y.M\{y/x\}$.

Beta-riduzione

Supponiamo di avere $f(x) = x^2 + 2x + 1$, se volessimo sapere $f(5)$, dovremmo **sostituire tutte le occorrenze** di x con 5.

Otterremmo dunque $5^2 + 5 * 2 + 1 = 36$.

La β -riduzione è dunque l'**applicazione** di un argomento ad una data funzione.

La β -riduzione \rightarrow_{β} è la relazione tra λ -espressioni tale che:

- ▶ $(\lambda x.M) N \rightarrow_{\beta} M\{N/x\}$
- ▶ se $M \rightarrow_{\beta} M'$, allora $M N \rightarrow_{\beta} M' N$
- ▶ se $M \rightarrow_{\beta} M'$, allora $N M \rightarrow_{\beta} N M'$
- ▶ se $M \rightarrow_{\beta} M'$, allora $\lambda x.M \rightarrow_{\beta} \lambda x.M'$

$M\{N/x\}$ significa che tutte le occorrenze libere di x in M sono state sostituite con N .

*Nota bene: le occorrenze **libere** sono quelle di M soltanto, non quelle della lambda astrazione, altrimenti non avrebbe senso!*

Le altre tre regole sono abbastanza **intuitive**:

Se M si β -riduce a M' , allora anche l'applicazione di N a M (o viceversa) si riduce a $M N'$ (o $N M'$).

Stessa cosa vale per le λ -astrazioni.

Inoltre, nella β -riduzione $(\lambda x. M) N \rightarrow_{\beta} M\{N/x\}$:

- $(\lambda x. M) N$ è una β -**redex** (reducible-expression)
- $M\{N/x\}$ è il suo **ridotto**

Esempio

Riduzione di: $(\lambda f. \lambda g. \lambda x. f(g x)) M N$

1. Applico M alla λ -astrazione, dunque sostituisco tutte le occorrenze libere di f in $\lambda g. \lambda x. f(g x)$ e ottengo $\lambda g. \lambda x. M(g x)$
2. Applico N a $\lambda g. \lambda x. M(g x)$ e ottengo $\lambda x. M(N x)$

Problema con le Beta-riduzioni

Se $x \notin fv(M)$, usando la β -riduzione abbiamo:

$$(\lambda x. M x) N \rightarrow_{\beta} (M x)\{N/x\} = M\{N/x\}N = M N.$$

Possiamo notare che:

- Applicando M ad N ottengo $M N$
- Applicando $(\lambda x. M x)$ ad N ottengo $M N$

Dunque queste due funzioni, producendo sempre lo **stesso risultato** se applicate allo stesso argomento, dovrebbero essere anche uguali (**principio di estensionalità**), tuttavia in generale non

è vero che :

$$M \rightarrow_{\beta} \lambda x. M \ x \text{ e } \lambda x. M \ x \rightarrow_{\beta} M$$

Eta-riduzione

Definizione (η -riduzione)

L' η -riduzione \rightarrow_{η} è la relazione tra λ -espressioni tale che:

- ▶ Se $x \notin \text{fv}(M)$ allora $\lambda x. M \ x \rightarrow_{\eta} M$
- ▶ se $M \rightarrow_{\eta} M'$, allora $M \ N \rightarrow_{\eta} M' \ N$
- ▶ se $M \rightarrow_{\eta} M'$, allora $N \ M \rightarrow_{\eta} N \ M'$
- ▶ se $M \rightarrow_{\eta} M'$, allora $\lambda x. M \rightarrow_{\eta} \lambda x. M'$

Definizione (riduzioni singole e multiple)

Scriviamo \rightarrow per l'unione $\rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\eta}$ e \Rightarrow per la chiusura riflessiva e transitiva di \rightarrow . Ovvero \Rightarrow è la più piccola relazione tale che:

- ▶ $M \Rightarrow M$
- ▶ se $M \rightarrow N$ allora $M \Rightarrow N$
- ▶ se $M \Rightarrow M'$ e $M' \Rightarrow N$ allora $M \Rightarrow N$

Convertibilità

Definizione

Scriviamo $M \leftrightarrow N$ se $M \rightarrow N$ oppure $N \rightarrow M$ e scriviamo \Leftrightarrow per la chiusura riflessiva e transitiva di \leftrightarrow . Diciamo che M ed N sono **convertibili** se $M \Leftrightarrow N$.

la relazione di convertibilità $M \Leftrightarrow N$ significa che M ed N sono uguali semanticamente, cioè rappresentano la stessa funzione

Esempio

- $(\lambda x. \lambda y. x) M \ N \Leftrightarrow \lambda z. M \ z$
 1. Applico una β -**riduzione** al membro sinistro e ottengo:
 $(\lambda y. M) N \rightarrow_{\beta} M$

2. Applico una η -**riduzione** a $\lambda z. M$ e ottengo M