第2章　递归与分治策略 (2)

内容

2.1 求解递归式

2.2 递归

1. 阶乘函数
2. Fibonacci数列
3. 排列问题
4. 整数划分问题
5. Hanoi塔问题

2.3 分治

1. **二分搜索技术**
2. **合并排序**
3. 快速排序
4. 线性时间选择

递归与分治策略总体思想

- 将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同子问题。如果这些子问题都可解，并可利用这些子问题的解求出原问题的解，则这种分治法可行。

分治法的适用条件

- 分治法所能解决的问题一般具有以下特征：
  1. 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
  2. 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题
  3. 利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解；
  4. 该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。

分治法的基本步骤

DIVIDE-AND-CONQUER(P)

//当问题规模小于n_0时，直接求解

if $|P| \le n_0$, **ADHOC**(P), return

//分解问题

divide P into smaller subinstances $P_1, P_2, \ldots, P_a$

//递归的解各子问题

for i=1 to a

y_i=**DIVIDE-AND-CONQUER** (P_i)

//将各子问题的解合并为原问题的解

return **MERGE**($y_1, \ldots, y_a$)

子问题的规模

- 人们从大量实践中发现，在用分治法设计算法时，最好使**子问题的规模大致相同**。即将一个问题分成大小相等的a个子问题的处理方法是行之有效的。
- 这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种**平衡(balancing)子问题**的思想，它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。

2.3 分治

1. 二分搜索技术
2. 合并排序

1 二分搜索技术

- 问题描述：给定已排好序的n个元素A[1..n]，在这n个元素中找出一特定元素key。

查找key=51

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
15	17	18	22	35	51	60	88	90	100

两种算法

- **顺序搜索方法**
  - 没有利用n个元素已排好序这个条件
  - 最坏情况下，$T(n) = \mathrm{O}(n)$
- **二分搜索方法**
  - 利用元素间的次序关系，采用分治策略
  - 最坏情况下，$T(n) = \mathrm{O}(\log n)$

二分搜索技术

查找key=51

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
15	17	18	22	35	51	60	88	90	100

Left Mid Righ

由于Key大于Mid位置的数据，修正查找区间范围
——右半区间：[Mid+1， Right]

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
15	17	18	22	35	51	60	88	90	100

Left Mid Righ

由于Key小于Mid位置的数据，修正查找区间范围
——左半区间：[Left，Mid-1]

A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
15	17	18	22	35	51	60	88	90	100

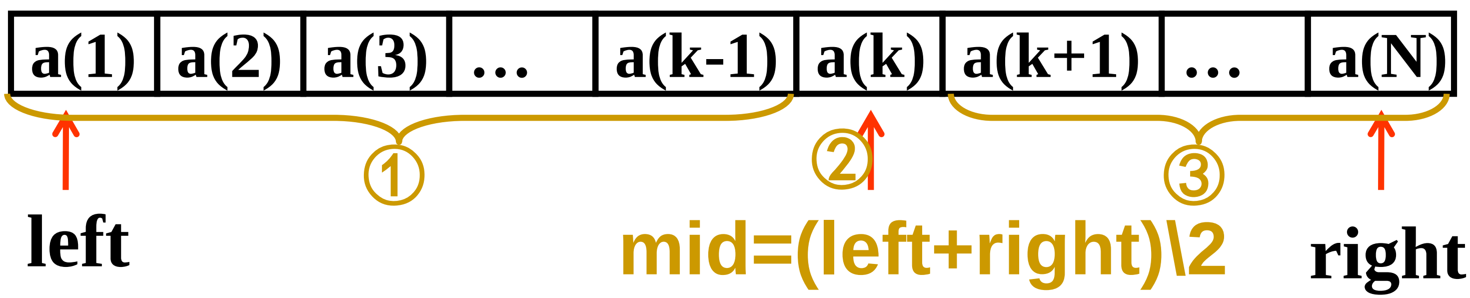
Mid=(Left+ Right)\2

Left Right

Mid

二分搜索技术

- 又称折半查找法
- 仅适用于**有序数组**！
- 基本思想：在下标区间[left,right]间，用mid将区间一分为二，根据mid位置元素和key的大小关系，确定下一次查找区间



① a(mid)>key 则：right=mid-1
② a(mid)=key 则：找到!
③ a(mid)<key 则：left=mid+1

结束条件：
•找到
•未找到（left>right）

二分搜索算法描述

```
RECURSIVE-BINARY-SEARCH(A, key, left, right)
  if left>right or key<A[left] or key>A[right]   //在A中找不到key
    return NULL
  mid = floor((left + right)/2)
  if key==A[mid]
    return mid
  else if key>A[mid]     //在区间A[mid+1..right]中找key
    return RECURSIVE-BINARY-SEARCH(A,key,mid+1,right)
  else         //在区间A[left..mid-1]中找key
    return RECURSIVE-BINARY-SEARCH(A,key,left,mid-1)
```

二分搜索技术分析

- 满足分治法解决问题的四个特征：
  1. 该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；
  2. 该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题;
  3. 分解出的子问题的解可以合并为原问题的解；
  4. 分解出的各个子问题是相互独立的。

算法时间复杂度分析

- 每调用一次二分算法， 待搜索数组的大小为原来的一半。因此，在最坏情况下，二分算法被调用了 $\mathrm{O}(\log n)$ 次。
- 每次调用二分算法，运算需要 $\Theta(1)$ 时间，因此整个算法在最坏情况下的计算时间复杂性为 $\mathrm{O}(\log n)$
- 递归式：

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

2.3 分治

1. 二分搜索技术
2. 合并排序

2 合并排序

a) 递归合并排序
b) 非递归的合并排序
c) 折半拆分合并排序
d) 自然合并排序

a) 递归合并排序

- 用分治策略实现对n个元素进行排序的算法
- 基本思想：
  1. **分解**：将n个元素分成各含n/2个元素的2个子集合；
  2. **解决**：递归调用合并排序算法，分别对2个子集合进行排序；
  3. **合并**：合并两个已排好序的子集合以得到排序结果。

递归合并排序算法描述

```
MERGE_SORT(A, p, r)
   if p<r
     q = floor((p+r)/2)
     MERGE_SORT(A, p, q)
     MERGE_SORT(A, q+1, r)
     MERGE(A, p, q, r)
```

合并函数Merge

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{ }

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10, 15, 20}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10, 15, 20, 30}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10, 15, 20, 30, 35}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10, 15, 20, 30, 35, 40}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10, 15, 20, 30, 35, 40, 45}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10,15,20,30,35,40,45,50}

A[p:q]	{15, 20, 35, 45, 60}
A[q+1:r]	{10, 30, 40, 50}
B[p:r]	{10,15,20,30,35,40,45,50,60}

合并函数MERGE算法描述--优化前

```
MERGE(A,p,q,r)
    n1 = p-q+1
    n2 = r-q
    let L[1..n1] and R[1..n2] be new arrays
    for i = 1 to n1
        L[i] = A[p+i-1]
    for j = 1 to n2
        R[j] = A[q+j]
    i = 1
    j = 1
    k = p
    while i<=n1 and j<=n2
        if L[i]<=R[j]
            A[k++] = L[i++]
        else
            A[k++] = R[j++]
    while i<=n1
        A[k++] = L[i++]
    while j<=n2
        A[k++] = R[j++]
```

合并函数MERGE算法描述--优化后

```
MERGE(A,p,q,r)
    n1 = p-q+1
    n2 = r-q
    let L[1..n1+1] and R[1..n2+1] be new arrays
    for i = 1 to n1
        L[i] = A[p+i-1]
    for j = 1 to n2
        R[j] = A[q+j]
    L[n1+1] = inf
    R[n2+1] = inf
    i = 1
    j = 1
    for k = p to r-q
        if L[i] <= R[j]
            A[k] = L[i++]
        else
            A[k] = R[j++]
```

递归合并排序
——算法时间复杂度分析

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + \mathrm{O}(\mathrm{n}) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n \log n\right)$$

递归合并排序——特点

- 辅助空间：$\mathrm{O}(n)$

b) 非递归的合并排序

- 算法MergeSort的递归过程只是将待排序集合一分为二，直至待排序集合只剩下一个元素为止，然后不断合并两个排好序的数组段。
- 按此机制，可首先将数组A中相邻元素两两配对，用合并算法将它们排序，构成n/2组长度为2的排好序的子数组段，然后再将它们排序成长度为4的排好序的子数组段，如此继续下去，直至整个数组排好序。

非递归的合并排序图解

s=1 初始序列 [49] [38] [65] [97] [76] [13] [27]

s=2 第一步 [38 49] [65 97] [13 76] [27]

s=4 第二步 [38 49 65 97] [13 27 76]

s=8 第三步 [13 27 38 49 65 76 97]

c) 折半拆分合并排序算法描述

1. 设长度s为1；
2. 将数组A中元素顺序编号，并把数组A拆分成两个数组A1和A2，其中A1中是编号为奇数的元素，A2中是编号为偶数的元素；
3. 按长度s，依次按大小合并两数组中对应位置的元素，再依次复制到数组A中；
4. 长度s=2*s，连续执行步骤2和3，直至s大于或等于数组A中元素个数n。

c) 折半拆分合并排序算法描述

s=1

A	49	38	65	97	76	13	27
	1	2	3	4	5	6	7
A_1	49	65	76	27			
A_2	38	97	13				

s=2

A	38	49	65	97	13	76	27
	1		2		3		4
A_1	38	49	13	76			
A_2	65	97	27				

s=4

A	38	49	65	97	13	27	76
	1				2		

⋮

d) 自然合并排序

- 合并排序中，第一步合并的是相邻长度为1的子数组段，这是因为长度为1的子数组段是已排好序的
- 事实上，对于初始给定的数组A，通常存在多个长度大于1的已自然排好序的子数组段。
- 例：
  - [75 55 15 20 85 30 35 10 60 40 50 25 45 80 70 65]
  - [75 55 15 20 31 30 35 32 60 40 50 25 45 80 70 65]

自然合并排序算法描述

- 拆分：
  - 对数组进行线性扫描，找出所有排好序的子数组段并进行编号，依次复制到子数组A1和A2中。
  - 分别扫描子数组A1和A2，合并相邻的排好序的子数组段。
- 合并：
  - 合并A1和A2数组中对应位置的排好序的子数组段到A中
- 重复步骤1和2，直到只能拆分成一个子数组为止

自然合并排序算法描述

A 75 55 15 20 31 30 35 32 60 40 50 25 45 80 70 65

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

A_1 75 15 20 31 32 60 25 45 80 65

A_2 55 30 35 40 50 70

A 55 75 15 20 30 31 32 35 40 50 60 70 25 45 80 65

① ② ③ ④

End