

# Heuristique de résolution d'un problème de conception de réseaux de hubs concurrentiels partagés avec allocation bi-critère coût-temps

D'après : ASSO LUC CARLOS / DIARRASSOUBA YAYA  
KPAHIRO ZAGBA / BAMBA GBANGO

P1 ISEM2 INPHB

30 janvier 2026

## Résumé

Dans ce rapport, nous étudions un problème d'allocation de clients entre deux firmes concurrentes exploitant des réseaux de transport structurés autour de hubs. Le modèle initial reposait sur une règle d'allocation fondée exclusivement soit sur le critère de coût, soit sur le critère de temps de parcours. Une telle approche apparaît toutefois restrictive et peu représentative du comportement réel des clients.

Afin de mieux refléter les choix observés en pratique, nous proposons un nouveau problème d'allocation dans lequel la décision des clients dépend simultanément du coût et du temps de transport. Le problème est formalisé mathématiquement comme un problème d'optimisation bi-critère, puis analysé du point de vue de sa complexité.

Face à la difficulté de résolution exacte, une approche heuristique basée sur un algorithme génétique est développée pour approximer des solutions de bonne qualité. Des jeux de données synthétiques sont générés afin de simuler différents scénarios concurrentiels et d'évaluer l'impact de la nouvelle règle d'allocation sur la répartition de la demande et les parts de marché des firmes.

## Table des matières

<b>1</b>	<b><u>Introduction</u></b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b><u>Description du problème</u></b>	<b>3</b>
2.1	<u>Le Modèle de Compétition de Stackelberg</u>	4
2.2	<u>Le Mécanisme Central : La Fonction d'Allocation de la Clientèle</u>	4
2.2.1	<u>Allocation de la Part de Marché à la Firme A (Leader)</u>	4
2.3	<u>Contraintes Fondamentales du Modèle</u>	4
<b>3</b>	<b><u>Modélisation par graphes</u></b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b><u>Paramètres du modèle</u></b>	<b>6</b>
4.1	<u>Notations</u>	6
4.2	<u>Données du Problème</u>	6
4.3	<u>Variables de Décision</u>	6

<b>5</b>	<b><u>Allocation des clients</u></b>	<b>7</b>
5.1	<u>Ratios</u> . . . . .	7
5.2	<u>Fonctions d'Allocation de la Clientèle</u> . . . . .	7
<b>6</b>	<b><u>Modèle mathématique</u></b>	<b>8</b>
6.1	<u>Démarche classique d'allocation monocritère</u> . . . . .	8
6.2	<u>Extension du modèle : allocation bi-critère coût-temps</u> . . . . .	10
6.3	<u>Complexité du problème</u> . . . . .	11
<b>7</b>	<b><u>Résolution heuristique par Algorithme Génétique</u></b>	<b>12</b>
7.1	<u>Pseudo Code de l'algorithme génétique</u> . . . . .	12
7.2	<u>Pseudo-code algorithmique de la méthode fitness</u> . . . . .	14
7.3	<u>Construction du jeu de donnée pour la résolution</u> . . . . .	14
7.4	<u>Simulations</u> . . . . .	15
7.5	<u>Analyses des Résultats après simulations</u> . . . . .	17
7.5.1	1 er jeu de donnée . . . . .	17
7.5.2	2 ème jeu de donnée . . . . .	18
7.5.3	3 ème jeu de donnée . . . . .	20
7.5.4	4 ème jeu de donnée . . . . .	22
7.5.5	5 ème jeu de donnée . . . . .	23
7.5.6	6 ème jeu de donnée . . . . .	25
7.5.7	7 ème jeu de donnée . . . . .	27
7.5.8	8 ème jeu de donnée . . . . .	28
<b>8</b>	<b><u>Conclusion</u></b>	<b>30</b>
<b>9</b>	<b><u>Note sur l'Implémentation</u></b>	<b>30</b>

# 1 Introduction

La conception de réseaux de transport organisés autour de hubs constitue un axe majeur de recherche en logistique et en recherche opérationnelle, en raison des gains significatifs qu'elle permet en termes de coûts et d'efficacité. Dans un contexte concurrentiel, plusieurs firmes peuvent exploiter des réseaux de hubs sur un même marché, rendant les décisions d'allocation des clients déterminantes pour la performance et les parts de marché de ces entreprises.

Les modèles classiques d'allocation supposent généralement que les clients choisissent une firme selon un critère unique, tel que le coût ou le temps de transport. Cependant, cette hypothèse apparaît restrictive et peu représentative des comportements réels, où le choix résulte souvent d'un compromis entre plusieurs critères. Dans ce rapport, nous étudions un problème d'allocation de clients entre deux firmes concurrentes exploitant des réseaux de hubs, en proposant une règle de décision fondée simultanément sur le coût et le temps de transport. Cette extension conduit à un problème d'optimisation bi-critère de nature combinatoire, dont la résolution exacte est difficile pour des instances de taille réaliste.

Afin de résoudre ce problème, nous adoptons une approche heuristique basée sur un algorithme génétique. Après une formulation mathématique du modèle et une analyse de sa complexité, des jeux de données synthétiques sont utilisés pour simuler différents scénarios concurrentiels et évaluer l'impact de la règle d'allocation bi-critère sur la répartition de la demande et les parts de marché des firmes.

## 2 Description du problème

Nous considérons un marché de transport dans lequel deux firmes concurrentes exploitent des réseaux organisés autour de hubs. Chaque client exprime une demande de transport entre une origine et une destination, et doit être affecté à l'une des deux firmes afin que cette demande soit satisfaite. L'affectation des clients constitue un élément central du modèle, puisqu'elle conditionne à la fois l'utilisation des réseaux et la répartition des parts de marché entre les firmes.

Dans les modèles initiaux, la règle d'allocation des clients repose sur un critère unique. Les clients sont soit affectés à la firme proposant le coût de transport le plus faible, soit à celle offrant le temps de parcours le plus court. Bien que ces hypothèses simplificatrices facilitent l'analyse du problème, elles présentent des limites importantes. D'une part, elles ne prennent pas en compte l'arbitrage naturel effectué par les clients entre le coût et le temps de transport. D'autre part, elles conduisent souvent à des allocations extrêmes, dans lesquelles une firme capte l'essentiel de la demande, ce qui peut s'avérer peu réaliste dans un contexte concurrentiel.

Le problème étudié dans ce rapport consiste donc à définir une nouvelle règle d'allocation des clients intégrant simultanément le coût et le temps de transport proposés par chaque firme. Cette approche vise à mieux représenter le comportement des clients et à produire des allocations plus équilibrées et plus proches des situations observées en pratique.

## 2.1 Le Modèle de Compétition de Stackelberg

Pour capturer la nature séquentielle de la compétition de type Stackelberg, où un acteur prend sa décision en anticipant la réaction de l'autre, l'utilisation d'un modèle de programmation bi-niveau est particulièrement pertinente. Cette approche permet de modéliser une prise de décision stratégique où le leader ne se contente pas de réagir au marché, mais cherche à le façonner à son avantage en prévoyant les mouvements de son suiveur.

Les acteurs principaux du modèle sont :

- **La Firme A (Leader)** : Elle est la première à prendre sa décision. Elle choisit l'emplacement de ses arcs de hub pour maximiser ses revenus, en sachant que la Firme B observera ce choix et y réagira de la manière la plus avantageuse pour elle-même.
- **La Firme B (Suiveur)** : Elle observe le réseau mis en place par le leader et choisit ensuite l'emplacement de ses propres arcs de hub afin de maximiser ses revenus, compte tenu de la configuration du réseau du leader.

L'objectif de chaque entreprise est de maximiser ses revenus totaux, définis comme le produit de la demande pour chaque trajet ( $W_{ij}$ ) par le revenu unitaire associé ( $F_{ij}$ ). Cet objectif est atteint en capturant la plus grande part de marché possible pour chaque paire origine-destination (OD).

## 2.2 Le Mécanisme Central : La Fonction d'Allocation de la Clientèle

Le cœur du modèle repose sur une fonction qui détermine comment la demande pour chaque trajet est répartie entre les deux concurrents. Cette allocation n'est pas binaire (« tout ou rien ») mais fractionnée selon la performance relative des deux réseaux.

Le modèle utilise une fonction en escalier à cinq niveaux, qui alloue la clientèle en fonction d'un ratio de performance, basé à la fois sur la distance totale du trajet et sur le coût.

### 2.2.1 Allocation de la Part de Marché à la Firme A (Leader)

Ce ratio mesure l'avantage relatif du service de la Firme B sur celui de la Firme A. Un ratio approchant +1 indique une forte préférence pour la Firme B (trajet plus court ou moins cher), tandis qu'un ratio approchant -1 signifie un avantage net pour la Firme A.

Une valeur proche de zéro signale des services perçus comme équivalents, conduisant à un partage équitable de la demande. Les paramètres  $r_1$  et  $r_2$  agissent comme des seuils de sensibilité : ils permettent de moduler la réactivité des clients aux différences de service, simulant ainsi des marchés où les clients sont plus ou moins fidèles ou sensibles à la performance.

## 2.3 Contraintes Fondamentales du Modèle

Le modèle est encadré par des contraintes qui reflètent les réalités opérationnelles et concurrentielles :

- **Nombre d'arcs de hub fixe** : Chaque firme doit localiser un nombre prédéfini d'arcs de hub ( $q_A$  pour le leader et  $q_B$  pour le suiveur). Cette contrainte modélise une décision d'investissement stratégique avec un budget défini.

- **Non exclusivité des hubs** : Le modèle postule que les firmes peuvent se partager les mêmes hubs. Il s'agit d'une hypothèse forte, justifiée pour modéliser une concurrence intense.
- **Si B partage un hub avec A** : La part du marché est plus captée par A.

L'analyse des différents scénarios basés sur ce modèle permet d'évaluer comment ces dynamiques influencent la conception optimale des réseaux.

### 3 Modélisation par graphes

La modélisation de ce réseau de transport s'appuie sur une structure de graphe où l'ensemble des nœuds  $V$  représente les points de demande (villes) et les connexions sont définies par des arcs d'accès (collecte et distribution) et des arcs de moyeu (hub arcs) permettant de consolider les flux à la fois sur les coûts et distances. La description du réseau selon un graphe se présente comme suit :

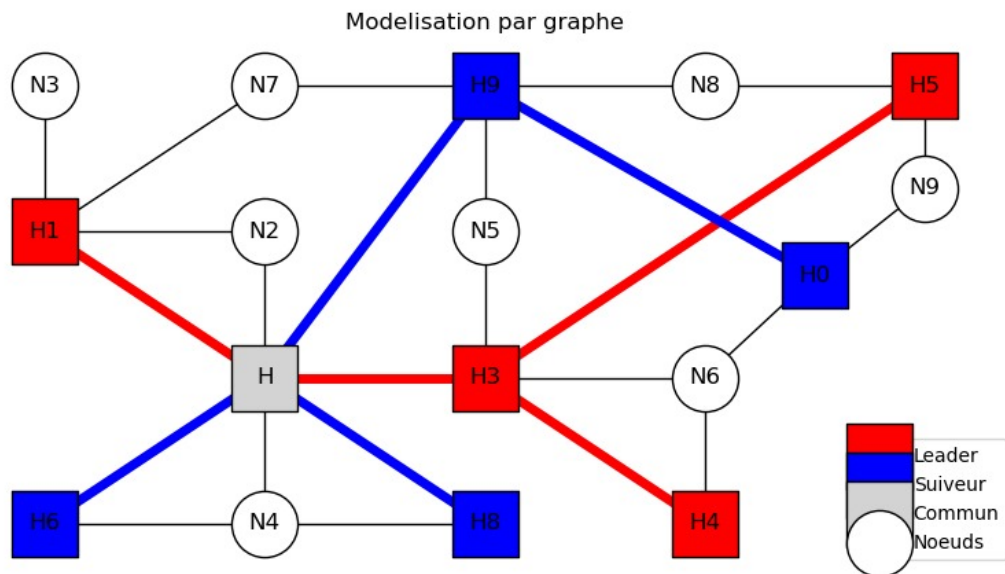


FIGURE 1 – Illustration du réseau par graphe

W

## 4 Paramètres du modèle

### 4.1 Notations

- $V$  : L'ensemble des nœuds de demande (les villes) du réseau.  
 $n$  : Le nombre total de nœuds dans l'ensemble  $V$  ( $|V| = n$ ).  
 $i, j$  : Indices représentant respectivement l'origine et la destination d'un flux, où  $i, j \in V$ .  
 $k, l$  : Indices représentant les hubs (moyeux) par lesquels transite le flux, où  $k, l \in V$ .  
 $\mathcal{A}$  : L'ensemble des  $q_A$  arcs pivots sélectionnés par l'entreprise Leader (Firme A).  
 $\mathcal{B}$  : L'ensemble des  $q_B$  arcs pivots sélectionnés par l'entreprise Suiveuse (Firme B).  
 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$  : Les ensembles de toutes les combinaisons possibles d'arcs pivots pour les firmes A et B.  
 $S$  : L'ensemble des indices des "marches" (étapes) de la fonction d'allocation de la clientèle.

### 4.2 Données du Problème

- $W_{ij}$  : La demande de transport (nombre de trajets) entre les nœuds  $i$  et  $j$ , pour  $j > i$ .  
 $F_{ij}$  : Le revenu généré par unité de demande entre  $i$  et  $j$  (ex : tarif aérien), pour  $j > i$ .  
 $d_{ij}$  : La distance physique entre les nœuds  $i$  et  $j$ , avec  $d_{ii} = 0$  pour tout  $i \in V$ .  
 $\alpha$  : Le facteur de réduction appliqué au coût de transport sur les arcs pivots pour refléter les économies d'échelle, où  $0 < \alpha \leq 1$ .  
 $\chi$  : Le coût unitaire de transport pour la collecte (de l'origine au premier hub).  
 $\delta$  : Le coût unitaire de transport pour la distribution (du dernier hub à la destination).  
 $C_{ijkl}$  : Le coût unitaire total pour un trajet de  $i$  vers  $j$  via les hubs  $k$  et  $l$  :

$$C_{ijkl} = \chi d_{ik} + \alpha d_{kl} + \delta d_{lj} \quad (1)$$

Pour un trajet à un seul arrêt (hub) :

$$C_{ijkk} = \chi d_{ik} + \delta d_{kj} \quad (2)$$

- $q_A, q_B$  : Le nombre d'arcs pivots que les firmes A et B peuvent respectivement installer.  
 $r_1, r_2$  : Les seuils de sélectivité utilisés pour définir les limites de la fonction d'allocation, où  $r_1 \geq r_2 \geq 0$ .  
 $L_s, U_s$  : Les limites inférieure ( $L$ ) et supérieure ( $U$ ) de la marche  $s$  dans la fonction d'allocation, pour  $s \in S$ .  
 $\phi_s$  : La fraction de la demande capturée par le Leader lorsque le ratio de performance tombe dans la marche  $s$ .  
 $W$  : Le revenu total potentiel généré par l'ensemble du marché :

$$W = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} W_{ij} F_{ij} \quad (3)$$

- $M$  : Un nombre arbitrairement grand ("Big M") utilisé pour activer ou désactiver mathématiquement certaines contraintes.

### 4.3 Variables de Décision

- $x_{ijkl}^A, x_{ijkl}^B$  : Variables binaires valant 1 si le trajet  $i \rightarrow j$  passe par les hubs  $k$  et  $l$  pour la firme A (ou B), 0 sinon, où  $i, j, k, l \in V$  et  $j > i$ .

$y_{kl}^A, y_{kl}^B$  : Variables binaires valant 1 si un arc pivot est établi entre les hubs  $k$  et  $l$  par la firme A (ou B), 0 sinon, où  $k, l \in V$  et  $l > k$ .

$z_k^A, z_k^B$  : Variables binaires valant 1 si le nœud  $k$  est utilisé comme hub par la firme A (ou B), 0 sinon, où  $k \in V$ .

$w_{ij}^s$  : Variable binaire valant 1 si le ratio de coût pour le trajet  $i \rightarrow j$  se situe dans l'intervalle de la marche  $s \in S$ .

## 5 Allocation des clients

### 5.1 Ratios

$C_{ij}^A, C_{ij}^B$  : Le coût minimal pour un trajet de  $i$  vers  $j$  dans le réseau de la firme A (ou B) :

$$C_{ij}^A = \min_{(k,l) \in \mathcal{A}} \min\{C_{ijkl}, C_{ijlk}, C_{ijkk}, C_{ijll}\} \quad (4)$$

$$C_{ij}^B = \min_{(k,l) \in \mathcal{B}} \min\{C_{ijkl}, C_{ijlk}, C_{ijkk}, C_{ijll}\} \quad (5)$$

$D_{ij}^A, D_{ij}^B$  : La distance du chemin correspondant au coût minimal pour la firme A (ou B).

$DR_{ij}^{A,B}$  : Le ratio de distance (Distance Ratio) comparant les performances des deux firmes :

$$DR_{ij}^{A,B} = \frac{D_{ij}^A - D_{ij}^B}{D_{ij}^A + D_{ij}^B} \quad (6)$$

$CR_{ij}^{A,B}$  : Le ratio de coût (Cost Ratio) comparant les performances des deux firmes :

$$CR_{ij}^{A,B} = \frac{C_{ij}^A - C_{ij}^B}{C_{ij}^A + C_{ij}^B} \quad (7)$$

$\phi_{ij}^A([x^A], [x^B]), \phi_{ij}^B([x^A], [x^B])$  : La part de marché (fraction du flux) capturée par chaque firme pour la paire  $(i, j)$ , avec la contrainte :

$$\phi_{ij}^A([x^A], [x^B]) + \phi_{ij}^B([x^A], [x^B]) = 1 \quad (8)$$

$U_A, U_B$  : Les fonctions objectifs représentant le revenu total capturé par le Leader et le Suiveur :

$$U_A = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} \phi_{ij}^A([x^A], [x^B]) \quad (9)$$

$$U_B = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} \phi_{ij}^B([x^A], [x^B]) \quad (10)$$

### 5.2 Fonctions d'Allocation de la Clientèle

La fonction d'allocation en cinq niveaux est définie comme suit :

Ratio $CR_{ij}^{A,B}$ ou $DR_{ij}^{A,B}$	Part capturée par A $\phi_{ij}^A$
$\leq -r_1$	100%
$(-r_1, -r_2]$	75%
$(-r_2, r_2]$	50%
$(r_2, r_1]$	25%
$> r_1$	0%

TABLE 1 – Fonction d'allocation de la clientèle

## 6 Modèle mathématique

### 6.1 Démarche classique d'allocation monocritère

L'objectif principal du modèle est la maximisation du revenu total généré par la clientèle affectée à chaque firme. Ce modèle mathématique permet d'identifier les clients à forte valeur ajoutée, c'est-à-dire ceux qui contribuent le plus au revenu, et d'orienter en conséquence la conception du réseau de transport afin de les attirer. Cette démarche s'appuie sur une fonction d'allocation de la clientèle dans laquelle les clients sont affectés à une firme selon un critère unique, fondé soit sur le coût de transport, soit sur la distance ou le temps de parcours.

#### Pour l'entreprise A

$$\max_{x^A, y^A, z^A} U_A = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} \sum_{s \in S} \phi_s w_{ij}^s$$

#### Contraintes

$$\sum_{k \in V} \sum_{l > k} y_{kl}^A = q_A \quad (11)$$

$$z_k^A \leq \sum_{l > k} y_{kl}^A + \sum_{l < k} y_{lk}^A, \quad \forall k \in V \quad (12)$$

$$x_{ijkl}^A \leq y_{kl}^A, \quad \forall i, j, k, l \in V, j > i, l > k \quad (13)$$

$$x_{ijlk}^A \leq y_{kl}^A, \quad \forall i, j, k, l \in V, j > i, l > k \quad (14)$$

$$x_{ijkk}^A + \sum_{m \in V \setminus \{k\}} (x_{ijkm}^A + x_{ijmk}^A) \leq z_k^A, \quad \forall i, j, k \in V, j > i \quad (15)$$

$$\sum_{k \in V} \sum_{l \in V} x_{ijkl}^A = 1, \quad \forall i, j \in V, j > i \quad (16)$$

$$([x^B]; [y^B]; [z^B]; [w]) \in \arg \max \{U_B \mid ([x^A]; [y^A]; [z^A]) \in T\} \quad (17)$$

$$x_{ijkl}^A \in \{0, 1\}, \quad y_{kl}^A \in \{0, 1\}, \quad z_k^A \in \{0, 1\} \quad (18)$$

#### Siginfications des contraintes

(11) Cette contrainte impose que la firme leader (A) établisse exactement  $q_A$  arcs de moyeu au sein de son réseau de transport

. (12) Cette contrainte garantit que les nœuds moyeux (hubs) de la firme leader ne peuvent être établis qu'aux points de connexion (extrémités) des arcs de moyeu effectivement



sélectionnés par cette firme.

(13) Cette contrainte garantit qu'un chemin entre une origine  $i$  et une destination  $j$  ne peut emprunter l'arc de moyeu  $(K,L)$  que si cet arc a été effectivement établi par la firme leader.

(14) Cette règle garantit qu'un chemin ne peut emprunter l'arc de moyeu  $(K,L)$  dans le sens inverse (de  $l$  vers  $k$ ) que si cet arc a été préalablement établi par la firme leader.

(15) Elle impose qu'un nœud  $k$  soit obligatoirement désigné comme un moyeu (hub) s'il est utilisé comme point d'entrée, de sortie ou comme hub unique pour n'importe quel trajet de la firme leader.

(16) Cette contrainte assure la couverture totale de la demande en forçant la sélection d'exactly un chemin (à un ou deux hubs) pour chaque paire origine-destination au sein du réseau du leader.

(17) Elle définit la nature bi-niveau du problème en stipulant que la firme suiveuse (B) optimisera systématiquement son propre réseau pour maximiser ses revenus en réaction directe aux choix de localisation du leader.

(18) Ces conditions de domaine imposent que les variables de décision pour les chemins, les arcs de moyeu et les nœuds moyeux soient binaires (0 ou 1)

### Pour l'entreprise B

$$\max_{x^B, y^B, z^B} U_B = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} \left( 1 - \sum_{s \in S} \phi_s w_{ij}^s \right)$$

### Contraintes

$$\sum_{k \in V} \sum_{l > k} y_{kl}^B = q_B \quad (19)$$

$$z_k^B \leq 1 - z_k^A, \quad \forall k \in V \quad (20)$$

$$z_k^B \leq \sum_{l > k} y_{kl}^B + \sum_{l < k} y_{lk}^B, \quad \forall k \in V \quad (21)$$

$$x_{ijkl}^B \leq y_{kl}^B, \quad \forall i, j, k, l \in V, j > i, l > k \quad (22)$$

$$x_{ijlk}^B \leq y_{kl}^B, \quad \forall i, j, k, l \in V, j > i, l > k \quad (23)$$

$$x_{ijkk}^B + \sum_{m \in V \setminus \{k\}} (x_{ijkm}^B + x_{ijmk}^B) \leq z_k^B, \quad \forall i, j, k \in V, j > i \quad (24)$$

$$\sum_{k \in V} \sum_{l \in V} x_{ijkl}^B = 1, \quad \forall i, j \in V, j > i \quad (25)$$

$$L_s \sum_{k \in V} \sum_{l \in V} C_{ijkl} (x_{ijkl}^A + x_{ijkl}^B) - M(1 - w_{ij}^s) \leq \sum_{k \in V} \sum_{l \in V} C_{ijkl} (x_{ijkl}^A - x_{ijkl}^B) \quad (26)$$

$$\sum_{k \in V} \sum_{l \in V} C_{ijkl} (x_{ijkl}^A - x_{ijkl}^B) \leq U_s \sum_{k \in V} \sum_{l \in V} C_{ijkl} (x_{ijkl}^A + x_{ijkl}^B) + M(1 - w_{ij}^s) \quad (27)$$

$$\sum_{s \in S} w_{ij}^s = 1, \quad \forall i, j \in V, j > i \quad (28)$$

$$x_{ijkl}^B, y_{kl}^B, z_k^B, w_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad (29)$$

### Sgnifications des contraintes

- (19) Elle impose que la firme suiveuse ( $B$ ) établisse exactement  $q_B$  arcs de moyeu au sein de son réseau.
- (20) Elle garantit que les ensembles de hubs sont disjoints, empêchant la firme  $B$  de sélectionner un nœud déjà choisi comme hub par le leader ( $A$ ).
- (21) Cette règle assure que les nœuds moyeux de la firme  $B$  ne sont localisés qu'aux points de connexion (extrémités) de ses propres arcs de moyeu.
- (22) Elle interdit à un trajet d'emprunter l'arc de moyeu  $(K,L)$  si cet arc n'a pas été effectivement établi par la firme  $B$ .
- (23) De manière similaire, elle valide l'utilisation d'un arc de moyeu dans le sens inverse ( $l$  vers  $k$ ) uniquement si l'arc est ouvert.
- (24) Elle oblige un nœud à être officiellement désigné comme hub s'il est utilisé comme point de transfert ou de consolidation pour n'importe quel flux de la firme  $B$ .
- (25) Cette contrainte assure la couverture totale de la demande en imposant la sélection d'un chemin unique pour chaque paire origine-destination du réseau  $B$ .
- (26) Elle définit la borne inférieure permettant de situer le ratio de coût (ou distance) dans un palier spécifique de la fonction d'allocation de la clientèle.
- (27) Elle définit la borne supérieure pour confirmer l'appartenance du ratio de performance à un palier donné de la fonction d'allocation.
- (28) Cette règle garantit que chaque paire origine-destination est associée à un seul et unique palier de la fonction d'allocation (déterminant ainsi la part de marché capturée).
- (29) Ces conditions de domaine stipulent que toutes les variables de décision (trajets, arcs, hubs et indicateurs de paliers) doivent être binaires

## 6.2 Extension du modèle : allocation bi-critère coût–temps

Le modèle proposé conserve la structure générale du modèle initial, tout en introduisant une nouvelle règle d'allocation de la clientèle visant à mieux représenter le comportement réel des clients. Cette règle repose sur une fonction d'allocation combinée intégrant simultanément le coût et le temps de transport proposés par chaque firme. À cet effet, deux fonctions d'attractivité sont définies :  $\phi_{cs}$ , qui évalue la compétitivité d'une firme du point de vue du coût, et  $\phi_{ps}$ , qui mesure son attractivité en termes de temps de transport.

Afin de tenir compte de l'hétérogénéité des préférences des clients, le modèle introduit également la proportion de clients pressés  $P_{ij}$ , traduisant l'importance relative accordée au temps de parcours par rapport au coût. La fonction d'allocation globale est alors construite comme une combinaison pondérée des fonctions  $\phi_{cs}$  et  $\phi_{ps}$ , les pondérations reflétant le niveau de sensibilité des clients au facteur temps. Cette approche permet d'obtenir des décisions d'affectation plus nuancées et plus réalistes, évitant les allocations extrêmes observées dans le modèle à critère unique, tout en préservant la cohérence du cadre mathématique initial. La fonction de répartition s'explique de la façon suivante :

- des deux possibilités de cas, qu'il s'agisse du coût et la distance, si le hub de départ est celui de  $A$ ,  $A$  remportera plus le marché à cause de sa visibilité ou popularité. Et cela est présenté par ces deux tableaux ci dessous :

Ratio $CR_{ij}^{A,B}$	Part capturée par A $\phi_{ps}$
$[-1, -r_1[$	100%
$[-r_1, -r_2[$	100%
$[-r_2, r_1[$	75%
$[r_1, r_2[$	75%
$[r_1, 1]$	50%

TABLE 2 – Fonction d'allocation de la clientèle selon le coût

Ratio $DR_{ij}^{A,B}$	Part capturée par A $\phi_{cs}$
$[-1, -r_1[$	100%
$[-r_1, -r_2[$	100%
$[-r_2, r_1[$	75%
$[r_1, r_2[$	75%
$[r_1, 1]$	50%

TABLE 3 – Fonction d'allocation de la clientèle selon la distance

- Si B n'occupe aucun hub de A,  $\phi_{ps}$  et  $\phi_{cs}$  se comporte comme la fonction de répartition standard.

## Modèles

### Pour l'entreprise A

$$\max_{x^A, y^A, z^A} U_A = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} P_{ij} \sum_{s \in S} \phi_{ps} w_{ij}^s + \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} (1 - P_{ij}) \sum_{s \in S} \phi_{cs} w_{ij}^s$$

### Pour l'entreprise B

$$\max_{x^B, y^B, z^B} U_B = \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} P_{ij} \left( 1 - \sum_{s \in S} \phi_{ps} w_{ij}^s \right) + \sum_{i \in V} \sum_{j > i} F_{ij} W_{ij} (1 - P_{ij}) \left( 1 - \sum_{s \in S} \phi_{cs} w_{ij}^s \right)$$

NB : Les modèles définis ci-dessus partagent respectivement les mêmes contraintes que ceux décrits en 6.1.

## 6.3 Complexité du problème

Le problème étudié dans ce rapport est une extension du modèle de localisation d'arcs de hubs concurrentiels de type Stackelberg proposé par Mihiro Sasaki, James F. Campbell, Mohan Krishnamoorthy et Andreas T. Erns en (2014), dont il est établi qu'il est NP-difficile. Notre modèle reprend la même structure concurrentielle entre deux firmes opérant des réseaux de hubs, tout en enrichissant la règle d'allocation de la clientèle par un critère combiné coût-temps.

Du point de vue de la complexité, le problème de ces auteurs peut être obtenu comme un cas particulier de notre modèle en ne considérant qu'un seul critère d'allocation (coût ou temps) et en fixant les autres paramètres. Il en résulte que notre problème est au moins aussi difficile que ce modèle de référence, et est donc lui aussi NP-difficile. Cette propriété justifie le recours à des méthodes heuristiques pour sa résolution.

## **7 Résolution heuristique par Algorithme Génétique**

La résolution du problème de localisation d'arcs de moyeu (hub) de Stackelberg est abordée dans ce travail à l'aide d'un algorithme génétique, une méthode métaheuristique inspirée des mécanismes de l'évolution naturelle.

Le recours à l'algorithme génétique se justifie par la NP-difficulté du problème, sa nature combinatoire et bi-niveau, ainsi que par la capacité des algorithmes génétiques à explorer efficacement de vastes espaces de recherche non linéaires et non convexes, là où les méthodes exactes deviennent rapidement inapplicables en temps raisonnable.

### **7.1 Pseudo Code de l'algorithme génétique**

Le pseudo-code suivant décrit l'algorithme génétique général indépendamment du langage de programmation.

### Algorithme : Algorithme Génétique

1. Initialiser une population  $P$  de taille  $N$  :

$$P \leftarrow \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

2. Pour chaque individu  $s_i \in P$  :
  - Générer aléatoirement une solution  $s_i$
  - Calculer la fitness  $f(s_i)$

3. Initialiser  $generation \leftarrow 0$

4. Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint :

(a) **Sélection des parents :**

- Initialiser  $Parents \leftarrow \emptyset$
- Pour  $i = 1$  à  $N_{parents}$  :

$$p_i \leftarrow \text{Sélection}(P) \text{ (par tournoi, roulette, etc.)}$$

$$Parents \leftarrow Parents \cup \{p_i\}$$

(b) **Croisement et mutation :**

- Initialiser  $Enfants \leftarrow \emptyset$
- Pour  $j = 1$  à  $N_{enfants}$  :
  - Sélectionner deux parents  $p_1, p_2 \in Parents$
  - Si  $rand() < P_{croisement}$  :

$$e_j \leftarrow \text{Croisement}(p_1, p_2)$$

Sinon :

$$e_j \leftarrow p_1$$

- Si  $rand() < P_{mutation}$  :
  - Pour chaque gène  $g_k$  dans  $e_j$  :

$$\text{Si } rand() < P_{mut\_gene}, \text{ muter } g_k$$

- Calculer la fitness  $f(e_j)$
- $Enfants \leftarrow Enfants \cup \{e_j\}$

(c) **Remplacement :**

$$P \leftarrow \text{FormerNouvellePopulation}(P, Enfants)$$

(d) **Mise à jour :**

$$generation \leftarrow generation + 1$$

5. Retourner le meilleur individu :

$$s^* \leftarrow \arg \max_{s \in P} f(s)$$

La fonction fitness, élément central de l'algorithme génétique, est calculée grâce à une heuristique spécifique basée sur l'algorithme MRP (Meilleure Réponse Pratique) qui évalue le revenu du leader face à la meilleure réponse du suiveur.

## 7.2 Pseudo-code algorithmique de la méthode fitness

Le pseudo-code suivant décrit l'algorithme d'évaluation du revenu du Leader indépendamment du langage de programmation.

### Algorithme : Évaluation du revenu du Leader pour un réseau $A$ fixé (FIT-NESS)

1. Lire les paramètres d'entrée : Réseau du leader  $A$ , nombre d'arcs du suiveur  $q_B$ , demande  $W_{ij}$ , revenus  $F_{ij}$ .
2. Identifier les hubs potentiels pour  $B$  :

$$V^B \leftarrow V \setminus \{\text{hubs} \in A\}$$

3. Générer l'ensemble  $\mathcal{H}_A^B$  des combinaisons d'arcs pour  $B$ .
4. Trier les paires OD par ordre décroissant de  $(W_{ij} \times F_{ij})$ .
5. Initialiser  $g_{best}^B \leftarrow 0$  (meilleur revenu trouvé pour le suiveur).
6. Pour chaque configuration  $\mathcal{B} \in \mathcal{H}_A^B$  :
  - Initialiser  $g_{curr}^A \leftarrow 0$  et  $g_{curr}^B \leftarrow 0$
  - Pour chaque paire OD  $\{i, j\}$  :

Calculer la distance via  $A$  et via  $B$

Calculer le ratio  $DRA_{ij}$  ou  $CRA_{ij}$

Déterminer  $\phi_{ij}^B$  selon la fonction de répartition

$$\begin{aligned} g_{curr}^B &\leftarrow g_{curr}^B + F_{ij}W_{ij}\phi_{ij}^B \\ g_{curr}^A &\leftarrow g_{curr}^A + F_{ij}W_{ij}(1 - \phi_{ij}^B) \end{aligned}$$

- Appliquer le test de borne :

Si  $(W_{total} - g_{curr}^A) \leq g_{best}^B$ , abandonner ce  $\mathcal{B}$

7. Mettre à jour le meilleur revenu du suiveur :

$$\text{Si } g_{curr}^B > g_{best}^B, \text{ alors } g_{best}^B \leftarrow g_{curr}^B$$

8. Calculer le revenu final du leader :

$$f^A(A, B^*) \leftarrow W_{total} - g_{best}^B$$

9. Retourner  $f^A(A, B^*)$ .

## 7.3 Construction du jeu de donnée pour la résolution

Dans le cadre de la résolution heuristique du problème de conception de réseaux de hubs concurrentiels partagés avec allocation bi-critère coût-temps, un jeu de données synthétique a été élaboré afin de représenter différents contextes réalistes de réseaux de transport à l'échelle de pays. Ce jeu de données vise à capturer à la fois la structure géographique des pays et les caractéristiques comportementales de la demande, en particulier la sensibilité des usagers au temps.

Les pays considérés sont générés à partir d'un ensemble de caractéristiques typologiques, organisées en paires de caractéristiques homogènes. Chaque paire décrit une dimension spécifique du problème, et les deux caractéristiques appartenant à une même paire sont mutuellement exclusives, car elles représentent des situations contradictoires. Par conséquent, un pays ne peut être associé qu'à une seule caractéristique par paire. Chaque pays du jeu de données est ainsi défini par la combinaison de caractéristiques issues de paires distinctes, garantissant la cohérence interne des instances générées.

La première paire de caractéristiques concerne la structure géographique des pays. La première configuration correspond à une structure côtière, dans laquelle les villes s'organisent autour d'un noyau central dense, composé de villes proches les unes des autres, complété par un ensemble de villes périphériques situées à une distance significative du centre. Ces villes périphériques représentent des villes côtières ou frontalières, jouant un rôle stratégique malgré leur éloignement du centre urbain. La seconde configuration géographique correspond à une structure régionale, caractérisée par la présence de plusieurs sous-ensembles de villes fortement connectées en interne, mais séparées par de grandes distances entre sous-ensembles. Ces deux configurations géographiques étant fondamentalement différentes, elles ne peuvent être sélectionnées simultanément pour un même pays.

La seconde paire de caractéristiques concerne la répartition de la demande au sein du pays. Une première configuration, dite équilibrée, correspond à des situations où la demande est répartie de manière relativement homogène entre les différentes paires origine-destination, sans domination marquée de certaines liaisons. À l'inverse, la configuration dite métropolitaine décrit des réseaux nationaux dans lesquels une part importante de la demande totale est concentrée sur un nombre limité de liaisons, généralement associées à de grandes agglomérations ou à des pôles économiques majeurs. Ces deux configurations étant opposées dans leur logique de répartition des flux, elles sont considérées comme incompatibles.

Enfin, la troisième paire de caractéristiques porte sur la sensibilité temporelle des usagers. La configuration dite pressée se caractérise par une forte hétérogénéité de la proportion de voyageurs sensibles au temps selon les liaisons, certaines paires origine-destination étant dominées par une demande fortement contrainte par le temps, tandis que d'autres le sont beaucoup moins. À l'opposé, la configuration dite non pressée correspond à une situation où la proportion de voyageurs sensibles au temps est relativement homogène sur l'ensemble des liaisons, généralement proche de 50%. Ces deux configurations traduisent des comportements de mobilité contradictoires et ne peuvent donc pas être associées simultanément à un même pays.

Chaque pays du jeu de données est ainsi construit en combinant une caractéristique géographique, une caractéristique de répartition de la demande et une caractéristique de sensibilité au temps, tout en respectant strictement la contrainte d'exclusivité au sein de chaque paire. Cette approche permet de générer des instances diversifiées, cohérentes et représentatives, offrant un cadre pertinent pour analyser le comportement de l'heuristique proposée et évaluer son efficacité dans différents contextes nationaux concurrentiels.

## 7.4 Simulations

La simulation numérique constitue une étape essentielle pour valider le modèle mathématique proposé et évaluer la capacité de l'algorithme génétique à produire des solutions

de qualité pour le problème de conception et de localisation de hubs concurrentiels partagés avec allocation bi-critère coût–temps. Elle permet d’analyser le comportement de l’algorithme dans des contextes variés et d’apprécier son aptitude à prendre en compte les caractéristiques structurelles des pays ainsi que les comportements différenciés de la demande.

Les simulations ont été implémentées et exécutées à l’aide d’un Notebook Jupyter, offrant un environnement interactif facilitant la mise en œuvre de l’algorithme génétique et l’analyse des résultats. Cet environnement permet de présenter de manière progressive les différentes étapes de l’algorithme, les paramètres utilisés ainsi que les solutions obtenues pour chaque configuration étudiée.

L’étude de simulation s’est articulée autour de 16 configurations distinctes de pays, générées à partir des caractéristiques typologiques décrites précédemment. Ces configurations ont été conçues de manière à couvrir un large éventail de situations possibles. Parmi ces 16 pays, 8 configurations correspondent à des pays caractérisés par une forte proportion de clients exigeants, c’est-à-dire des usagers particulièrement sensibles aux critères de coût et de temps dans leurs choix de transport. Les 8 configurations restantes représentent au contraire des pays dans lesquels la demande est moins exigeante, avec une sensibilité au temps plus modérée et plus homogène.

Pour chacune de ces configurations, l’algorithme génétique est appliqué afin de déterminer une configuration de hubs optimisant la fonction objectif considérée. Les paramètres de l’algorithme, tels que la taille de la population, le nombre de générations, ainsi que les taux de croisement et de mutation, sont fixés de manière à assurer un compromis satisfaisant entre qualité des solutions et temps de calcul, tout en restant adaptés à la complexité du problème étudié.

Au cours des simulations, l’évaluation des individus repose sur le calcul de la fonction objectif intégrant les coûts de transport, les temps de parcours et le comportement concurrentiel des opérateurs. L’évolution des solutions est suivie génération après génération, ce qui permet d’observer le processus de convergence de l’algorithme génétique et d’analyser l’impact du niveau d’exigence des clients sur les solutions obtenues.

Les résultats issus de ces simulations permettent ainsi de valider la cohérence du modèle mathématique proposé et de mettre en évidence l’efficacité de l’algorithme génétique dans la résolution du problème étudié, tout en soulignant les différences de comportement de l’algorithme selon le niveau d’exigence de la demande au sein des pays considérés.



## 7.5 Analyses des Résultats après simulations

### 7.5.1 1<sup>er</sup> jeu de donnée

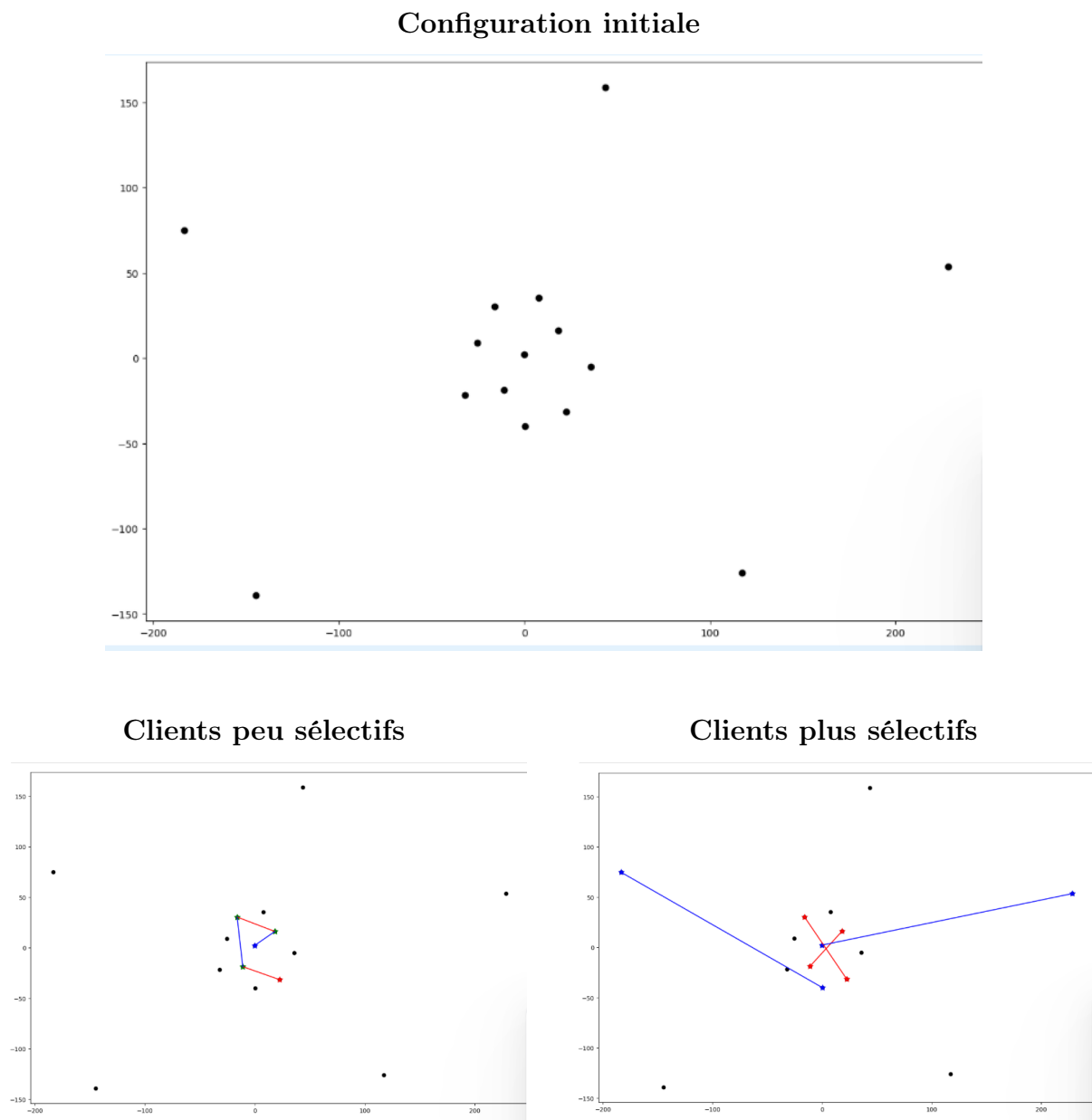


FIGURE 2 – Résultats après simulations

#### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : Pour les datas 1-4, on remarque une concentration des arcs hubs au niveau de la region centrale et ceux peu importe la repartion de demande ou de proportion. Cela peut s'explique par la faible selectivité des clients qui rends toute prise de risque inutile. En effet, créer un arc-hub entre une ville en peripherie et une ville centrale n'assure pas une domination complète sur la ville en question (les clients sont peu sensible à la diminution de coût) par contre elle diminue grandement la compétitivité de la firme au centre (les clients pressés du centre préféreront la firme avec la meilleur connectivité dans cette region). D'où

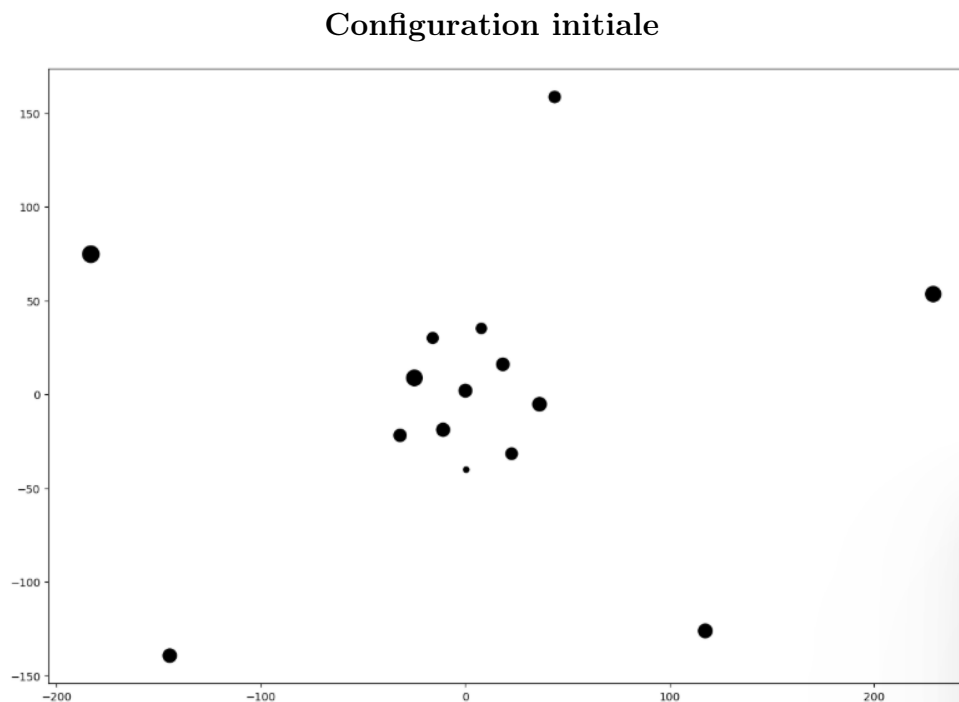
le choix compréhensible des firmes d'abandonner les côtes. Peut être qu'avec des clients plus sélectifs, les réseaux seront plus diversifiés

- **Clients plus sélectifs :**

Le Leader (Rouge) : Exploite son avantage de premier arrivant pour verrouiller le cœur du marché. Il place des arcs courts et centraux là où la densité de villes et la demande sont les plus fortes, optimisant ainsi le service pour le plus grand nombre. Le Suiveur (Bleu) : Adopte une stratégie de pénétration et d'extension. Il profite de la règle de non-exclusivité des hubs pour s'implanter au centre (hub partagé), tout en déployant de très longs arcs vers la périphérie pour capturer les flux géographiquement isolés que le leader ne dessert pas.

En bref : Le leader maximise la rentabilité par la densité centrale, tandis que le suiveur cherche à exister par la connectivité longue distance et le partage d'infrastructure.

### 7.5.2 2 ème jeu de donnée



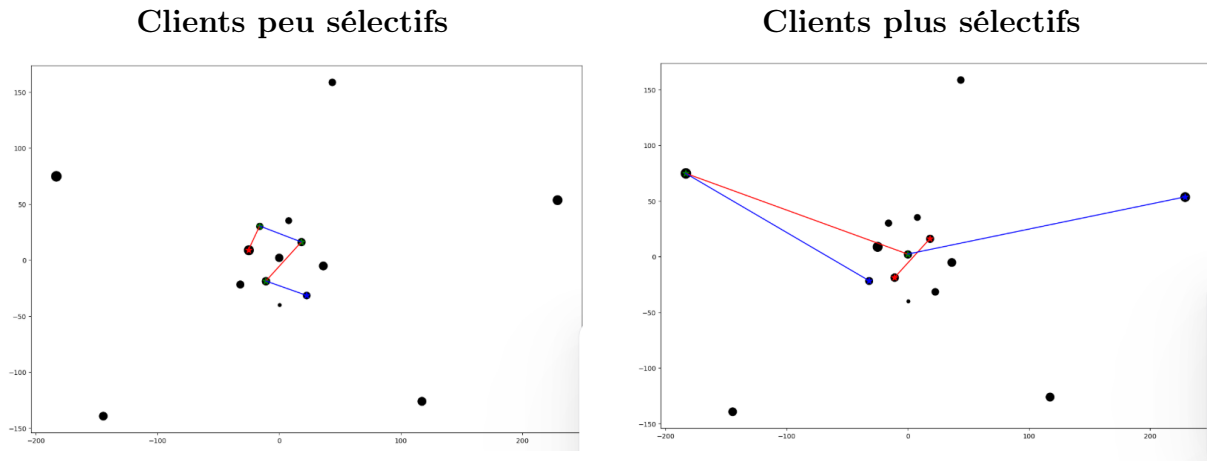


FIGURE 3 – Résultats après simulations

### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : Pour les datas 1-4, on remarque une concentration des arcs hubs au niveau de la region centrale et ceux peu importe la repartion de demande ou de proportion. Cela peut s'explique par la faible selectivité des clients qui rends toute prise de risque inutile. En effet, créer un arc-hub entre une ville en peripherie et une ville centrale n'assure pas une domination complète sur la ville en question (les clients sont peu sensible à la diminution de coût) par contre elle diminue grandement la compétitivité de la firme au centre (les clients pressés du centre préféreront la firme avec la meilleur connectivité dans cette region). D'où le choix comprehensible des firmes d'abandonner les côtes. Peut être qu'avec des client plus selectifs, les reseaux seront plus diversifiés

- **Clients plus sélectifs** : Cette analyse brève de l'image s'appuie sur le modèle étendu de la source UWE, qui introduit la non-exclusivité des hubs et l'arbitrage coût-temps.

Stratégie du Leader (Rouge) : Priorité à la Masse de Demande Le leader utilise son avantage de premier arrivant pour connecter les nœuds ayant la plus forte demande (représentés par les plus gros points noirs) . On observe qu'un arc rouge relie directement le centre à la ville la plus importante située à l'extrême gauche, sécurisant ainsi une part de marché majeure auprès des clients générant le plus de revenus.

Stratégie du Suiveur (Bleu) : Réaction et Extension Le suiveur place ses arcs en réaction à la configuration rouge. Il déploie un arc très long vers la droite pour capturer la demande des zones périphériques délaissées par le leader. Cela reflète la volonté de maximiser ses revenus là où la concurrence du leader est moins frontale en termes de distance.

Le Phénomène des Hubs Partagés (Points bicolores) L'élément le plus frappant de cette image est la présence de hubs arborant des étoiles à la fois rouges et bleues (notamment au centre et sur le gros point à gauche). Cela illustre parfaitement la contrainte de non-exclusivité de la source UWE : les deux firmes partagent les mêmes infrastructures stratégiques pour intensifier la concurrence sur les trajets les plus rentables.

Arbitrage Coût-Temps La structure des arcs (mélange d'arcs courts centraux et d'arcs longs périphériques) suggère une tentative de satisfaire à la fois les clients

pressés ( $P_{ij}$ ), sensibles au temps, et ceux privilégiant le coût, comme proposé dans le nouveau modèle d'allocation combiné.

### 7.5.3 3 ème jeu de donnée

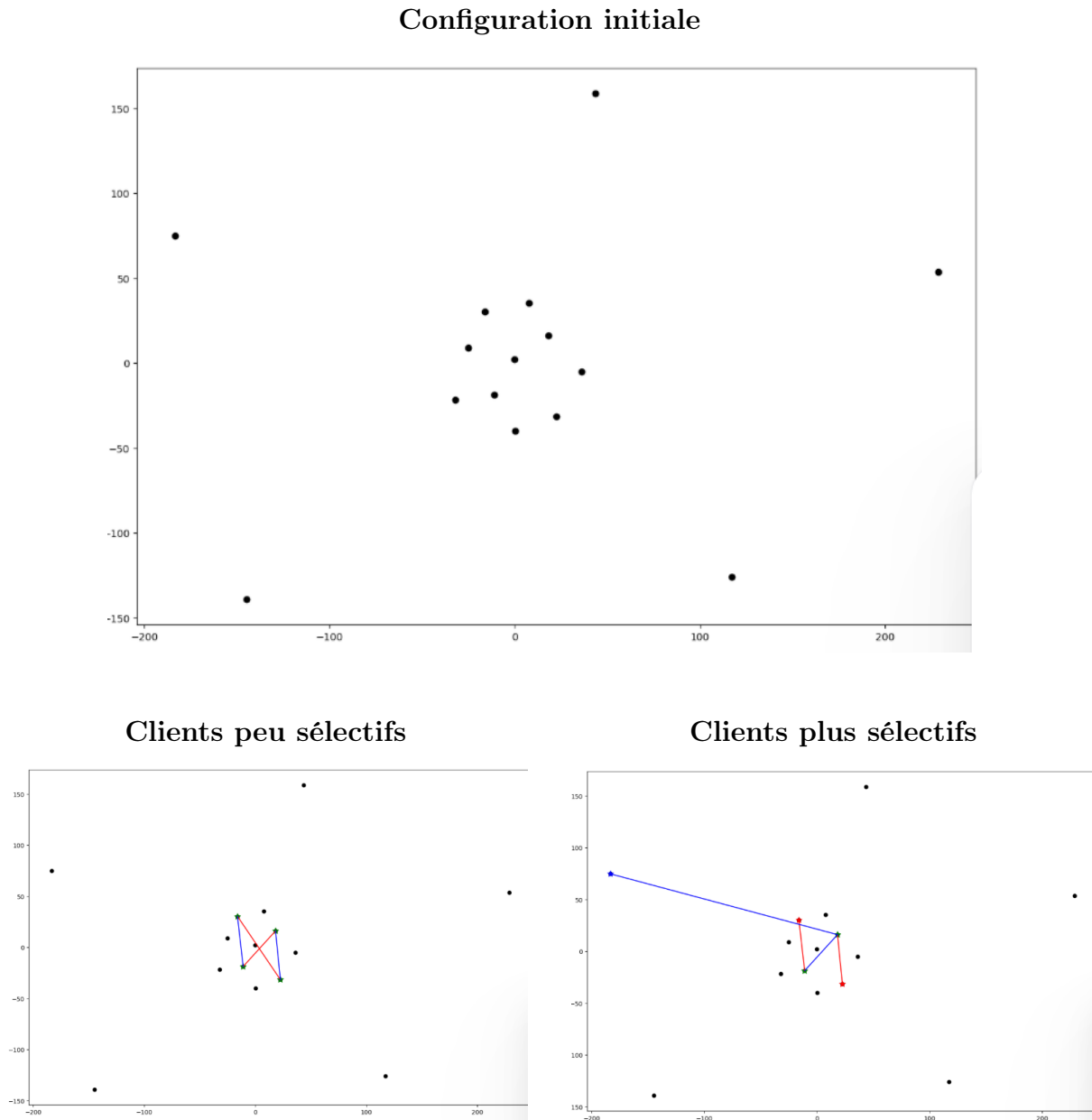


FIGURE 4 – Résultats après simulations

#### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : Pour les datas 1-4, on remarque une concentration des arcs hubs au niveau de la region centrale et ceux peu importe la repartion de demande ou de proportion. Cela peut s'explique par la faible selectivité des clients qui rends toute prise de risque inutile. En effet, créer un arc-hub entre une ville en peripherie et une ville centrale n'assure pas une domination complète sur la ville en question (les clients sont peu sensible à la diminution de coût) par contre elle

diminue grandement la compétitivité de la firme au centre (les clients pressés du centre préféreront la firme avec la meilleur connectivité dans cette region). D'où le choix compréhensible des firmes d'abandonner les côtes. Peut être qu'avec des client plus selectifs, les reseaux seront plus diversifiés

- **Clients plus sélectifs :**

L'analyse de l'image, basée sur le modèle étendu de la source UWE, montre comment les deux firmes adaptent leur réseau à un environnement où la proportion de clients pressés ( $P_{ij}$ ) varie selon les villes :

Le Leader (Rouge) : Stratégie de centralité et de rapidité. Le leader a choisi de localiser ses arcs hubs dans la zone centrale du graphe, là où la densité de nœuds est la plus élevée. Ce choix est optimal pour capturer les revenus des clients pressés ( $P_{ij}$ ), car des arcs courts et centraux minimisent le ratio de distance ( $DRA$ ), critère primordial pour cette catégorie de clientèle. En occupant le cœur du réseau, il s'assure une visibilité maximale sur les flux les plus fréquents.

Le Suiveur (Bleu) : Extension périphérique et hubs partagés. Le suiveur utilise la règle de non-exclusivité des hubs pour s'implanter sur deux nœuds déjà occupés par le leader (indiqués par les étoiles bicolores au centre). Pour se différencier, il déploie un arc extrêmement long vers une ville isolée à l'extrême gauche. Cette stratégie vise probablement des zones où les clients sont moins pressés ( $1 - P_{ij}$ ), car ils acceptent des trajets plus longs si le ratio de coût ( $CRA$ ) est avantageux, ou des villes où le leader n'offre aucune connectivité directe.

Synthèse de la compétition : La présence de hubs partagés montre une compétition frontale sur les points les plus rentables du réseau. Le leader domine le marché "Premium" (rapide/central), tandis que le suiveur survit en connectant des zones périphériques aux infrastructures centrales communes, exploitant ainsi la sensibilité au coût des clients des régions excentrées.

#### 7.5.4 4 ème jeu de donnée

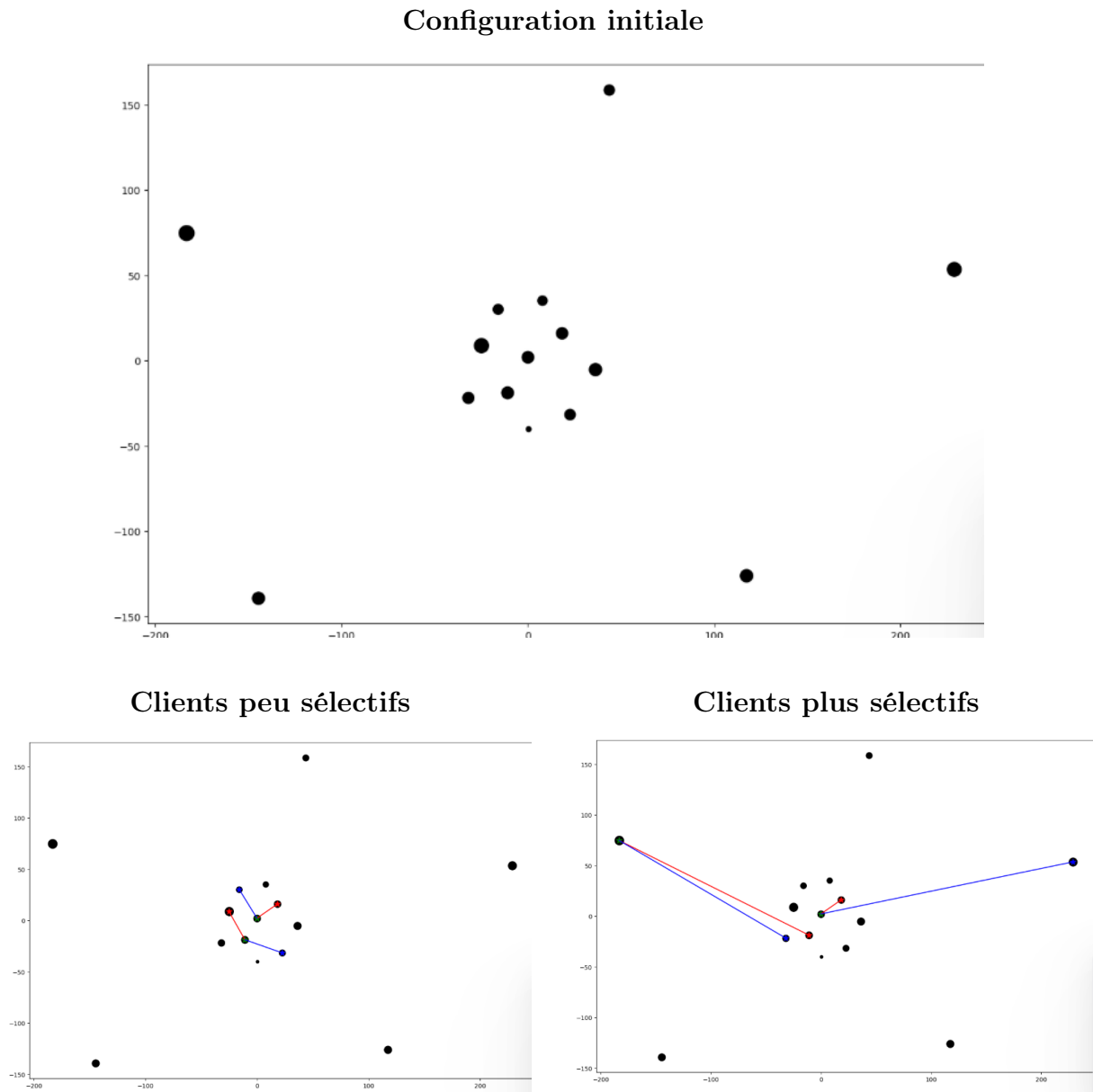


FIGURE 5 – Résultats après simulations

#### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : Pour les datas 1-4, on remarque une concentration des arcs hubs au niveau de la region centrale et ceux peu importe la repartion de demande ou de proportion. Cela peut s'explique par la faible selectivité des clients qui rends toute prise de risque inutile. En effet, créer un arc-hub entre une ville en peripherie et une ville centrale n'assure pas une domination complète sur la ville en question (les clients sont peu sensible à la diminution de coût) par contre elle diminue grandement la compétitivité de la firme au centre (les clients pressés du centre préféreront la firme avec la meilleur connectivité dans cette region). D'où le choix comprehensible des firmes d'abandonner les côtes. Peut être qu'avec des client plus selectifs, les reseaux seront plus diversifiés

- **Clients plus sélectifs :**

L'analyse de l'image, à la lumière du modèle de la source UWE, montre comment la variation de la proportion de clients pressés ( $P_{ij}$ ) et la non-exclusivité des hubs dictent les choix des deux firmes :

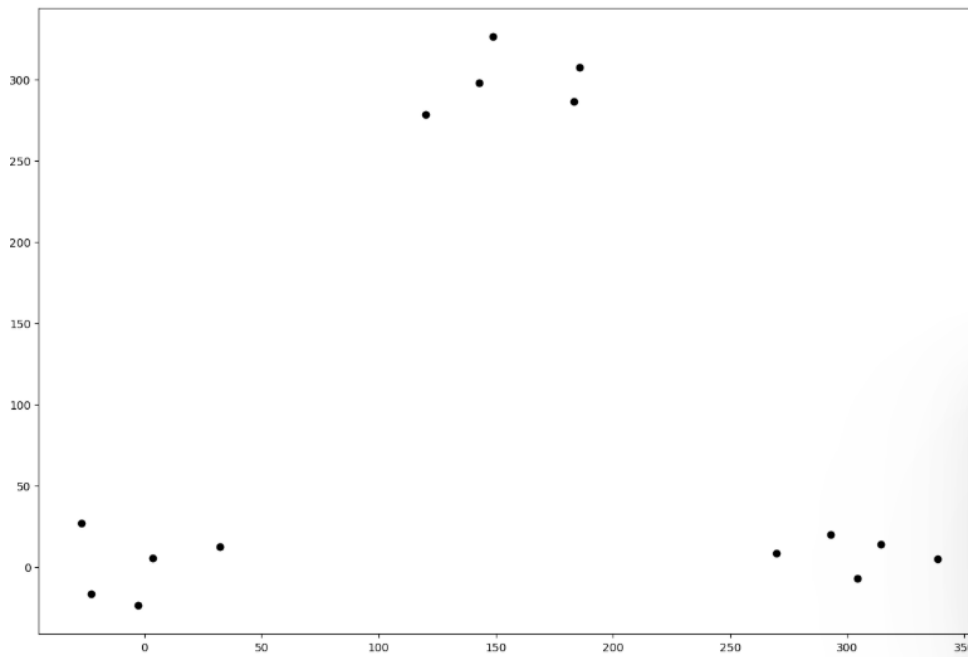
**Stratégie du Leader (Rouge) :** Verrouillage des flux temporels centraux Le leader concentre ses arcs hubs sur des distances relativement courtes au sein du cluster central. En se positionnant ainsi, il minimise la distance de transport ( $DA_{ij}$ ), ce qui est crucial pour capturer la part de marché des clients pressés ( $P_{ij}$ ), très sensibles au temps de parcours. Cette stratégie permet de sécuriser les revenus issus des zones à haute densité où la réactivité est primordiale.

**Stratégie du Suiveur (Bleu) :** Expansion et exploitation des hubs partagés Le suiveur profite de la règle de non-exclusivité (indiquée par les étoiles vertes sur l'image) pour s'implanter sur les hubs déjà stratégiquement choisis par le leader, notamment au centre et à l'extrême gauche. Il déploie ensuite un arc très long vers l'extrême droite pour couvrir des zones délaissées par le rouge. Ce grand écart géographique suggère qu'il cible les segments de clientèle moins pressés ( $1 - P_{ij}$ ), pour lesquels le ratio de coût ( $CRA$ ) est plus important que la rapidité, permettant au suiveur de rester compétitif malgré des trajets plus longs.

**Synthèse de la compétition :** La variation de  $P_{ij}$  crée une spécialisation : le leader optimise son réseau pour la vitesse au centre du marché, tandis que le suiveur utilise les hubs communs comme pivots pour offrir une couverture étendue, capturant ainsi les flux périphériques et les clients plus sensibles aux coûts qu'aux délais.

### 7.5.5 5 ème jeu de donnée

**Configuration initiale**



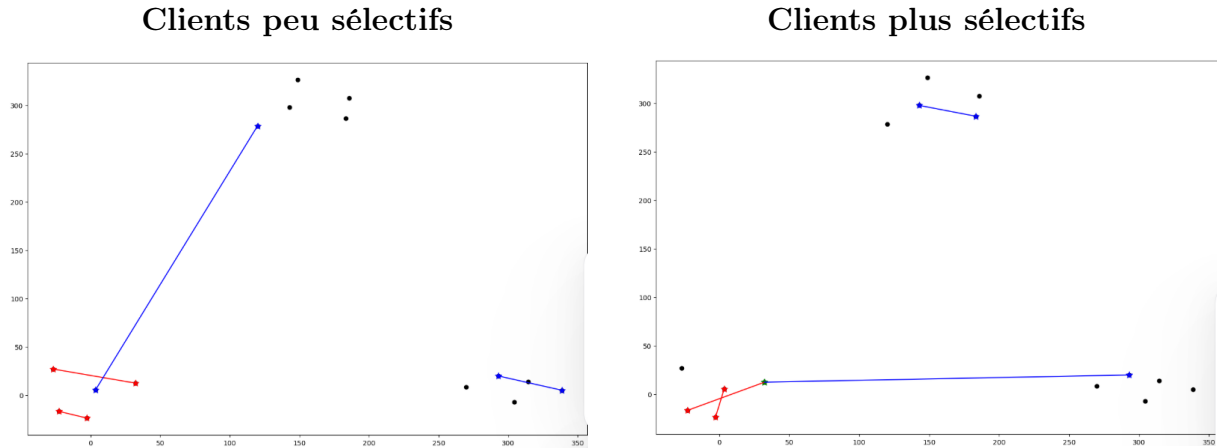


FIGURE 6 – Résultats après simulations

### Analyses :

- **Clients peu sélectifs :** Pour les datas 5-8, on nommeras la region 1, la region en bas à gauche, region 2, la region en bas à droite et la region 3, la region en haut. La strategie de la firme A (leader) a été de dominer la region 1 pour les voyages internes et la majorité des voyages à destination de la region 1. La strategie de la firme B (follower) a été de dominer les voyages entre la region 1 et 3 et de dominer la region 2 pour les voyages internes. La difference d'efficacité entre les reseaux de A et de B au niveau du voyage inter-region est perceptible essentiellement qu'aux voyages à destination/origine de la region 1. En effet, où B optimise les voyage entre les regions 1 et 3 recuperant une petite part des clients, le reseau ultra concentré de A sur la region 1 lui assure toute la demande concernant la region 1 sans lui être trop préjudiciable sur le voyage inter-region (car les client sont peu selectifs)

- **Clients plus sélectifs :**

L'analyse de l'image 5.png, effectuée selon le modèle de la source UWE, montre une adaptation des réseaux à une situation où la proportion de clients pressés ( $P_{ij}$ ) est uniforme entre les villes, ce qui pousse les firmes à une spécialisation géographique plutôt qu'à un ciblage de niches comportementales.

**Stratégie du Leader (Rouge) : Domination du Cluster de Demande** Le leader concentre ses arcs de hub dans la zone sud-ouest, là où la densité de points (villes) est la plus élevée. Avec une proportion équilibrée de clients pressés, le leader cherche à maximiser son revenu en offrant les trajets les plus courts ( $DRA_{ij}$ ) pour le plus grand volume de demande possible ( $W_{ij}$ ). En verrouillant cette zone dense avec des arcs courts, il s'assure de capter la majorité des flux locaux, tant pour les clients sensibles au temps que pour ceux sensibles au coût.

**Stratégie du Suiveur (Bleu) : Connectivité Longue Distance et Hub Partagé** Le suiveur adopte une stratégie d'expansion périphérique pour exister face à la domination centrale du leader. **Utilisation du Hub Partagé (Étoile verte) :** Le suiveur profite de la règle de non-exclusivité pour s'implanter sur l'un des hubs du leader (le point le plus à l'est du réseau rouge). Cela lui permet d'accéder au cluster de demande du leader sans coût d'infrastructure supplémentaire pour ce nœud. **Capture de la "Longue Traîne" :** À partir de ce hub commun, il déploie un arc extrêmement long vers l'est et un autre vers le nord. Puisque la part de clients moins pressés ( $1 - P_{ij}$ ) est constante partout, le suiveur mise sur ces trajets longue distance où



il peut devenir l'unique option ou offrir un ratio de coût ( $CRA$ ) compétitif malgré le détour géographique.

**Équilibre de Stackelberg et Répartition** Dans cette configuration, le leader maximise sa fitness en sécurisant la masse centrale, tandis que le suiveur utilise le hub commun comme pivot pour relier les zones isolées au reste du réseau. Cette structure reflète l'arbitrage du modèle UWE : le leader privilégie l'efficacité temporelle ( $DRA$ ) au cœur du marché, alors que le suiveur maximise sa part de marché sur la couverture géographique et le coût pour les zones excentrées.

En résumé, l'équilibre avec un  $P_{ij}$  constant conduit le leader à saturer le cluster principal de demande, forçant le suiveur à utiliser un hub partagé pour desservir les périphéries et capter les flux que le leader délaisse par manque de proximité.

### 7.5.6 6 ème jeu de donnée

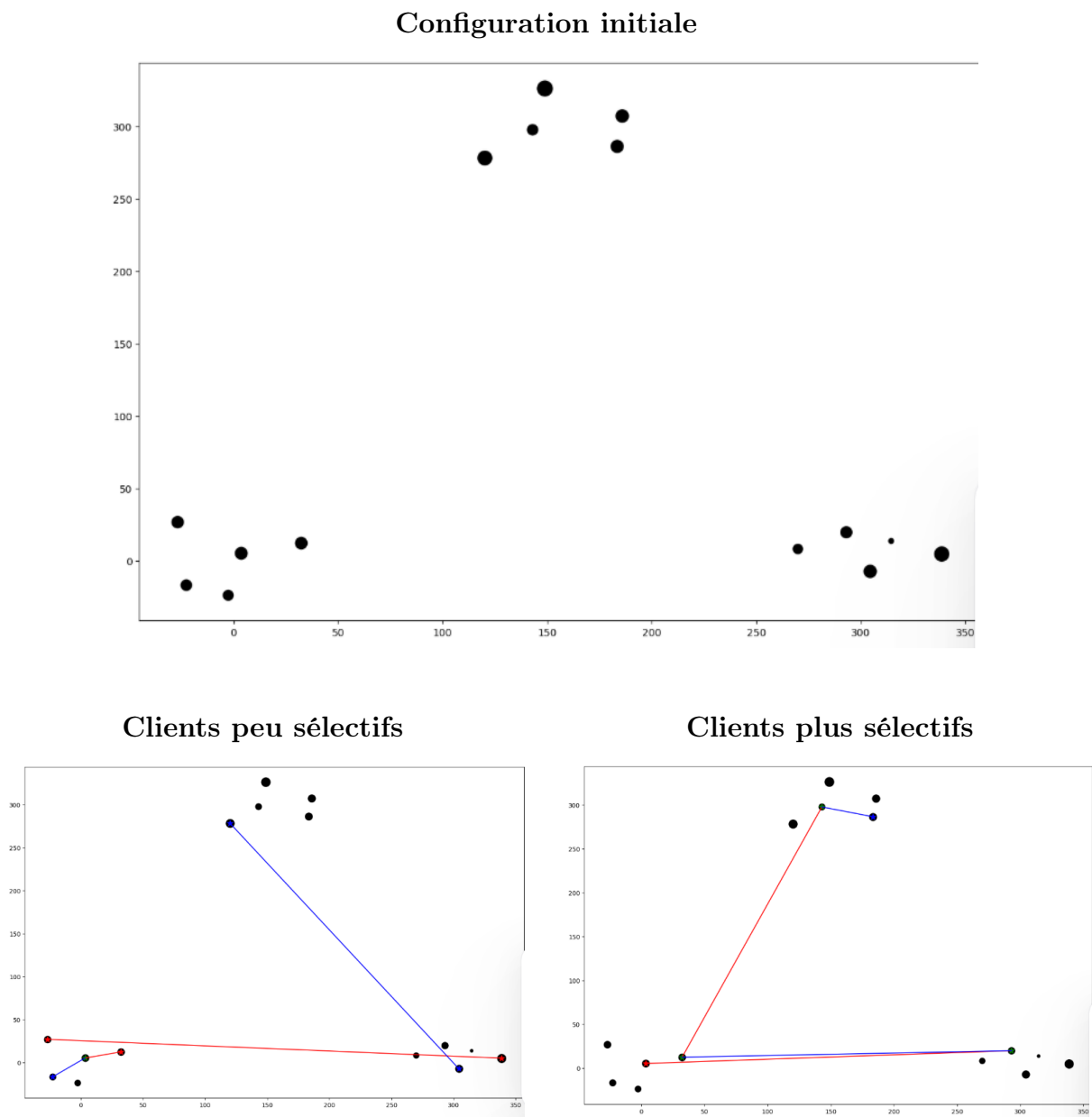


FIGURE 7 – Résultats après simulations

## Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : même logique que le 5 ème jeu de donnée.

- **Clients plus sélectifs** :

L'analyse de l'image 6.png, basée sur le modèle étendu de la source UWE, montre une configuration de réseau où la compétition se cristallise sur les pôles de forte demande dans un contexte de sensibilité temporelle uniforme ( $P_{ij}$  équilibré) :

Ciblage prioritaire des pôles de forte demande ( $W_{ij}$ ) : Les réseaux rouge (leader) et bleu (suiveur) sont quasi exclusivement orientés vers les gros points noirs. Puisque la proportion de clients pressés est la même partout, les firmes n'ont pas de "niches" géographiques basées sur le profil client ; elles cherchent donc à maximiser leur revenu ( $UA$  et  $UB$ ) en capturant les flux là où le volume de trajets ( $W_{ij}$ ) est le plus massif.

Omniprésence des Hubs Partagés (Étoiles vertes) : L'image révèle une stratégie de non-exclusivité des hubs totale sur les points stratégiques. On observe trois hubs partagés (étoiles vertes) : un au centre, un sur le pôle majeur au nord, et un sur le pôle à l'est. Cela signifie que le suiveur a choisi de s'implanter exactement sur les mêmes nœuds que le leader pour annuler son avantage de position et partager la demande sur les segments les plus rentables.

Le Leader (Rouge) : Structuration de l'espace : Le leader a établi un axe vertical très long vers le nord et un axe horizontal vers l'est. Avec un  $P_{ij}$  équilibré, cette structure vise à offrir un ratio de distance ( $DRA$ ) compétitif pour la part de clients pressés sur de longues distances, tout en bénéficiant du facteur de réduction ( $\alpha$ ) pour les clients sensibles au coût.

Le Suiveur (Bleu) : Compétition frontale et optimisation locale : Le suiveur ne cherche pas à créer un réseau alternatif mais se superpose au leader. En utilisant les hubs partagés au nord et à l'est, il s'assure que son ratio de coût ( $CRA$ ) et son ratio de distance ( $DRA$ ) restent proches de ceux du leader, ce qui, selon la fonction d'allocation, lui garantit au moins 50% de parts de marché sur ces trajets si les services sont perçus comme équivalents.

En résumé, l'image 6 illustre une situation de concurrence intense où, face à une demande élevée et une sensibilité au temps uniforme, le suiveur utilise la règle de non-exclusivité pour "coller" au réseau du leader sur les nœuds les plus générateurs de revenus.

### 7.5.7 7 ème jeu de donnée

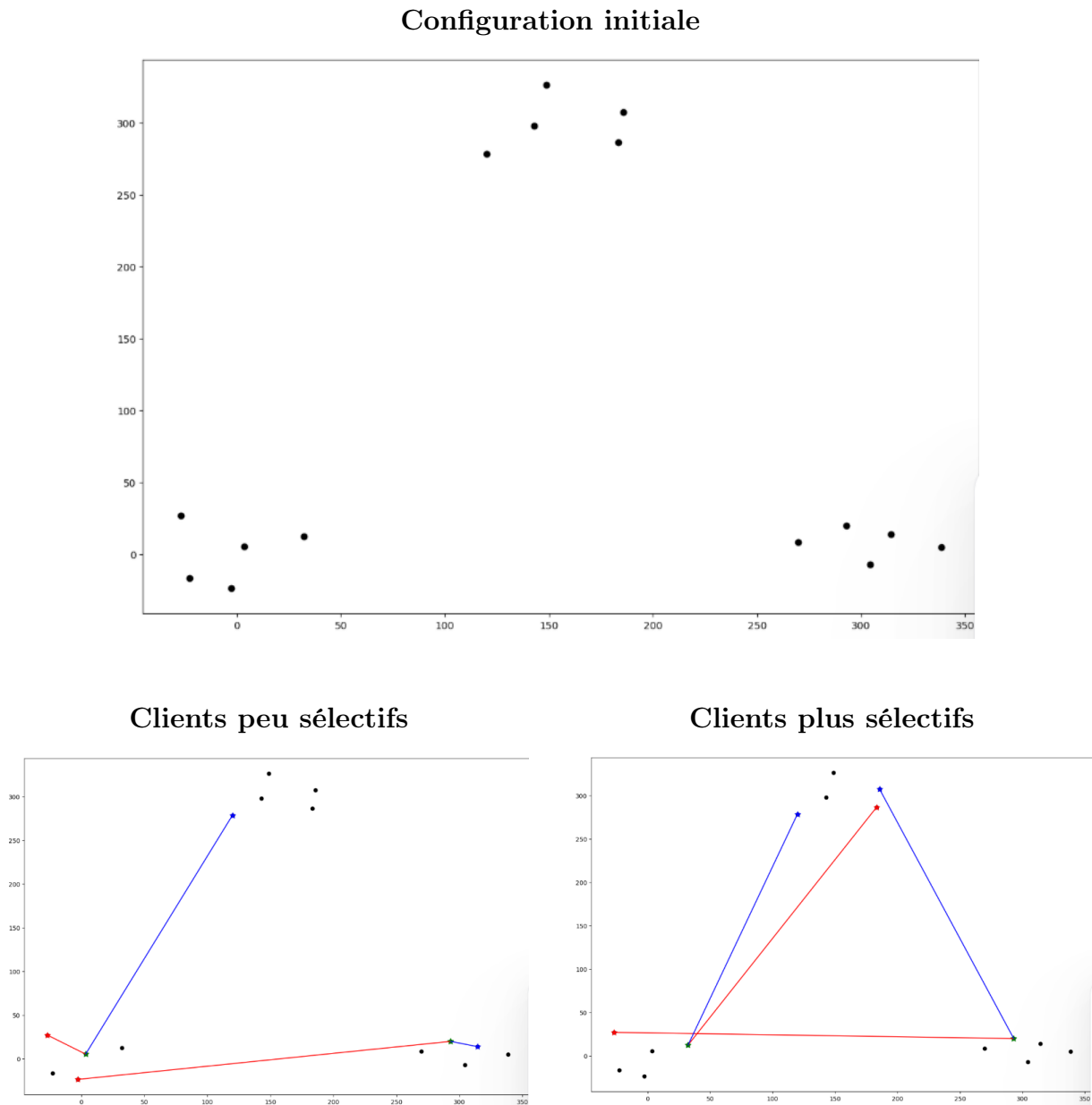


FIGURE 8 – Résultats après simulations

#### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : même logique que le 5 ème jeu de donnée.

- **Clients plus sélectifs** :

L'analyse de l'image 7.png, s'appuyant sur le modèle de la source UWE, montre comment la structure du réseau s'adapte à une forte demande ( $W_{ij}$ ) localisée et à une proportion variable de clients pressés ( $P_{ij}$ ) :

Utilisation intensive des Hubs Partagés (Étoiles vertes) : Le réseau se structure autour de deux hubs communs aux deux firmes, situés sur des pôles de demande significatifs. Conformément au modèle UWE, la non-exclusivité des hubs permet

au suiveur (bleu) de s'implanter sur les positions stratégiques du leader (rouge) pour minimiser l'avantage de ce dernier.

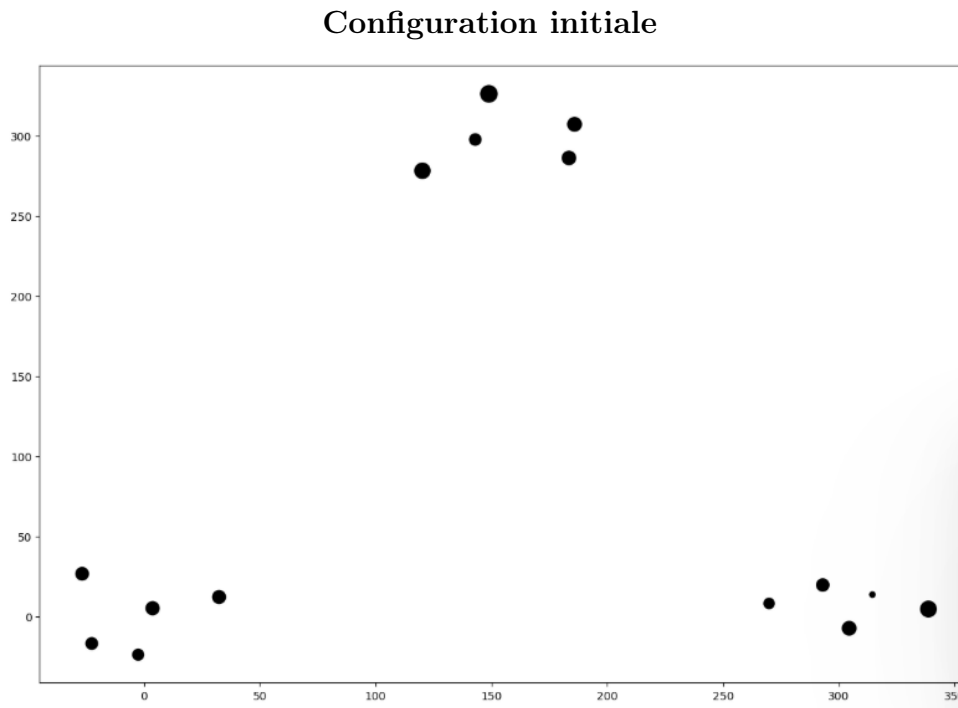
Stratégie du Leader (Rouge) : Maillage des pôles de forte demande : Le leader a établi des arcs très longs reliant le hub de gauche au pôle de droite et au pôle supérieur. Dans un contexte où  $P_{ij}$  varie, cette configuration suggère que le leader cherche à maximiser son revenu ( $UA$ ) en offrant des connexions directes entre les gros points noirs. Ces trajets minimisent le ratio de distance ( $DRA$ ), capturant ainsi la part maximale des clients pressés dans ces zones à haut flux.

Réaction du Suiveur (Bleu) : Superposition et capture de parts : Le suiveur adopte une géométrie quasi identique à celle du leader en utilisant les mêmes hubs pivots. Cette stratégie de "collage" est typique du modèle de Stackelberg lorsque les hubs sont partagés : le suiveur cherche à égaliser les performances de temps et de coût pour forcer un partage équitable (50/50) de la demande sur les segments les plus rentables.

Impact de la variation de  $P_{ij}$  : La structure en triangle très étirée vers les périphéries (haut et droite) indique que les firmes privilégient la vitesse de transit pour les paires de villes ayant les plus gros volumes de demande et potentiellement la plus forte proportion de clients sensibles au temps. L'arbitrage se fait ici par la distance ( $DRA$ ), car les arcs longs et directs sont essentiels pour satisfaire les clients pressés entre les pôles majeurs.

En résumé : L'image 7 illustre une compétition frontale sur les axes de demande les plus lourds. Le leader tente de verrouiller les flux rapides entre les grandes villes, tandis que le suiveur utilise la non-exclusivité pour s'aligner sur ces mêmes axes et capter les revenus générés par les clients pressés.

#### 7.5.8 8 ème jeu de donnée



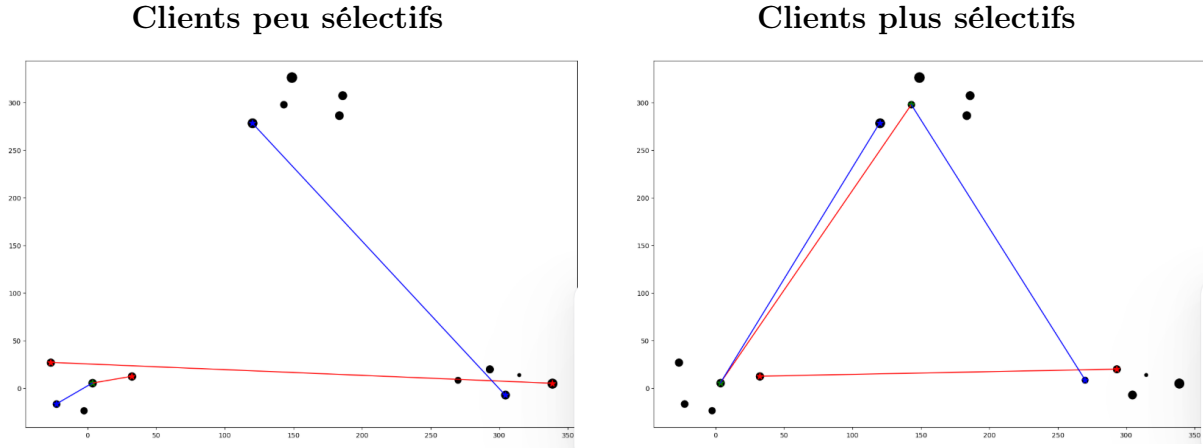


FIGURE 9 – Résultats après simulations

### Analyses :

- **Clients peu sélectifs** : même logique que le 5<sup>ème</sup> jeu de donnée.
- **Clients plus sélectifs** : L'analyse de l'image 8.png, selon le modèle étendu de la source UWE, montre une structuration complexe des réseaux en réponse à la variation locale de la proportion de clients pressés ( $P_{ij}$ ) et à la présence de pôles de forte demande :

Ciblage des pôles de demande majeure ( $W_{ij}$ ) : Les réseaux sont ancrés sur les gros points noirs, notamment le pôle massif au sommet du graphe et celui à l'extrême droite. Ces zones représentent les gisements de revenus les plus importants que les deux firmes tentent de capturer.

Exploitation des Hubs Partagés (Étoiles vertes) : On observe deux hubs partagés (étoiles vertes) : l'un situé sur le pôle de demande supérieur et l'autre dans le cluster central. Conformément à la règle de non-exclusivité du modèle UWE, le suiveur s'implante sur les positions stratégiques du leader pour neutraliser son avantage géographique et forcer un partage de marché (50/50 ou 75/25) sur ces nœuds critiques.

Stratégie du Leader (Rouge) : Maillage Temporel : Le leader a établi des arcs reliant le centre au pôle Nord et au pôle Est. Dans un contexte où  $P_{ij}$  varie, cette configuration suggère que le leader privilégie la réduction du ratio de distance ( $DRA$ ) pour les paires de villes où la proportion de clients pressés est la plus forte. En offrant des trajets directs entre ces pôles, il s'assure une domination sur le segment sensible au temps.

Réponse du Suiveur (Bleu) : Arbitrage Coût-Distance : Le suiveur connecte le pôle Ouest au hub central partagé, puis remonte vers le pôle Nord. Cette structure lui permet de concurrencer le leader sur l'axe Nord-Sud tout en exploitant les zones où les clients sont potentiellement moins pressés ( $1 - P_{ij}$ ). Pour ces clients, le suiveur peut capter le marché via un ratio de coût ( $CRA$ ) avantageux, même si le trajet est moins direct que celui du leader.

En résumé, l'image 8 illustre une lutte pour la centralité. Le leader utilise des arcs longs pour verrouiller les flux rapides entre les pôles de demande, tandis que le suiveur utilise la non-exclusivité des hubs pour s'insérer sur les axes les plus rentables, adaptant son offre selon que la clientèle locale privilégie le temps ou le coût.

## 8 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons identifié une limite majeure des modèles d'allocation de clients basés sur un critère unique. Nous avons proposé une nouvelle approche d'allocation fondée sur un ratio combiné coût-temps, intégrant simultanément ces deux dimensions dans le processus décisionnel. Une méthode par algorithme génétique a été mise en œuvre pour traiter cette allocation et des simulations ont démontré l'intérêt et la pertinence de cette modélisation. Ce travail ouvre la voie à des extensions futures, notamment vers des modèles considérant des comportements de choix probabilistes.

## 9 Note sur l'Implémentation

Les codes Pythons complets pour reproduire tous les résultats présentés dans ce document sont disponibles dans un fichier zipé séparé : `Creation Data.zip`

## Référence

Sasaki, M., Campbell, J. F., Krishnamoorthy, M., & Ernst, A. T. (2014). Un modèle de localisation d'arc de hub Stackelberg pour un environnement concurrentiel. *Informatique et recherche opérationnelle*, 47, 27–41.