Algoritmo di Inferenza

Un algoritmo per decidere se una λ-espressione è ben tipata e per inferirne il tipo automaticamente.
E' diviso in 3 fasi:

1. Costruzione dell'**albero sintattico** della λ-espressione
2. **Annotazione** dell'albero e **generazione** dei vincoli
    - **variabili di tipo:** tipo sconosciuto
    - **espressioni di tipo:** tipo (parzialmente) sconosciuto
    - **vincolo:** relazione di uguaglianza tra tipi espressa nella regola di tipo
3. **Risoluzione** dei vincoli
    - Determinare se il sistema ammette almeno una **soluzione**
    - Calcolare la soluzione più **generale**, da cui derivare tutte le altre

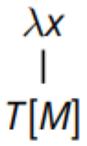
Costruzione dell'albero sintattico

Prima di tutto, rappresentiamo la λ-espressione come un **albero.**
I nodi **interni** e le **foglie** vengono opportunamente etichettati.
Inoltre indichiamo con $T[M]$ l'albero corrispondente alla λ-espressione M

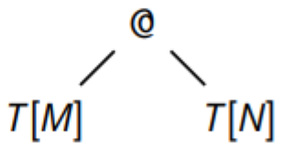
$T[x] \stackrel{\text{def}}{=} x$ foglia

$T[\texttt{c}] \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{c}$ foglia

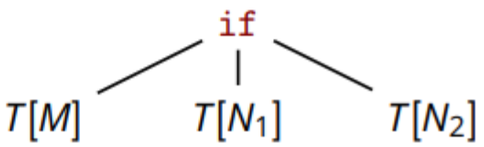
$T[\lambda x.M] \stackrel{\text{def}}{=}$



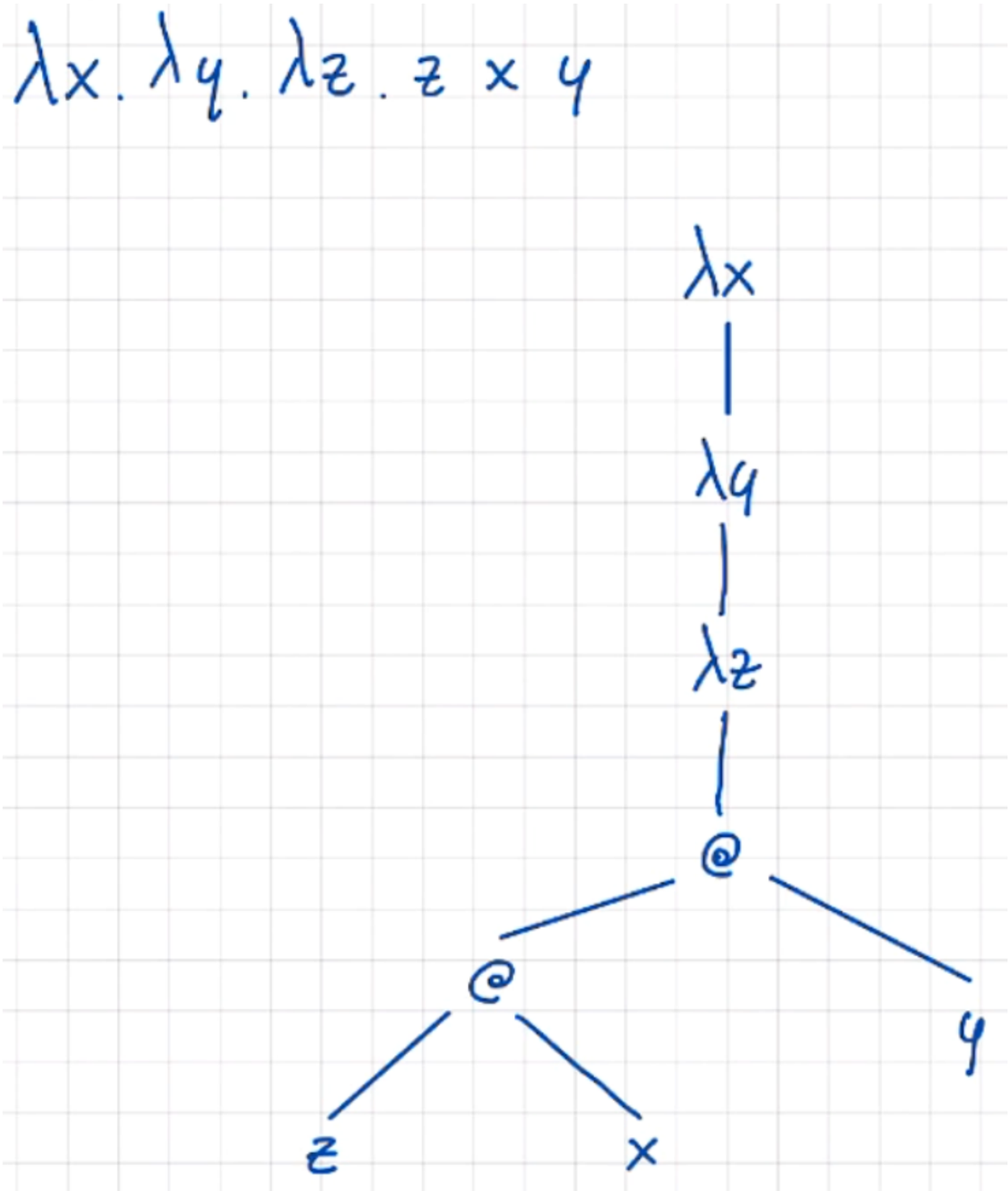
$T[M\ N] \stackrel{\text{def}}{=}$



$T[\texttt{if}\ M\ N_1\ N_2] \stackrel{\text{def}}{=}$



Esempio di albero sintattico:



"@" è l'operatore invisibile di applicazione

Annotazione e generazione dei vincoli

Ogni nodo dell'albero viene etichettato con una **espressione di tipo** utilizzando una strategia **bottom-up**(dalle foglie verso la radice.)

Espressioni di tipo

Definiamo un insieme $\mathrm{TVar} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ infinito di **variabili di tipo**; α rappresenta un tipo sconosciuto, ancora da determinare.

Sintassi espressioni di tipo

Espressioni di tipo	τ, σ	$::=$	α	variabile di tipo
		$\mid$	`Bool`	booleani
		$\mid$	$\tau \to \sigma$	funzioni

Un **vincolo** è una coppia di espressioni di tipo scritta come $\tau = \sigma$

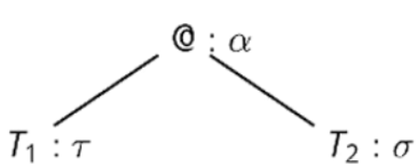
Generazione dei vincoli

Per annotare e generare i vincoli, guardiamo le **regole di tipo**, ricordandosi di usare una strategia **BOTTOM-UP!!**

Albero	Note
$x : \alpha$	α è nuova, avendo cura di usare la stessa α per tutte le occorrenze della stessa x
`c` : `Bool`	Altre costanti richiederanno tipi diversi

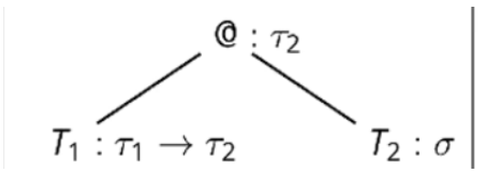
$\lambda x : \alpha \to \tau$ $\mid$ $T : \tau$	α è la variabile di tipo usata per annotare x in T se x compare in T o è nuova altrimenti

Procedendo dal basso, annoto l'albero T(corpo dell'astrazione) con il tipo τ.
Salendo, incontro l'astrazione che ha tipo della forma $t \to s$.
In questo caso, il codominio è τ stesso, mentre il dominio è α.
Quindi in sintesi, il tipo di un'astrazione(λx) è dato da $t \to s$ dove t è il tipo dell'argomento(s) e s il tipo del corpo(T)

	α è nuova Generare il vincolo $\tau = \sigma \to \alpha$

Secondo la regola di tipo t-app, sappiamo che:
T_1 è una funzione e quindi ha tipo $t \to s$
T_2 è l'argomento e quindi ha tipo t che corrisponde al dominio di T_1

*Quindi generico il **vincolo** $\tau = \sigma \to \alpha$ dove σ è il dominio di T_1 che è uguale al tipo di T_2 mentre α è nuova*

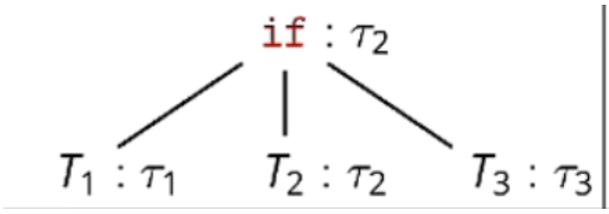


Ottimizzazione facoltativa del caso precedente che evita l'introduzione di una nuova α
Generare il vincolo $\tau_1 = \sigma$

Evito l'introduzione di una variabile di tipo nuova.
Sappiamo già che il tipo di T_1 è una $\to$ quindi possiamo subito annotare $\tau_1 \to \tau_2$.
Sappiamo inoltre il tipo del codominio(vedere annotazione di un'astrazione), quindi posso annotare la radice dell'albero con τ_2.

*Generiamo infine il **vincolo** $\tau_1 = \sigma$ visto che il dominio di T_1 deve coincidere con quello di τ_2*

Possiamo applicare questa annotazione solo se sappiamo già il tipo di T_1



Generare il vincolo $\tau_1 = \texttt{Bool}$
Generare il vincolo $\tau_2 = \tau_3$

*T_1 deve avere tipo Bool quindi genero il **vincolo** $\tau_1 = \mathrm{Bool}$*
Inoltre il tipo di T_2 deve essere lo stesso di T_3
*quindi genero il **vincolo** $\tau_2 = \tau_3$*

Risoluzione dei vincoli

La fase di generazione dei vincoli genera un **sistema** della forma:
$\{\tau_i = \sigma_i\}_{1 \le i \le n}$

Bisogna determinare se tale sistema ammetta una **soluzione.**

Definizione (sostituzione)

*Una **sostituzione** θ è una funzione da variabili di tipo a espressioni di tipo.*
Scriviamo $\theta(\tau)$ per l'espressione ottenuta da τ sostituendo ogni α con $\theta(\alpha)$.

Ricordandoci che una espressione di tipo è della forma $\tau \to \sigma$

oppure una costante Bool

Definizione (soluzione)

Dato un sistema di vincoli $\{\tau_i = \sigma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *e una sostituzione* θ *diciamo che* θ *è* ***soluzione*** *(o* ***unificatore****) del sistema se* $\theta(\tau_i) = \theta(\sigma_i)$ *per ogni* $1 \leq i \leq n$*. Diciamo inoltre che* θ *è l'****unificatore più generale*** *del sistema se ogni soluzione del sistema è ottenibile componendo* θ *con un'altra sostituzione.*

Algoritmo di risoluzione

Se c'è un vincolo	**e**	**allora**
$\tau = \tau$	–	eliminare il vincolo

Banalmente, è un vincolo sempre vero, quindi lo eliminiamo

$\tau = \alpha$	τ non è una variabile	rimpiazzare il vincolo con $\alpha = \tau$

L'idea di fondo è di arrivare ad un sistema della forma $\alpha_i = \tau_i$ *dove* α_i *è una variabili di tipo e* τ_i *è un'espressione di tipo.*

$\tau \to \tau' = \sigma \to \sigma'$	–	rimpiazzare il vincolo con $\tau = \sigma$ e $\tau' = \sigma'$

Dividiamo il vincolo in due.
I due vincoli risultanti sono dati dall'uguaglianza rispettivamente dei due domini e codomini

---

$\tau \to \sigma = \texttt{Bool}$ o $\texttt{Bool} = \tau \to \sigma$	–	☠ l'algoritmo fallisce (type error)

Banalmente, una costante come Bool *non può essere uguale ad una espressione di tipo/una funzione.*

$\alpha = \tau$	$\alpha \neq \tau$ ma α compare in τ	☠ l'algoritmo fallisce (occur check)

Prendiamo il vincolo d'esempio $\alpha = \alpha \to \beta$*. Sono chiaramente due termini diversi, ma il termine a sinistra compare anche in quello a destra, il che è ovviamente impossibile*

$\alpha = \tau$	α non compare in τ α compare altrove	sostituire α con τ in tutti gli altri vincoli ($\alpha = \tau$ rimane)

Se ho due vincoli: $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$, applicando questa trasformazione avrò: $\alpha = \gamma$ e $\beta = \gamma$(quest'ultimo vincolo rimane)

Quando nessuna trasformazione diventa applicabile, l'algoritmo termina con **successo.**

Dunque, applicando l'algoritmo ad un sistema di vincoli abbiamo che:

1. Prima o poi l'algoritmo fallisce o ha successo.
2. Se l'algoritmo fallisce, allora il sistema iniziale è insoddisfacibile.
3. Se l'algoritmo ha successo, allora:
   - il sistema finale ha la forma $\{\alpha_i = \rho_i\}_{1 \leq i \leq m}$ in cui ciascuna α_i compare una sola volta nel sistema
   - la sostituzione $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_i \mapsto \rho_i\}_{1 \leq i \leq m}$ è l'unificatore più generale del sistema iniziale, in particolare $\theta(\tau_i) = \theta(\sigma_i)$ per ogni $1 \leq i \leq n$

Estensioni

Numeri interi

Aggiungiamo alle costanti i **numeri interi**:
$c \in \{\mathrm{FALSE}, \mathrm{TRUE}, 0, 1, \ldots\}$

e aggiungiamo il tipo Int anche alle espressioni di tipo
$\tau, \sigma ::= \ldots \mid \mathrm{Int}$

Per le **fasi 1 e 2** dell'algoritmo, non cambia niente
Per la **fase 3** invece aggiungiamo un'altra condizione di errore:
Se c'è un vincolo $\tau \to \sigma =$ `Int` o `Int` $= \tau \to \sigma$ o `Int` $=$ `Bool` o `Bool` $=$ `Int` l'algoritmo fallisce (type error)

Liste

Aggiungiamo alle costanti i **costruttori canonici di liste** :
$c \in \{\ldots, [], (:)\}$

e aggiungiamo il tipo *lista* anche alle espressioni di tipo
$\tau, \sigma ::= \ldots \mid [\tau]$

Per la **fase 1** dell'algoritmo, non cambia niente
Per la **fase 2 ogni** occorrenza di un costruttore fa uso di **nuove** variabili di tipo
Per la **fase 3** aggiungo un'altra condizione di errore
Se c'è un vincolo $[\tau] = \texttt{Bool}$ o $\texttt{Bool} = [\tau]$ o $[\tau] = \sigma_1 \to \sigma_2$ o ...l'algoritmo fallisce (type error)

Funzioni di libreria

Aggiungiamo alle costanti le **funzioni di libreria**:
$c \in \{\ldots, \mathrm{id}, \mathrm{head}, \mathrm{tail}, \ldots\}$

Nessuna variazione per la **fase 1.**

Per la **fase 2** invece **ogni** occorrenza di una funzione di libreria fa uso di nuove variabili di tipo

Nessuna variazione per la **fase 3**

Definizioni ricorsive

$f = M$ dove f può comparire in M

Fase 1: il nome f è trattato come ogni altra variabile
Fase 2: il nome f è trattato come ogni altra variabile, inoltre alla fine dell'annotazione, generare il vincolo $\alpha = \tau$ dove α è la variabile di tipo associata a f mentre τ è l'annotazione di M
Fase 3: nessuna variazione