λ-calcolo

E' un linguaggio che permette di scrivere **ricette** di funzioni.

> - Rappresentazione **estensionale** delle funzioni:
> $f(x) = \{(0,1),(1,2),..\}$
> - Rappresentazione **intensionale** delle funzioni:
> $f(x) = x^2 + 1$

Il λ-calcolo usa una rappresentazione intensionale delle funzioni.

Sintassi

$M, N ::= x|(\lambda x.\, M)|(M, N)$
dove

- $\lambda x.\, M$ è un'astrazione o **funzione** con argomento x e corpo M.
  Lo si può pensare come una funzione che accetta x come parametro e restituisce M
- $(M\ N)$ è l'**applicazione** della funzione M all'argomento N

Convenzioni sintattiche

- Parentesi più esterne omesse
  $M\ N$=$(M\ N)$
- Il corpo delle astrazioni **si estende a destra il più possibile**(**lo scope dell'astrazione parte subito prima del** λ)
  $\lambda x.\, x\ x$ = $(\lambda x.\, (x\ x))$
  $\lambda x.\, x\ x \neq (\lambda x.\, x)x$
- L'applicazione è associativa a sinistra
  $M_1\ M_2\ M_3 = (M_1\ M_2)M_3$

Variabili libere e legate

- Una variabile x è legata in M se compare in un sotto-termine della forma $\lambda x.\, N$ di M.

Banalmente, se x è vincolata dal lambda, tutte le occorrenze di x nel corpo dell'astrazione saranno legate.
- E' libera altrimenti

L'insieme delle variabili libere di un termine M, denotato da $fv(M)$, è definito induttivamente sulla struttura di M come segue:

$$fv(x) = \{x\} \qquad fv(\lambda x.M) = fv(M) \setminus \{x\} \qquad fv(M\,N) = fv(M) \cup fv(N)$$

$\lambda x.x$	nessuna variabile libera $\Rightarrow$ termine chiuso
$x\,y\,z$	tutte le variabili sono libere
$(\lambda x.x\,y)\,x$	x occorre sia legata che libera

Primo esempio: λx indica che, nel suo corpo, la variabile x sarà legata.
Terzo esempio: λx indica che, SOLO NEL SUO CORPO, la varaibile x sarà legata. Infatti l'ultima x è libera

Sostituzione

$M\{N/y\}$ si ottiene sostituendo tutte le y libere con N.
Bisogna anche far attenzione ad evitare le catture(ovvero render legate) delle variabili libere di N per non alterarne il significato.

$$x\{N/y\} = \begin{cases} N & \text{se } x = y \\ x & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Se x=y, allora sostituisco la y con N. Altrimenti rimane x
Inoltre:
$$(M_1\ M_2)\{N/y\} = M_1\{N/y\}\ M_2\{N/y\}.$$

Infine

$$(\lambda x.M)\{N/y\} = \begin{cases} \lambda x.M & \text{se } x = y \\ \lambda x.M\{N/y\} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \notin fv(N) \\ \lambda z.M\{z/x\}\{N/y\} & \text{se } x \neq y \text{ e } x \in fv(N) \\ & \quad \text{e } z \in Var \setminus (fv(M) \cup fv(N)) \end{cases}$$

1. Se $x = y$, allora il lambda termine non cambia dal momento che x è legata(ed essendo uguale a y non faccio niente).

2. Se $x \neq y$ e $x \notin fv(N)$, allora, essendo x diversa da y e non essendo nelle variabili libere di N, sostituisco la y senza problemi.
   $\lambda x. M\{N/y\}$ *significa che N*
3. Altrimenti, se $x \in fv(N)$, sostituisco la x dopo il **lambda** con una variabile **fresh** che non appartiene alle fv nè di N nè di M.
   Intuitivamente, se sostituissi y con N(dove $x \in N$, renderei N, che è libera, legata, dal momento che nel mio lambda-termine originale ho λx)

Alpha-conversione

Applicando la sostituzione, effettuiamo un α-*conversione* in un'altra espressione.

> Due espressioni si dicono α equivalenti se
> $\lambda x. M \leftrightarrow_\alpha \lambda y. M\{y/x\}$ con $y \notin fv(M)$
> *L'α-conversione $\Leftrightarrow_\alpha$ è la congruenza tra λ-espressioni tale che, se $y \notin fv(M)$, allora $\lambda x.M \Leftrightarrow_\alpha \lambda y.M\{y/x\}$.*

Beta-riduzione

Supponiamo di avere $f(x) = x^2 + 2x + 1$, se volessimo sapere $f(5)$, dovremmo **sostituire tutte le occorrenze** di x con 5.
Otterremmo dunque $5^2 + 5 * 2 + 1 = 36$.

La β-riduzione è dunque l'**applicazione** di un argomento ad una data funzione.

> *La β-riduzione $\rightarrow_\beta$ è la relazione tra λ-espressioni tale che:*
> - *$(\lambda x.M)\ N \rightarrow_\beta M\{N/x\}$*
> - *se $M \rightarrow_\beta M'$, allora $M\ N \rightarrow_\beta M'\ N$*
> - *se $M \rightarrow_\beta M'$, allora $N\ M \rightarrow_\beta N\ M'$*
> - *se $M \rightarrow_\beta M'$, allora $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.M'$*
>
> $M\{N/x\}$ significa che tutte le occorrenze libere di x in M sono state sostituite con N.
> *Nota bene: le occorrenze **libere** sono quelle di M soltanto,*

> *non quelle della lambda astrazione, altrimenti non avrebbe senso!*
>
> Le altre tre regole sono abbastanza **intuitive**:
> Se M si β-riduce a M', allora anche l'applicazione di N a M(o viceversa) si riduce a $M\ N'$(o $N\ M'$).
> Stessa cosa vale per le λ-astrazioni.
> Inoltre, nella β-riduzione $(\lambda x.\, M)\ N \rightarrow_\beta M\{N/x\}$:
>
> - $(\lambda x.\, M)\ N$ è una β-**redex**(reducible-expression)
> - $M\{N/x\}$ è il suo **ridotto**

Esempio

Riduzione di: $(\lambda f.\, \lambda g.\, \lambda x.\, f(g\ x))M\ N$

1. Applico M alla λ-astrazione,dunque sostituisco tutte le occorrenze libere di f in $\lambda g.\, \lambda x.\, f(g\ x)$ e ottengo $\lambda g.\, \lambda x.\, M(g\ x)$
2. Applico N a $\lambda g.\, \lambda x.\, M(g\ x)$ e ottengo $\lambda x.\, M(N\ x)$

Problema con le Beta-riduzioni

Se $x \notin fv(M)$, usando la β-riduzione abbiamo:
$(\lambda x.\, M\ x)\ N \rightarrow_\beta (M\ x)\{N/x\} = M\{N/x\}N = M\ N.$
Possiamo notare che:

- Applicando M ad N ottengo $M\ N$
- Applicando $(\lambda x.\, M\ x)$ ad N ottengo $M\ N$

Dunque queste due funzioni, producendo sempre lo **stesso risultato** se applicate allo stesso argomento, dovrebbero essere anche uguali(**principio di estensionalità**), tuttavia in generale non è vero che :
$M \rightarrow_\beta \lambda x.\, M\ x$ e $\lambda x.\, M\ x \rightarrow_\beta M$

Eta-riduzione

Definizione (η-riduzione)

L'η-riduzione $\to_\eta$ è la relazione tra λ-espressioni tale che:

- Se $x \notin fv(M)$ allora $\lambda x.M\, x \to_\eta M$
- se $M \to_\eta M'$, allora $M\, N \to_\eta M'\, N$
- se $M \to_\eta M'$, allora $N\, M \to_\eta N\, M'$
- se $M \to_\eta M'$, allora $\lambda x.M \to_\eta \lambda x.M'$

Definizione (riduzioni singole e multiple)

Scriviamo $\to$ per l'unione $\to_\beta \cup \to_\eta$ e $\Rightarrow$ per la chiusura riflessiva e transitiva di $\to$. Ovvero $\Rightarrow$ è la più piccola relazione tale che:

- $M \Rightarrow M$
- se $M \to N$ allora $M \Rightarrow N$
- se $M \Rightarrow M'$ e $M' \Rightarrow N$ allora $M \Rightarrow N$

Convertibilità

Definizione

*Scriviamo $M \leftrightarrow N$ se $M \to N$ oppure $N \to M$ e scriviamo $\Leftrightarrow$ per la chiusura riflessiva e transitiva di $\leftrightarrow$. Diciamo che M ed N sono **convertibili** se $M \Leftrightarrow N$.*

la relazione di convertibilità $M \Leftrightarrow N$ significa che M ed N sono uguali semanticamente, cioè rappresentano la stessa funzione

Esempio

- $(\lambda x.\, \lambda y.\, x)M\ N \Leftrightarrow \lambda z.\, M\ z$
    1. Applico una β-**riduzione** al membro sinistro e ottengo: $(\lambda y.\, M)N \to_\beta M$
    2. Applico una η-**riduzione** a $\lambda z.\, M\ z$ e ottengo M