Projeto A2: PageRank

Fundação Getúlio Vargas - Escola de Matemática Aplicada
Bacharelado em Ciência de Dados
Curso de Álgebra Linear
Professor: Yuri Fahham Saporito
Alunos: Gianlucca Devigili e Maisa O. Fraiz

1. Introdução

O presente trabalho aborda o algoritmo *PageRank,* desenvolvido por Sergey Bin e Larry Page em 1996 para a organização do sistema de buscas do *Google,* o qual são fundadores. O trabalho tem como objetivo explicar o que é o *PageRank,* como calcular essa métrica usando álgebra linear e como ela pode ser aplicada nas mais diversas áreas de pesquisa.
Por meio da implementação de uma adaptação do algoritmo, também busca calcular uma possível relevância das fronteiras dos estados dos EUA em um grafo não direcional das mesmas. Para tal, é feito o uso da linguagem de programação *Python* e suas bibliotecas, tais como *networkx* para gerar o grafo e *matplotlib* para a visualização do mesmo.

2. O algoritmo *PageRank*

O *PageRank* é um algoritmo criado por Sergey Brin e Larry Page, fundadores da multinacional *Google,* em 1996. Ele foi criado com a função de servir como uma métrica para estimar a importância das páginas na internet, organizando o sistema de busca de forma que os resultados mais relevantes apareçam primeiro para o usuário. De acordo com Google (2020), o a relevância de uma página é calculada, dentre diversos outros fatores decorridos da sofisticação do algoritmo, através da relevância das páginas que possuem links que apontem para ela.

O cálculo do *PageRank* se dá por meio de quantos *links* existentes se conectam para uma página P qualquer. Cada página P_j contém L_j *links.* Se um *link* de P_j redireciona para P_i , então P_i receberá $\frac{1}{L_j}$ do PageRank de P_j. Considere B_i como o conjunto de páginas cujos *links* redirecionam para P_i. O PageRank de P_i será:

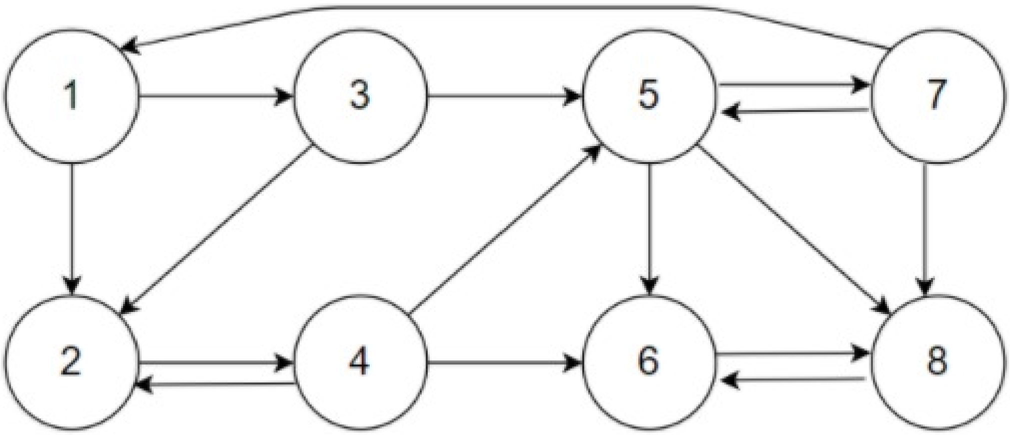
$$PR(Pi) = \sum_{Pj \in Bi} \frac{PR(Pj)}{Lj}$$

Para calcular o *PageRank* usando Álgebra Linear, é criada uma matriz A tal que cada entrada A_{ij} será $\frac{1}{L_j}$ se P_j tiver um *link* que redirecione para P_i. Se P_j e P_i não forem conectados, A_{ij} será nulo. Enquanto P_j conter pelo menos um *link,* A será uma matriz de Markov. O *PageRank* pode ser calculado descobrindo o autovetor estacionário de A, ou seja, o vetor I tal que $AI = I$. (AUSTIN, 2006).

2.1. Exemplo com grafo simplificado

Utilizaremos aqui o exemplo dado por Austin (2006). Imagine que existem apenas 8 páginas representadas pelo seguinte grafo:

Figura 1: Grafo Exemplo



Fonte: Dados Primários, 2020

Cada nó (vértice) do grafo é uma página e cada aresta indica um link entre duas páginas. A matriz relacionada ao exemplo é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

que tem como vetor estácionário (pageranks):

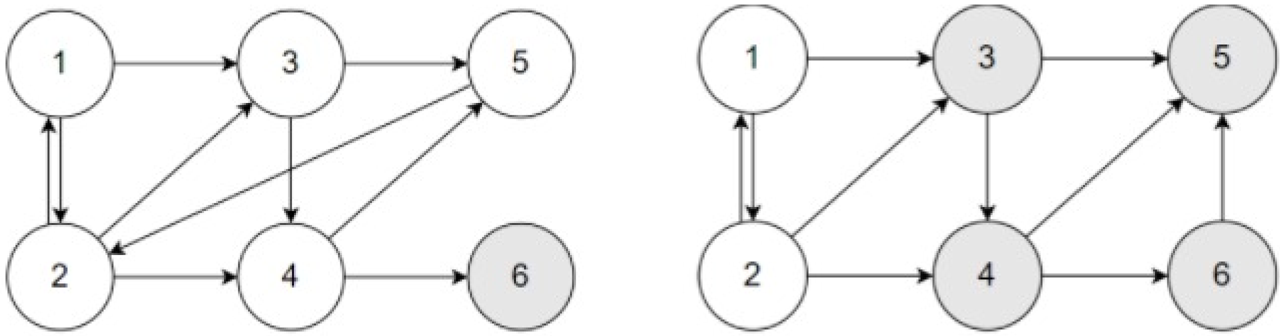
$$I = \begin{bmatrix} 0.0600 \\ 0.0675 \\ 0.0300 \\ 0.0675 \\ 0.0975 \\ 0.2025 \\ 0.1800 \\ 0.2950 \end{bmatrix}$$

No exemplo, o página 8 tem uma relevância maior, ou seja, em um algoritmo de pesquisa consideraria ela mais relevante e apareceria por primeiro, sendo seguida pela página 6 e assim por diante.

2.2. Possíveis problemas

No caso da coluna A_j conter apenas valores nulos, significa que o vértice P_j é um nó pendente. Também é possível haver um conjunto de páginas que formem um ciclo de links entre si, de forma que vez que o usuário entra nelas, não é possível sair. Em ambos dos casos, o cálculo do *PageRank* falha.

Figura 2: Grafo com Erros no *PageRank*



Fonte: AUSTIN, 2006

Esse problema pode ser resolvido escolhendo um valor $0 \leq \alpha \leq 1$ que determina a probabilidade de, ao percorrer o grafo, ser redirecionado para uma nó qualquer, independentemente das ligações. Quanto mais próximo α for de 1, mais peso têm as ligações e mais tempo levará o processo para descobrir o autovetor. A Google usa $\alpha = 0.85$, levando entre 50 e 100 iterações do método de potencialização para achar valores de PageRank satisfatoriamente aproximados.

2.3. Outras Aplicações O PageRank também é muito utilizado fora da Google, como na medicina, no desenvolvimento de _softwares,_ no esporte e na bibliometria. Dentre algumas aplicações do PageRank, Gleich (2014), Miller (2020) e Austin (2006) citam:

- Utilizando $\alpha = 0.92$ em uma rede de interações de proteínas, o *PageRank* pode ser usado para descobrir quais genes estão relacionados com a diabetes tipo 2;
- Estudos acerca de um tipo de câncer pancreático, que encontram genes que preveem se o paciente sobreviveria à doença com um pagerank utilizando $\alpha = 0.3$;
- Algoritmo ***Monitor Rank:*** ao retornar uma lista ordenada dos possíveis responsáveis por um erro na programação, utilizado por administradores de sistemas para o diagnóstico e solução de erros;
- Dados geográfico como prever tráfego e movimento humano utilizando um grafo onde as ruas são representadas por arestas e suas intersecções por vértices. Neste caso α é gerado a cada iteração de acordo com a probabilidade da viagem acabar em determinada rua. Tal tipo de aplicação é usado em softwares de transporte urbano que fazem uso de GPS;
- Criar uma rede de vencedores em esporte, onde cada time é um nó e cada jogo é uma linha. Em uma partida entre dois times, A e B, o time que ganha passa seus pontos para o outro;
- Pode ser usado para medir a influência de revistas científicas e artigos com base nas citações entre elas;
- Algoritmo ***ItemRank***: utilizado para recomendar itens como produtos em *e-commerces* ou filmes e séries em plataformas de *streaming;*
- Em redes sociais, o *PageRank* pode ser usado para prever potenciais conexões e amizades entre usuários, recomendar perfis a serem seguidos e estimar a influência dos usuários;
- Também existem o ***TrustRank*** e ***BadRank***, que analisam a possibilidade de um site estar abusando de spam para aumentar o seu *pagerank,* tais algoritmos são utilizados pelo *Google* e outros sistemas de pesquisa para evitar relatarem como relevantes página.

3. Implementação

Para a implementação do algoritmo PageRank utilizada no presente trabalho foi utilizado um grafo não direcionado onde cada nó (vértice) representa um dos estados dos EUA e a existência de uma aresta entre dois nós indica que os dois estados fazem fronteira entre si.

In [1]:

```
import re, sys, math, csv, types
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly.graph_objects as go
```

A implementação do algoritmo *PageRank* no presente trabalho é uma adaptação de Asp (2015) para grafos não direcionados. Utilizamos o dataset *"stateborders.csv"* que contém todos os estados dos EUA e suas respectivas fronteiras, onde a primeira e terceira coluna indicam uma aresta do grafo que representa o país[1]. Abaixo seguem as primeiras 10 linhas de amostra para visualização:

[1]. O *dataset* se encontra dessa maneira pois o algoritmo de Asp (2015) é utilizado para calcular o *pagerank* de outros datasets que fazem uso da segunda e da quarta coluna.

In [2]:

```
filename = "stateborders.csv"
file = csv.reader(open(filename, 'r'), delimiter = ',')
data = [row for row in file]
for i_row in range(10):
    print(data[i_row])
```

```
['AL', '0', 'FL', '0']
['AL', '0', 'GA', '0']
['AL', '0', 'MS', '0']
['AL', '0', 'TN', '0']
['AZ', '0', 'CA', '0']
['AZ', '0', 'NM', '0']
['AZ', '0', 'NV', '0']
['AZ', '0', 'UT', '0']
['AR', '0', 'LA', '0']
['AR', '0', 'MS', '0']
```

O grafo foi gerado com o *package networkx* onde cada vértice representa um estados e a existência de uma aresta uv indica que o estado u faz fronteira com o estado v. O grafo gerado não é direcionado, como o habitual em parte das aplicações do *pagerank* pois trata-se de dados geográficos, ou seja,o estado u ter fronteira com o estado v implica que v faz fronteira com u. Uma aplicação análoga é a rede de amigos do *Facebook.*

In [3]:

```
nodes = set([row[0] for row in data])
print(f'Nós do grafo: {nodes}', sep=" ")
```

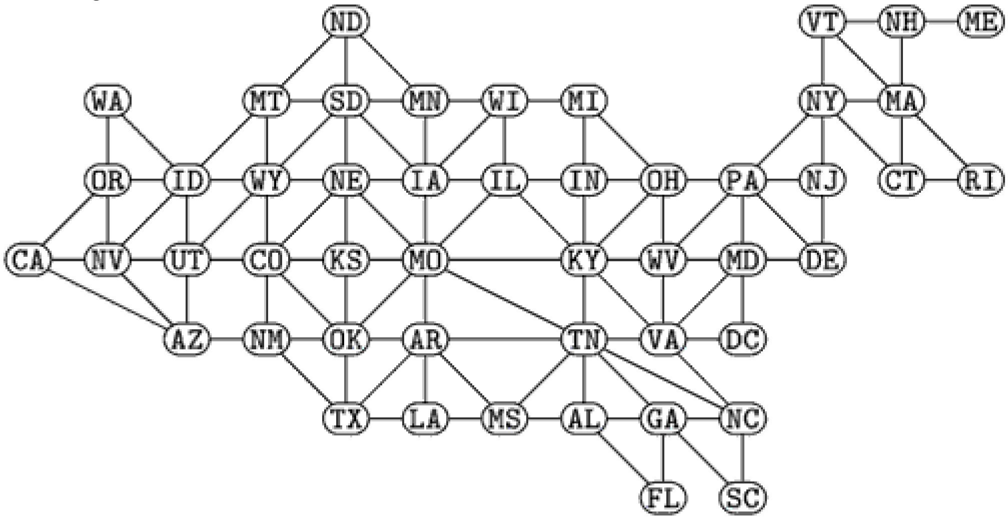
```
Nós do grafo: {'KY', 'ID', 'MS', 'NE', 'ND', 'SC', 'WV', 'OH', 'TX', 'KS',
'LA', 'FL', 'WY', 'OR', 'NV', 'AL', 'GA', 'WA', 'CO', 'VT', 'NY', 'SD', 'C
T', 'CA', 'NJ', 'ME', 'TN', 'AR', 'NM', 'DC', 'MD', 'MO', 'NH', 'VA', 'WI',
'RI', 'DE', 'UT', 'AZ', 'IA', 'IN', 'MT', 'OK', 'MN', 'PA', 'MA', 'MI', 'N
C', 'IL'}
```

In [4]:

```
edges = [(row[0], row[2]) for row in data]
print("Exemplos de Aresta: ", end= "")
for i_edge in range(10):
    print(edges[i_edge], end=", ")
```

```
Exemplos de Aresta: ('AL', 'FL'), ('AL', 'GA'), ('AL', 'MS'), ('AL', 'TN'),
('AZ', 'CA'), ('AZ', 'NM'), ('AZ', 'NV'), ('AZ', 'UT'), ('AR', 'LA'), ('AR',
'MS'),
```

Figura 3: Estrutura de grafo dos estados dos EUA



Fonte: WEISSTEIN, 201-

Os Estados do Alaska e Havaí foram removidos pois não possuem _"links"_ com os demais estados, o que geraria erro no algoritmo como explicado anteriormente

Então calculamos o valor base de cada rank com a razão:

$$\frac{1}{|V(G)|}$$

onde $|V(G)|$ é o número de nós do grafo. No presente exemplo o rank base de cada nó é:

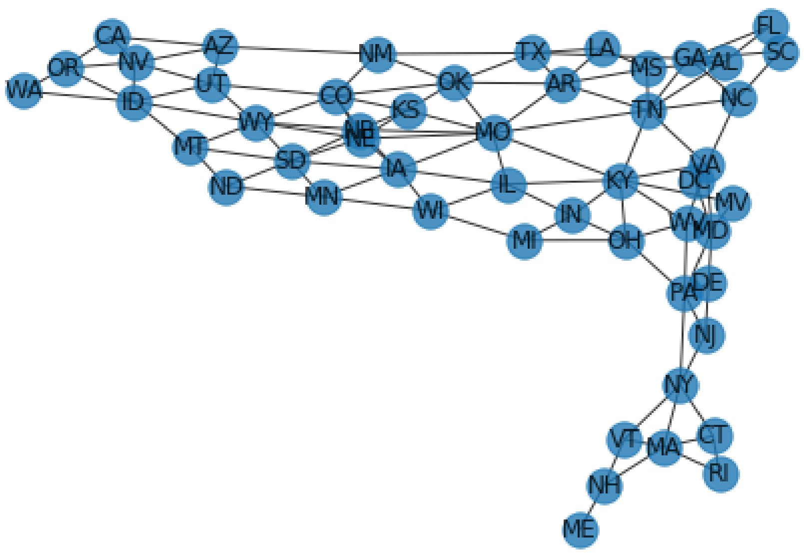
In [5]:

```
rank = 1/float(len(nodes))
print(f'{rank}')
```

```
0.02040816326530612
```

In [6]:

```
graph = nx.Graph()
graph.add_nodes_from(nodes, rank=rank)
graph.add_edges_from(edges)
nx.draw_spring(graph, with_labels =  True, alpha = 0.8)
```



3.1. O Algoritmo em *python*

O cálculo do *pagerank* é dado pelo seguinte algoritmo em *python:*

In [7]:

```
V = len(graph)
alpha = 0.85
```

Utilizamos $\alpha = 0.85$, o mesmo utilizado pelo *Google,* de modo a evitar um *loop*.

In [8]:

```
ranks = {}

for key, node in graph.nodes(data=True):
    ranks[key] = node.get("rank") #atribui o valor inicial de 0.02040816326530612 a todos o

for i in range(10): # itera 10 vezes, algoritmos como o do Google realizam entre 50 e 100 i
    for key, node in graph.nodes(data=True):
        rank_sum = 0
        curr_rank = node.get('rank')

        neighbors = graph[key]
        for n in neighbors:
            if ranks[n] is not None:
                outlinks = len(list(graph.neighbors(n)))
                rank_sum += (1 / float(outlinks)) * ranks[n]

        ranks[key] = ((1 - float(alpha)) * (1/float(V))) + alpha * rank_sum

sorted(ranks.items(), key = lambda x : x[1], reverse = True)
```

Out[8]:

```
[('MO', 0.0315771412775698),
 ('KY', 0.031067896293299854),
 ('TN', 0.031058509939360428),
 ('MA', 0.0286732706671126),
 ('PA', 0.026872000240915704),
 ('MD', 0.02667225082531666),
 ('GA', 0.026244091037310922),
 ('NY', 0.02606523828313355),
 ('SD', 0.02593368857842075),
 ('WY', 0.025713246689327465),
 ('IA', 0.025503159256626648),
 ('CO', 0.025298171749271164),
 ('ID', 0.02510499447534387),
 ('VA', 0.025051426291786118),
 ('AR', 0.023258083447774712),
 ('OK', 0.022328740382571648),
 ('NV', 0.02169859200056445),
 ('NB', 0.021462370926652284),
 ('NE', 0.02144870658728615),
 ('OH', 0.021091223262018295),
 ('WV', 0.020941539230207022),
 ('TX', 0.02035526794617019),
 ('NH', 0.020284686703420284),
 ('UT', 0.02011980670612335),
 ('IL', 0.019488115836470792),
 ('OR', 0.01870699805824562),
 ('KS', 0.01822801336480884),
 ('AL', 0.018043210579888627),
 ('VT', 0.01797738325168396),
 ('NC', 0.017955559262623086),
 ('CT', 0.01768558165204955),
 ('AZ', 0.017593815549587256),
 ('MS', 0.01712770731584521),
 ('IN', 0.017013279191891623),
 ('WI', 0.016713203745370078),
 ('MT', 0.016475418102944235),
 ('MN', 0.016444922398000373),
```

```
 ('NM', 0.016373197711261677),
 ('NJ', 0.015385655533724155),
 ('DE', 0.014881149542499148),
 ('CA', 0.014344259241949375),
 ('MI', 0.013693562049299456),
 ('LA', 0.013331966874561996),
 ('ND', 0.01308101357690253),
 ('RI', 0.012821574273799423),
 ('FL', 0.010482035006529635),
 ('WA', 0.010472954441972477),
 ('SC', 0.010464826249464442),
 ('DC', 0.010258044894149882),
 ('MV', 0.010020709318671205),
 ('ME', 0.008682865070264053)]
```

4. Conclusão

O algoritmo *PageRank* é de suma importância para diversos tipos de software, em especial sistemas de recomendação e mecanismos de pesquisa. Contudo, como todo algoritmo, está suscetível a falhas, principalmente as induzidas como *websites* de *spam* que aumentavam o *pagerank* de outros, portanto sozinho ele pode não ser efetivo. Também há a questão de que, em determinados contextos, o maior *pagerank* pode não ser o resultado mais relevante para determinado usuário.

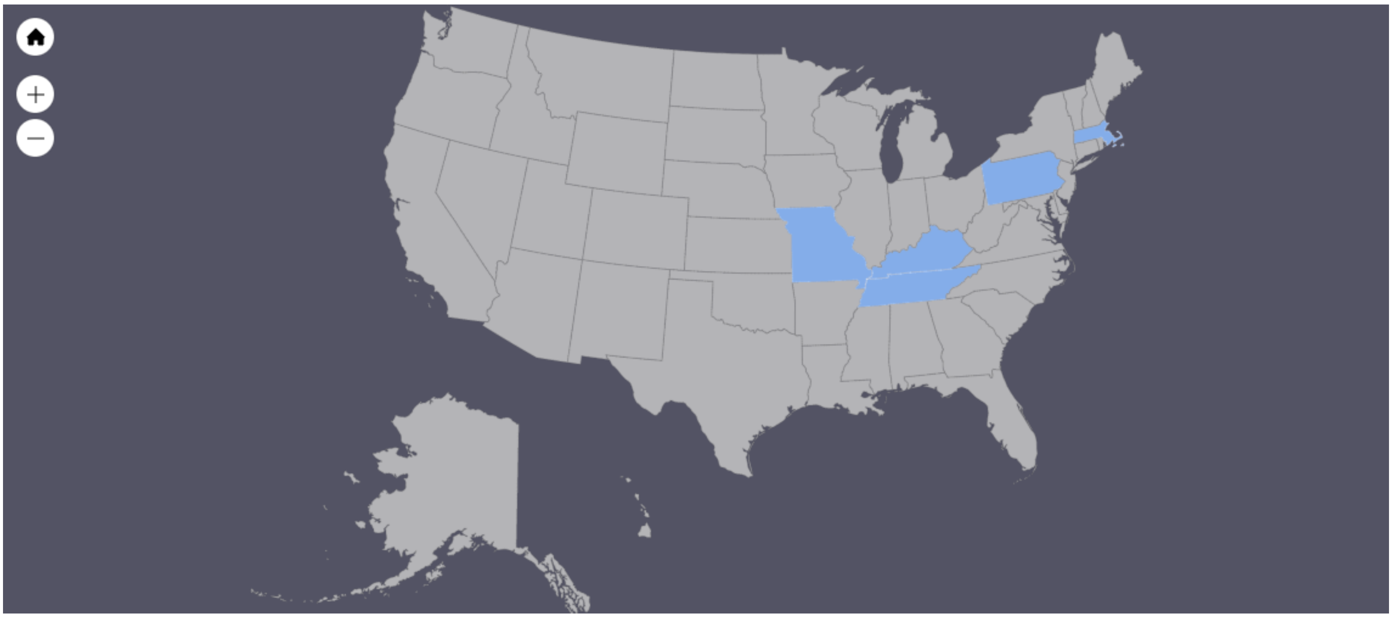
Tabela 1: Os 5 estados com o maior *pagerank*

Estado	Pagerank
Missouri	0.03154419141589557
Kentucky	0.03107864029675898
Tennessee	0.031062265257940133
Massachusetts	0.028718919537401348
Pensilvânia	0.026872163950321677

Fonte: Dados Primários, 2020.

Quanto aos resultados da implementação, os 5 maiores pageranks, representados na tabela 1 são referentes a estados centralizados com uma grande densidade urbana, como o esperado. Também é importante ressaltar que Missouri, Kentucky e Tennessee são estados que possuem fronteiras entre si, como se pode observar na figura 4, evidenciando a característica do *pagerank* de analisar não apenas a própria relevância de um nó mas sim a relevância de seus *links*.

Figura 4: Os 5 estados com o Maior *pagerank*



Fonte: Dados Primários, 2020

Referências

AUSTIN, David. **How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack. American Mathematical Society**, 2006. Disponível em: http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-pagerank (http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-pagerank). Acesso em: 14 nov. 2020.

ASP, Timothy. **PageRank.** 2015. Disponível em: https://github.com/timothyasp/PageRank (https://github.com/timothyasp/PageRank). Acesso em: 18 nov. 2020.

GLEICH, David F. **PAGERANK BEYOND THE WEB**. 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1407.5107.pdf (https://arxiv.org/pdf/1407.5107.pdf). Acesso em: 16 nov. 2020.

GOOGLE. **Como funcionam os algoritmos da Pesquisa:** classificar páginas úteis. Classificar páginas úteis. Disponível em: https://www.google.com/search/howsearchworks/algorithms/ (https://www.google.com/search/howsearchworks/algorithms/). Acesso em: 14 nov. 2020.

MILLER, Colton. **A HISTORY LESSON ON PAGERANK**. 2020. Disponível em: https://www.boostability.com/a-history-lesson-on-pagerank/#:~:text=Google%20founders%20Larry%20Page%20and,backbone%20behind%20Google%20search% (https://www.boostability.com/a-history-lesson-on-pagerank/#:~:text=Google%20founders%20Larry%20Page%20and,backbone%20behind%20Google%20search% Acesso em: 14 nov. 2020.

WEISSTEIN, Eric W. **Contiguous USA Graph.** 201-. Disponível em: https://mathworld.wolfram.com/ContiguousUSAGraph.html (https://mathworld.wolfram.com/ContiguousUSAGraph.html). Acesso em: 21 nov. 2020.