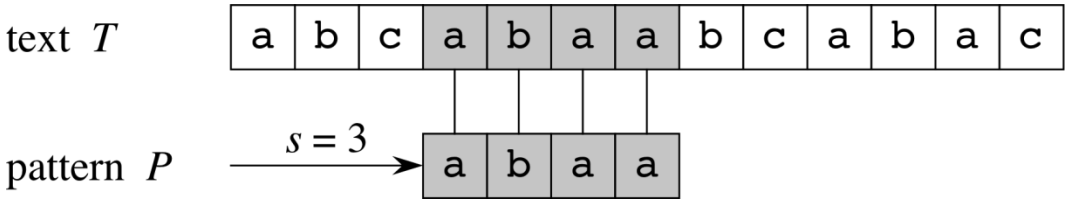
STRING MATCHING

Michael Tsai

2012/06/04

問題：字串比對



- 陣列T[1..n]中有一個長度為n的字串
- 陣列P[1..m]中有一個長度為m的字串
- $m \leq n$
- 要在T中找P是否出現
- P和T的字串從一個字元的集合Σ中拿出
- 如: $\Sigma = \{0,1\}$ 或 $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \ldots, \mathrm{z}\}$

- Pattern P **occurs with shift s** in text T
  (Pattern P occurs beginning at position s+1 in text T)

if $T[s+j] = P[j]$, for $1 \leq j \leq m$.

- If P occurs with shift s in T, we call **s a valid shift**. Otherwise, we call **s an invalid shift**.
- 字串比對問題是要在T中間找到**所有**P出現的位置(valid shift)

一些定義

- Σ^*: 所有使用Σ中字元組成的有限長度字串(包括長度為0的空字串)
- $|x|$: 字串x的長度
- xy: 把字串x和y接起來 (concatenation)
- $w \sqsubset x$: 字串w是字串x的prefix (也就是x=wy, $y \in \Sigma^*$)

  ($w \sqsubset x$ 表示 $|w| \leq |x|$)
- $w \sqsupset x$: 字串w是字串x的suffix (也就是x=yw, $y \in \Sigma^*$)

  ($w \sqsupset x$ 表示 $|w| \leq |x|$)

- 例如: ab ⊏abcca, cca ⊐ abcca
- 空字串ϵ為任何字串的prefix & suffix
- 對任何字串x, y和字元a, $x \sqsupset y$ iff $xa \sqsupset ya$
- ⊏和⊐為transitive(具遞移律)的operator

方法一：笨蛋暴力法

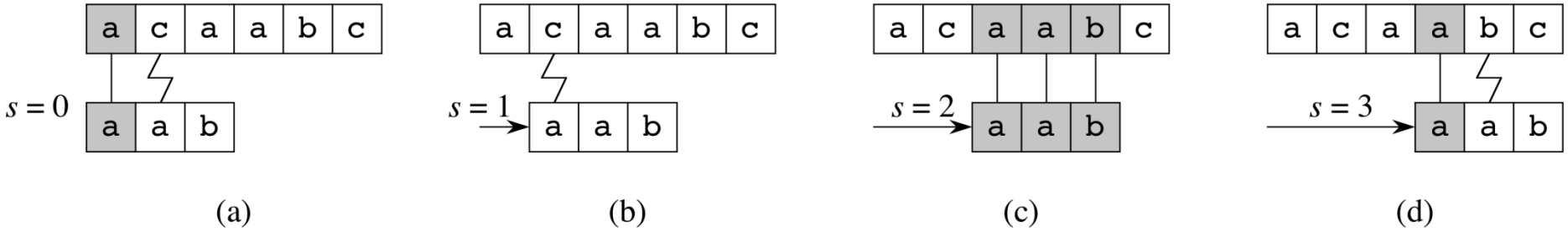
```
Native-String-Matcher(T, P)

N=T.length
M=P.length
for s=0 to n-m
      if P[1..m]==T[s+1..s+m]
            print "Pattern occurs with shift" s
```

n-m+1次

$O(m)$

$O((n-m+1)m)$



為什麼不好?

- 因為每次for執行比對, 如果錯了, 這回合的資訊完全丟掉.

- 例: P=aaab
- 如果我們發現s=0是valid shift (表示T開頭為aaab),
- 那麼從之前的結果應該可以知道shift 1, 2, 3 都可以直接跳過, 不需要一一比對.

方法二: The Rabin-Karp Algorithm

- 假設$\Sigma = \{0,1,\dots,9\}$
- 那麼每個長度為k的字串可以想成是一個k位數的十進位數
- 例如字串"31415"可以想成是十進位數31415

- 把t_s設為代表T[s+1..s+m]的十進位數
- p設為代表P的十進位數
- 那麼$t_s = p$ iff T[s+1..s+m]=P[1..m], 也就是s是valid shift

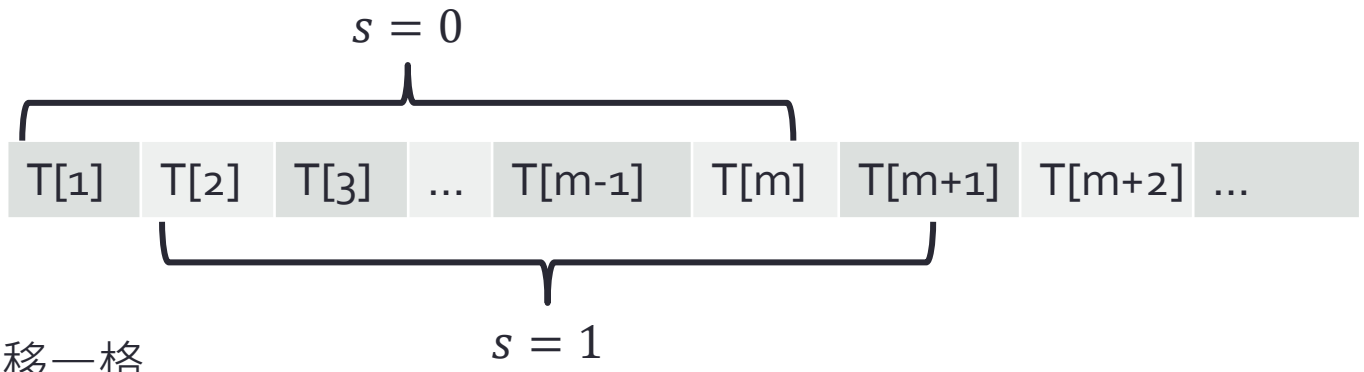
- 怎麼從P計算p呢?

P[1]	P[2]	P[3]	…	P[m-1]	P[m]

- $p = P[m] + 10\big(P[m-1] + 10(P[m-2] + \cdots + 10(P[2] + 10P[1])\dots)\big)$

方法二: The Rabin-Karp Algorithm

- 怎麼從P計算p呢?
- $t_0 = T[m] + 10\big(T[m-1] + 10(T[m-2] + \cdots + 10(T[2] + 10T[1])\ldots)\big)$



整個往右移一格

- $t_{s+1} = 10\big(t_s - 10^{m-1}T[s+1]\big) + T[s+m+1]$

拿掉最左邊那一格　　加上最右邊那一格

方法二: The Rabin-Karp Algorithm

- 那麼用這個方法要多花少時間呢? (簡易分析版)
- $p =$ $P[m] +$ $10\big(P[m-1] + 10(P[m-2] + \cdots + 10(P[2] + 10P[1]) \ldots)\big)$ $O(m)$
- $t_0 =$ $T[m] +$ $10\big(T[m-1] + 10(T[m-2] + \cdots + 10(T[2] + 10T[1]) \ldots)\big)$ $O(m)$
- 然後用$t_{s+1} = 10(t_s - 10^{m-1}T[s+1]) + T[s+m+1]$, 算 $t_1, t_2, \ldots, t_{n-m}$的值 (每次都是constant time, 共n-m次)

- 所以總共: $O(m)$ preprocessing時間, $O(n-m)$比對時間

方法二: The Rabin-Karp Algorithm

- 之前的兩個問題:

1. Σ如果是general的character set, 怎麼辦? (不再是{0,1,…,9})

如何解決呢?

假設$|\Sigma| = \mathrm{d}, \Sigma = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_d\}$. 可以把之前的式子改成

$$p = idx(P[m]) + d\big(idx(P[m-1]) + d(idx(P[m-2]) + \cdots + d(idx(P[2]) + d \cdot idx(P[1])) \dots)\big)$$

(a) 把整個string看成一個d進位的數.
(b)字元在Σ 中index當作該字元所代表的的值

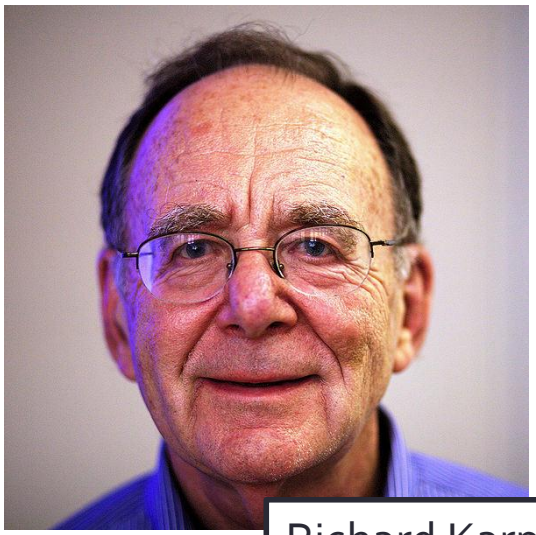
方法二: The Rabin-Karp Algorithm

2. 當m比較大的時候, p和t_s將很難用電腦直接處理 (用long long也存不下)

   →加一加乘一乘最後總是會overflow

- 如何解決? 利用同餘理論.

Michael Rabin



Richard Karp

同餘理論 (Modular Arithmetic)

- 假設a, b都為整數
- $a \equiv b \ (mod\ n)$: 表示a和b除以n的餘數相等
- 例如:
  - $38 \equiv 14 \ (mod\ 12)$
  - $0 \equiv 12 \ (mod\ 12)$
  - -13 $\equiv -3 \ (mod\ 5)$
- 更棒的性質:
- $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ n)$
- $a_2 \equiv b_2 \ (mod\ n)$
- 則
  1. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (mod\ n)$
  2. $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 (mod\ n)$
  3. $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (mod\ n)$

同餘理論 (Modular Arithmetic)

- $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ n)$
- $a_2 \equiv b_2 \ (mod\ n)$
- 則
- $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (mod\ n)$

- 證明:
- $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ n)$ 表示
  - $a_1 = c_{a_1} n + r_1$
  - $b_1 = c_{b_1} n + r_1$
- $a_2 \equiv b_2 \ (mod\ n)$ 表示
  - $a_2 = c_{a_2} n + r_2$
  - $b_2 = c_{b_2} n + r_2$
- 所以
  - $a_1 + a_2 = (c_{a_1} + c_{a_2})n + (r_1 + r_2)$
  - $b_1 + b_2 = (c_{b_1} + c_{b_2})n + (r_1 + r_2)$
- 兩者餘數相同!
- $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (mod\ n)$得證.

同餘理論 (Modular Arithmetic)

- $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ n)$
- $a_2 \equiv b_2 \ (mod\ n)$
- 則
- $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (mod\ n)$

- 證明:
- $a_1 \equiv b_1 \ (mod\ n)$ 表示
  - $a_1 = c_{a_1} n + r_1$
  - $b_1 = c_{b_1} n + r_1$
- $a_2 \equiv b_2 \ (mod\ n)$ 表示
  - $a_2 = c_{a_2} n + r_2$
  - $b_2 = c_{b_2} n + r_2$
- 所以
  - $a_1 a_2 = (c_{a_1} n + r_1)(c_{a_2} n + r_2) = (c_{a_1} c_{a_2} n + c_{a_1} r_2 + c_{a_2} r_1) n + r_1 r_2$
  - $b_1 b_2 = (c_{b_1} c_{b_2} n + c_{b_1} r_2 + c_{b_2} r_1) n + r_1 r_2$
- 兩者餘數相同! 得證!

The Rabin-Karp Algorithm 修正版

- 取q使得dq可以用一個電腦word (32-bit or 64-bit)來表示
- 既然mod後再加, 減, 乘也會保持原本的關係, 我們可以把這些operation都變成mod版本的
- $p = P[m] + d\big(P[m-1] + d(P[m-2] + \cdots + d(P[2] + dP[1])\ldots)\big)\ (mod\ q)$
- $t_0 = T[m] + d\big(T[m-1] + d(T[m-2] + \cdots + d(T[2] + dT[1])\ldots)\big)\ (mod\ q)$
- $t_{s+1} = d(t_s - d^{m-1}T[s+1]) + T[s+m+1](mod\ q)$

The Rabin-Karp Algorithm 修正版

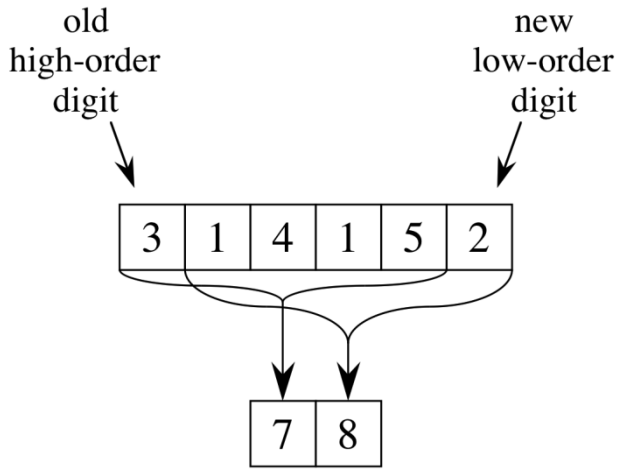
- 新的mod版algorithm會造成一個問題:
- 雖然$t_s = p \Rightarrow t_s \equiv p \ (mod\ q)$
- 但$t_s = p \nLeftarrow t_s \equiv p \ (mod\ q)$
- 例如$38 \equiv 14 \ (mod\ 12)$, $38 \neq 14$
- 但是如果$t_s \not\equiv p \ (mod\ q) \Rightarrow t_s \neq p$

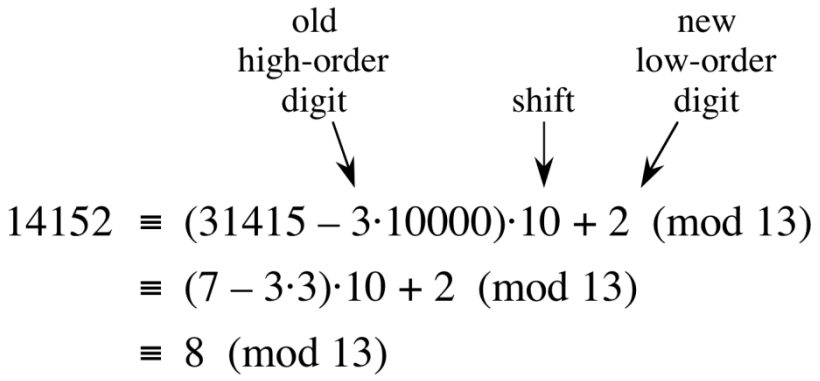
- 所以演算法變成這樣:

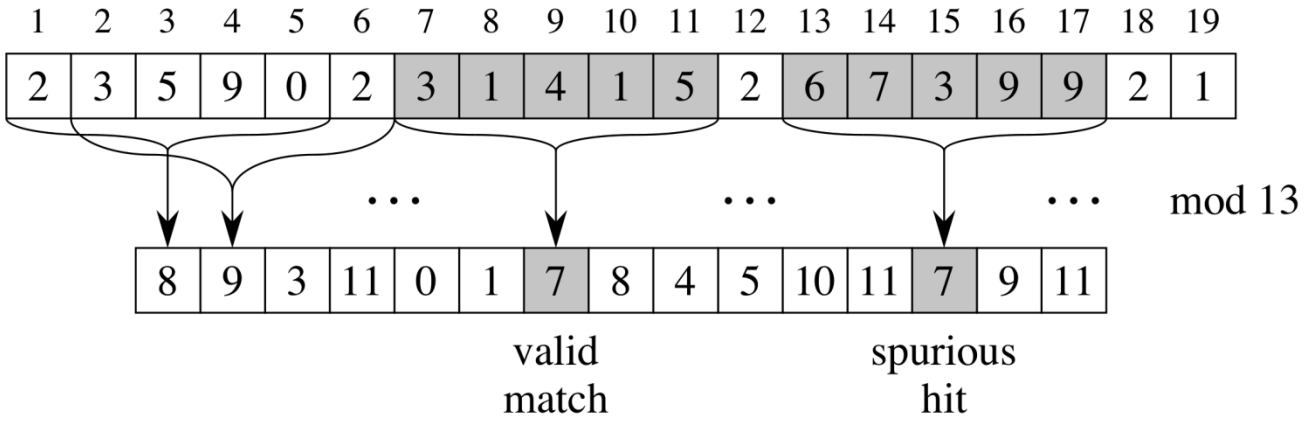
1. 如果$t_s \not\equiv p \ (mod\ q)$, 那麼現在這個s為invalid shift
2. 如果$t_s \equiv p \ (mod\ q)$, 那麼必須額外檢查
   (直接比對範圍內的字串→花很多時間)

- 當$t_s \equiv p \ (mod\ q)$, 但是$t_s \neq p$時, 稱為spurious hit
- 當q夠大的時候, 希望spurious hit會相當少

例子: Rabin-Karp Algorithm







Pseudo Code: Rabin-Karp

```
Rabin-Karp-Matcher(T,P,d,q)
n=T.length
m=P.length
h=d^(m-1) mod q
p=0
t=0
for i=1 to m
      p=(dp+P[i]) mod q
      t=(dt+T[i]) mod q
for s=0 to n-m
      if p==t
            if P[1..m]==T[s+1..s+m]
                  print "Pattern occurs with shift" s
      if s<n-m
            t=(d(t-T[s+1]h)+T[s+m+1]) mod q
```

T: string to be searched
P: pattern to be matched
d: size of the character set
q: max number

Pre-processing: $O(m)$

迴圈跑n-m+1次

Hit的時候比對: $O(m)$

Worst-case Running Time

```
Rabin-Karp-Matcher(T,P,d,q)
n=T.length
m=P.length
h=d^(m-1) mod q
p=0
t=0
for i=1 to m
      p=(dp+P[i]) mod q
      t=(dt+T[i]) mod q
for s=0 to n-m
      if p==t
            if P[1..m]==T[s+1..s+m]
                  print "Pattern occurs with shift" s
      if s<n-m
            t=(d(t-T[s+1]h)+T[s+m+1]) mod q
```

Worst case的時候:
T=a^n (n個a)
P=a^m (m個a)
比對的時間為
O(m(n-m+1))

Pre-processing: $O(m)$

迴圈跑n-m+1次

Hit的時候比對: $O(m)$

Average Running Time

```
Rabin-Karp-Matcher(T,P,d,q
n=T.length
m=P.length
h=d^(m-1) mod q
p=0
    for i=1 to m
        p=(dp+P[i]) mod q
        t=(dt+T[i]) mod q
    for s=0 to n-m
        if p==t
            if P[1..m]==T[s+1..s+m]
                print "Pattern occurs with shift" s
        if s<n-m
            t=(d(t-T[s+1]h)+T[s+m+1]) mod q
```

Pre-processing: $O(m)$

迴圈跑n-m+1次

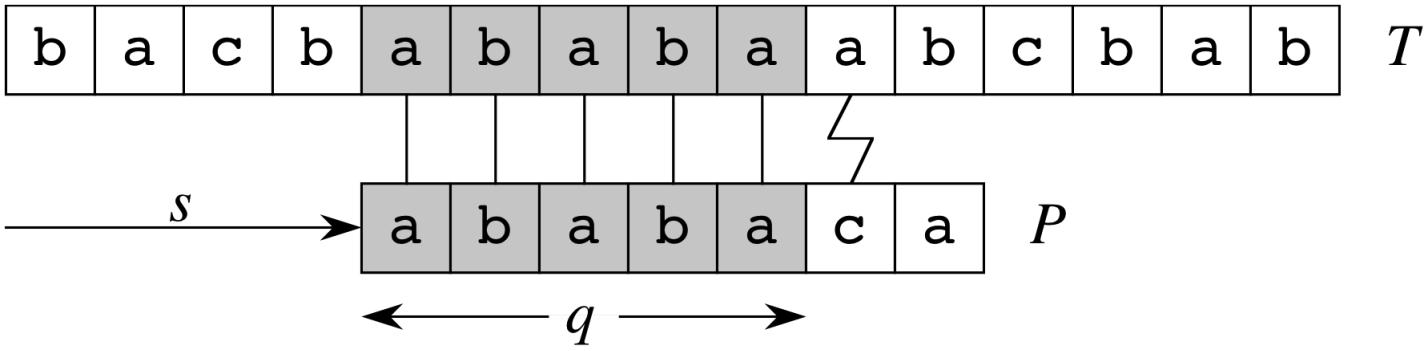
Hit的時候比對: $O(m)$

平常的時候, valid shift很少
(假設有c個)
不會每次都有modulo的hit.
假設字串各種排列組合出現的機率相等
則spurious hit的機率可當成$1/q$.

則比對花的時間:
Spurious hit共花O((n-m+1)/q)=O(n/q)次
總共比對花的時間為
O((n-m+1)+(m(c+n/q)))

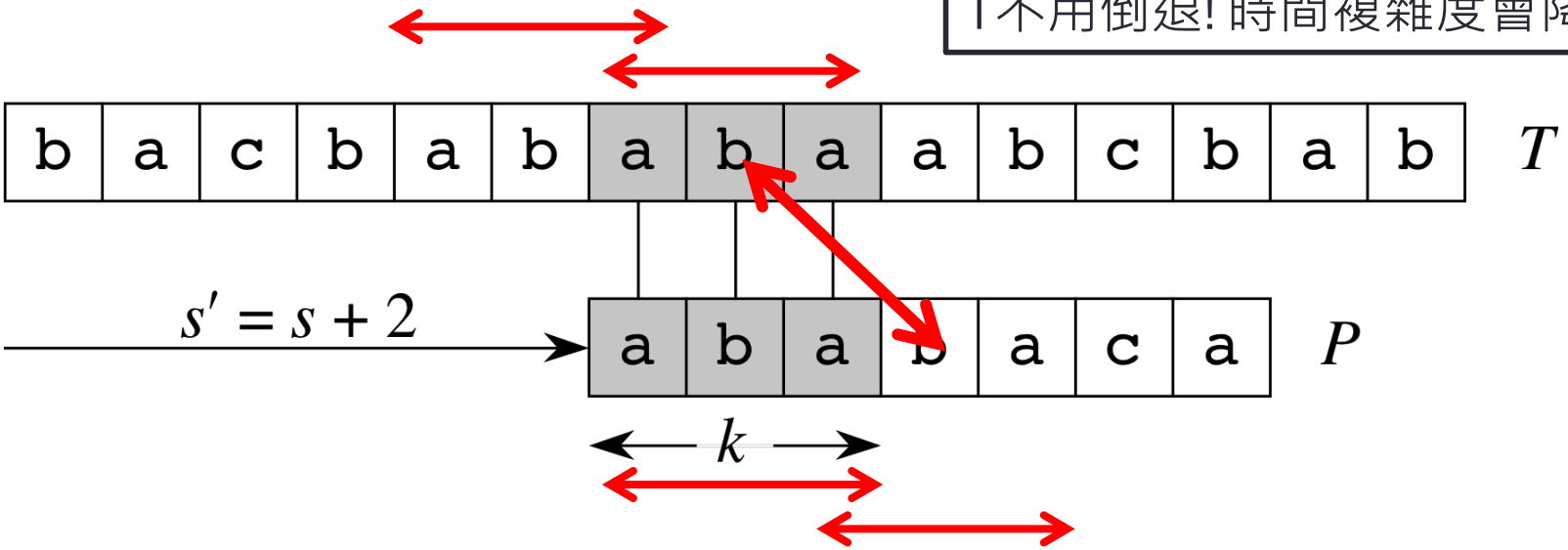
If c=O(1) and q≥m, → O(n+m)=O(n)

方法三: The Knuth-Morris-Pratt Algo.



一樣耶! 表示等一下可以從P第4個位置開始比

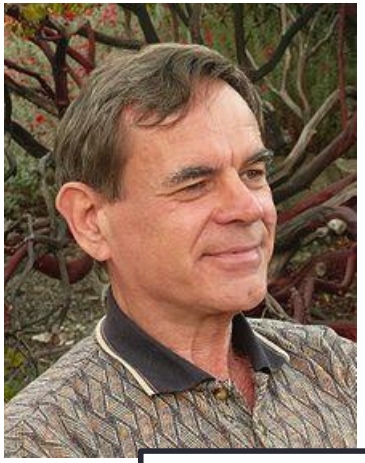
T不用倒退! 時間複雜度會降低!



Knuth-Morris-Pratt

Don Knuth

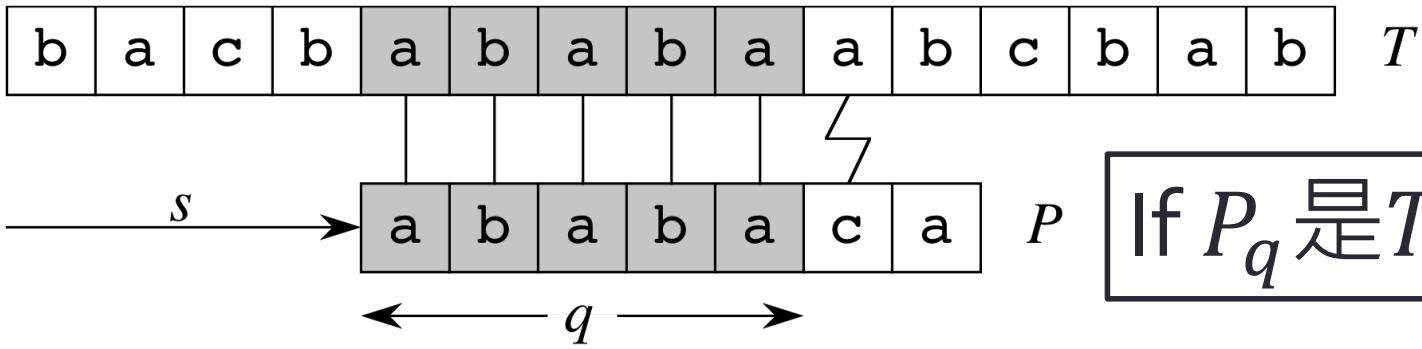
James Morris



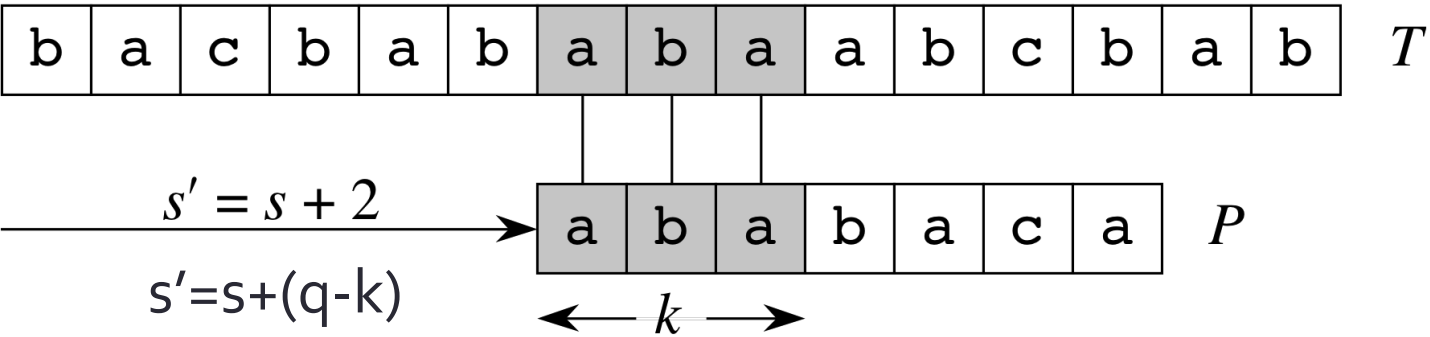
Vaughan Pratt

正式一點的說法

- 假設P[1..q]和T[s+1..s+q]已經match了
- 要找出最小的shift s′使得某個k<q可以滿足
- $P[1..q] = T[s'+1..s'+k], s'+k = s+q$

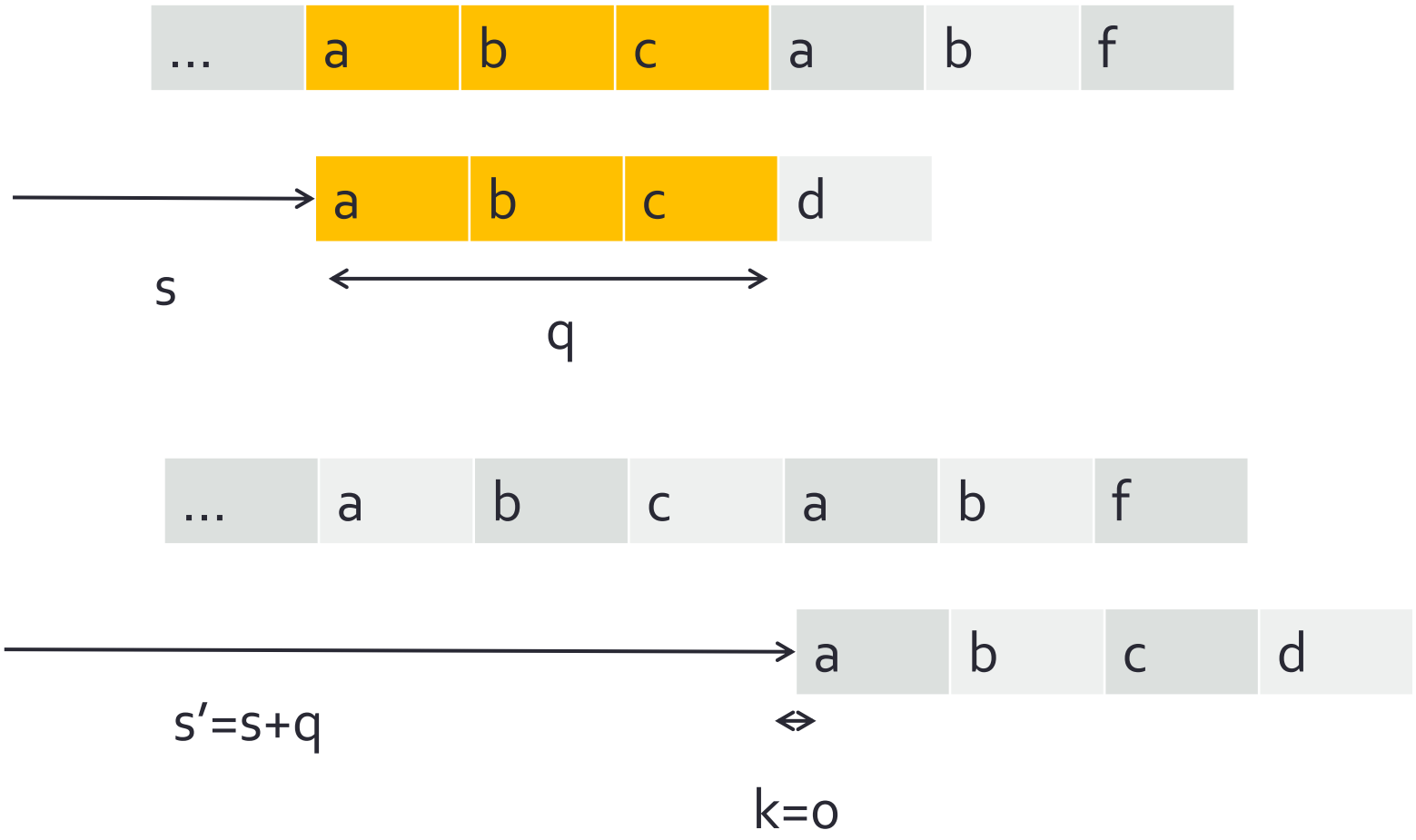


If P_q是T_{s+q} 的suffix



找P_q的最長prefix使得它是T_{s+q}的suffix

最好的狀況下：沒有重複的pattern



先處理P來取得”重複pattern”的資訊

找P_q的最長prefix使得它是T_{s+q}的suffix

找P_q的最長prefix P_k使得它是P_q的suffix

- 定義Prefix function (failure function) π:
- Input: {1,2,…,m}
- Output: {0,1,…,m-1}
- $\pi[q] = \max\{k: k < q \text{ and } P_k \text{ is a suffix of } P_q\}$

- (也就是前面例子中的k值, 可以想成最長的重複pattern的長度)

Prefix function example

$$\pi[q] = \max\{k : k < q \text{ and } P_k \text{ is a suffix of } P_q\}$$

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	A	B	A	B	A	C	A
$\pi[i]$							
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	0	1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P[i]	A	B	A	B	A	C	A	B	A	B	A	B
$\pi[i]$												
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	4

Pseudo-code: Prefix function

```
Compute-Prefix-Function(P)
m=P.length
let π[1..m] be a new array
π[1] = 0
k=0
for q=2 to m
     while k>0 and P[k+1]!=P[q]
          k=π[k]
     if P[k+1]==P[q]
          k=k+1
     π[q] = k
return π
```

例子: Matching

- T=BACBABABAABCBAB

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	A	B	A	B	A	C	A
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	0	1

- 實際的Matching Pseudo Code和計算prefix function非常像
- 請見Cormen p. 1005 KMP-Matcher

算Prefix function花多少時間?

```
Compute-Prefix-Function(P)
m=P.length
let π[1..m] be a new array
π[1] = 0
k=0
for q=2 to m
      while k>0 and P[k+1]!=P[q]
            k=π[k]
      if P[k+1]==P[q]
            k=k+1
      π[q] = k
return π
```

共$O(m)$次

麻煩的是這邊:
總共會跳多少次呢?

算Prefix function花多少時間?

```
Compute-Prefix-Function(P)
m=P.length
let π[1..m] be a new array
π[1] = 0
k=0
for q=2 to m
    while k>0 and P[k+1]!=P[q]
        k=π[k]
    if P[k+1]==P[q]
        k=k+1
    π[q] = k
return π
```

進入迴圈的時候k<q, 且q每次增加, k有時候不增加
所以k<q永遠成立

所以$\pi[q] = k < q$.

所以每執行一次迴圈
就減少k一次
且k永遠不是負的

k只會在這邊增加,
因此最多總共增加m-1次(迴圈執行次數)

最後: 既然有增加才有得減少, while loop總共執行的次數不會超過O(m)

Total: O(m)

KMP執行時間

- 類似的方法可以證明比對的部分執行時間為O(n)
- 所以總和來看:
- Preprocessing時間 O(m)
- 比對時間 O(n)

Today's Reading Assignment

- Cormen ch. 32, 32.1, 32.2, 32.4 (正確性的證明略為複雜)