

Douglas Wildgrube Bertol

**CONTRIBUIÇÕES À LOCOMOÇÃO DE ROBÔS MÓVEIS  
NÃO-HOLONÔMICOS USANDO CONTROLE FUZZY  
BASEADO EM MODELO**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri.

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bertol, Douglas Wildgrube  
Contribuições à locomoção de robôs móveis não-holonômicos  
usando controle fuzzy baseado em modelo / Douglas  
Wildgrube Bertol ; orientador, Edson Roberto De Pieri -  
Florianópolis, SC, 2015.  
148 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Modelagem e  
controle fuzzy. 3. Robótica móvel. 4. Robô móvel diferencial.  
5. Planejamento de locomoção. I. De Pieri, Edson Roberto.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

Douglas Wildgrube Bertol

**CONTRIBUIÇÕES À LOCOMOÇÃO DE ROBÔS MÓVEIS  
NÃO-HOLONÔMICOS USANDO CONTROLE FUZZY  
BASEADO EM MODELO**

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 09 de Abril de 2015.

Prof. Rômulo Silva de Oliveira, Dr.  
Coordenador do programa

Banca Examinadora:

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Orientador  
DAS/UFSC

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
DAS/UFSC

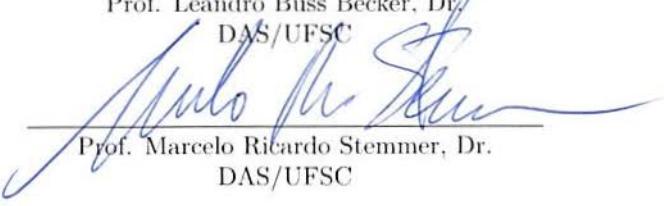
Prof. Guilherme Vianna Raffo, Dr.  
DELT/UFMG

Prof. João Maurício Rosário, Dr.  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Leandro Buss Becker, Dr.  
DAS/UFSC



---

Prof. Marcelo Ricardo Stemmer, Dr.  
DAS/UFSC

*Dedicado a Núbia (Buja)  
e Regina (Mami)*



## RESUMO

A locomoção de robôs móveis apresenta desafios no controle da execução de trajetórias, principalmente quando o tipo de robô exibe não-holonomia, pois as restrições de movimento e atuação imprimem, entre outras, redução no conjunto factível de trajetórias. As principais soluções da literatura, aplicáveis e de desempenho comprovado, não apresentam uma forma automática para cálculo de parâmetros de controle que garantam requisitos de desempenho.

Este trabalho desenvolve estruturas de locomoção compostas por controladores *fuzzy* baseados em modelos Takagi-Sugeno (TS-Fuzzy) que são capazes de representar o problema de rastreamento de trajetórias e solucioná-lo com qualidade equivalente às principais técnicas existentes e fornecem, ainda, capacidade de cálculo automático de ganhos que garantem requisitos de desempenho do sistema de controle, ou em caso de não haver solução, acusar inexistência de tais ganhos.

Descreve-se uma solução completa de locomoção, composta pelos compensadores propostos e uma técnica de planejamento de locomoção capaz de gerar referências factíveis às limitações de Robôs Móveis Diferenciais (RMDs). Com esta solução foi possível a aplicação prática e a análise de desempenho das estruturas de controle descritas.

Os desenvolvimentos teóricos são ilustrados através de aplicações experimentais e simuladas, baseadas na plataforma robótica *Powerbot* que representa um RMD de médio porte.

**Palavras-chave:** Modelagem TS-Fuzzy, Controle *Fuzzy*, Robótica Móvel, Robô Móvel Diferencial, Planejamento de Locomoção.



## ABSTRACT

The challenges in locomotion control of non-holonomic mobile robots come from constraints related to sub actuation and trajectory feasibility. The main solutions found in the literature, with proved performance and applicability does not show an automatic method to compute control gains that guarantee global performance requirements.

This work develops locomotion structures composed by Takagi-Sugeno fuzzy model based controllers. These structures are capable to represent and solve the trajectory-tracking problem with quality equivalent to the main existent techniques with the capability to compute the controller gains automatically, ensuring performance requirements to the compensator or even evince their absence in case of no solution.

The document describes a full locomotion solution, composed by the developed controllers and a methodology of locomotion planning. The planning method is capable of generating feasible references over the locomotion and actuation constraints of the differential mobile robots (DMRs). This solution provides the practical application and performance analysis of the proposed control architectures.

The theoretical achievements of this work are illustrated by experimental and simulated scenarios based on the Powerbot robotic platform, which one represents a DMR of medium size.

**Keywords:** TS-Fuzzy Modelling, Fuzzy Control, Mobile Robotics, Differential Mobile Robot, Trajectory Planning.



## LISTA DE FIGURAS

1	O robô móvel diferencial <i>Powerbot</i> . . . . .	24
2	Tipos de rodas de acordo com as restrições. . . . .	30
3	Rodas convencionais. . . . .	31
4	Exemplos dos graus de mobilidade, $\delta_m$ . . . . .	33
5	Tipos de RMRs. . . . .	34
6	Robô móvel: representação no plano. . . . .	35
7	Robô móvel: eixos e parâmetros. . . . .	35
8	Robô móvel dentro do plano cartesiano. . . . .	36
9	Robô móvel: velocidades das rodas e do corpo. . . . .	37
10	Grupo atuador/roda. . . . .	42
11	Exemplo de tarefa de estabilização. . . . .	44
12	Exemplo de tarefa de rastreamento. . . . .	45
13	Exemplo de curva de Bézier. . . . .	46
14	Caminho gerado por uma curva de Bézier de grau três. .	47
15	Acelerações e velocidades no robô móvel. . . . .	48
16	Parametrização da trajetória de Bézier no tempo. . . .	50
17	Exemplo de trajetória e seu perfil de velocidade. . . . .	51
18	Fluxograma do método de planejamento. . . . .	53
19	Exemplo de função de pertinência. . . . .	56
20	Limitantes de uma função não-linear. . . . .	60
21	Fluxograma da técnica de modelagem. . . . .	61
22	Trajetória de referência . . . . .	72
23	Velocidades de referência. . . . .	73
24	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: trajetória.	76
25	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: evolução do erro. . . . .	77
26	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: sinais de controle. . . . .	77
27	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: evolução do erro. . . . .	78
28	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: sinais de controle. . . . .	79
29	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: evolução do erro. . . . .	80
30	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: sinais de controle. . . . .	80
31	Tarefa de estabilização: laço de controle. . . . .	82
32	Tarefa de estabilização: trajetórias. . . . .	84

33	Tarefa de estabilização: sinais de controle do caso $\xi(0) = [-5 \ 0 \ \pi/2]^T$	84
34	Tarefa de estabilização: erro do caso $\xi(0) = [-5 \ 0 \ \pi/2]^T$	85
35	Controlador com pré-alimentação: malha de controle ideal.	88
36	Controlador com pré-alimentação - cenário A: trajetória.	89
37	Controlador com pré-alimentação - cenário A: erro.	90
38	Controlador com pré-alimentação - cenário A: sinais de controle.	90
39	Controlador com pré-alimentação: malha de controle realística.	91
40	Controlador com pré-alimentação - cenário B: erro.	92
41	Controlador com pré-alimentação - cenário B: sinais de controle.	92
42	Controlador com pré-alimentação - cenário C: erro.	93
43	Controlador com pré-alimentação - cenário C: sinais de controle.	94
44	Controlador ampliado: malha de controle.	96
45	Controlador ampliado: malha de controle ideal.	100
46	Controlador ampliado - cenário A (círculo): trajetória.	101
47	Controlador ampliado - cenário A (círculo): erros.	102
48	Controlador ampliado - cenário A (círculo): sinais de controle.	102
49	Controlador ampliado - cenário A (Bézier): trajetória.	103
50	Controlador ampliado - cenário A (Bézier): erros.	104
51	Controlador ampliado - cenário A (Bézier): sinais de controle.	104
52	Controlador ampliado: malha de controle realística.	105
53	Controlador ampliado - cenário B: sinais de controle.	105
54	Controlador ampliado - cenário B: erros.	106
55	Controlador ampliado - cenário C: erros.	107
56	Controlador ampliado - cenário C: sinais de controle.	107
57	Controlador ampliado dinâmico: trajetória.	111
58	Controlador ampliado dinâmico: erros.	112
59	Controlador ampliado dinâmico: sinais de controle.	112
60	Controlador ampliado integral: trajetória.	115
61	Controlador ampliado integral: erros.	116
62	Controlador ampliado integral: sinais de controle.	116
63	Robô <i>Powerbot</i> .	133
64	Arquitetura de <i>hardware</i> do <i>Powerbot</i> .	134
65	Especificações do <i>Powerbot</i> .	137

## LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros da trajetória . . . . .	72
2	Controlador de Guechi et al. (2010): erros <i>Root Mean Square</i> (RMS) de cada cenário . . . . .	81
3	Controlador com pré-alimentação: erros RMS de cada cenário . . . . .	94
4	Controlador ampliado - erros RMS de cada cenário. . . . .	108
5	Controlador ampliado dinâmico: erros RMS. . . . .	113
6	Controlador ampliado integral: erros RMS. . . . .	117
7	Parâmetros do <i>Powerbot</i> . . . . .	136
8	Ganhos calculados para o controlador de Guechi et al. (2010) - parte 1/2. . . . .	139
9	Ganhos calculados para o controlador de Guechi et al. (2010) - parte 2/2. . . . .	140
10	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: parâmetros da simulação. . . . .	140
11	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: parâmetros da simulação. . . . .	141
12	Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: parâmetros do experimento. . . . .	141
13	Tarefa de estabilização: parâmetros da simulação. . . . .	142
14	Controlador com pré-alimentação - cenário A: parâmetros da simulação. . . . .	142
15	Controlador com pré-alimentação - cenário B: parâmetros da simulação. . . . .	143
16	Controlador com pré-alimentação - cenário C: parâmetros do experimento. . . . .	143
17	Ganhos calculados para o controlador ampliado . . . . .	144
18	Controlador ampliado - cenário A (circulo): parâmetros da simulação. . . . .	145
19	Controlador ampliado - cenário A (bézier): parâmetros da simulação. . . . .	145
20	Controlador ampliado - cenário B: parâmetros da simulação. . . . .	146
21	Controlador ampliado - cenário C: parâmetros do experimento. . . . .	146
22	Ganhos calculados para o controlador ampliado dinâmico	147
23	Controlador ampliado dinâmico: parâmetros do experimento. . . . .	147

24	Ganhos calculados para o controlador ampliado integral	148
25	Controlador ampliado integral: parâmetros do experimento.	148

## LISTA DE ABREVIATURAS

<b>ARIA</b>	<i>Advanced Robot Interface for Applications.</i>
<b>CPD</b>	Compensador Paralelo Distribuído.
<b>FP</b>	Função de Pertinência.
<b>LMI</b>	<i>Linear Matrix Inequality.</i>
<b>PID</b>	<i>Proportional-Integral-Derivative Controller.</i>
<b>RMD</b>	Robô Móvel Diferencial.
<b>RMR</b>	Robô Móvel sobre Rodas.
<b>RMS</b>	<i>Root Mean Square.</i>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$T$	Energia cinética.
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange.
$\tau_m$	Torque do motor.
$\tau$	Vetor de torque nas rodas.
$\varphi$	Vetor de ângulos das rodas.
$\Sigma$	Matriz de manobrabilidade.
$\xi$	Vetor de postura.
$\dot{\varphi}_m$	Velocidade angular do motor.
$\dot{\varphi}$	Vetor de velocidades das rodas do robô.
$\dot{\xi}$	Vetor de velocidades posturais.
$x_r$	Abcissa da base local.
$y_r$	Ordenada da base local.
$\mathcal{L}$	Lagrangiano.
$\mathfrak{F}_o$	Base global.
$\mathfrak{F}_r$	Base local.
$I_c$	Inércia do corpo do robô.
$I_r$	Inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao eixo da roda.
$I_t$	Inércia total do robô.
$I_w$	Inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao plano da roda.
$K_b$	Contante de velocidade do motor.
$K_t$	Constante de torque.
$L_a$	Indutância do motor.
$P(x_p, y_p)$	Ponto de interseção entre os eixos de simetria e das rodas.
$R_a$	Resistência do motor.
$R(x, y)$	Ponto de referência e origem da base local.
$a$	Distância das rodas ao eixo de simetria.
$b$	Distância de P até R.
$m_c$	Massa do corpo do robô.
$m_r$	Massa do conjunto roda e rotor.

$m_t$	Massa total do robô.
$n_b$	Grau da curva de Bézier.
$n_p$	Número de variáveis de um sistema de inferência <i>fuzzy</i> .
$n_r$	Número de regras de um sistema de inferência <i>fuzzy</i> .
$n$	Fator de redução da engrenagem de ligação motor/roda.
$r$	Raio das rodas.
$\omega$	Velocidade angular do robô.
$\rho$	Raio da curvatura.
$C(q, \dot{q})$	Matriz de torques centrífugos e forças de Coriolis.
$M(q)$	Matriz de inércia.
$N(q)$	Matriz de transformação das forças externas.
$R(\theta)$	Matriz de rotação da base $\mathfrak{F}_o$ em relação a base $\mathfrak{F}_r$ .
$i_a$	Corrente de armadura.
$p$	Vetor de velocidades linear e angular do robô.
$q$	Coordenadas generalizadas ou de configuração.
$u_a$	Diferença de potencial aplicada aos terminais do motor.
$\theta$	Coordenada de orientação do robô.
$A^T(q)$	Matriz Jacobiana de restrições.
$v$	Velocidade linear do robô.
$\varphi_d$	Ângulo da roda direita.
$\varphi_e$	Ângulo da roda esquerda.
$x$	Coordenada $x$ do robô.
$y$	Coordenada $y$ do robô.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	OBJETIVOS	26
1.1.1	Objetivo geral	26
1.1.2	Objetivos específicos	26
1.2	NOTAÇÃO MATEMÁTICA	27
1.3	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	27
<b>2</b>	<b>ROBÔ MÓVEL DIFERENCIAL</b>	<b>29</b>
2.1	TIPOS DE RODAS	30
2.2	CLASSIFICAÇÃO DOS RMRS	31
2.3	TERMINOLOGIA	34
2.4	MODELOS MATEMÁTICOS	37
2.4.1	Modelo cinemático	38
2.4.2	Modelo dinâmico	39
2.4.3	Dinâmica do atuador	42
2.5	TAREFAS DE CONTROLE DE TRAJETÓRIA	43
2.5.1	Estabilização	43
2.5.2	Rastreamento	44
2.6	PLANEJAMENTO DE LOCOMOÇÃO	45
2.6.1	Planejamento de caminho	46
2.6.2	Planejamento de trajetória	50
2.7	SÍNTESE DO CAPÍTULO	52
<b>3</b>	<b>CONTROLE FUZZY</b>	<b>55</b>
3.1	CONJUNTOS FUZZY	55
3.2	SISTEMA DE INFERÊNCIA	56
3.3	MODELO TS-FUZZY	57
3.4	MÉTODO DE MODELAGEM	59
3.4.1	Exemplo de modelagem	62
3.5	CONTROLE FUZZY	63
3.5.1	Compensador Paralelo Distribuído (CPD)	64
3.5.2	Condições de estabilidade	65
3.6	SÍNTESE DO CAPÍTULO	69
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>71</b>
4.1	CENÁRIOS DE AVALIAÇÃO	71
4.2	TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA	72
4.3	RESULTADOS PRELIMINARES	73

4.3.1	Modelo do erro . . . . .	74
4.3.2	Controlador . . . . .	75
4.3.3	Cenário A: modelo ideal . . . . .	76
4.3.4	Cenário B: modelo realístico . . . . .	78
4.3.5	Cenário C: experimental . . . . .	79
4.3.6	Síntese dos resultados . . . . .	81
4.4	ESTABILIZAÇÃO . . . . .	81
4.5	RASTREAMENTO: PRÉ-ALIMENTAÇÃO . . . . .	85
4.6	RASTREAMENTO: SISTEMA AMPLIADO . . . . .	96
4.6.1	Sistema ampliado . . . . .	97
4.6.2	Controlador ampliado . . . . .	99
4.6.3	Controlador ampliado dinâmico . . . . .	109
4.6.4	Controlador ampliado integral . . . . .	113
4.7	SÍNTESE DO CAPÍTULO . . . . .	117
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>119</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	122
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>131</b>
<b>APÊNDICE A - ROBÔ <i>POWERBOT</i> . . . . .</b>		<b>133</b>
A.1	ARQUITETURA DE SOFTWARE/HARDWARE . . .	134
<b>APÊNDICE B - PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO . .</b>		<b>139</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente a robótica já não se restringe a estudos em universidades e centros de pesquisa, tendo se tornado uma importante área de aplicações na indústria e no setor de serviços. Presente, e já comum, há algumas décadas na indústria, agora apresenta crescente popularização em aplicações domésticas, tornando-se paulatinamente menos mistificada e surgindo como um forte fator de modificação das relações sociais (LIN; ABNEY; BEKEY, 2011).

À mercê dessa popularização, as pesquisas nesta área buscam níveis cada vez mais práticos, tornando os robôs cada vez mais usáveis. Tal dinâmica de pesquisa é constatada atualmente em casos como: o desenvolvimento de robôs bípedes autônomos, motivado principalmente pelo investimento financeiro aplicado pela *Defense Advanced Research Projects Agency* (DARPA); em casos de robôs de cuidados pessoais como o Care-O-Bot, já em sua quarta versão (BUBECK; WEISSHARDT; VERL, 2014); os já comerciais robôs domésticos de limpeza e vigilância; entre outros que representam a próxima geração de robôs.

O desenvolvimento destes robôs continua sendo um desafio que apresenta constante evolução e vem gerando alguns casos de sucesso nas últimas décadas e que obtiveram significativa repercussão popular como: os robôs que foram enviados a Marte (Spirit, Opportunity e Discovery); o primeiro aspirador doméstico autônomo, o Trilobite da *Eletrolux*; equipamentos que não parecem mas apresentam conceitos da robótica como o veículo de transporte pessoal Segway; e os diversos carros autônomos em testes na atualidade.

As pesquisas em robôs móveis já somam quatro décadas, porém seus desafios ainda são muitos e cada vez mais específicos uma vez que estes sistemas como um todo exibem não-linearidades, restrições de movimento e seu desempenho e robustez dependem das estratégias de controle e da qualidade da modelagem realizada.

Assim, trabalhos que aumentam a usabilidade destes mecanismos

compõem um campo rico em desafios e aparecem como o principal motivador desse trabalho que tem por objetivo desenvolver e apresentar soluções para controle da locomoção de Robôs Móveis sobre Rodas (RMRs), capazes de abstrair do usuário alguns conceitos aprofundados das teorias de controle e planejamento de locomoção.

O problema de controle de locomoção é considerado bem compreendido porém, das muitas abordagens de resolução, poucas têm uso prático (WIT, 1998).

Basicamente os problemas de controle de locomoção resumem-se em três tipos (SICILIANO; KHATIB, 2008):

- Estabilização - deslocamento do local de partida até um dado ponto de referência, sem predefinição de um caminho a ser percorrido;
- Seguimento de trajetória - mover-se com velocidade constante *segundo* um caminho pré definido;
- Rastreamento de trajetória - o caminho de referência é parametrizada no tempo, ou seja, cada ponto da curva deve ser atingido em um determinado instante de tempo.

O desenvolvimento de soluções para estas tarefas de controle apresenta alguns desafios quando considerados como sistemas alvo os RMRs, pois estes podem apresentar características como:

- Subatuação - um sistema mecânico é considerado subatuado quando o número de entradas de controle é menor que a dimensão do seu conjunto de configuração (SPONG, 1998). Assim, somente é possível a linearização por realimentação de apenas uma parte do sistema (OLFATI-SABER, 2001);
- Não-holonomicidade - refere-se a capacidade de expressar os modelos apenas em termos das derivadas dos estados (BLOCH, 2003, Capítulo 5).

Estas características de subatuação e não-holonomicidade implicam em três problemas básicos:

- A impossibilidade de execução da *tarefa de estabilização* através de uma realimentação de estados contínua, diferenciável e invariante no tempo, mostrado por Brockett (1983);
- A inexistência de um *controlador universal* capaz de estabilizar assintoticamente qualquer trajetória de referência de estados factível. Como mostrado por Lizarraga (2004) a não existência de um controlador universal é basicamente derivada da impossibilidade de remover as restrições acerca da velocidade do robô;
- A necessidade de geração de *trajetórias factíveis* pois estas características limitam a gama de trajetórias, velocidades e acelerações, executáveis. Tanto o rastreamento quanto o seguimento perfeito de trajetórias só é viável se o caminho de referência for factível.

Para tratar esses problemas são necessários:

- Estudo e representação matemática do comportamento do robô;
- Acesso a informações do sistema e ambiente, dentre as quais se pode destacar localização, orientação e velocidade do robô;
- Trajetórias que possam ser realizadas pelo robô, respeitando suas restrições de locomoção e atuação;
- Controladores capazes de lidar com as características físicas do robô, como limitações de movimento, subatuação e não-linearidades;
- Um sistema supervisório para gerir as funções do robô.

Este trabalho trata do problema de controle da locomoção de robôs móveis por rodas, desenvolvendo técnicas que asseguram estabilidade e desempenho na execução de trajetórias predefinidas, respeitando as limitações físicas do robô e a capacidade de seus atuadores. Os resultados visam automatizar a obtenção de trajetórias factíveis em conjunto

com ganhos de controle que executem a tarefa de locomoção garantindo um desempenho desejado.

O Robô Móvel Diferencial (RMD) foi a escolha para estudo neste trabalho, pois apresenta características de não-holonomicidade e subatuaçāo em uma estrutura mecânica simples, de fácil reparo e durável. Para a parte experimental do trabalho é utilizado o RMD *Powerbot*, mostrado na Fig. 1, que se caracteriza como um veículo capaz de transportar cargas de até cem quilogramas, e que permite a análise do desempenho prático dos controladores desenvolvidos. Na literatura este robô aparece como plataforma experimental em trabalhos como os de Filipescu et al. (2011), Dumitrascu et al. (2011) e Torabi e Gupta (2012).

**Figura 1:** O robô móvel diferencial *Powerbot*.



Diversas técnicas são empregadas para a síntese de controle de movimento para RMDs, dentre as quais se podem destacar algoritmos baseados em: (i) funções de Lyapunov (REHMAN; AHMED, 2007; TZAFESTAS, 2014a); (ii) controle adaptativo (SHOJAEI; SHAHRI; TARAKAMEH, 2011; TZAFESTAS, 2014b); (iii) realimentação linearizante (ORIOLO; DE LUCA; VENDITELLI, 2002); e (iv) métodos *neurofuzzy* (TZAFESTAS, 2014c).

Neste trabalho aborda-se o controle de RMDs com base em técnicas *fuzzy* baseadas em modelos TS-Fuzzy (TAKAGI; SUGENO, 1985), conhecidos como Compensadores Paralelos Distribuídos (CPDs) (TA-

NAKA; WANG, 2001). As principais justificativas para a escolha desta abordagem são:

- Capacidade de representação universal dos modelos TS-Fuzzy (YING, 1998);
- Possibilidade de obtenção de ganhos de controle de forma automática através de *Linear Matrix Inequalities* (LMIs);
- Perspectiva de otimização no desempenho numérico para cálculo da ação de controle;
- A teoria *fuzzy* encontra-se bem estabelecida na literatura e possui amplo espectro de aplicações;
- Permite a análise de estabilidade a partir de funções de Lyapunov por ser baseada em modelo.

A utilização de controladores baseados em modelos TS-Fuzzy já possui uma ampla literatura, como pode ser constatado nos trabalhos de Feng (2006), Feng (2010) e Ding, Luo e Wei (2010), que apresentam uma síntese das principais publicações sobre o assunto. Especificamente para RMRs o número de trabalhos é mais limitado, onde as principais publicações focam na resolução de problemas de:

- Controle de velocidade (VERMEIREN et al., 2011);
- Subestabilização (TANAKA; WANG, 2001; SUN; WANG; CHANG, 2011);
- Pré-alimentação (GUECHI et al., 2009; GUECHI et al., 2010; BLAZIC, 2010).

Neste trabalho é abordado o problema de controle de trajetória por CPDs em duas abordagens: *pré-alimentação*, onde é proposta uma representação minimalista do RMD e consequente melhora no desempenho numérico; e *modelo ampliado*, onde trata-se o sistema de controle como um todo sem pré-alimentações.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho contém resultados que fornecem a desenvolvedores um conjunto de técnicas para controle e planejamento de trajetórias de RMDs, garantindo requisitos na execução de tarefas de acordo com definições do usuário.

### 1.1.1 Objetivo geral

O intuito deste trabalho é contribuir na solução do problema de rastreamento de trajetórias para RMRs com limitações de mobilidade, como é o caso do RMD. Neste sentido, o trabalho aborda dois assuntos: o planejamento e o controle da trajetória. O primeiro visa gerar referências de movimento factíveis com as limitações de mobilidade e atuação do robô. Já o segundo visa apresentar soluções de controle que resolvem o problema de rastreamento teoricamente e apresenta suficiente desempenho nas aplicações práticas.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Este trabalho desenvolve técnicas que, em conjunto, são capazes de abstrair conceitos de planejamento e controle de trajetória, do ponto de vista do utilizador, aumentando a usabilidade do robô móvel para usuários que pretendem locomover o robô com certas garantias e não almejam lidar com conceitos como não-holonomicidade, factibilidade, tempo de acomodação, modelos matemáticos, etc.

A seguir estão detalhados os objetivos específicos deste trabalho:

- Síntese dos modelos matemáticos do RMD;
- Definição do método para geração de trajetórias factíveis;
- Proposição de melhorias ao método de controle por pré-alimentação;
- Definição de um metodologia de controle sem a necessidade de pré-alimentação;

- Estudo comparativo de resultados teóricos e experimentais.

## 1.2 NOTAÇÃO MATEMÁTICA

Visando facilitar a leitura do documento, alguns padrões na escrita de equações foram adotados e abaixo definidos:

- Variáveis: letra itálica, ex.  $M$ ,  $z$ ;
- Constantes: letra vertical, ex.  $\theta$ ,  $q$ ;
- Matrizes: letra maiúscula em negrito, ex.  $M$  ou  $M$ ;
- Pontos: letra maiúscula sem efeitos, ex.  $P$ ;
- Vetores: letra minúscula em negrito, ex.  $q$  ou  $q$ ;
- Conjunto: letra maiúscula Blackboard, ex.  $\mathbb{N}$ ;
- Bases coordenadas: letra maiúscula Fraktur, ex.  $\mathfrak{F}$ .

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O documento foi disposto de acordo com a sequência gradual de desenvolvimento da tese. A organização do documento, parte de uma visão ampla do problema abordado no trabalho, passa pelas soluções escolhidas e propostas, e vai até os resultados e considerações finais.

O Capítulo 2 descreve os RMDs, apresentando as limitações de mobilidade desta família de RMRs em conjunto com três modelos matemáticos (cinemático, dinâmico e dos atuadores) que são utilizados na composição das representações matemáticas utilizadas tanto para calcular controladores, como para executar ensaios de simulação.

Além disso, este capítulo apresenta o problema de planejamento de locomoção, onde são apresentadas as trajetórias utilizadas para teste de desempenho dos controladores e é descrito o método escolhido para geração e planejamento de trajetórias factíveis em relação às limitações de movimento dos RMDs.

No Capítulo 3 é apresentada a teoria referente à conjuntos *fuzzy*, sistemas de inferência, modelos TS-Fuzzy e o método utilizado para obtê-los. Segue descrevendo a técnica de controle *fuzzy* baseado em modelo, denominada de CPD, em conjunto com as condições de estabilidade e cálculo automático dos ganhos de controle.

Já em termos de resultados, o Capítulo 4, apresenta considerações acerca de ensaios simulados e práticos, obtidos a partir de controladores da literatura e das técnicas propostas.

Por fim, no Capítulo 5 trás uma síntese das contribuições desta tese, de suas limitações e expectativas de trabalhos futuros.

## **2 ROBÔ MÓVEL DIFERENCIAL**

O veículo que se pretende controlar neste trabalho é o Robô Móvel sobre Rodas (RMR) denominado *Powerbot*, visto na Fig. 1. Para tal, este capítulo:

- Descreve o *Powerbot* como um componente de uma das classes de RMRs;
- Apresenta os modelos matemáticos que o representam e como foram calculados;
- Especifica as tarefas de controle de trajetória abordadas neste trabalho;
- Define o método de obtenção de trajetórias factíveis às restrições de locomoção do robô.

Inicia-se o capítulo especificando os tipos de rodas que podem constituir os RMRs e como estes são classificados de acordo com a utilização e configuração construtiva destas rodas.

Apresenta-se em seguida a terminologia utilizada para descrever os Robôs Móveis Diferenciais (RMDs) e seus respectivos modelos matemáticos de locomoção: cinemático; dinâmico; e modelo dos atuadores. Os quais são utilizados para cálculo de controladores e como representação do sistema real em cenários de simulação.

De acordo com a proposta de apresentar uma solução para o controle da locomoção do RMR, explicita-se as três tarefas de controle desse tipo de sistema e quais destas são abordados no trabalho.

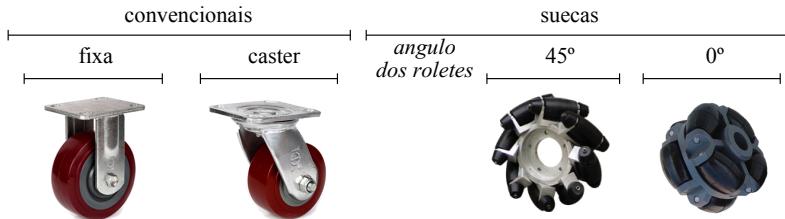
Fechando o capítulo, apresenta-se a solução utilizada para geração de trajetórias factíveis em relação às limitações de locomoção dos RMDs, sistemas não-holonômicos por natureza.

## 2.1 TIPOS DE RODAS

Em RMRs, os tipos e a configuração física das rodas influenciam diretamente em como o veículo pode se deslocar no plano. Cada tipo de roda contribui com tipos diferentes de restrições de movimento, as quais definem diretamente as características de locomoção do veículo.

Esta subseção apresenta os tipos de rodas comumente utilizadas em robôs móveis que, de acordo com as restrições que impõem, são classificadas em dois tipos, as *convencionais* e as *suecas* (Fig. 2). As rodas utilizadas no RMD para acionamento são convencionais e fixas (não orientáveis).

**Figura 2:** Tipos de rodas de acordo com as restrições.

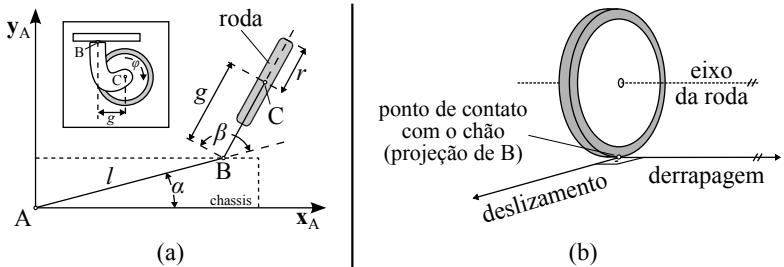


As rodas convencionais são modeladas considerando que não haja derrapagem e nem deslizamento lateral entre a roda e o chão (Fig. 3.b). Matematicamente essa consideração implica que o ponto da roda em contato com o chão exibe velocidade instantânea igual a zero referente à base global.

A Fig. 3.a ilustra os parâmetros de configuração e construtivos das rodas convencionais. Onde A é um ponto de referência qualquer fixado ao chassis do robô, B é o ponto de fixação da roda ao chassis, C o ponto central da roda,  $l$  a distância de A até B,  $g$  a distância de B até C,  $r$  o raio da roda,  $\alpha$  o ângulo entre  $\overline{AB}$  e o eixo  $x_A$ ,  $\beta$  é o ângulo de orientação da roda e  $\dot{\varphi}$  a velocidade da roda.

Utilizando estes parâmetros pode-se descrever matematicamente as

**Figura 3:** Rodas convencionais.



restrições das rodas:

- Restrição de *não deslizamento*:

$$[-\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) l \cos \beta] \mathbf{R}(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0; \quad (2.1)$$

- Restrição de *não derrapagem*:

$$[\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) g + l \sin \beta] \mathbf{R}(\theta) \dot{\xi} + g \dot{\beta} = 0. \quad (2.2)$$

A partir das contribuições restritivas que cada tipo de roda insere ao sistema, é possível então classificar cada tipo de RMR utilizando índices de mobilidade e manobrabilidade, calculados de acordo com o número, tipo e configuração das rodas que compõe o robô.

## 2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS RMRS

A classificação dos RMRs de acordo com o tipo e disposição física das rodas, permite agrupar veículos com características de locomoção semelhantes, facilitando a indexação de informações e a análise de soluções.

De acordo com a configuração, tipo e número de rodas, a classificação dos RMRs é feita pelo número de graus de *mobilidade*,  $\delta_m$ , e o número de graus de *manobrabilidade*,  $\delta_s$ , como definidos por Campion,

Bastin e D'Andrea-Novel (1996):

**Definição 1:** O grau de mobilidade,  $\delta_m$ , é a dimensão do espaço nulo gerado pela matriz de restrições  $\mathbf{C}_1^*$ , satisfazendo a condição

$$1 \leq \delta_m \leq 3. \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{C}_1^*$  é a matriz que agrupa as restrições de não derrapagem, Eq. (2.2), impostas pelas rodas que compõem o robô. Matematicamente:

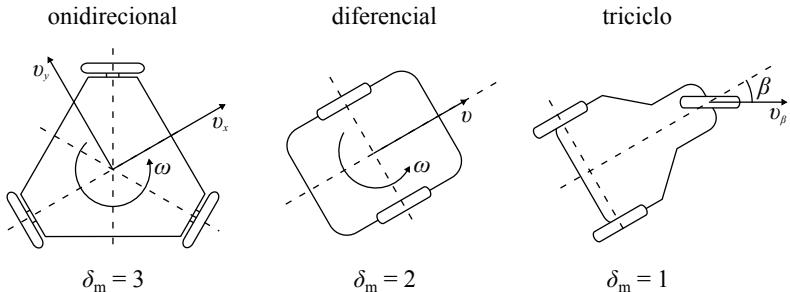
$$\mathbf{C}_1^* \mathbf{R}(\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0.$$

□

De acordo com o grau de mobilidade classificam-se os robôs móveis como:

- Robô *onidirecional*: ou omnidirecional, quando  $\delta_m = 3$ , é capaz de executar velocidades longitudinal, lateral e angular referentes à base fixa no robô ( $\mathfrak{F}_r$ ) de forma desacoplada;
- Robô *bidirecional*: restrito a um subespaço de soluções bidimensional, ou seja,  $\delta_m = 2$ ;
- Robô *unidirecional*:  $\delta_m = 1$ , as velocidades do corpo exibem um acoplamento que permite apenas um grau de liberdade na escolha das velocidades do corpo.

Na Fig. 4 estão ilustrados exemplos de RMRs para cada grau de mobilidade.



**Figura 4:** Exemplos dos graus de mobilidade,  $\delta_m$ .

**Definição 2:** O grau de manobrabilidade,  $\delta_s$ , é o numero de rodas independentemente orientáveis e arranjadas de forma a garantir um centro de rotação instantâneo, satisfazendo a seguinte condição:

$$0 \leq \delta_s \leq 2. \quad (2.4)$$

□

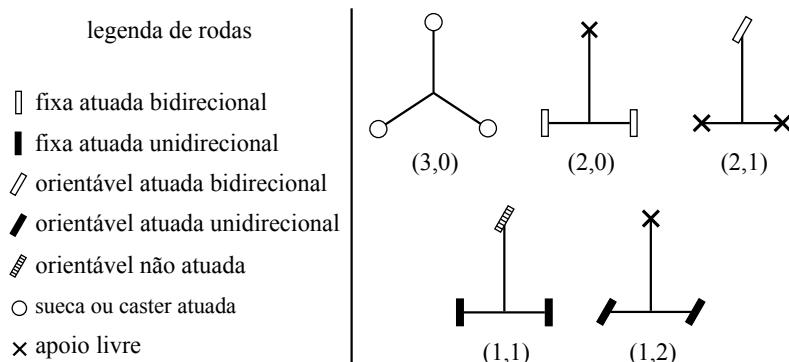
A restrição da Eq. (2.4) atesta que o robô móvel pode conter até duas rodas orientáveis, porém, caso haja mais de duas, o arranjo destas deve ser coordenado para garantir que não aconteça uma configuração de bloqueio de rodas.

A partir das Definições 1 e 2, cada RMR pode ser caracterizado por dois graus: um de mobilidade e outro de manobrabilidade. Porém, algumas configurações não são possíveis, como por exemplo, quando  $\delta_m + \delta_s = 1$ , indica que o robô só poderá rodar em torno de um ponto fixo, e casos onde  $\delta_m \geq 2$  e  $\delta_s = 2$  não são possíveis, pois as condições expressas pelas definições implicam que se  $\delta_s = 2$  então  $\delta_m = 1$ . Portanto, completando as definições acima, constata-se que a condição  $2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3$  deve ser respeitada.

Assim, existem apenas cinco classes de RMRs correspondendo às combinações de  $\delta_m$  e  $\delta_s$ , de acordo com a notação “tipo  $(\delta_m, \delta_s)$ ” proposta por Campion, D’Andrea-Novel e Bastin (1991). Na Fig. 5 estão

exemplificadas cada um destes tipos.

**Figura 5:** Tipos de RMRs.



O RMD pertence portanto ao tipo (2,0), assim o seu espaço de velocidades é restrito a um subespaço bidimensional (apenas velocidades longitudinal e angular), e não possui rodas orientáveis.

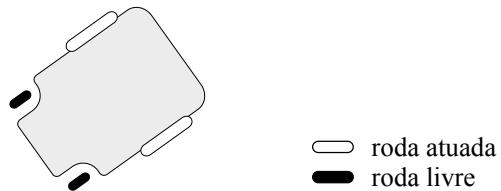
### 2.3 TERMINOLOGIA

A descrição do robô móvel segue a terminologia encontrada na literatura, porém para contornar dificuldades de nomenclatura esta seção apresenta os termos e as principais suposições necessárias para descrever um RMD. Essa padronização é necessária para compreensão dos modelos matemáticos descritos neste capítulo, além disso os principais termos usados estão listados no glossário de símbolos no início do documento.

Opta-se assim, por representar bidimensionalmente um RMD como ilustrado da Fig. 6, onde podem ser vistas as duas rodas livres em preto e as duas rodas atuadas em branco.

A partir de características construtivas, utilizam-se como marcos geométricos dois eixos imaginários que cruzam o robô e são perpendiculares entre si, são eles:

**Figura 6:** Robô móvel: representação no plano.

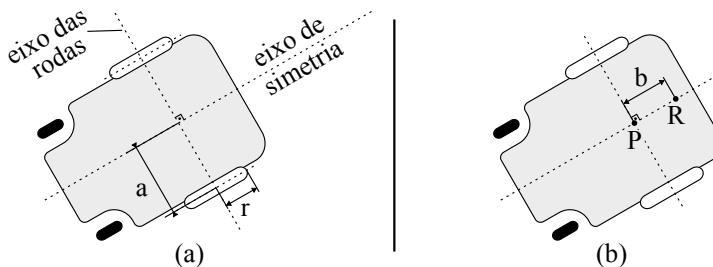


- *Eixo de simetria:* secciona longitudinalmente o robô de forma simétrica;
- *Eixo das rodas:* passante pelos centros das rodas atuadas.

Tais eixos estão ilustrados na Fig. 7.a e auxiliam na obtenção dos seguintes parâmetros, também visualizáveis na mesma figura:

- $r$ : raio da roda, mensurado do ponto de interseção eixo das rodas com o plano medial da roda, até qualquer ponto pertencente ao perímetro da roda;
- $a$ : distância da roda ao eixo de simetria, mensurada do ponto de intersecção entre o eixo de simetria e o eixo das rodas, até o ponto de interseção do plano medial da roda com o eixo das rodas.

**Figura 7:** Robô móvel: eixos e parâmetros.



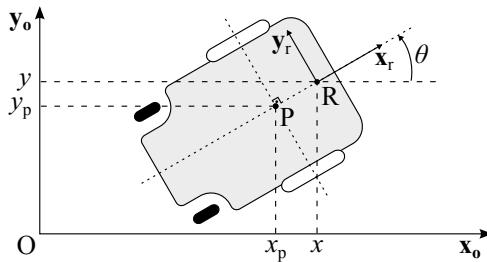
Além desses parâmetros, a partir destes eixos também é possível definir os pontos que representam o RMD dentro do espaço cartesiano  $\mathbb{R}^2$  definido pela base *global*  $\mathfrak{F}_o\{O, \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o\}$ , a qual está localizada no plano onde o robô se desloca:

- $P(x_p, y_p)$ : interseção entre o eixo de simetria e o eixo das rodas, coincidente ao centro de gravidade do robô;
- $R(x, y)$ : referência do robô, alocado ao longo do eixo de simetria a uma distância,  $b$ , do ponto  $P$ .

Estes pontos podem ser visualizados na ilustração da Fig. 7.b.

Espacialmente, o ponto  $R$  coincide com a origem do sistema de coordenadas locais,  $\mathfrak{F}_r\{R, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r\}$ , com abscissa  $\mathbf{x}_r$  colinear ao eixo de simetria e ordenada  $\mathbf{y}_r$  paralela ao eixo das rodas, como ilustrado na Fig. 8. A base  $\mathfrak{F}_r$  é utilizada para descrever o robô através das coordenadas,  $x$  e  $y$ , de sua origem  $R$  e pela rotação,  $\theta$ , em relação à base  $\mathfrak{F}_o$ .

**Figura 8:** Robô móvel dentro do plano cartesiano.



A descrição completa do robô é feita de forma única através das variáveis supracitadas em conjunto com os ângulos de rotação da roda esquerda,  $\varphi_e$ , e da roda direita,  $\varphi_d$ . Este conjunto de estados é denominado coordenadas *generalizadas*,  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \varphi_d \ \varphi_e]^T$ , ou coordenadas de *configuração*. Sendo que, devido ao acoplamento existente entre a

orientação do robô,  $\theta$ , e o ângulo das rodas,  $\varphi = [\varphi_d \ \varphi_e]^T$ ,

$$\theta = \frac{r}{2a}(\varphi_d - \varphi_e), \quad (2.5)$$

a representação de postura,  $\xi = [x \ y \ \theta]^T$ , é considerada suficiente para descrever o RMD.

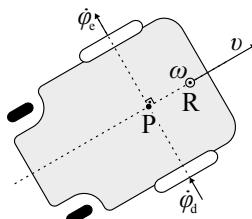
Com esta notação é possível representar o robô espacialmente. Na seção seguinte estão descritos os modelos que representam o RMD em dois níveis de abstração, um em termos das velocidades, o modelo *cinemático*, e outro em termo das forças, o modelo *dinâmico*.

## 2.4 MODELOS MATEMÁTICOS

Nesta seção estão descritos três modelos que representam o RMD, sendo apresentados em um sequência crescente de complexidade e detalhamento. Estas representações são utilizadas como modelo de simulação para avaliação de desempenho dos controladores propostos. Além disso, são utilizadas como base para obtenção dos modelos de controle.

Em suma, dois modelos representativos do RMD são utilizados, o *cinemático* e o *dinâmico*, sendo o primeiro a relação entre as velocidades no plano,  $\dot{q}$ , e as de atuação aplicadas nas rodas,  $\dot{\varphi} = [\dot{\varphi}_d \ \dot{\varphi}_e]^T$  (Fig. 9), incorporando as restrições de movimento e parâmetros geométricos. Já o modelo dinâmico relaciona as acelerações do robô,  $\ddot{q}$ , aos torques aplicados nas rodas,  $\tau = [\tau_d \ \tau_e]^T$ , que além das mesmas características do cinemático incorpora parâmetros de força e inércia.

**Figura 9:** Robô móvel: velocidades das rodas e do corpo.



A terceira representação é, na realidade, uma adição do modelo dos atuadores ao dinâmico com a intensão agregar detalhes, obtendo-se dessa forma uma representação mais próxima à real.

Os modelos a seguir foram desenvolvidos em relação às velocidades das rodas  $\dot{\varphi}$ , porém para ocasiões onde é necessário o modelo expresso relativo às velocidades do corpo,  $\mathbf{p} = [v \omega]^T$  (ver Fig. 9), pode-se aplicar a relação entre as velocidades, que é definida pela equação

$$\dot{\varphi} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{p} \quad \text{sendo,} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{a}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{a}{r} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A qual é constante devido as rodas atuadas do RMD serem fixas (não orientáveis).

#### 2.4.1 Modelo cinemático

Este modelo expressa como as velocidades aplicadas nas rodas refletem no deslocamento do RMD sobre o plano  $\mathfrak{F}_0$ . Para obtê-lo, parte-se da propriedade de que a mobilidade e manobrabilidade de veículos são regidas diretamente pela disposição e tipo das rodas utilizadas (CAMPION; BASTIN; D'ANDREA-NOVEL, 1996).

Assim, a representação do deslocamento do RMD é definida a partir das restrições que as rodas do robô impõem. No caso do RMD, há três restrições de dois tipos diferentes (SICILIANO; KHATIB, 2008), uma restrição de *não derrapagem*, obtida a partir da Eq. (2.2),

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta + b \dot{\theta} = 0, \quad (2.7)$$

que representa a impossibilidade de movimentos laterais, e duas restrições de *não deslizamento*, obtidas a partir da Eq. (2.1),

$$\begin{aligned} \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + a \dot{\theta} &= r \dot{\varphi}_d, \\ \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - a \dot{\theta} &= r \dot{\varphi}_e, \end{aligned} \quad (2.8)$$

as quais expressam que qualquer rotação nas rodas irá gerar uma alte-

ração nos estados do veículo.

Assim, isolando-se  $\dot{q}$  nas restrições da Eq. (2.7) e Eq. (2.8), obtém-se diretamente o *modelo cinemático*, que estabelece como as velocidades das rodas  $\dot{\varphi}$  influenciam no deslocamento do robô:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_q = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta)\Sigma \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{S(q)} \dot{\varphi}, \quad (2.9)$$

sendo,

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} ca & ca \\ cb & -cb \\ c & -c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (2.10)$$

$$S(q) = \begin{bmatrix} c(e \cos \theta - b \sin \theta) & c(e \cos \theta + b \sin \theta) \\ c(e \sin \theta + b \cos \theta) & c(e \sin \theta - b \cos \theta) \\ c & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{R}(\theta)$  é a matriz de rotação da base  $\mathfrak{F}_o$  em relação a base  $\mathfrak{F}_r$ ,  $\Sigma$  a matriz de manobrabilidade (constante por não haver rodas orientáveis),  $\dot{\xi} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$  o vetor de velocidades de *postura*,  $S(q)$  a matriz representativa do modelo cinemático e  $c = r/2a$ .

## 2.4.2 Modelo dinâmico

O modelo dinâmico expressa como os torques,  $\boldsymbol{\tau}$ , aplicados nas rodas geram movimento através das acelerações,  $\ddot{q}$ , do robô. Esta representação é obtida, de acordo com Bloch (2003, p. 12), através das equações de Lagrange-d'Alembert, utilizadas em sistemas com restrições e submetidas a forças externas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \mathbf{A}^T(q)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{N}(q)\boldsymbol{\tau}, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$  é a matriz Jacobiana de restrições,  $\boldsymbol{\lambda}$  o vetor de multiplicadores de Lagrange,  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  a transformação das forças externas,  $\boldsymbol{\tau}$  o vetor de torque aplicado nas rodas,  $\mathbf{q}$  o vetor de coordenadas generalizadas e

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.13)$$

o Lagrangiano do sistema, que estabelece o balanço entre as energias cinética e potencial.

Considera-se que o robô se locomove por uma superfície não inclinada, gerando portanto, energia potencial constante. Já a energia cinética total do sistema,  $T$ , é deduzida considerando o centro de massa coincidente ao ponto P, como em Bertol (2009), resultando em:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_t(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ & + dm_t(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)\dot{\theta} \\ & + \frac{1}{2}I_t\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r(\dot{\varphi}_d^2 + \dot{\varphi}_e^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $I_t = d^2m_t + 2e^2m_r + I_c + 2I_w$  representa a inércia total do robô em relação a um eixo normal passante por  $R(x, y)$ ,  $m_t = m_c + 2m_r$  a massa total do robô e os parâmetros inerciais estão listados a seguir:

- $m_c$ : massa do corpo do robô;
- $m_r$ : massa do conjunto roda e rotor;
- $I_c$ : momento de inércia do corpo do robô;
- $I_r$ : momento de inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao eixo da roda;
- $I_w$ : momento de inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao plano da roda.

Assim, considerando que a energia potencial é constante e que a energia cinética é obtida como descrita na Eq. (2.14), obtém-se o *modelo dinâmico* do RMD a partir das Eqs. (2.12) e (2.13):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \quad (2.15)$$

sendo,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_t & 0 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & f_2 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} bm\dot{\theta}^2 c_\theta \\ bm\dot{\theta}^2 s_\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_\theta & c_\theta & s_\theta & s_\theta \\ s_\theta & s_\theta & -c_\theta & -c_\theta \\ e & -e & b & b \\ -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  representa a matriz de inércia (definida positiva e simétrica),  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  é a matriz de torques centrífugos e forças de Coriolis,  $f_1 = bm_t s_\theta$ ,  $f_2 = -bm_t c_\theta$ ,  $c_\theta = \cos \theta$  e  $s_\theta = \sin \theta$ .

Para obter um modelo dinâmico sem os multiplicadores de Lagrange,  $\boldsymbol{\lambda}$ , assim como desenvolvido por Shojaei, Shahri e Tarakameh (2011), substitui-se a Eq. (2.9) e sua derivada no tempo na Eq. (2.15). Multiplicando o resultado por  $\mathbf{S}^T(\theta)$  obtém-se, considerando a propriedade cinemática  $\mathbf{S}^T(\theta)\mathbf{A}^T(\theta) = 0$ , o seguinte modelo:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\varphi} + \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\varphi} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\tau, \quad (2.16)$$

sendo  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{N}$ .

Objetivando encontrar uma representação dinâmica em função das variáveis de configuração,  $\mathbf{q}$ , deriva-se a Eq. (2.9) e obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\varphi} + \mathbf{S}(\mathbf{q})\ddot{\varphi}. \quad (2.17)$$

Utilizando as Eqs. (2.9) e (2.17) para substituir  $\dot{\varphi}$  e  $\ddot{\varphi}$  na Eq. (2.16),

chega-se na seguinte representação:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}. \quad (2.18)$$

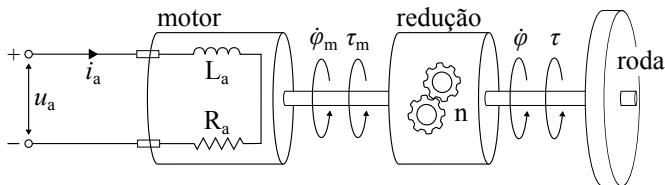
sendo  $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}^+(\mathbf{q}) - \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}^+(\mathbf{q})$ ,  $\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{S}^+(\mathbf{q})$  a pseudo inversa de  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ . Esta equação é justamente a representação livre dos multiplicadores de Lagrange que se estava procurando.

### 2.4.3 Dinâmica do atuador

As Eqs. (2.9) e (2.18) possibilitam representar suficientemente a locomoção do RMD. Porém, para fins de simulação, com a intenção de tornar a representação mais próxima do robô real, utiliza-se do modelo dos atuadores para aumentar o nível de detalhe da representação do robô.

O RMD é propulsionado por dois motores ligados às rodas através de uma engrenagem com fator de redução,  $n$ , como pode ser visualizado na Fig. 10.

**Figura 10:** Grupo atuador/roda.



A representação deste sistema parte do modelo eletromecânico de um motor de corrente contínua como utilizado por Shojaei, Shahri e Tarakameh (2011) e expresso pela equação:

$$\frac{di_a}{dt}L_a + R_a i_a + K_b \dot{\phi}_m = u_a, \quad (2.19)$$

onde  $K_b$  é a constante de velocidade,  $L_a$ ,  $R_a$  e  $i_a$  denotam a indutância,

resistência e corrente de armadura, respectivamente,  $\dot{\varphi}_m$  representa a velocidade do motor e  $u_a$  é a diferença de potencial aplicada aos terminais da armadura.

Acrescenta-se à Eq. (2.19) características do conjunto roda e motor que adequam as variáveis à redução existente, representadas pelas transformações,

$$\dot{\varphi}_m = n\dot{\varphi} \quad \text{e} \quad \tau = n\tau_m, \quad (2.20)$$

que em conjunto com a característica de proporcionalidade entre a corrente de armadura  $i_a$  e o torque do motor  $\tau_m$ ,

$$\tau_m = K_t i_a, \quad (2.21)$$

onde  $K_t$  é a constante de torque do motor, resultam no seguinte modelo do atuador:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a}(-R_a i_a - K_b \dot{\varphi}_m + u_a). \quad (2.22)$$

Este modelo em conjunto com a Eq. (2.18) formam a representação mais fiel, em relação aos outros modelos apresentados, do robô real.

## 2.5 TAREFAS DE CONTROLE DE TRAJETÓRIA

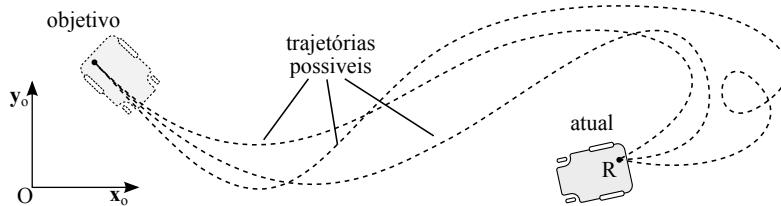
O problema de controle da trajetória de robôs móveis é dividido em três tipos de tarefas: (i) estabilização; (ii) seguimento; e (iii) rastreamento (SICILIANO; KHATIB, 2008, cap. 34). Embora todas visem seu deslocamento de um ponto a outro, os requisitos considerados em sua execução são os que diferem cada grupo de problemas. No trabalho apenas são abordados dois dos problemas, estabilização e rastreamento.

### 2.5.1 Estabilização

A tarefa de estabilização em um ponto, ou regulação, tem como objetivo o deslocamento do robô até um ponto de referência no espaço, porém não é especificado uma trajetória a ser percorrida, ou seja, a partir da localização inicial do robô, ao final da tarefa ele deverá

apresentar-se exatamente como a referência, independentemente do caminho percorrido para alcançá-la. Na Fig. 11 há uma ilustração deste tipo de tarefa onde estão esquematizados possíveis caminhos percorridos pelo robô.

**Figura 11:** Exemplo de tarefa de estabilização.



Este tipo de tarefa não é uma solução atrativa para ambientes reais, exatamente por não haver previsibilidade sobre a trajetória que o robô irá executar durante seu deslocamento, podendo ocorrer colisões indesejadas e inesperadas.

Neste trabalho a tarefa de estabilização é utilizada para validar o Compensador Paralelo Distribuído (CPD) como ferramenta para desenvolvimento da técnica de controle e para comprovar sua aplicabilidade ao sistema que representa o RMD.

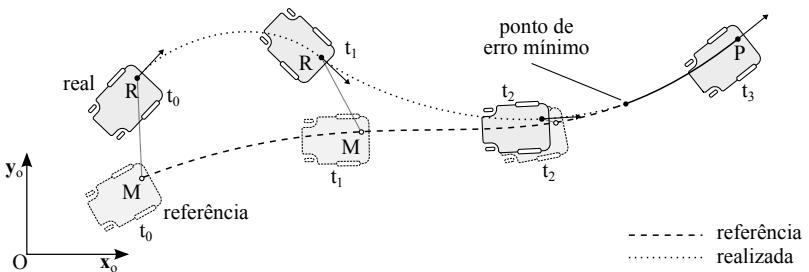
### 2.5.2 Rastreamento

Este desafio de controle especifica temporalmente localizações desejadas ao longo da curva de referência, ou seja, o trajeto é parametrizado no tempo. Na Fig. 12 está ilustrado um exemplo de tarefa de rastreamento onde um robô, R, persegue uma localização desejada, M, com requisitos temporais, pertencente a uma curva de referência.

O rastreamento é utilizado, por exemplo, para evitar colisões em um ambiente controlado, onde o robô deve respeitar certa postura em um determinado momento.

Uma consideração importante sobre o rastreamento, é de somente haver possibilidade de executar a trajetória de referência perfeitamente

**Figura 12:** Exemplo de tarefa de rastreamento.



se esta for factível com as limitações do robô. Por isso o planejamento de trajetória é de suma importância devido a sua influência no desempenho e consequentemente na análise dos controladores.

## 2.6 PLANEJAMENTO DE LOCOMOÇÃO

O requisito mínimo para locomoção de um robô móvel é a definição prévia de um caminho livre de obstáculos dentro do ambiente ao qual está imerso. Este preceito é garantido pelo *planejamento de caminho*. Já o *planejamento de trajetória* atende requisitos de execução do caminho, ou seja, com quais velocidades e objetivos temporais o percurso deve ser executado respeitando as limitações do veículo. Estas duas áreas são englobadas pelo *planejamento de locomoção* (CHOSET et al., 2005).

As características do RMD, em termos de mobilidade, restringem sua gama de trajetórias executáveis. Assim, mesmo na ausência de obstáculos, a obtenção de uma trajetória *factível* apresenta-se como um desafio de planejamento (LAUMOND; SEKHAVAT; LAMIRAUD, 1998).

Esta seção é dedicada à geração de trajetórias factíveis para o RMD, as quais são utilizadas para avaliação do desempenho dos controladores desenvolvidos.

### 2.6.1 Planejamento de caminho

Seguindo a linha de pesquisa dos trabalhos de Choi, Curry e Elkaim (2008) e Ho e Liu (2009), utiliza-se curvas de Bézier para obtenção de um caminho de locomoção factível para o RMD.

As *curvas de Bézier* podem ser parametrizadas e geradas na forma de Bernstein (HANSFORD, 2002) da seguinte maneira:

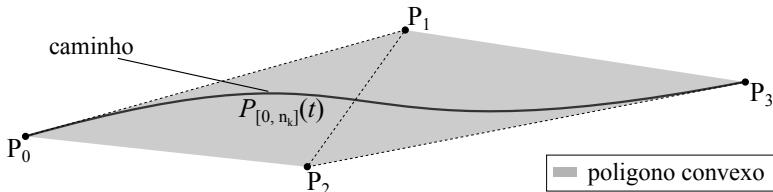
$$P_{[0,n_k]}(k) = \sum_{i=0}^{n_b} B_i^{n_b}(k) P_i, \quad (2.23)$$

onde  $n_k$  é o número de pontos da curva,  $n_b$  é o grau da curvatura, que é igual ao número de seguimentos de reta que ligam os *pontos de controle*,  $P_i$ , e  $B_i^{n_b}(k)$  um polinômio de Bernstein descrito por:

$$B_i^{n_b}(k) = \binom{n_b}{i} \left( \frac{\epsilon(n_k) - \epsilon(k)}{\epsilon(n_k) - \epsilon(0)} \right)^{n_b-i} \left( \frac{\epsilon(k) - \epsilon(0)}{\epsilon(n_k) - \epsilon(0)} \right)^i. \quad (2.24)$$

O interesse de utilização das curvas de Bézier na geração de caminho vêm das seguintes características: (i) independentemente do formato, sempre iniciam e terminam nos pontos de controle  $P_0 = P_{[0,n_k]}(0)$  e  $P_{n_b} = P_{[0,n_k]}(n_k)$ , respectivamente; (ii) serem sempre tangentes às retas  $\overline{P_0 P_1}$  e  $\overline{P_{n_b-1} P_{n_b}}$ ; (iii) encontram-se sempre contidas dentro do polígono convexo formado pelos pontos de controle  $P_i$ . Tais características podem ser vistas na curva de terceiro grau,  $n_b = 3$ , da Fig. 13.

**Figura 13:** Exemplo de curva de Bézier.



Segundo Skrjanc e Klancar (2007), uma curva de Bézier torna-se

complexa em sua forma e instável numericamente à medida que o número de pontos de controle aumenta. Assim, a fim de evitar estes problemas, é utilizada uma curva de terceiro grau ( $n_b = 3$ ), a qual é a equação de menor grau capaz de representar um caminho com mais de um vale de curvatura. Partindo da Eq. (2.23), com  $\epsilon(k) \in [0, 1]$  e  $P_i = (x_i, y_i)$ , esta curva pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(k) &= [1 - \epsilon(k)]^3 x_0 + 3\epsilon(k)[1 - \epsilon(k)]^2 x_1 + \\ &\quad + 3\epsilon(k)^2[1 - \epsilon(k)] x_2 + \epsilon(k)^3 x_3, \\ y(k) &= [1 - \epsilon(k)]^3 y_0 + 3\epsilon(k)[1 - \epsilon(k)]^2 y_1 + \\ &\quad + 3\epsilon(k)^2[1 - \epsilon(k)] y_2 + \epsilon(k)^3 y_3, \end{aligned} \quad (2.25)$$

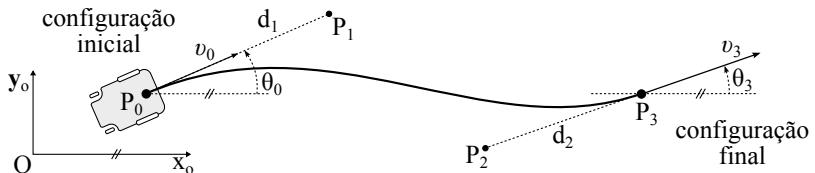
com a curvatura  $\kappa(k)$  dada pela seguinte equação das derivadas em relação a  $\epsilon(k)$ :

$$\kappa(k) = \frac{1}{\rho(k)} = \frac{x'(k)y''(k) - y'(k)x''(k)}{(x'(k)^2 + y'(k)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.26)$$

onde  $\rho(k)$  é o raio da curva no instante  $k$ .

A correlação ao problema de geração é feita definindo  $P_0$  e  $P_3$  como as posições inicial e final do robô, respectivamente e obtendo os pontos de controle  $P_1$  e  $P_2$ , a partir das orientações inicial e final desejada do robô em conjunto com as distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. Na Fig. 14 é possível ver uma ilustração desta correlação.

**Figura 14:** Caminho gerado por uma curva de Bézier de grau três.

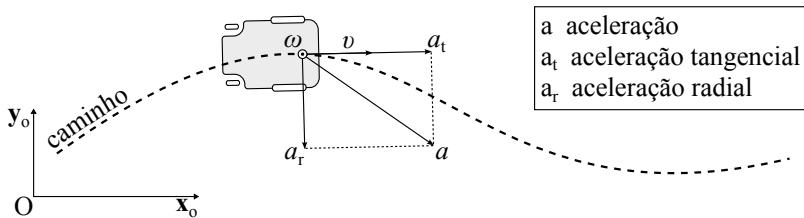


As distâncias  $d_1 = d_{\overline{P_0P_1}}$  e  $d_2 = d_{\overline{P_2P_3}}$ , são obtidas através do método proposto por Jolly, Kumar e Vijayakumar (2009), onde estes

parâmetros são otimizados para que a trajetória não viole as restrições físicas do robô.

As velocidades e acelerações em uma trajetória, Fig. 15, possuem limitações físicas que devem ser levadas em consideração durante o planejamento, objetivando factibilidade.

**Figura 15:** Acelerações e velocidades no robô móvel.



Segundo Lepetic et al. (2003), a aceleração executável pelo RMD (ver Fig. 15) é limitada pelas forças de atrito de cada roda com o chão. Assim, a aceleração máxima  $a_{\max}$ , decomposta nas acelerações tangencial e radial do robô, pode ser representada da seguinte forma:

$$a_{\max} = (a_{r\max}^2 + a_{t\max}^2)^{\frac{1}{2}} = \mu g \quad (2.27)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito da roda com o chão,  $g$  a aceleração da gravidade e,  $a_{t\max}$  e  $a_{r\max}$ , as acelerações tangencial e radial máximas alcançáveis pelo robô, respectivamente.

A aceleração radial instantânea da trajetória é obtida a partir do raio de curvatura,  $\rho$ , do caminho e a velocidade linear,  $v$ , no instante  $k$ ,

$$a_r(k) = \frac{\nu(k)^2}{\rho(k)}. \quad (2.28)$$

Já a relação entre a aceleração tangencial e radial<sup>1</sup> é dada por:

$$\frac{a_t(k)^2}{a_{t\max}^2} + \frac{a_r(k)^2}{a_{r\max}^2} = 1. \quad (2.29)$$

A partir da condição da Eq. (2.28) os raios inicial e final mínimos, que garantem que a curva da Eq. (2.25) não ultrapasse os limites de aceleração, são obtidos a partir das velocidades  $v_0$  e  $v_3$  e a aceleração radial máxima do robô  $a_{r\max}$ ,

$$\rho_{0\min} = \frac{v_0^2}{a_{r\max}}, \quad \rho_{3\min} = \frac{v_3^2}{a_{r\max}}. \quad (2.30)$$

Para obter os pontos intermediários da curva,  $P_1$  e  $P_2$ , são primeiramente expressos em termos das distâncias  $d_1$  e  $d_2$  e dos pontos  $P_0$  e  $P_3$ ,

$$P_1 = (x_0 + d_1 \cos \theta_0, y_0 + d_1 \sin \theta_0), \quad (2.31)$$

$$P_2 = (x_3 - d_2 \cos \theta_3, y_3 - d_2 \sin \theta_3),$$

e a seguir escreve-se os raios de curvatura nos pontos  $P_0$  e  $P_3$ , em termos das Eqs. (2.25) e (2.26),

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -\frac{3d_1^2}{2(\tilde{y} \cos \theta_0 + \tilde{x} \sin \theta_0 + d_2 \sin \tilde{\theta})}, \\ \rho_3 &= -\frac{3d_2^2}{2(\tilde{y} \cos \theta_3 + \tilde{x} \sin \theta_3 + d_1 \sin \tilde{\theta})}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $\tilde{x} = (x_3 - x_0)$ ,  $\tilde{y} = (y_3 - y_0)$  e  $\tilde{\theta} = \theta_3 - \theta_0$ .

Assim, as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  são obtidas iterativamente minimizando-se o erro entre as Eqs. (2.30) e (2.32), ou seja:

$$\min \quad err = \max(|\rho_{0\min} - \rho_0|, |\rho_{3\min} - \rho_3|). \quad (2.33)$$

O cálculo das distâncias, garante factibilidade nos pontos  $P_0$  e  $P_3$ , porém é necessário garantir a factibilidade da trajetória para toda sua extensão, isso é obtido através de sua parametrização no tempo.

---

<sup>1</sup>A magnitude da aceleração tangencial máxima é menor do que a radial máxima devido a dinâmicas de aceleração e desaceleração.

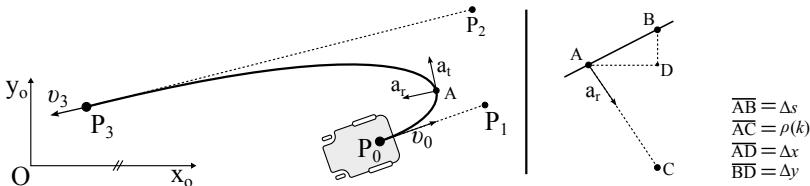
## 2.6.2 Planejamento de trajetória

O caminho obtido utilizando curvas de Bézier, garante através do critério da Eq. (2.33) que nos pontos de início e fim,  $P_0$  e  $P_3$ , a curvatura executada não irá requerer que o veículo extrapole suas limitações físicas. Porém, na extensão do percurso não há garantias que estas limitações não sejam ultrapassadas.

Assim, a partir desta trajetória preliminar, fornecida pela geração de caminho, é possível obter um perfil de velocidade para todos os pontos da curva. A parametrização é obtida objetivando que o RMD execute o caminho com velocidade e aceleração máximas, seguindo Lepetic et al. (2003).

Considerando o trecho de caminho ilustrado na Fig. 16, a primeira tarefa para o planejamento é obter o perfil de velocidade máxima que pode ser exercida durante o deslocamento sem infringir o limite imposto pela aceleração radial  $a_r$ .

**Figura 16:** Parametrização da trajetória de Bézier no tempo.



A velocidade máxima,  $\nu_{\max}(k)$ , para cada ponto  $k$  da trajetória é obtida pelo mínimo entre a capacidade de atuação do robô,  $\nu_m$ , e o limite imposto pela aceleração radial, o qual é obtido através da Eq. (2.30), ou seja,

$$\nu_{\max}(k) = \min[\nu_m, (\rho(k)a_{r\max})^{\frac{1}{2}}]. \quad (2.34)$$

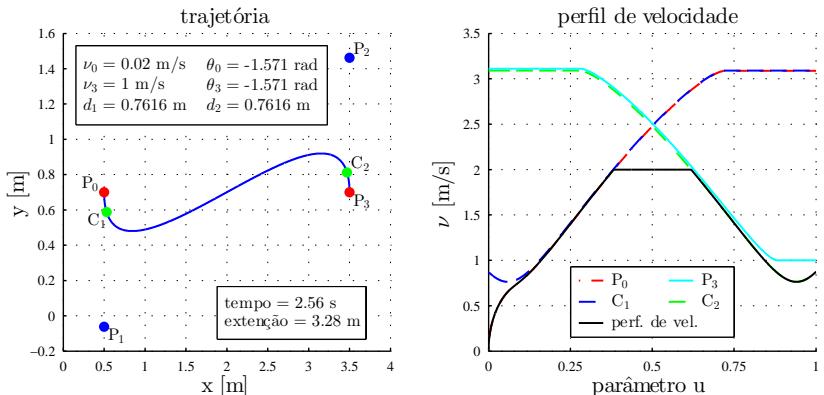
O segundo passo é calcular os perfis de velocidade considerando os pontos críticos da trajetória, ou seja, os pontos de início e fim da

trajetória ( $P_0$  e  $P_3$ ) e os locais onde a curvatura é máxima ( $C_1$  e  $C_2$ ), chamados de *vales*, que são instantes nos quais a velocidade que se pode exercer é mínima. Os perfis são calculados levando em consideração cada um desses pontos como partida. A aceleração radial em cada ponto é obtida a partir da curvatura e a velocidade máxima no ponto  $k$ , ou seja,

$$a_r(k) = \frac{\nu_{\max}(k)^2}{\rho(k)}. \quad (2.35)$$

A aceleração tangencial utilizada é obtida através da Eq. (2.29). Um exemplo desses perfis é visto no gráfico da direita na Fig. 17.

**Figura 17:** Exemplo de trajetória e seu perfil de velocidade.



Após a obtenção das velocidades desses pontos de referência, o perfil de velocidade da trajetória  $\nu(k)$  é escolhido do mínimo entre os perfis previamente calculados. Na Fig. 17 encontra-se uma ilustração de um perfil de velocidade para a trajetória especificada à sua esquerda.

A variação de tempo no instante  $k$  é dada por:

$$\Delta t(k) = \frac{\Delta s(k)}{\nu(k)} \quad (2.36)$$

e a velocidade angular,  $\omega$ , ao longo da trajetória é obtida da relação

direta entre velocidade linear,  $v$ , e o raio da curva,  $\rho$ :

$$\omega(k) = \rho(k)\nu(k). \quad (2.37)$$

## 2.7 SÍNTSE DO CAPÍTULO

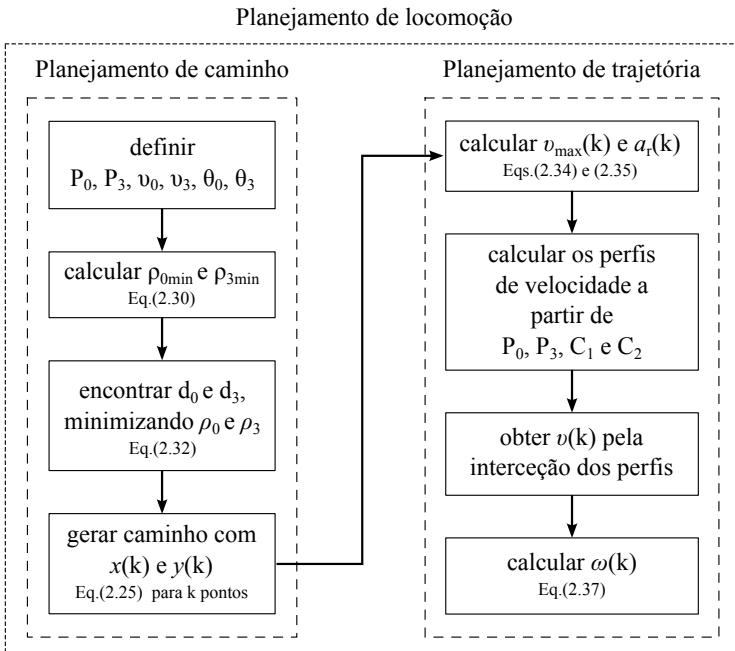
Neste capítulo foi caracterizado o RMD e foram apresentados seus modelos matemáticos, cinemático e dinâmico. Também foi apresentado o modelo de seus atuadores para uma representação mais fiel ao robô real. Estes modelos são utilizados em simulações para teste dos controladores propostos neste trabalho e também como base para cálculo de controladores.

Foram apresentados os problemas de controle de locomoção de RMRs que são abordadas neste trabalho.

Diante da necessidade de obtenção de trajetórias factíveis para o RMD e motivado pela influência das restrições de locomoção na factibilidade da trajetória, foi utilizando um método de geração de trajetórias baseado em curvas de Bézier, o qual é resumido no fluxograma da Fig.18.

A metodologia para obtenção de trajetórias factíveis, tanto em termos das restrições de mobilidade quanto de atuação para robô, foi necessária para que os resultados obtidos na tarefa de controle de trajetória fossem coerentes e não apresentassem influências da impossibilidade de execução da trajetória de referência.

**Figura 18:** Fluxograma do método de planejamento.





### **3 CONTROLE *FUZZY***

Desde a introdução do conceito de conjuntos *fuzzy* por Zadeh (1965) e posterior utilização no controle de sistemas mecânicos por Mamdani (1974), técnicas *fuzzy* são utilizadas para, entre outras aplicações, o controle e a modelagem de sistemas físicos.

Neste trabalho é proposto o controle da trajetória de Robôs Móveis Diferenciais (RMDs) utilizando Compensadores Paralelos Distribuídos (CPDs), que são baseados na técnica de inferência *fuzzy* desenvolvida por Takagi e Sugeno (1985). A utilização deste tipo de controlador permite o cálculo automático de seus parâmetros de sintonia, de acordo com requisitos de desempenho, através de ferramentas de otimização e *Linear Matrix Inequalities* (LMIs).

Assim, neste capítulo estão descritos:

- A lógica *fuzzy*;
- Sistemas de inferência Takagi-Sugeno;
- Como a lógica *fuzzy* é utilizada para criar uma representação do RMD;
- A técnica de controle *fuzzy* baseado em modelo, a forma de análise de estabilidade desses sistemas e como seus parâmetros são calculados.

#### **3.1 CONJUNTOS *FUZZY***

A notação mais simples de representar um conjunto é listando todos os elementos que estão nele contidos, por exemplo,

$$\mathbb{A} = \{a, b, c, d, e\}, \quad (3.1)$$

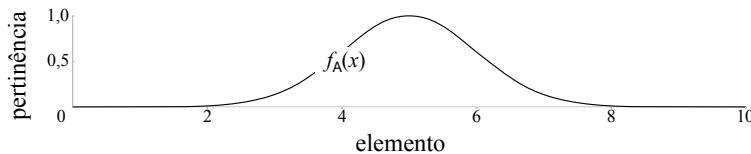
onde um elemento é *rigidamente* definido como pertencente ou não ao conjunto.

A ideia principal na teoria de conjuntos *fuzzy* (ROSS, 2010, Capítulo 2), considera a mesma notação da Eq. (3.1), porém composto por pares ordenados  $(x, f_{\mathbb{A}}(x))$ , onde  $x$  representa um elemento pertencente ao universo  $\mathbb{U}$  e  $f_{\mathbb{A}}(x)$  a *pertinência* de  $x$  no conjunto, ou seja,

$$\mathbb{A} = \{(x, f_{\mathbb{A}}(x)) \mid x \in \mathbb{U}\}.$$

O grau de pertinência  $f_{\mathbb{A}}(x)$  de cada elemento  $x$ , por convenção assume valores entre 0 e 1, isto é,  $f_{\mathbb{A}} : \mathbb{U} \rightarrow [0, 1]$ . Na Figura 19 é mostrada uma Função de Pertinência (FP) Gaussiana  $f_{\mathbb{A}}(x)$ , para elementos de 0 a 10 em um conjunto *fuzzy*  $\mathbb{A}$ .

**Figura 19:** Exemplo de função de pertinência.



Assim, devido a característica de generalização das FPs, a teoria de conjuntos *fuzzy* é considerada uma extensão da definição clássica de conjuntos. Para que um conjunto *fuzzy* represente um conjunto clássico basta que sua função de pertinência assuma somente valores iguais a 1 ou 0, representando a existência ou não, respectivamente, do elemento no conjunto.

### 3.2 SISTEMA DE INFERÊNCIA

Sistemas de inferência são utilizados para obtenção de uma ação (saída), a partir de estímulos (entradas), de acordo com uma base de conhecimento (conjuntos). Consistem de três componentes: o conjunto de *regras*, a *base de dados* e o mecanismo de *agregação*. Utiliza-se nas *premissas* conjuntos *fuzzy* para classificar as entradas e, no caso de sistemas Sugeno (tipo-III segundo Sugeno (1999)), utilizam-se funções

polinomiais nas consequências de cada regra:

**Definição 3:** A  $i$ -ésima regra de um sistema de inferência Sugeno com  $n_p$  variáveis de entrada e  $n_r$  regras é dada por:

$$\text{se } z_1 \text{ é } \mathbb{G}_1^i, \dots, z_{n_p} \text{ é } \mathbb{G}_{n_p}^i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_r \\ \text{então } y_i = c_i(z_1, z_2, \dots, z_{n_p}) \quad (3.2)$$

onde  $\mathbb{G}_j^i$ , são conjuntos fuzzy das premissas,  $z_j$  as variáveis de entrada, e  $c_i(\cdot)$  são funções polinomiais que compõe as consequências do sistema.

□

Cada uma dessas regras possui um peso  $w_i$  na composição da saída, a qual é obtida pelo produtório:

$$w_i = \prod_{j=1}^{n_p} f_j^i(z_j) \quad (3.3)$$

onde a função  $f_j^i(\cdot)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , representa a pertinência de  $z_j$  no conjunto fuzzy  $\mathbb{G}_j^i$ .

A saída do sistema é obtida através da média ponderada das saídas  $y_i$  de cada regra:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n_r} w_i}. \quad (3.4)$$

Note que a média mantém a característica unitária do sistema.

A partir do sistema de inferência descrito acima, na próxima seção delineia-se como tal construção de Sugeno é utilizada na criação de modelos para sistemas físicos.

### 3.3 MODELO TS-FUZZY

A capacidade do sistema de inferência Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985) em representar completamente um sistema não-linear é seu maior atrativo no âmbito da teoria de controle (WANG et al., 2000).

O modelo TS-Fuzzy, em suma, pondera entre representações polinomiais de regiões do sistema original a fim de obter uma representação equivalente. Assim, cada região é decomposta em representações lineares de forma que um sistema TS-Fuzzy com  $n_p$  não-linearidades  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n_p}]^T$ , é definido da seguinte forma:

**Definição 4:** A  $i$ -ésima regra do modelo TS-Fuzzy com  $n_p$  variáveis de entrada e  $n_r$  regras é dada por:

$$\text{se } z_1 \text{ é } \mathbb{G}_1^i, \dots, z_{n_p} \text{ é } \mathbb{G}_{n_p}^i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_r \\ \text{então } \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

onde  $\mathbb{G}_j^i$  são os conjuntos fuzzy das premissas,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  os estados e entradas do sistema modelado, respectivamente.  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{B}_i$ , são as matrizes de cada subsistemas  $\dot{\mathbf{x}}_i$ .  $\square$

A saída deste modelo fuzzy é obtida pela composição de suas regras, que é executada utilizando a Eq. (3.4):

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_r} h_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}), \quad (3.6)$$

onde as pertinências  $h_i$  são obtidas a partir da Eq. (3.3), da seguinte forma:

$$h_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{n_r} w_j}. \quad (3.7)$$

Completando as informações sobre esta representação há algumas propriedades a respeito dos pesos  $w_i$  e das pertinências  $h_i$ , que devem ser ressaltadas:

- A soma dos pesos  $w_i$  de cada sub-região (regra) do sistema fuzzy deve ser maior que zero, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n_r} w_i > 0, \quad (3.8)$$

sendo  $w_i \geq 0$  definida na Eq. (3.3);

- A soma das pertinências  $h_i$  deve ser unitária, ou seja, representar completamente o sistema modelado:

$$\sum_{i=1}^{n_r} h_i = 1. \quad (3.9)$$

sendo  $0 \leq h_i \leq 1$  definida na Eq. (3.7).

Estas propriedades são utilizadas diretamente na obtenção das funções de pertinência e este modelo *fuzzy* é utilizado no cálculo de CPDs.

### 3.4 MÉTODO DE MODELAGEM

Há duas bases de informações possíveis de se obter o modelo de um sistema físico: (i) a partir de um conjunto de informações de entrada e saída (SUGENO; KANG, 1988) ou (ii) a partir do sistema de equações representativo (TANAKA; WANG, 2001). Neste trabalho é utilizado o segundo método, o qual é descrito e exemplificado a seguir.

Considerando um sistema com  $n_p$  não-linearidades diferentes,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.10)$$

sua representação TS-Fuzzy correspondente pode ser obtida utilizando  $n_p$  premissas e  $2^{n_p}$  regras.

O primeiro passo de modelagem é identificar da Eq. (3.10) cada não-linearidade diferente de  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  como uma variável  $z_j(\mathbf{x})$ , que representam as entradas no sistema *fuzzy*, e delimita-se o intervalo de variação de cada uma dessas variáveis<sup>[1]</sup>:

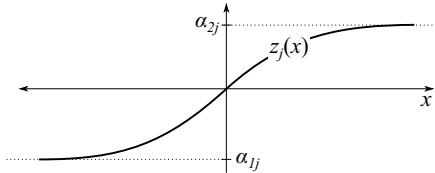
$$\alpha_{1j} \leq z_j(\mathbf{x}) \leq \alpha_{2j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n_p, \quad (3.11)$$

onde  $\alpha_{1j} = \min_x z_j(\mathbf{x})$  e  $\alpha_{2j} = \max_x z_j(\mathbf{x})$ , como ilustrado na Fig. 20.

---

<sup>1</sup>Caso a não-linearidade não possa ser definida dentro de um setor, limita-se

**Figura 20:** Limitantes de uma função não-linear.



Estes limites são utilizados para representar cada variável  $z_j$  por uma função não-linear de setor da seguinte forma:

$$z_j(\mathbf{x}) = \gamma_{1j}(\mathbf{x})\alpha_{1j} + \gamma_{2j}(\mathbf{x})\alpha_{2j}, \quad (3.12)$$

onde  $\gamma_{1j}(\mathbf{x}) \geq 0$  e  $\gamma_{2j}(\mathbf{x}) \geq 0$ , são funções de pertinência de  $\alpha_{1j}$  e  $\alpha_{2j}$  na composição da não-linearidade  $z_j(\mathbf{x})$ , respectivamente. Note que, para a Eq. (3.12) representar uma combinação convexa, a propriedade,

$$\gamma_{1j}(\mathbf{x}) + \gamma_{2j}(\mathbf{x}) = 1, \quad (3.13)$$

deve ser cumprida.

Para terminar o mapeamento das entradas  $z_j(\mathbf{x})$ , basta obter as funções de pertinência  $\gamma_{1j}(.)$  e  $\gamma_{2j}(.)$  a partir da representação da Eq. (3.12) e da propriedade da Eq. (3.13), resultando-se em:

$$\gamma_{1j}(\mathbf{x}) = \frac{z_j(\mathbf{x}) + \alpha_{1j}}{\alpha_{1j} - \alpha_{2j}}, \quad \gamma_{2j}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_{1j} - z_j(\mathbf{x})}{\alpha_{1j} - \alpha_{2j}}. \quad (3.14)$$

Tendo calculadas as funções de pertinência das entradas  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ , basta agora montar o modelo TS-Fuzzy seguindo os seguintes passos:

- Monta-se as matrizes  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{B}_i$  da  $i$ -ésima regra, substituindo as não-linearidades  $z_j(\mathbf{x})$  pelo respectivo valor de  $\alpha_{k,j}$ , para cada  $(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+^*, i \leq n_r, j \leq n_p$  sendo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$  definido como  $k = 2 - ((i-1)/2^{n_p-j} + 1) \bmod 2$ .

---

a região de representação a um intervalo menor (OHTAKE; TANAKA; WANG, 2001).

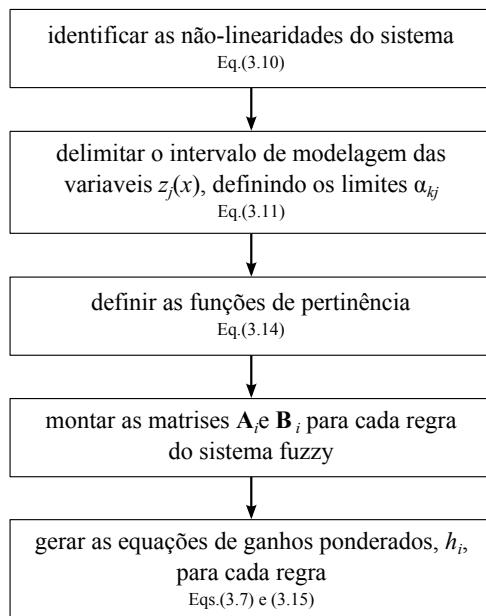
- Monta-se as equações de pertinência das consequências  $h_i$ , de acordo com a Eq. (3.7), onde  $\omega_i$  é definido a partir da Eq. (3.3) como:

$$w_i = \prod_{j=1}^{n_p} \gamma_{kj}(z_j) \quad (3.15)$$

para cada par  $(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+^*, i \leq n_r, j \leq n_p$  sendo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$  definido como  $k = 2 - ((i-1)/2^{n_p-j} + 1) \bmod 2$ ;<sup>[2]</sup>

Após montado o modelo *fuzzy*, a saída do sistema é calculada através da Eq. (3.6). A Fig.21 contém a síntese da sequencia de passos a se seguir para aplicação deste método de modelagem.

**Figura 21:** Fluxograma da técnica de modelagem.



<sup>2</sup> $a \bmod b$ : resto inteiro da divisão de  $a$  por  $b$

### 3.4.1 Exemplo de modelagem

Para exemplificar a técnica de modelagem, nesta seção são apresentados os passos executados na montagem do modelo TS-Fuzzy para as equações do erro cinemático entre o robô a ser controlado e um robô de referência:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & \nu_r \text{sinc}(e_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_b. \quad (3.16)$$

Este sistema é utilizado e explicado no Capítulo 4 como uma solução particular do problema de rastreamento de trajetória, a qual motiva a utilização dos controladores CPDs no trabalho.

Portanto, seguindo a técnica de modelagem descrita, no equacionamento do erro da Eq. (3.16), identifica-se quatro não-linearidades:  $z_1 = \omega_r$ ,  $z_2 = \nu_r \text{sinc}(e_\theta)$ ,  $z_3 = e_y$  e  $z_4 = e_x$ , ou seja, o sistema *fuzzy* respectivo contém  $n_r = 16$  regras.

A seguir define-se as regiões de modelagem,  $|e_x| \leq 0,1 \text{ m}$ ,  $|e_y| \leq 0,1 \text{ m}$ ,  $|e_\theta| \leq \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  e  $|\omega| \leq 4,5749 \text{ rad/s}$ , e reescreve-se a Eq. (3.16) de acordo com o seguinte modelo *fuzzy*:

$$\dot{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{n_r} h_i(\mathbf{z}) (\mathbf{A}_i \mathbf{e} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_b), \quad (3.17)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{B}_i$  são reescritas em termos das variáveis  $\alpha_{kj}$ ,

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{k1} & 0 \\ \alpha_{k1} & 0 & \alpha_{k2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -1 & \alpha_{k3} \\ 0 & -\alpha_{k4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

sendo que para cada par  $(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+^*, i \leq n_r, j \leq n_p$  sendo  $k \in \mathbb{Z}_+^*$  definido como  $k = 2 - ((i-1)/2^{n_p-j} + 1) \bmod 2$ .

Os valores de  $\alpha_{kj}$  são selecionados de acordo com as regiões de

modelagem acima definidas:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -4.5749 \\ \alpha_{21} = 4.5749 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{12} = 0.0197 \\ \alpha_{22} = 2 \end{cases}, \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \alpha_{13} = 0, 1 \\ \alpha_{23} = -0, 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{14} = 0, 1 \\ \alpha_{24} = -0, 1 \end{cases}.$$

As funções de pertinência  $\gamma_{kj}$ , com  $k = 1, 2$  e  $j = 1, \dots, 4$ , para cada variável  $z_j$  são obtidas de acordo com as Eqs. (3.14):

$$\gamma_{1j} = \frac{z_j + \alpha_{1j}}{\alpha_{1j} - \alpha_{2j}}, \quad \gamma_{2j} = 1 - \gamma_{1j}. \quad (3.20)$$

Os pesos  $h_i$  são computados de acordo com as Eqs. (3.7).

### 3.5 CONTROLE FUZZY

A utilização de técnicas *fuzzy* em problemas de controle é comumente baseada em métodos que mapeiam um conhecimento prático, normalmente obtido a partir de observação, em um grupo de ações. Tais ações, em conjunto, levam o sistema para o comportamento desejado, como é o caso do trabalho de estreia da técnica de Mamdani (1974) e trabalhos mais atuais como o desenvolvido por Gonzalez, Guarnizo e Benavides (2014) e Kim e Chwa (2014).

Outra forma de utilização de técnicas *fuzzy* é como ferramenta auxiliar em estratégias de controle, ou seja, atua na adaptação do método de controle (acrescendo desempenho) ou como apoio nas ações tomadas pelo controlador (controle híbrido), como é o exemplo de trabalhos de Kayacan et al. (2015) e Yasuno, Tanaka e Kuwahara (2014), respectivamente.

Neste trabalho utiliza-se unicamente sistemas de inferência *fuzzy* baseado em modelo, com garantia de estabilidade, para controlar o RMD. Basicamente, a técnica, a partir de um modelo *fuzzy* obtido de um conjunto de equações que representam o sistema real, gera o sinal

de controle que estabiliza o sistema completo.

Nas próximas seções estão descritos: a principal técnica de controle utilizada no trabalho; o método de análise da estabilidade do sistema em malha fechada; e como são calculados os ganhos do compensadores considerando requisitos de desempenho.

### 3.5.1 Compensador Paralelo Distribuído (CPD)

A técnica base de todos os controladores utilizados é o Compensador Paralelo Distribuído (CPD), proposto por Sugeno e Kang (1986) é baseado em um modelo TS-Fuzzy. Tal modelo pode ser visto como uma cadeia *paralela e distribuída* de representações que em conjunto são capazes de descrever completamente um sistema original. O CPD atua nesse conjunto de subsistemas estabelecendo compensadores individuais para cada um, garantindo a estabilidade global do sistema.

Portanto, o CPD oferece um procedimento para projetar um compensador baseado na realimentação de estados para cada regra do modelo TS-Fuzzy a ser controlado, a ação de controle final será uma interpolação de todos os compensadores de acordo com as regras *fuzzy*.

Para cada regra do modelo da Eq. (3.6), como em Wang, Tanaka e Griffin (1995), estipula-se o controlador:

$$\begin{aligned} \text{se } z_1 \text{ é } \mathbb{G}_1^i, \dots, z_{n_p} \text{ é } \mathbb{G}_{n_p}^i &\quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_r, \\ \text{então } \mathbf{u}_i = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}, & \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  representam as matrizes locais de ganhos de realimentação.

A lei de controle resultante, dado o conjunto de regras *fuzzy* definidas na Eq. (3.21), torna-se:

$$\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^{n_r} h_i \mathbf{F}_i \mathbf{x}, \tag{3.22}$$

onde  $h_i$  são calculadas usando a Eq. (3.7) e do modelo matemático que se deseja controlar.

### 3.5.2 Condições de estabilidade

Um sistema TS-Fuzzy, Eq. (3.6), em malha aberta ( $\mathbf{u} = 0$ ),

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_r} h_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}, \quad (3.23)$$

de acordo com o critério de Lyapunov (KHALIL, 2002), é considerado globalmente assintoticamente estável se existir uma matriz  $\mathbf{P}$ , definida positiva, tal que:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (3.24)$$

ou seja, deve existir uma matriz  $\mathbf{P}$  comum para todos os subsistemas do sistema *fuzzy* da Eq. (3.23).

Reformulando esta condição de estabilidade para um sistema em malha fechada, substitui-se inicialmente a Eq. (3.22) na Eq. (3.6), obtendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} h_i h_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Denotando  $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j$  e aplicando na Eq. (3.25) a condição de estabilidade da Eq. (3.24) reformulada, obtém-se as condições necessárias para estabilizar o sistema TS-Fuzzy em malha fechada:

**Teorema 1** (TANAKA; WANG, 2001): *O equilíbrio de um sistema fuzzy contínuo descrito pela Eq. (3.25), é globalmente assintoticamente estável se existir uma matriz  $\mathbf{P}$ , definida positiva, tal que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} &< 0, \\ \left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j, \text{ exceto se } h_i \cap h_j &\neq \emptyset. [3] \end{aligned} \quad (3.26)$$

---

<sup>3</sup> $h_i \cap h_j \neq \emptyset$  é uma notação para a condição em que  $h_i(\mathbf{z}(t)) \times h_j(\mathbf{z}(t)) = 0$  para todo  $\mathbf{z}(t)$ .

ou seja, deve existir uma matriz  $\mathbf{P}$  comum para todos os subsistemas do sistema TS-Fuzzy.  $\square$

Portanto, o problema de controle é determinar os ganhos locais de realimentação  $\mathbf{F}_i$  que satisfazem as condições da Eq. (1) com uma matriz  $\mathbf{P}$  definida positiva comum entre todos os subsistemas do modelo TS-Fuzzy.

Esta é a condição básica de estabilidade e é utilizada para avaliar todos os controladores desenvolvidos no trabalho. A esta condição são adicionadas algumas modificações que facilitam a obtenção de sua solução e que também incluem característica de desempenho.

A primeira adaptação é com relação ao conservadorismo da solução, considerando um caso onde o número de regras do sistema for muito grande, pode ser muito difícil achar uma matriz  $\mathbf{P}$  comum que satisfaça o Teorema acima. Assim, assumindo que o número máximo de regras acionadas a todo instante de tempo é menor ou igual a  $s$ , onde  $1 < s \leq n_r$ , pode-se modificar o Teorema 1 da seguinte forma:

**Teorema 2** (TANAKA; WANG, 2001): *O equilíbrio de um sistema TS-Fuzzy contínuo descrito pela Eq. (3.25), é globalmente assintoticamente estável se existir uma matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  e uma matriz semidefinida positiva  $\mathbf{Q}$ , tal que:*

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + (s - 1) \mathbf{Q} < 0,$$

$$\left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{Q} \leq 0, \quad (3.27)$$

$i < j, \text{ exceto se } h_i \cap h_j \neq \emptyset.$

onde  $s > 1$ .  $\square$

O valor de  $s$  é obtido a partir de constatações acerca das funções de pertinência do modelo TS-Fuzzy, fazendo um levantamento do máximo de funções que podem estar ativas para todo o universo do modelo. A condição adicionada pelo Teorema 2 aumenta a região de soluções do sistema TS-Fuzzy, ampliando as probabilidades de encontrar uma

solução para o problema de controle.

Já em termos de desempenho, os teoremas até então apresentados não definem uma condição de otimização da solução, bastando apenas encontrar uma  $\mathbf{P}$  qualquer. Assim, na intenção de adicionar o requisito de velocidade de resposta do sistema, é atribuída uma modificação ao Teorema 2, que estipula uma otimização relativa à taxa de acomodação, isto é, encontrar o maior expoente de Lyapunov.

**Teorema 3** (TANAKA; WANG, 2001): *O equilíbrio de um sistema TS-Fuzzy definido pelo Teorema 2 garante uma taxa de acomodação igual a condição  $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$  para todas as trajetórias se existir  $\alpha > 0$  tal que:*

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + (s - 1) \mathbf{Q} + 2\alpha \mathbf{P} < 0,$$

$$\left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left( \frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) - \mathbf{Q} + 2\alpha \mathbf{P} \leq 0 \quad (3.28)$$

$i < j, \text{ exceto se } h_i \cap h_j \neq \emptyset.$

□

Portanto, o Teorema 3 estipula um critério de otimização que busca pela maior taxa de acomodação,  $\alpha$ , que se pode encontrar utilizando uma função de Lyapunov quadrática.

Estas condições podem ser traduzidas no seguinte problema generalizado de minimização de autovalores:

**Definição 5** (TANAKA; WANG, 2001): *Se existir uma matriz positiva definida  $\mathbf{X}$ , uma matriz semidefinida positiva  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{M}_i$  satisfazendo o Teorema 3, o sistema TS-Fuzzy da Eq. (3.6) pode ser estabilizado pelo CPD da Eq. (3.21), ou seja,*

$$\underset{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_r}{\text{maximize}} \quad \alpha$$

sujeito a

$$\mathbf{X} > 0, \mathbf{Y} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T \\ + (s-1) \mathbf{Y} + 2\alpha \mathbf{X} &< 0 \\ \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T \\ - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T \\ - 2 \mathbf{Y} + 4\alpha \mathbf{X} &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$i < j, \text{ exceto se } h_i \cap h_j \neq \emptyset,$$

onde  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{Q} \mathbf{X}$ .

□

As condições expostas pela Definição 5 são suficientes para encontrar uma solução de controle que leve o sistema para o equilíbrio no menor tempo calculável (maior taxa de acomodação). Porém, em alguns casos os ganhos calculados ultrapassam os limites de atuação do sistema real, e para evitar este fenômeno é possível adicionar, às condições, restrições que resultem em um controlador que respeite os limites das entradas de controle. Desse modo, assumindo que a condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  é conhecida, a restrição  $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$  é imposta em todos os instantes de tempo se condições,

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.30)$$

forem respeitadas, onde  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$  e  $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$ .

Todas as provas para os teoremas acima descritos podem ser encontrados no livro de Tanaka e Wang (2001).

Para solucionar todos os problemas descritos através das LMIs acima, foi utilizada a plataforma Matlab em conjunto com a ferramenta Yal-

mip (LOFBERG, 2004) e o *solver* SDPT3 (TOH; TODD; TUTUNCU, 1999).

### 3.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi apresentado como modelar sistemas utilizando lógica *fuzzy*, em específico, através da técnica desenvolvida por Takagi e Sugeno (1985), que utiliza funções polinomiais de primeiro grau como consequências das regras do sistema de inferência *fuzzy*.

Foi apresentado também um exemplo prático de modelagem, utilizando um sistema representativo do erro cinemático da tarefa de rastreamento de trajetória de um RMD.

A noção de sistemas *fuzzy* e a técnica para obtenção de modelos TS-Fuzzy, são utilizadas posteriormente para cálculo dos controladores propostos no trabalho e utilizados na locomoção do RMD.

Foi fundamentada teoricamente a técnica de controle utilizando sistemas TS-Fuzzy, a qual é denominada CPD. Em conjunto, foram apresentadas as condições de estabilidade para um sistema deste tipo em malha fechada, seguindo o conceito de estabilidade de Lyapunov. Que são capazes de garantir desempenho com relação a taxa de acomodação do sistema e em conjunto com condições de limites nas magnitudes das ações de controle.



## 4 RESULTADOS

Neste capítulo, estão descritos os controladores desenvolvidos na tese, bem como são feitas análises de desempenho dos mesmos, através de resultados de simulações e de experimentos com o robô *Powerbot*.

Este estudo têm como objetivo evidenciar as contribuições oferecidas pelas arquiteturas de controle propostas, relacionando desempenho, custo computacional e capacidade de cálculo dos parâmetros de cada controlador.

### 4.1 CENÁRIOS DE AVALIAÇÃO

Três cenários foram montados com a finalidade de avaliar o desempenho dos controladores desenvolvidos neste capítulo:

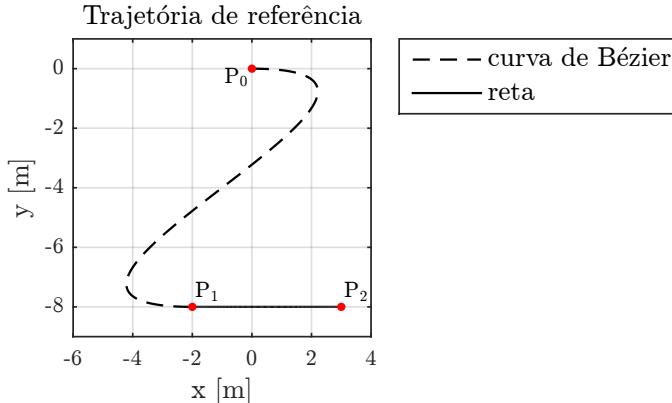
- (A) Ideal - em que se supõe que o sistema é bem conhecido e representado pelo modelo cinemático do Robô Móvel Diferencial (RMD), Eq. (2.9);
- (B) Realístico - em que se emprega o modelo dinâmico, Eq. (2.18), em conjunto com o modelo dos atuadores, Eq. (2.22), para reproduzir com maiores detalhes seu funcionamento, englobando as limitações dos atuadores, características inerciais e o laço de controle de velocidade interno (executado por um *Proportional-Integral-Derivative Controller (PID)*);
- (C) Experimental - aplicação prática dos controladores, utilizando o robô *Powerbot*.

Os ensaios A e B são simulados e possuem modelos do RMD com graus de complexidade diferentes, o cenário A considera apenas o modelo cinemático, Eq. (2.9), e o cenário B utiliza o modelo dinâmico com atuadores e limitações, Eq. (2.18) e Eq. (2.22). Já o ensaio C é experimental, onde os controladores são aplicados diretamente no robô real, o *Powerbot*.

## 4.2 TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA

A trajetória de referência utilizada em todos os ensaios foi obtida pelo método exposto no Capítulo 2. A primeira parcela da trajetória (linha tracejada na Fig. 22) inicia em  $P_0$  com angulo  $\theta_0$  e termina em  $P_1$  com angulo  $\theta_1$ , as velocidades desejadas para esses pontos são  $\nu_0$  e  $\nu_1$ . A segunda parte da trajetória (linha contínua na Fig. 22) é uma reta que começa em  $P_1$  e termina em  $P_2$ , com velocidades iguais a  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , respectivamente. Os parâmetros para geração da trajetória estão descritos na Tab. 1.

**Figura 22:** Trajetória de referência



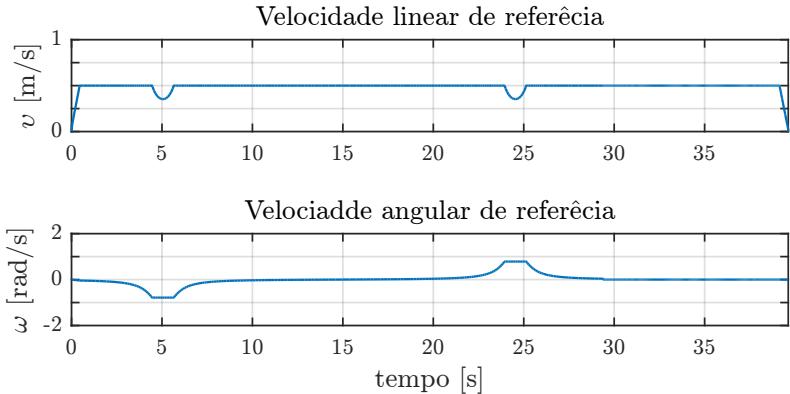
**Tabela 1:** Parâmetros da trajetória

$\mathbf{P}_0 = (0, 0)$	$\mathbf{P}_1 = (-2, -8)$	$\mathbf{P}_2 = (3, -8)$
$\nu_0 = 0 \text{ m/s}$	$\nu_1 = 0.5 \text{ m/s}$	$\nu_2 = 0 \text{ m/s}$
$\theta_0 = 0 \text{ rad}$	$\theta_1 = 0 \text{ rad}$	$\theta_2 = 0 \text{ rad}$
$d_0 = 8.39 \text{ m}$	$d_1 = 8.39 \text{ m}$	
tempo = 38,9 s	extensão 14,4 m	

As referências de velocidade linear e angular, geradas pelo planejamento de trajetória que respeitam as limitações do robô real, estão

exibidas na Fig. 23.

**Figura 23:** Velocidades de referência.



O objetivo destes ensaios é verificar o desempenho dos controladores, para tal, em todos é utilizada uma posição inicial do robô considerando um erro de postura definido como:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (4.1)$$

#### 4.3 RESULTADOS PRELIMINARES

O controle de RMDs utilizando Compensadores Paralelos Distribuídos (CPDs) aparece na literatura em trabalhos que tratam do rastreamento de trajetória, como os de Guechi et al. (2009), Guechi et al. (2010) e Blazic (2010), e outros que tratam apenas a sub-estabilização do robô, tal como o trabalho de Sun, Wang e Chang (2011), baseado nas ideias de Tanaka, Iwasaki e Wang (2001), que utiliza um CPD chaveado na descontinuidade do sistema para arcar com a perda de controlabilidade.

O modelo do erro desenvolvido por Klancar e Skrjanc (2007) e adaptado para ser utilizado em conjunto com um CPD em Guechi et al.

(2009), aportam como principal motivadores da utilização da técnica de controle *fuzzy* baseado em modelo neste trabalho.

Esta seção apresenta como é utilizado o modelo do erro em conjunto com um CPD para solucionar o problema de rastreamento. Os desenvolvimentos a seguir foram baseados nos artigos de Guechi et al. (2009), Guechi et al. (2010), e permitem analisar os resultados de simulação e práticos.

#### 4.3.1 Modelo do erro

Para obter este modelo, os trabalho de Blazic (2010) e Kanayama et al. (1991) partem do erro entre a postura real,  $\xi = [x \ y \ \theta]^T$ , e a postura de referência,  $\xi_r$ , de um RMD, relativo ao plano de deslocamento,  $\mathfrak{F}_o\{O, \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o\}$ ,

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\xi_r - \xi). \quad (4.2)$$

Do erro de postura, Eq. (4.2), e do modelo cinemático, definido na Eq. (2.9), é possível escrever o modelo do erro de postura da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos e_\theta & 0 \\ \sin e_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

Para que o modelo da Eq. (4.3) seja descrito em espaço de estados, o trabalho de Klancar e Skrjanc (2007) utiliza uma parcela de pré-alimentação,  $\mathbf{u}_a$ ,

$$\mathbf{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} \nu_r \cos e_\theta \\ \omega_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} \nu_b \\ \omega_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_b}. \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{u}_b$  é a nova variável de entradas de controle a ser calculada.

Assim, com a aplicação da parcela de pré-alimentação da Eq. (4.4) no modelo da Eq. (4.3), resulta-se no seguinte modelo do erro em espaço

de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r & 0 \\ -\omega_r & 0 & \nu_r \text{sinc}(e_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & e_y \\ 0 & -e_x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_b. \quad (4.5)$$

Com o sistema a ser controlado representado na forma da Eq. (4.5), é possível obter  $\mathbf{u}_b$  estabilizante utilizando um compensador CPD.

### 4.3.2 Controlador

Para controlar o modelo da Eq. (4.5) utilizando um CPD, é necessário partir de sua respectiva representação TS-Fuzzy,

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} h_i (\mathbf{A}_i \mathbf{e}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_b), \quad (4.6)$$

a qual foi apresentada na Eq. (3.17), Eq. (3.18) e Eq. (3.19), para exemplificar o método de modelagem. Aplica-se então o compensador CPD,

$$\mathbf{u}_b = - \sum_{j=1}^{n_r} h_j \mathbf{F}_j \mathbf{e}(t), \quad (4.7)$$

resultando no modelo de malha fechada

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} h_i h_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{e}(t), \quad (4.8)$$

onde, para calcular os ganhos  $\mathbf{F}_j$  que estabilizam o sistema, utiliza-se as *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) da Definição 5 em conjunto com as condições de limitação da entrada de controle definidas na Eq. (3.30).

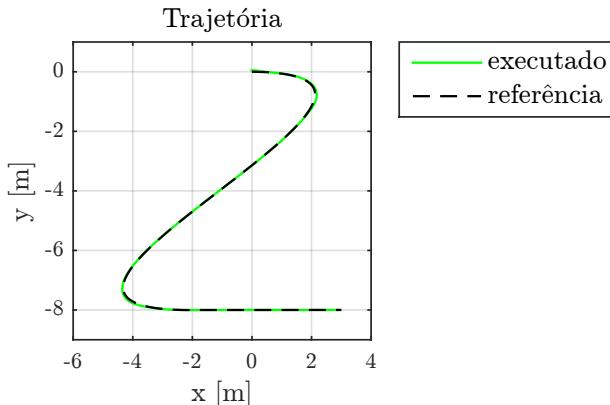
Os ganhos  $\mathbf{F}_i$  são iguais para todos os ensaios que utilizam este controlador, foram calculados através da Definição 5 em conjunto com as condições de limitação da entrada de controle da Eq. (3.30), e podem ser vistos na Tab. 8 e Tab. 9 (ver Apêndice B).

#### 4.3.3 Cenário A: modelo ideal

Nesta simulação aplica-se o controlador CPD, Eq. (3.22) para controle do RMD representado apenas pelo modelo cinemático da Eq. (2.9). Os parâmetros da simulação podem ser vistos na Tab. 10 (ver Apêndice B).

Na Figura 24 vê-se a trajetória desenvolvida no plano pelo robô, na Fig. 25 encontra-se a evolução dos erros de rastreamento e na Fig. 26 estão os sinais de controle calculados.

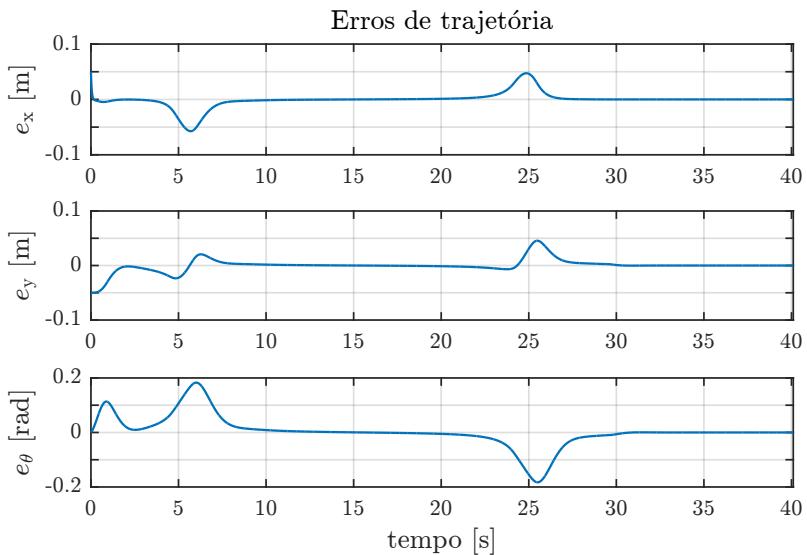
**Figura 24:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: trajetória.



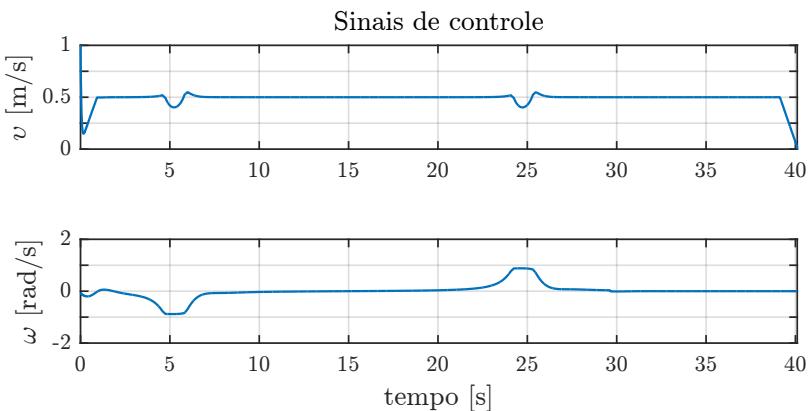
Este resultado reproduz o trabalho de Guechi et al. (2010) e valida, como esperado, a técnica de controle CPD para resolução do problema de rastreamento de trajetória para um RMD representado pelo modelo cinemático.

Constata-se já nesta primeira simulação, que o erro em situações de variação das velocidades angular e linear, próximo aos instantes 5 s e 25 s, que o desempenho do controlador apresenta degradação apresentando picos de erro.

**Figura 25:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: evolução do erro.



**Figura 26:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: sinais de controle.

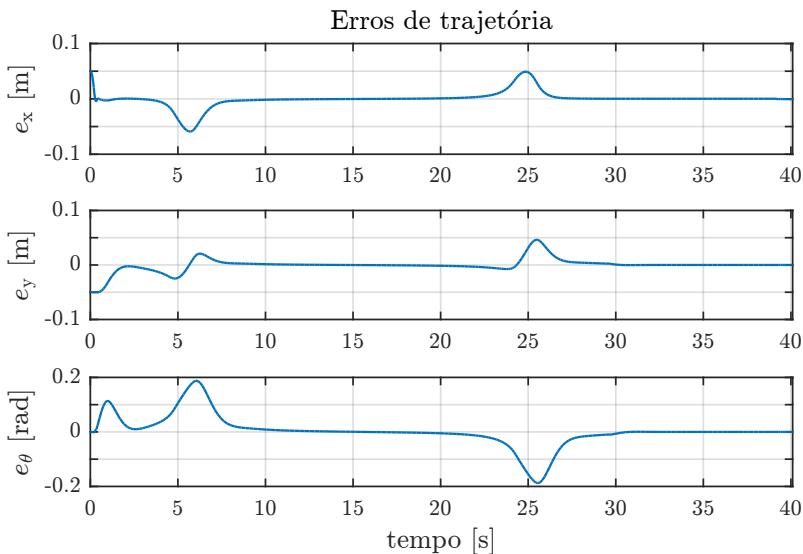


#### 4.3.4 Cenário B: modelo realístico

Este cenário de simulação fornece o desempenho do controlador CPD, Eq. (3.22) para controle do RMD representado pelo modelo dinâmico, Eq. (2.18), em conjunto com o modelo dos atuadores, Eq. (2.22), considerando limites de atuação. Os parâmetros da simulação podem ser vistos na Tab. 11 (ver Apêndice B).

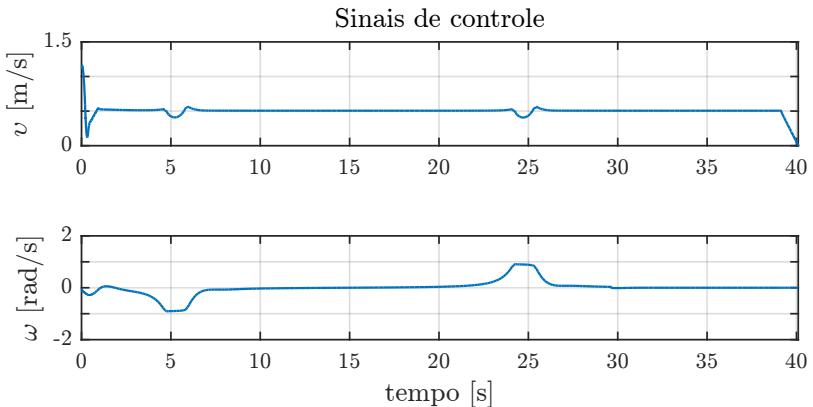
Na Fig. 27 contém a evolução dos erros de rastreamento durante a execução da tarefa e na Fig. 28 podem ser vistos os sinais de controles calculados.

**Figura 27:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: evolução do erro.



Este resultado demonstra que mesmo aplicado a um modelo que não reproduz idealmente o comportamento do sistema para o qual foi calculado, o controlador consegue executar a trajetória de referência com qualidade semelhante à obtida no ensaio ideal (cenário A).

**Figura 28:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: sinais de controle.



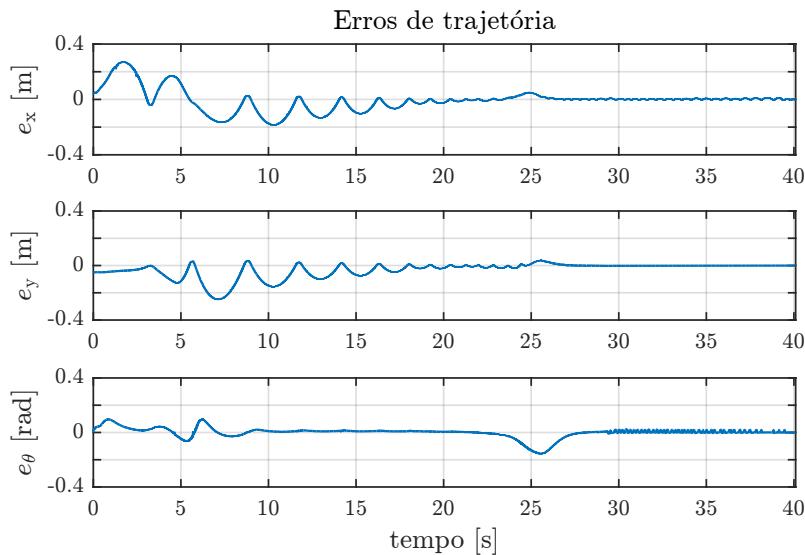
#### 4.3.5 Cenário C: experimental

Este último cenário fornece um resultado mais representativo do desempenho do controlador CPD, pois as informações são experimentais, ou seja, como o controlador se comporta quando aplicado ao robô real.

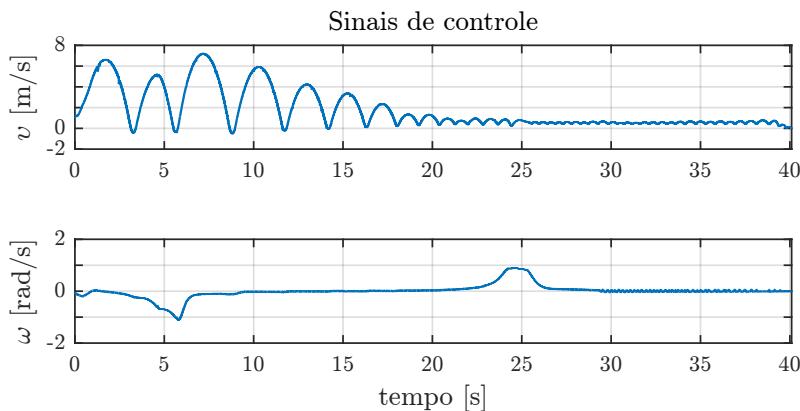
Os parâmetros utilizados no ensaio estão descritos na Tab. 12 (ver Apêndice B). Na Fig. 29 encontra-se a evolução dos erros de rastreamento da trajetória e na Fig. 30 estão os sinais de controle aplicados no robô.

Nota-se neste resultado prático que embora a trajetória tenha sido executada completamente, o controlador apresenta um comportamento oscilatório, sub-amortecido, durante todo o tempo de execução. Este comportamento se deve principalmente pela taxa de acomodação obtida através do cálculo dos ganhos, a qual foi de 0,0580.

**Figura 29:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: evolução do erro.



**Figura 30:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: sinais de controle.



### 4.3.6 Síntese dos resultados

Este arranjo de resultados foi escolhido para mostrar que o controlador CPD, Eq. (3.22), obtido através do modelo cinemático do robô móvel, Eq. (2.9), é capaz de resolver o problema de rastreamento de trajetória para um RMD, o que pode ser constatado na Tab. 2 através dos erros *Root Mean Square* (RMS) obtidos em cada cenário, os quais são da ordem de centímetros e de centésimos de radiano.

**Tabela 2:** Controlador de Guechi et al. (2010): erros RMS de cada cenário

Cenário	Variável	Erro	
(A) modelo ideal	$(e_x, e_y)$	$9,44 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$5,52 \times 10^{-2}$	[rad]
(B) modelo realístico	$(e_x, e_y)$	$11,71 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$6,90 \times 10^{-2}$	[rad]
(C) experimental	$(e_x, e_y)$	$25,22 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$3,78 \times 10^{-2}$	[rad]

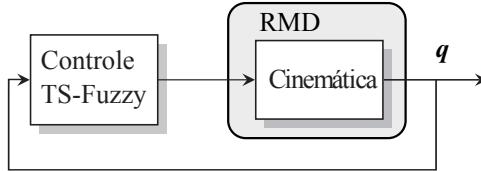
Tais resultados motivam a utilização do controle CPD por demonstrar sua viabilidade na solução do problema de rastreamento e também por apresentar-se como uma ferramenta automática para cálculo de ganhos para o controlador. Motiva também o estudo de uma aplicação da técnica que consiga obter melhores valores de tempo de acomodação, sem extrapolar seus limites de controle. Além disso, busca-se uma forma de construir um controlador CPD que consiga controlar o RMD sem que seja necessário uma pré-alimentação, atribuindo todo o esforço de controle unicamente ao controlador, podendo-se assim analisar e resolver o problema de rastreamento através de LMIs de forma plena.

## 4.4 ESTABILIZAÇÃO

O objetivo deste resultado é apresentar uma modificação no modelo do RMD, a qual é base dos controladores propostos no trabalho, e também valida a capacidade de aplicação de um CPD para controlar este sistema.

A malha de controle deste arranjo é formada por um CPD e o modelo cinemático do RMD, como pode ser visto na Fig. 31.

**Figura 31:** Tarefa de estabilização: laço de controle.



Neste caso o ponto de referência para estabilização é a origem do plano de deslocamento, ou seja,  $\xi_r = [0\ 0\ 0]^T$ .

A estabilização em torno de um ponto para o RMD não é realizável através de um realimentação de estados estática, como antecipado por Brockett (1983). Porém, como apresentado em Siciliano e Khatib (2008), é possível aplicar uma transformação ao modelo que contorne estas restrições. Esta modificação é motivada pela manobra de carros, onde um motorista enxerga um ponto ou área à frente do veículo, e é conhecida como controle *look-ahead*.

Para resolver esta tarefa utilizando um CPD reescreve-se o sistema cinemático, Eq. (2.9), para que represente o objetivo de controle, ou seja, estabilização apenas da posição do robô sem considerar sua orientação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Este modelo contorna os problemas de controlabilidade como a não-holonomicidade e subatuação, em detrimento do controle da orientação do robô.

Assim, de posse do modelo de controle da Eq. (4.9), nota-se que existem duas não-linearidades, sumarizadas no vetor  $z = [\cos \theta \ \sin \theta]^T$ , as quais são utilizadas na obtenção do respectivo modelo TS-Fuzzy, baseando-se na Eq. (3.6) e na técnica de modelagem descrita no Capí-

tulo 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i \left( \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{B}_i \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \right), \quad (4.10)$$

sendo que as matrizes  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{B}_i$  são reescritas em termos das variáveis  $z_j$ ,

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{k1} & -d\alpha_{k2} \\ \alpha_{k2} & d\alpha_{k1} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

O sistema é modelado para todo o círculo trigonométrico, ou seja, a região de mapeamento é definida como  $|z_1| \leq 1$  e  $|z_2| \leq 1$ , que geram os seguintes valores de  $\alpha_{kj}$ :

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{21} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}, \quad (4.12)$$

e as funções de pertinência são definidas através da Eq. (3.14):

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(z_1) &= \frac{z_1+1}{2}, & \gamma_{21}(z_1) &= \frac{1-z_1}{2}, \\ \gamma_{12}(z_2) &= \frac{z_2+1}{2} \text{ e } \gamma_{22}(z_2) &= \frac{1-z_2}{2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Os ganhos do controlador foram calculados utilizando as LMIs da Definição 5 em conjunto com as condições de restrição de entradas de controle da Eq. (3.30), considerando o ponto inicial igual a  $[x \ y]^T = [5 \ 5]^T$ , resultando nas seguintes matrizes:

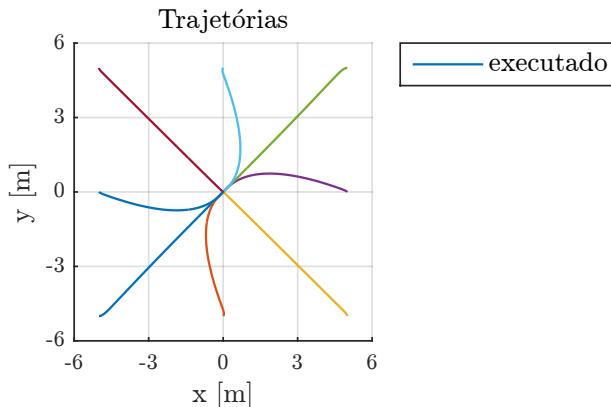
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} -0,0494 & -0,0494 \\ 0,7305 & -0,7305 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -0,0455 & 0,0455 \\ -0,3316 & -0,3316 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_3 &= \begin{bmatrix} 0,0455 & -0,0455 \\ 0,3316 & 0,3316 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 0,0494 & 0,0494 \\ -0,7305 & 0,7305 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Os parâmetros de simulação estão descritos na Tab. 13 (ver Apêndice B).

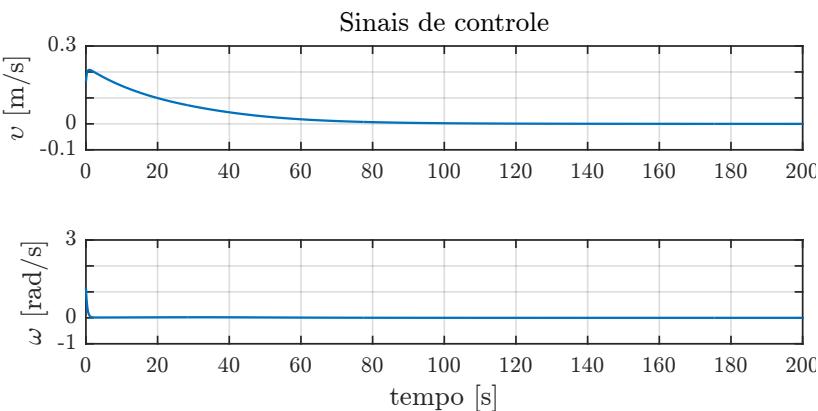
Os resultados do deslocamento do robô para oito diferentes pontos iniciais podem ser vistos na Fig. 32. Nas Fig. 33 e Fig. 34 encontram-se

os os sinais de controle e os erros, respectivamente, apenas para o caso com postura inicial igual a  $\xi = [-5 \ 0 \ \pi/2]^T$ , e nota-se que o controlador consegue estabilizar assintoticamente o RMD no sentido clássico, como esperado, apenas para os estados  $x$  e  $y$ .

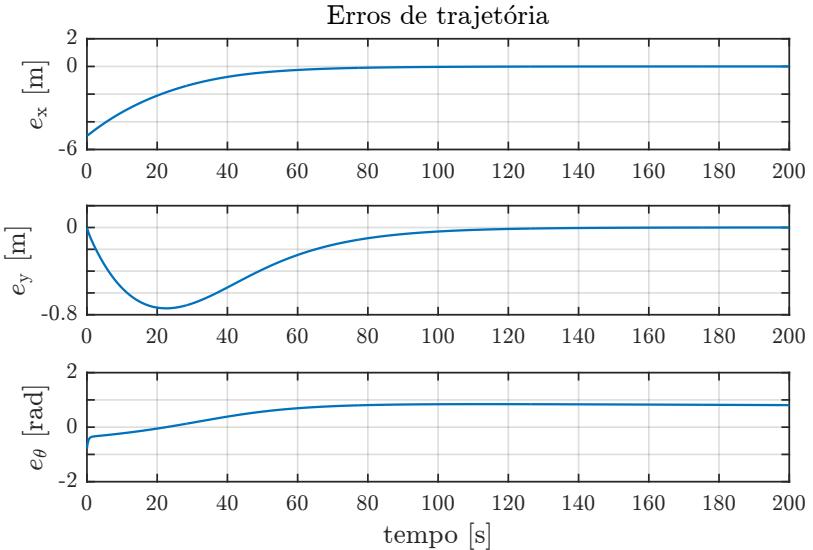
**Figura 32:** Tarefa de estabilização: trajetórias.



**Figura 33:** Tarefa de estabilização: sinais de controle do caso  $\xi(0) = [-5 \ 0 \ \pi/2]^T$ .



**Figura 34:** Tarefa de estabilização: erro do caso  $\xi(0) = [-5 \ 0 \ \pi/2]^T$ .



Estes resultados validam a capacidade de aplicação de um CPD para controlar um sistema que represente um RMD. O próximo passo deste capítulo é descrever a adequação deste controlador para a tarefa de rastreamento de trajetórias.

#### 4.5 RASTREAMENTO: PRÉ-ALIMENTAÇÃO

Nesta seção o problema de rastreamento é solucionado por um controlador com pré-alimentação baseado na técnica utilizada nos resultados preliminares, desenvolvida no trabalho de Guechi et al. (2010), que embora resolva a questão, exibe alguns pontos que a limitam:

- As não-linearidades do modelo são descritas em função do erro do sistema. Esta característica limita a representação TS-Fuzzy, pois é necessário definir uma região de mapeamento do erro, o que em termos práticos é difícil de se garantir, pois o erro pode

sair dessa região facilmente devido, por exemplo, a alguma perturbação externa;

- O modelo de controle possui quatro não-linearidades e uma representação em espaço de estados de terceira ordem, o que gera um modelo *fuzzy* com dezenas de regras. Este arranjo, quando comparado a um modelo de menor ordem e menor número de não-linearidades, exibe: (i) maior tempo de computação da ação de controle; (ii) maior tempo de cálculo dos ganhos; e (iii) maior conservabilidade ao conjunto de soluções factíveis das LMIs do problema de controle.

Para contornar estes problemas, propõem-se uma alteração na técnica utilizando um modelo de controle que não depende da região de mapeamento do erro e também exprime ordem e número de não-linearidades menores. Isto é realizado utilizando o mesmo modelo utilizado para resolver o problema de estabilização.

Portanto, considerando o modelo cinemático do RMD, de referência deslocada, expresso pela Eq. (2.9),

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

onde as entradas de controle são as velocidades linear,  $\nu$ , e angular,  $\omega$ . Define-se o erro de rastreamento,  $e(t) = [e_x \ e_y]^T$ , como a diferença entre a posição real e a desejada do RMD, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Derivando-se a Eq. (4.16) tem-se então o modelo do erro em função das entradas de controle do RMD e as referências de atuação:

$$\dot{e}(t) = B_r(q_r)u_r - B(q)u, \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  e  $\mathbf{B}_r(\mathbf{q}_r)$  são as matrizes do modelo cinemático do RMD a ser controlado e do RMD de referência, respectivamente, e definidas por,

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_r(\mathbf{q}_r) = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -d \sin \theta_r \\ \sin \theta_r & d \cos \theta_r \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Assim como o controlador original, aplica-se uma pré-alimentação ao modelo do erro, Eq. (4.16), para compensar as velocidades de referência:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}_r \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_b, \quad (4.19)$$

resultando no seguinte modelo residual do erro:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_b, \quad (4.20)$$

onde é necessário calcular  $\mathbf{u}_b$  que garanta que o erro  $\mathbf{e}(t)$  convirja para zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

Nota-se que a Eq. (4.20) é igual ao modelo utilizado para resolver o problema de estabilização da seção anterior. Sendo assim é possível utilizar todo o mapeamento TS-Fuzzy desenvolvido, assim como utilizar o mesmo controlador CPD, dado por:

$$\mathbf{u}_b = \sum_{i=1}^{n_r} \mathbf{F}_i \mathbf{e}(t), \quad (4.21)$$

sendo que os estados do sistema são  $[e_x \ e_y]^T$  e não mais  $[x \ y]^T$ .

Para o cálculo dos ganhos do controlador, assim como na seção anterior, foram utilizadas as LMIs da Definição 5 em conjunto com as condições de restrição de entradas de controle da Eq. (3.30). O erro inicial é igual ao utilizado no cálculo dos ganhos do controlador original,  $\mathbf{e}(0) = [-0,05 \ 0,05]^T$ . Os ganhos encontrados obtiveram uma taxa de acomodação de 1,5809, gerando as seguintes matrizes:

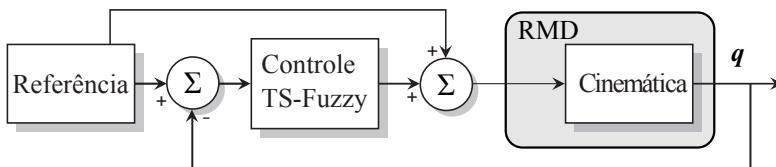
$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \begin{bmatrix} -3,3723 & -3,3723 \\ 46,7456 & -46,7456 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{F}_2 &= \begin{bmatrix} -4,1763 & 4,1763 \\ -31,6227 & -31,6227 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{F}_3 &= \begin{bmatrix} 4,1763 & -4,1763 \\ 31,6227 & 31,6227 \end{bmatrix} \text{ e} \\
 \mathbf{F}_4 &= \begin{bmatrix} 3,3723 & 3,3723 \\ -46,7456 & 46,7456 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

A seguir estão descritos os resultados obtidos de acordo com os cenários especificados no início do capítulo. Em todos os ensaios foi aplicada a mesma trajetória especificada para o controlador original, que pode ser vista na Fig. 22.

### Cenário A: modelo ideal

Neste cenário aplica-se o controlador  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b$  em simulação para o modelo cinemático do RMD, Eq. (2.9), onde  $\mathbf{u}_a$  é uma pré-alimentação definida na Eq. (4.19) e  $\mathbf{u}_b$  é o controlador CPD definido na Eq. (4.21). Uma ilustração da malha de controle pode ser visualizada na Fig. 35. Os parâmetros desta simulação podem ser encontrados na Tab. 14 do Apêndice B.

**Figura 35:** Controlador com pré-alimentação: malha de controle ideal.

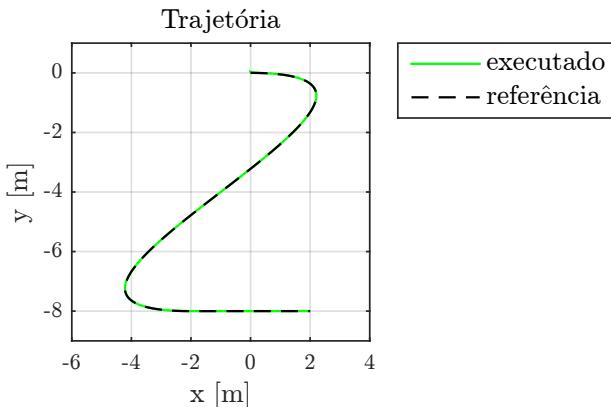


Na Fig. 36 é ilustrada graficamente a trajetória executada pelo robô móvel neste arranjo de simulação. A Fig. 37 contém a evolução dos erros

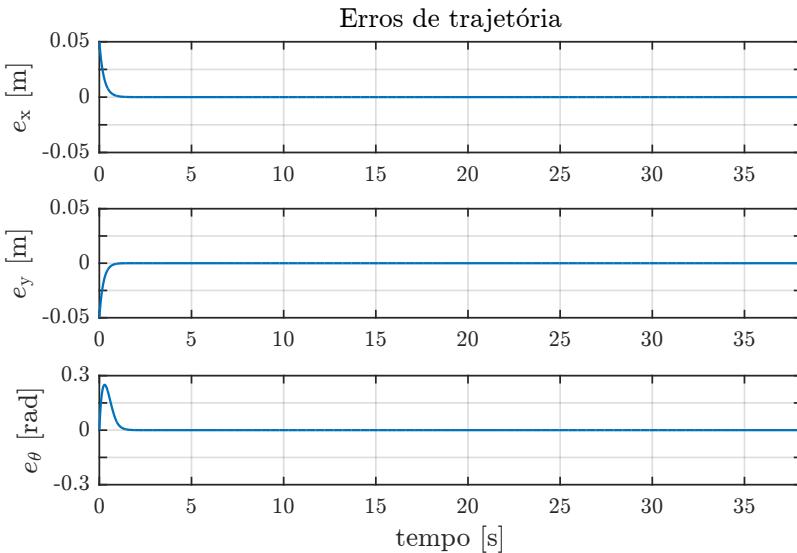
de rastreamento com o intuito de comparação entre técnicas e a Fig. 38 exibe os sinais de controle aplicados.

Neste primeiro resultado, já é possível notar melhora visível no desempenho do controlador em comparação à técnica original. Constatase que os erros de rastreamento nos pontos onde a trajetória apresenta variação nas velocidades angular e linear, próximos aos instantes 5 s e 25 s, não são mais encontrados. Este fato se dá principalmente pela possibilidade de obtenção de ganhos com taxa de acomodação maior do que a encontrada pelo controlador descrito na Eq. (4.7), o que comprova a diminuição da conservabilidade nas LMIs que descrevem o problema de controle.

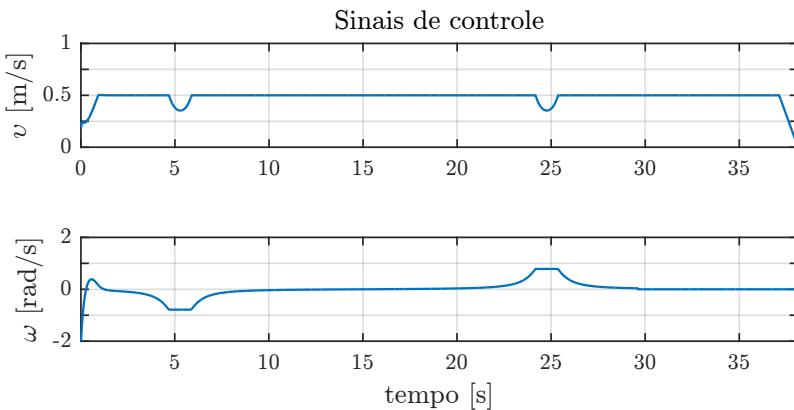
**Figura 36:** Controlador com pré-alimentação - cenário A: trajetória.



**Figura 37:** Controlador com pré-alimentação - cenário A: erro.



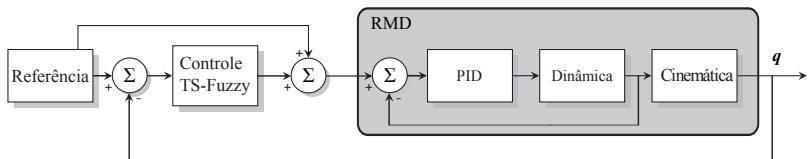
**Figura 38:** Controlador com pré-alimentação - cenário A: sinais de controle.



### Cenário B: modelo realístico

O cenário realístico utiliza do modelo dinâmico com modelo dos atuadores e limites de atuação do RMD, Eq. (2.18) e Eq. (2.22), para obter informações mais precisas de como o controlador com pré-alimentação proposto se comporta com erros de modelagem. A malha de controle possui também um PID em cascata, espelhando o que acontece no robô real, como pode ser visto na Fig. 39.

**Figura 39:** Controlador com pré-alimentação: malha de controle realística.

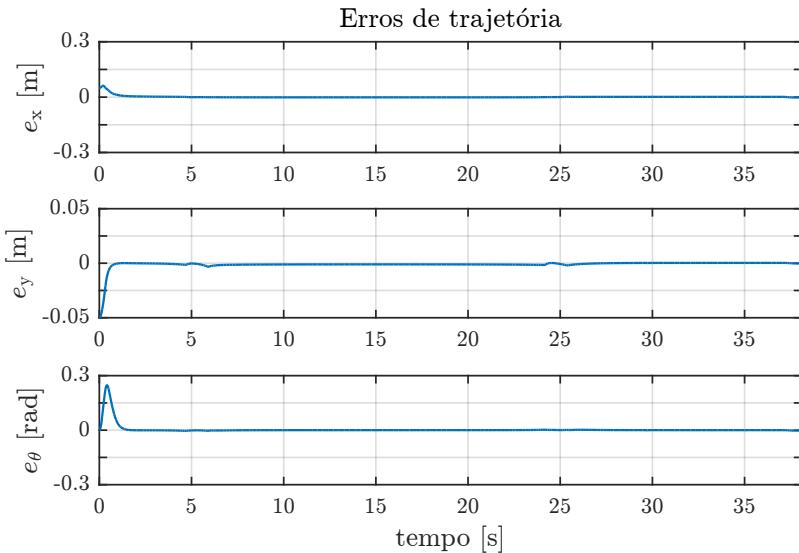


Os ganhos do controlador, Eq. (4.22), e o arranjo de controle são os mesmos aplicados no cenário ideal e os parâmetros desta simulação podem ser encontrados na Tab. 15 do Apêndice B.

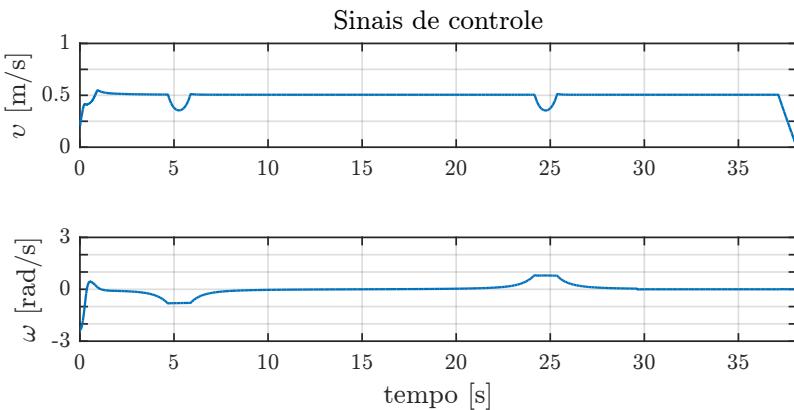
Na Fig. 40 estão os sinais de erro de rastreamento obtidos durante toda a simulação e na Fig. 41 podem ser vistos os sinais de controle calculados.

Como esperado, neste cenário já se nota uma perda de desempenho do controlador devido aos erros de modelagem eminentes da aplicação em uma representação diferente da que foi utilizada em seu cálculo.

**Figura 40:** Controlador com pré-alimentação - cenário B: erro.



**Figura 41:** Controlador com pré-alimentação - cenário B: sinais de controle.

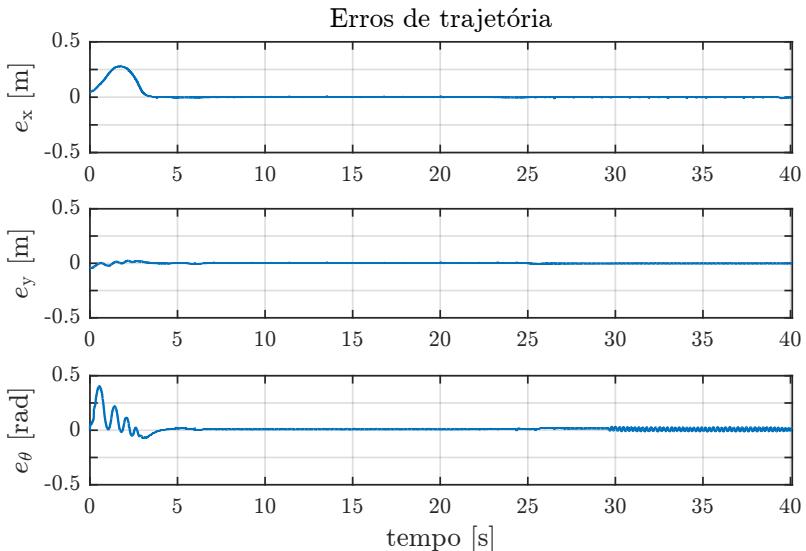


### Cenário C: experimental

Neste cenário o controlador é aplicado diretamente ao robô real. Assim como foi feito nos cenários anteriores, o arranjo de controle e os ganhos, Eq. (4.22), são os mesmos, bem como a posição inicial do robô. Os parâmetros desta simulação podem ser encontrados na Tab. 16 do Apêndice B.

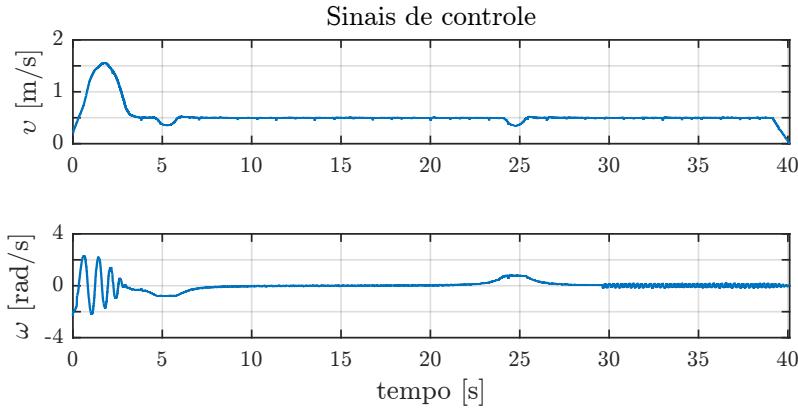
A evolução dos erros de rastreamento pode ser vista na Fig. 42 e na Fig. 43 são apresentados os sinais de controle calculados e aplicados no robô. A intenção desta última figura é de analisar se a atuação requerida apresenta comportamento oscilatório ou abrupto.

**Figura 42:** Controlador com pré-alimentação - cenário C: erro.



Este resultado experimental demonstra uma grande diferença de desempenho quando comparado aos resultados da Fig. 29. A locomoção oscilatória é amortecida principalmente pela taxa de acomodação maior encontrada, fornecendo uma locomoção mais suave para o robô. Em contrapartida, a velocidade angular executada apresentou oscilações

**Figura 43:** Controlador com pré-alimentação - cenário C: sinais de controle.



iniciais e um comportamento ruidoso na parte final da trajetória (reta), o que gerou uma pequena perda de desempenho frente ao controlador original.

### Síntese dos resultados

Resumidamente, os erros em valores RMS de cada cenário estão dispostos na Tab. 3. Dois tipos de erro são considerados: (i) o de posição ( $e_x, e_y$ ); (ii) e o erro de orientação  $e_\theta$ . Estes valores são o principal quantificador para avaliar o desempenho dos controlador proposto.

**Tabela 3:** Controlador com pré-alimentação: erros RMS de cada cenário

Cenário	Variável	Erro	
(A) modelo ideal	$(e_x, e_y)$	$2,25 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$2,75 \times 10^{-2}$	[rad]
(B) modelo realístico	$(e_x, e_y)$	$5,66 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$3,02 \times 10^{-2}$	[rad]
(C) experimental	$(e_x, e_y)$	$12,82 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$4,77 \times 10^{-2}$	[rad]

De um modo geral, o controlador proposto obteve desempenho melhor tanto em simulação quanto no experimento, tal situação pode ser vista pelos valores de erro RMS superiores expressos na Tab. 2, que contém os erros dos ensaios do controlador original.

Porém o foco deste controlador não é a melhora do desempenho de execução, e sim quanto a capacidade de cálculo dos ganhos e desempenho computacional. As contribuições desse arranjo de controle focam nos seguintes pontos:

- A solução de controle apresenta uma ordem menor que a original. O controlador proposto possibilita que a técnica de cálculo dos ganhos forneça resultados com uma taxa de acomodação maior, mantendo os mesmos requisitos de cálculo que os do controlador original. Esta diminuição da ordem possibilitou a obtenção de uma taxa de acomodação de 1,5809, enquanto a do controlador original foi de 0,0580;
- Devido a diminuição da ordem do problema e a redução no número de não-linearidades, tanto o cálculo dos ganhos quanto das ações de controle exibem tempo de computação reduzido. Isso é uma implicação direta do número de regras *fuzzy* do sistema de controle, que passou de 16 regras para 4 regras, sem perda de desempenho do controlador;
- Com a modificação do modelo contorna-se o problema de modelagem do controlador original que considera não-linearidades dependentes do valor de erro. O que pode ocasionar facilmente uma inconsistência de modelagem frente a situações de erro momentâneo maiores do que a região mapeada.

Nota-se nos resultados que embora o erro de orientação,  $e_\theta$ , não componha o cálculo do modelo de controle, ele também obtém estabilidade assintótica em termos clássicos. Isso se deve basicamente ao acoplamento entre as variáveis e a natureza dinâmica do problema de rastreamento, pois a medida que os estados do sistema evoluem os er-

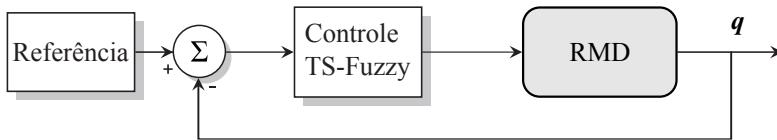
ros de posição só convergirão para zero se o erro de orientação também convergir.

#### 4.6 RASTREAMENTO: SISTEMA AMPLIADO

Embora o problema de rastreamento seja solucionado suficientemente pelos dois controladores descritos até agora, ambos utilizam uma pré-alimentação de controle para solucionar o problema. Isto indica que o modelo de controle baseia-se apenas no erro residual da tarefa, ou seja, os sinais de controle não são capazes de garantir completamente que os limites das entradas de controle não sejam ultrapassados. Além disso, a trajetória de referência precisa fornecer informações de posição e velocidade para que a trajetória seja executada.

Nesta seção, o compensador proposto deve contornar estas propriedades, fornecendo um arranjo de compensação que remove a pré-alimentação da malha de controle, como visto na Fig. 44, e que necessita apenas de referências de posição da trajetória a ser executada.

**Figura 44:** Controlador ampliado: malha de controle.



A solução do problema de rastreamento é desenvolvida com base no controlador proposto por Ohtake, Tanaka e Wang (2009), onde utiliza-se um CPD com modelo ampliado para resolver o problema de regulação.

#### 4.6.1 Sistema ampliado

Os resultados de controle do rastreamento de trajetória de um RMD foram obtidos a partir de uma técnica desenvolvida por Smith e Davison (1972), e utilizada em conjunto com o CPD proposto por Ohtake, Tanaka e Wang (2009) e que é descrita a seguir.

O objetivo da técnica de Smith e Davison (1972) é fazer com que as saídas de um sistema não-linear contínuo converjam para as saídas do sistema de referência:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r(t) &= k_r(\mathbf{x}_r(t)), \\ \mathbf{y}_r(t) &= g_r(\mathbf{x}_r(t)),\end{aligned}\quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{x}_r(t)$  é o vetor de estados do sistema de referência e  $\mathbf{y}_r(t)$  é o vetor de saídas do sistema de referência. Assumindo que  $k_r$  e  $g_r$  sejam conhecidos e diferenciáveis. O vetor de erro  $\mathbf{e}(t)$  é definido como

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_r(t) - \mathbf{y}(t). \quad (4.24)$$

Tendo em vista as equações do sistema a ser controlado, Eq. (3.6), e a dinâmica do erro definida na Eq. (4.24), é possível reescrever o modelo através de um sistema ampliado que representa o objetivo de controle.

A construção deste sistema é feita derivando a Eq. (4.23), a Eq. (4.24), e considerando, por motivos de simplificação, a referência  $\mathbf{y}_r(t)$  constante:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}(t) &= K(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)), \\ \dot{\mathbf{e}}(t) &= -\dot{\mathbf{y}}(t) = G(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Estas equações agrupadas formam o sistema ampliado que representa a dinâmica do erro de um modelo TS-Fuzzy,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ G(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

que reescritas em termos de seus componentes,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t), \quad (4.27)$$

proporciona um modelo que pode ser expresso, aplicando o conceito de não-linearidade de setor para cada termo não-linear, como o seguinte sistema TS-Fuzzy:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_r} h_i \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \right) \quad (4.28)$$

O modelo apresentado na Eq. (4.28), pode ser controlado utilizando a Eq. (3.22), expressa da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = - \sum_{i=1}^{n_r} h_i \mathbf{F}_i \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{F}_i$  são os ganhos do controlador, que são obtidos através da Definição 5 utilizando as matrizes do sistema em malha fechada e a partir da Eq. (4.28) e Eq. (4.29):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} h_i h_j (\bar{\mathbf{A}}_i - \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{F}_j) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Em síntese, a utilização deste controlador faz com que o erro  $\mathbf{e}(t)$  convirja para zero. Isto significa que a saída  $\mathbf{y}(t)$  do sistema não-linear converge para a referência  $\mathbf{y}_r(t)$ . Para isso é necessário que todos os pares  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  sejam controláveis e o posto de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

seja completo, permitindo que se encontre uma solução factível para as LMIs da Eq. (3.29) (OHTAKE; TANAKA; WANG, 2009).

#### 4.6.2 Controlador ampliado

Para calcular o controlador de rastreamento utilizando a técnica descrita acima, considera-se inicialmente a referência  $\mathbf{y}_r(t)$  constante, assim a derivada temporal do erro, expresso pela Eq. (4.24), torna-se:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = -\dot{\mathbf{y}}(t), \quad (4.31)$$

o que resulta no modelo ampliado da Eq. (4.27).

Assim, para representar o problema de controle de acordo com a Eq. (4.27) utiliza-se do mesmo modelo utilizado no controlador com pré-alimentação proposto na seção anterior, ou seja, o modelo cinemático do RMD, Eq. (2.9). O qual, expresso em sua segunda derivada pode ser descrito de acordo com o seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Permitindo assim descrever o problema de controle na forma do seguinte sistema ampliado:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ e_x \\ e_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t). \quad (4.33)$$

O objetivo é encontrar uma lei de controle,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ , que estabilize este sistema ampliado. Para isso propõe-se o seguinte CPD:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = - \sum_{j=1}^{n_r} h_j \mathbf{F}_j \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ e_x \\ e_y \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

onde  $\mathbf{F}_j$  são os ganhos de realimentação que, assim como feito com os controladores de pré-alimentação, são determinados através da resolu-

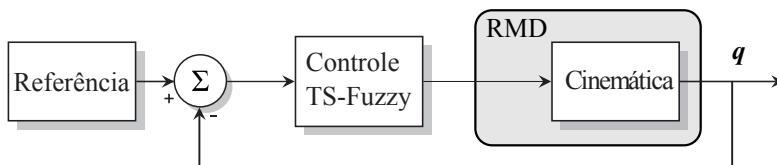
ção do problema descrito pelas LMIs da Definição 5, em conjunto com as condições de limite de entrada de controle definidas na Eq. (3.30). A computação dos ganhos, contidos na Tab. 17 do Apêndice B, foi executada considerando a mesma posição inicial utilizada para os outros controladores, Eq. (4.1), e limites de entrada de controle  $\mu = 10$ , o que proporcionou uma taxa de acomodação igual a 5,6670.

Utiliza-se para obter os resultados os mesmos cenários já apresentados e a mesma trajetória de referência apresentada na Fig. 22. Porém, no cenário ideal, (A), é utilizada também uma trajetória circular, que exibe velocidades angular e linear constantes durante toda sua extensão. A utilização desta nova trajetória tem o intuito de avaliar o desempenho do controlador frente a problemas de complexidade menor que o problema exibido pela trajetória de Bézier, a qual apresenta velocidades angular e linear variáveis em toda sua extensão.

### Cenário A: modelo ideal

O cenário ideal demonstra como o controlador se comporta quando o sistema controlado é exatamente o que foi utilizado para seu cálculo, ou seja, que não apresenta erros de modelagem, como ilustrado na Fig. 45.

**Figura 45:** Controlador ampliado: malha de controle ideal.

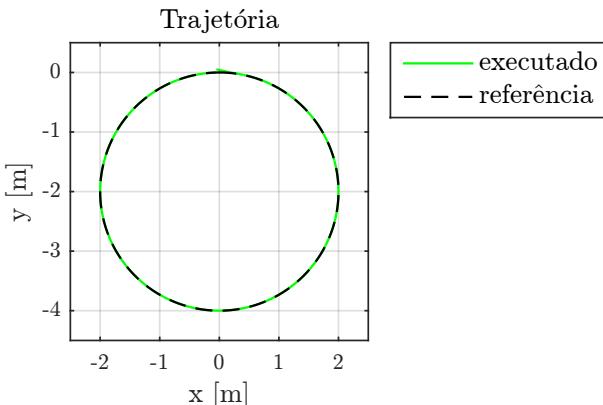


**Círculo** Esta trajetória é aplicada apenas ao cenário ideal com intuito de verificar o desempenho do controlador considerando referências de velocidade constantes. No caso a trajetória tem início e fim em  $\xi_r =$

$[0\ 0\ 0]^T$  e desempenha velocidades linear,  $v$ , e angular,  $\omega$ , iguais a 0,5 m/s e  $-0,25$  rad/s, respectivamente. Os parâmetros da simulação estão na Tab. 18 (ver Apêndice B).

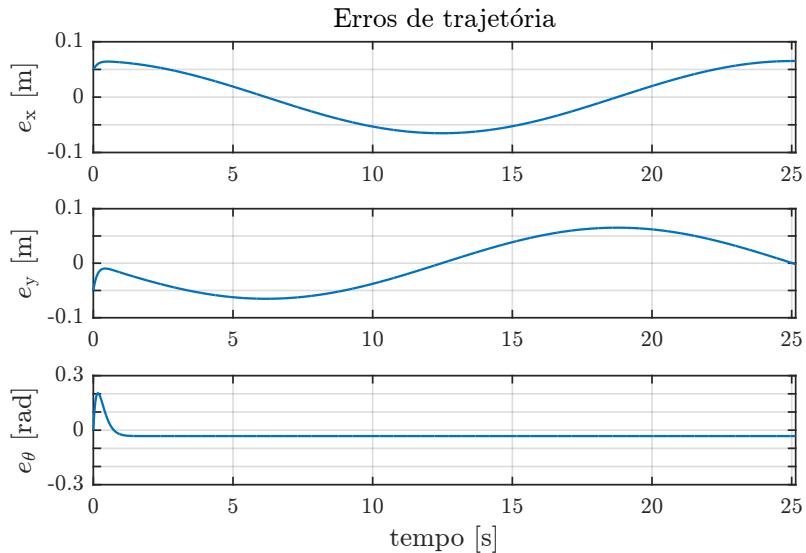
Na Figura 46 apresenta-se a referência da trajetória e a respectiva locomoção executada pelo robô. Na Fig. 47 são apresentados os erros entre referência e execução para toda a extensão da trajetória e na Fig. 48 são vistos os sinais de controle aplicados para execução da trajetória.

**Figura 46:** Controlador ampliado - cenário A (círculo): trajetória.

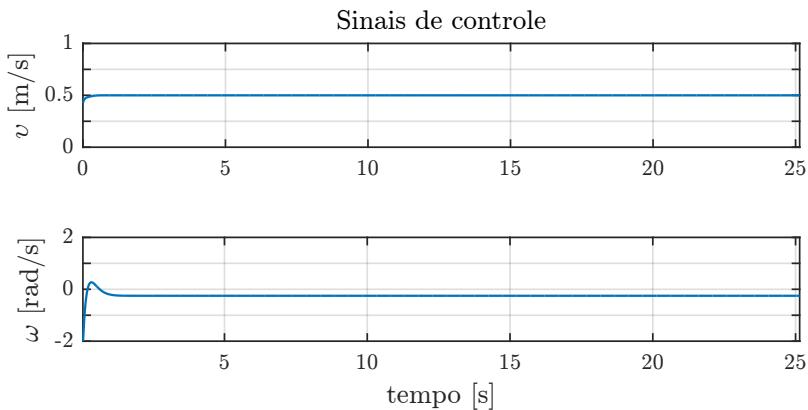


Nota-se nesse resultado, como esperado, que o controlador não apresenta estabilidade assintótica no sentido clássico, mostrando erros em regime para todos os estados do sistema. Este é um ponto fraco desta técnica, e torna-se um ponto a ser aprimorado em trabalhos futuros.

**Figura 47:** Controlador ampliado - cenário A (círculo): erros.



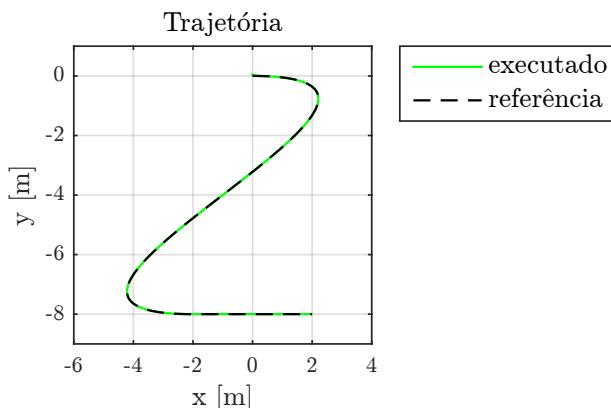
**Figura 48:** Controlador ampliado - cenário A (círculo): sinais de controle.



**Bézier** Esta trajetória submete o controlador a uma situação mais próxima de tarefas reais, onde o planejamento de locomoção fornece uma trajetória factível às suas limitações de movimento e atuação, e desempenha um deslocamento entre dois pontos no ambiente em que está imerso. Assim, espera-se que a trajetória apresente velocidades variáveis ao longo de sua parametrização e o resultado de sua execução forneça a principal fonte de informações para análise do controlador proposto.

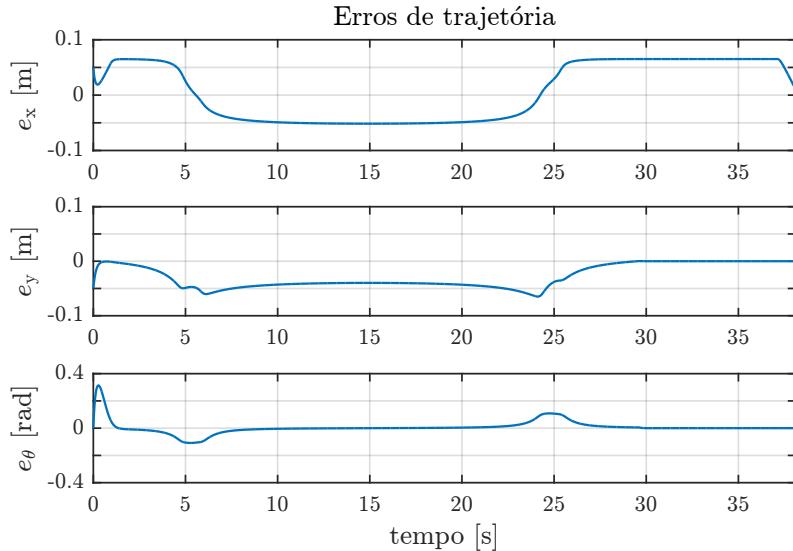
Da execução desta simulação obteve-se o desempenho de locomoção do controlador, ilustrado na Fig. 49, os erros de rastreamento apresentados na Fig. 50 e os sinais de controle vistos na Fig. 51. Os parâmetros da simulação estão na Tab. 19.

**Figura 49:** Controlador ampliado - cenário A (Bézier): trajetória.

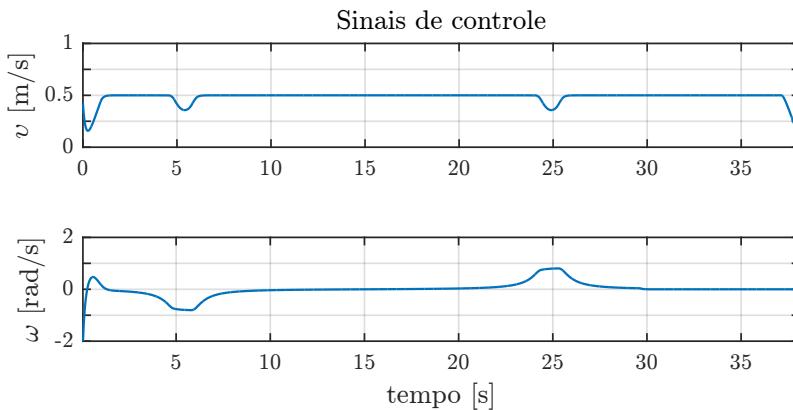


Nota-se neste ensaio os mesmos erros em regime encontrados na aplicação da trajetória circular, mas o principal ponto a se considerar aqui é que não se nota degradação na qualidade de execução da trajetória, como é apurado em conjunto com os valores de erro RMS, na Tab. 4 junto a síntese dos resultados desta seção.

**Figura 50:** Controlador ampliado - cenário A (Bézier): erros.



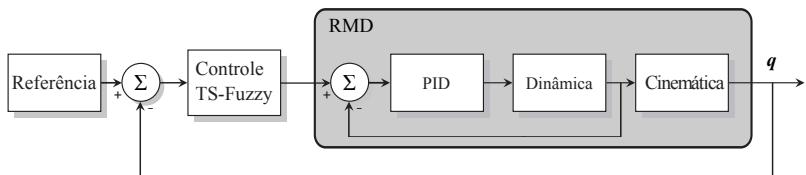
**Figura 51:** Controlador ampliado - cenário A (Bézier): sinais de controle.



### Cenário B: modelo realístico

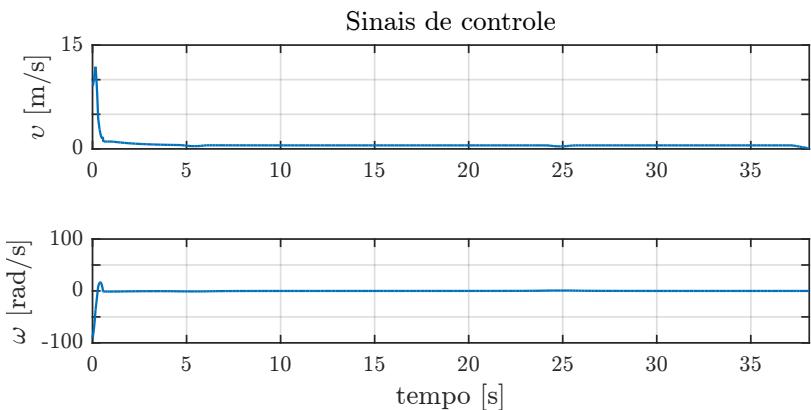
O cenário realístico demonstra como o controlador se comporta frente a erros de modelagem e limites de atuação, ou seja, utiliza-se o modelo dinâmico do RMD acrescido dos modelos dos atuadores e limitado de acordo com as capacidades de atuação do robô real. Uma ilustração da malha de controle simulada neste cenário pode ser vista na Fig. 52. Os parâmetros da simulação estão na Tab. 20 do Apêndice B.

**Figura 52:** Controlador ampliado: malha de controle realística.

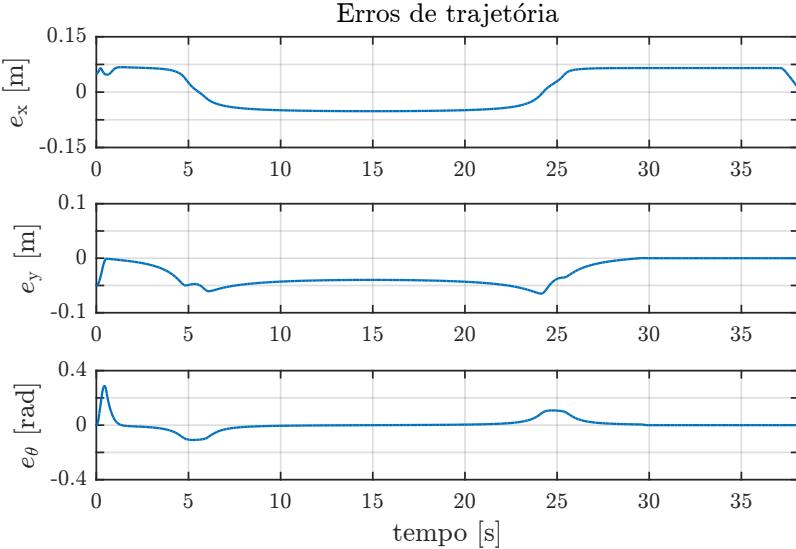


Neste ensaio apenas a trajetória da Fig. 22 é utilizada. Assim, na Fig. 54 os respectivos erros de execução estão ilustrados e na Fig. 53 visualiza-se os sinais de controle.

**Figura 53:** Controlador ampliado - cenário B: sinais de controle.



**Figura 54:** Controlador ampliado - cenário B: erros.



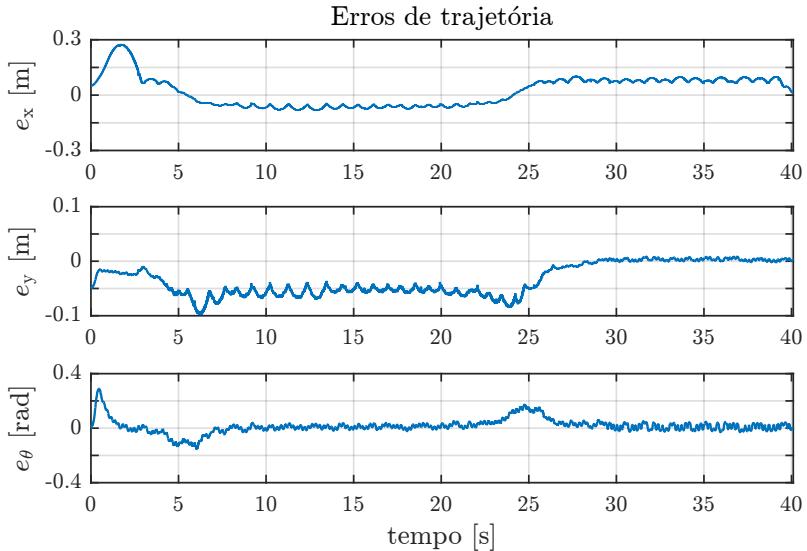
Constata-se nestes dados que frente a erros de modelagem e limitações de atuação, a execução da tarefa permanece com desempenho muito próximo ao ideal. Análise que é reforçada através dos dados de erro na Tab. 4, na síntese dos resultados desta seção.

### Cenário C: experimental

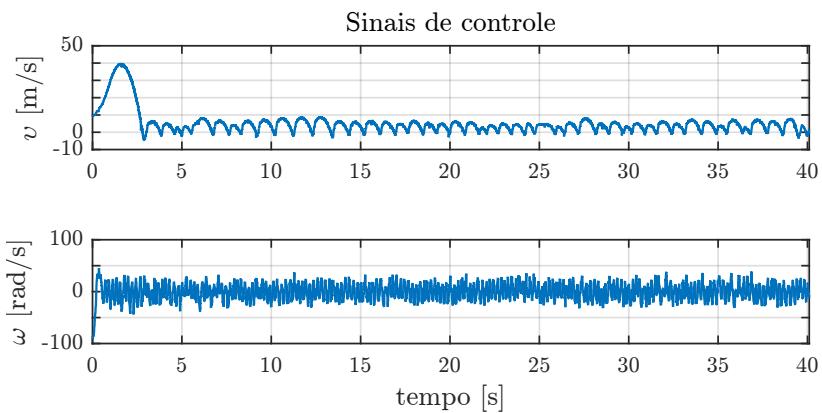
Assim como feito para os controladores com pré-alimentação, para comprovar a capacidade de aplicação real deste controlador, neste cenário obtém-se informações acerca da aplicação prática no RMD *Power-bot*. Os parâmetros de execução deste ensaio estão na Tab. 21 (ver Apêndice B).

Na Fig. 42 e Fig. 43 estão ilustrados a evolução dos erros de rastreamento e os sinais de controle aplicados ao robô, respectivamente.

**Figura 55:** Controlador ampliado - cenário C: erros.



**Figura 56:** Controlador ampliado - cenário C: sinais de controle.



## Síntese dos resultados

Como resultados, na Tab. 4 estão dispostos, em valores RMS, os erros de posição ( $e_x, e_y$ ) e de orientação  $e_\theta$ , relativos a cada cenário, os quais quantificam o desempenho do controlador proposto.

**Tabela 4:** Controlador ampliado - erros RMS de cada cenário.

Cenário	Variável	Erro	
<b>Círculo</b>			
(A) modelo ideal	$(e_x, e_y)$	$25,53 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$3,84 \times 10^{-2}$	[rad]
<b>Bézier</b>			
(A) modelo ideal	$(e_x, e_y)$	$25,10 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$4,85 \times 10^{-2}$	[rad]
(B) modelo realístico	$(e_x, e_y)$	$25,17 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$4,65 \times 10^{-2}$	[rad]
(C) experimental	$(e_x, e_y)$	$29,71 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$5,49 \times 10^{-2}$	[rad]

Embora o controlador proposto não exiba desempenho melhor que os controladores com pré-alimentação, como constatado pela comparação das Tabs. 2 e 4, os resultados obtidos apresentam a viabilidade de uma nova abordagem para análise do problema de rastreamento de trajetória, através de um arranjo CPD aplicado à um RMD.

O que se obtém com esta técnica de controle, em termos de contribuições, são os seguintes pontos:

- Por não utilizar uma pré-alimentação, a trajetória de referência não necessita fornecer um perfil de velocidade para que seja executado o controle, basta o fornecimento dos pontos em sua respectiva parametrização de tempo. Isto facilita na aplicação de técnicas de planejamento on-line, onde a trajetória é desenvolvida à medida que o robô se desloca;
- Como o controlador é o único responsável pela geração das entradas de controle, é possível garantir limites de atuação durante o cálculo dos ganhos. Esta característica não se aplica aos con-

troladores com pré-alimentação pois o controlador trabalha no residual do erro, ou seja, os limites do controlador variam com a trajetória;

Apesar deste controlador não exibir estabilidade assintótica para o objetivo de controle, o seu desempenho é suficiente para que seja considerado como uma opção de solução prática. Exibindo características de controle que outros controladores não possuem, como os listados acima. As próximas seções exibem algumas modificações para melhora do desempenho deste controlador.

#### 4.6.3 Controlador ampliado dinâmico

Com base na solução de controle descrita na seção anterior, propõe-se agora uma alteração no modelo de controle onde se considera a referência  $\dot{\mathbf{y}}_r(t)$  variável e as velocidades  $\ddot{\mathbf{y}}_r(t)$  constantes, assim a derivada no tempo do erro descrito na Eq. (4.24) torna-se:

$$\dot{e}(t) = \dot{\mathbf{y}}_r(t) - \dot{\mathbf{y}}(t), \quad (4.35)$$

e sua segunda derivada:

$$\ddot{e}(t) = -\ddot{\mathbf{y}}(t). \quad (4.36)$$

Destas constatações, propõem-se a seguinte alteração no modelo ampliado da Eq. (4.27):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -C(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{u}(t). \quad (4.37)$$

Para construir o modelo de controle para o problema de rastreamento de acordo com a Eq. (4.37) utiliza-se, assim como no compensador da seção anterior, o modelo cinemático do RMD, Eq. (2.9). O qual expresso em sua terceira derivada pode ser descrito de acordo com o

seguinte modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{\theta} \\ 2\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 & \dot{\theta} \\ -\ddot{\theta} & \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\nu} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Para que possa ser aplicada a técnica de modelagem TS-Fuzzy, considera-se apenas uma aproximação deste sistema, supondo que as variações de orientação,  $\theta$ , sejam próximas a zero, resultando na seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\nu} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

de onde monta-se o problema de controle, a partir da Eq. (4.37):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \ddot{u}(t). \quad (4.40)$$

A lei de controle estabilizante para este sistema ampliado pode ser calculada pela seguinte proposta de CPD:

$$\ddot{u}(t) = - \sum_{j=1}^{n_r} h_j \mathbf{F}_j \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

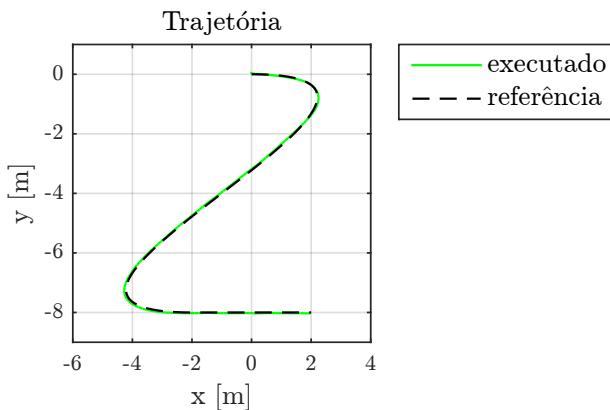
onde  $\mathbf{F}_j$  são os ganhos de realimentação que, assim como feito com os

controladores de pré-alimentação, são determinado através da resolução do problema descrito pelas LMIs da Definição 5, em conjunto com as condições de limite de entrada de controle definidas na Eq. (3.30). A computação dos ganhos, contidos na Tab. 22 do Apêndice B, foi executada considerando a posição inicial da Eq. (4.1) e limites de entrada de controle  $\mu = 10$ , gerando uma taxa de acomodação máxima igual a 2,7760.

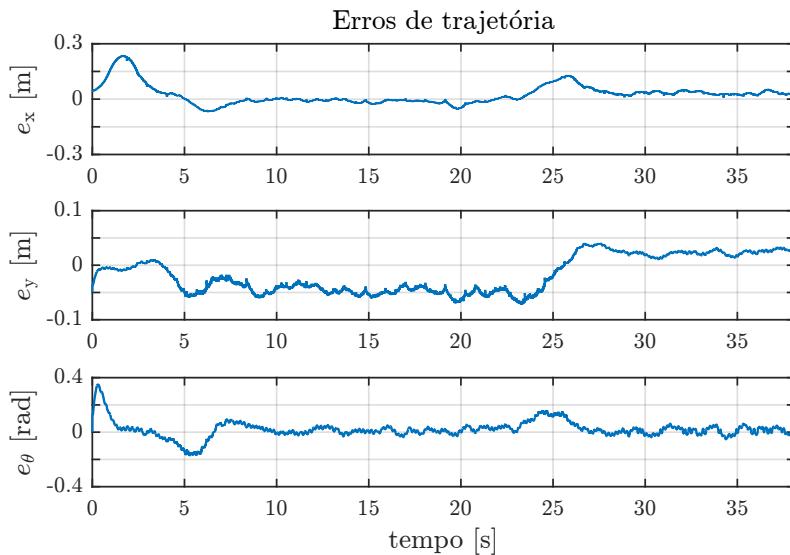
Para avaliar este esquema de controle, apenas o cenário experimental será utilizado, visto que a aplicabilidade já foi verificada na seção anterior. Utiliza-se da mesma trajetória de referência aplicada nos controladores até agora apresentados, vista na Fig. 22.

A seguir estão descritos os resultados da estrutura de controle descrita, cujos parâmetros de execução estão na Tab. 23 (ver Apêndice B). A Fig. 57 exibe a trajetória executada pelo robô e o caminho de referência. Ja na Fig. 58 podem ser vistos os erros de rastreamento e para ajudar na análise do controlador na Fig. 59 apresentam-se os sinais de controle aplicados no robô ao desempenhar a trajetória.

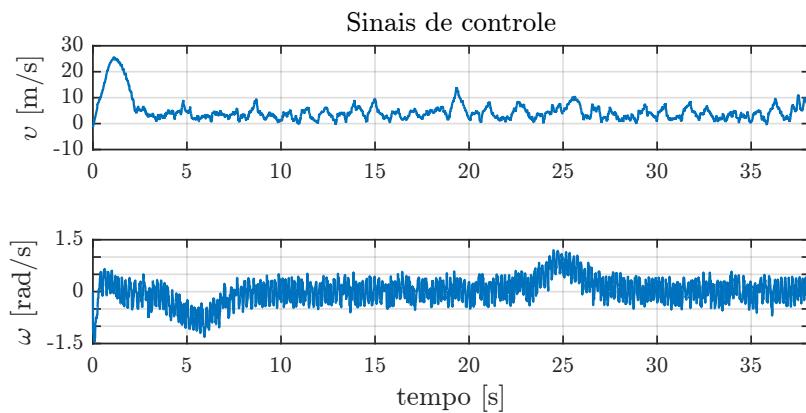
**Figura 57:** Controlador ampliado dinâmico: trajetória.



**Figura 58:** Controlador ampliado dinâmico: erros.



**Figura 59:** Controlador ampliado dinâmico: sinais de controle.



## Síntese do resultado

Na Tabela 5 encontra-se os valores de erro RMS obtidos por este ensaio experimental.

**Tabela 5:** Controlador ampliado dinâmico: erros RMS.

Cenário	Variável	Erro
experimental	$(e_x, e_y)$	$24,44 \times 10^{-2}$ [m]
	$e_\theta$	$6,56 \times 10^{-2}$ [rad]

Nota-se, ainda que pequena, uma redução nos valores de erro de posição da trajetória em detrimento dos erros de orientação. Isso deve-se muito à taxa de acomodação menor obtida no cálculo dos ganhos do controlador.

Ainda assim, constata-se visualmente uma melhora no desempenho de rastreamento do estado  $x$ , sem alterar o desempenho de  $y$ . Isto pode ser uma característica importante quando a trajetória apresenta variações constantes e severas.

Mesmo que o desempenho não tenha sido significativamente melhor, a apresentação desta técnica é válida por abrir novas possibilidades de alteração do controlador e incorporação de novas variáveis a serem controladas.

### 4.6.4 Controlador ampliado integral

Como última proposta de alteração do esquema de controle ampliado considera-se o controlador proposto na seção anterior, Eq. (4.37), e insere-se ao modelo de controle uma ação integradora no sentido clássico, resultando na seguinte alteração no modelo ampliado proposto:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{e}(t) \\ \dot{\boldsymbol{e}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \int \boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{e}(t) \\ \dot{\boldsymbol{e}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}(t). \quad (4.42)$$

Esse modelo é utilizado para reescrever o problema de controle de rastreamento, utilizando como base o modelo do compensador ampliado dinâmico, exposto na seção anterior na Eq. (4.40):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \\ \ddot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \int e(t) \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \ddot{u}(t). \quad (4.43)$$

A lei de controle para este modelo ampliado com uma parcela integral, é baseada no CPD da seção anterior, Eq. 4.41, ampliado também da parcela integral, para entrar em consonância com a realimentação de estados proposta por este controlador.

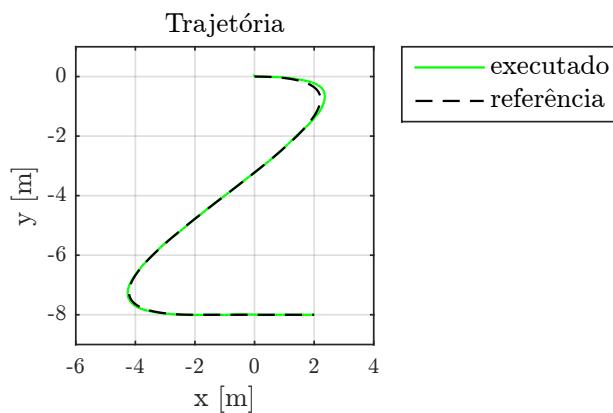
Os ganhos  $\mathbf{F}_j$ , também são determinado através da resolução do problema descrito pelas LMIs da Definição 5, em conjunto com as condições de limite de entrada de controle definidas na Eq. (3.30). A computação dos ganhos, contidos na Tab. 24 do Apêndice B, foi executada considerando, assim como para os outros controladores, o robô na posição inicial da Eq. 4.1 e limites de entrada de controle  $\mu = 10$ , gerando uma taxa de acomodação máxima igual a 1,2702.

Neste esquema de controle também é avaliado apenas através do cenário experimental em conjunto com a trajetória de referência calculada a partir de curvas de Bézier, Fig. 22. Os parâmetros de execução deste ensaio estão na Tab. 25 (ver Apêndice B).

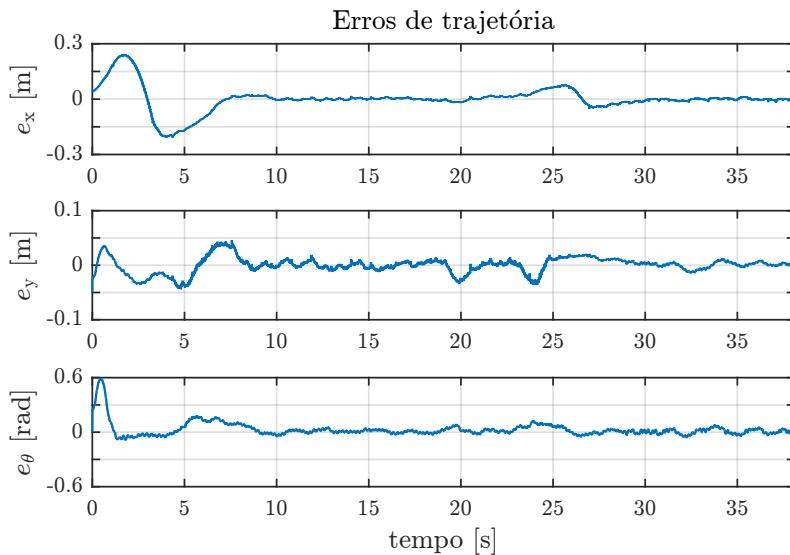
Foi gerada na Fig. 60 a representação da trajetória desempenhada pelo robô em comparação ao caminho de referência. Como ferramentas de análise do desempenho na Fig. 61 e Fig. 62, foram geradas as

representações gráficas do erro e dos sinais de controle obtidas durante a execução do ensaio, respectivamente.

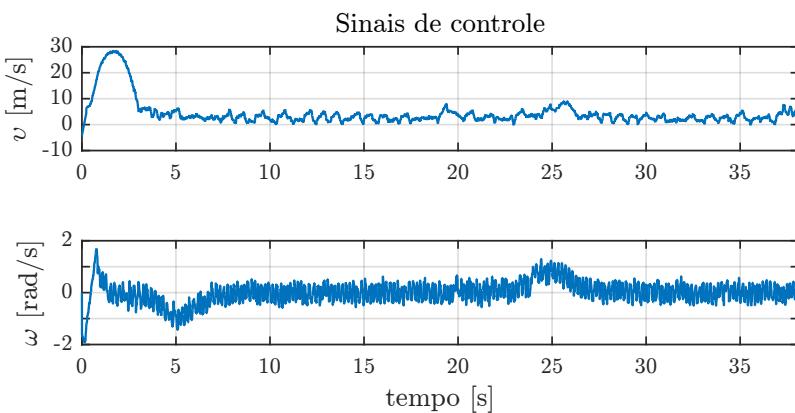
**Figura 60:** Controlador ampliado integral: trajetória.



**Figura 61:** Controlador ampliado integral: erros.



**Figura 62:** Controlador ampliado integral: sinais de controle.



## Síntese do resultado

Na Tabela 6, encontra-se os erros RMS de posição e orientação calculados a partir dos dados desse ensaio.

**Tabela 6:** Controlador ampliado integral: erros RMS.

Cenário	Variável	Erro	
experimental	$(e_x, e_y)$	$19,99 \times 10^{-2}$	[m]
	$e_\theta$	$8,46 \times 10^{-2}$	[rad]

Nota-se principalmente que os erros de posição reduziram significativamente em relação aos erros do controlador ampliado original, na ordem de 0,1 m, enquanto houve uma deterioração no desempenho de controle da orientação, levando a um sinal mais oscilatório e consequentemente a um esforço que pode reduzir a vida útil dos atuadores. Isso confirma a validade da técnica como opção para um controlador com melhor desempenho.

## 4.7 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou resultados de simulação e experimentais para duas propostas de controladores:

- Primeiramente considerando uma técnica de controle da literatura, composta por uma parcela de pré-alimentação e outra parcela contendo um controlador CPD, a qual foi adaptada para utilizar um modelo de controle que não depende da região de mapeamento do erro e também exprime ordem e número de não-linearidades menores à original;
- Na sequência foi proposta uma nova arquitetura de controle que elimina a necessidade da pré-alimentação, fornecendo um meio de analisar e garantir o desempenho do sistema de controle através da sintonia do controlador.

No primeiro caso, foi analisado o desempenho do controlador com relação ao da literatura, e foi constatada sua capacidade de resolver

o problema de rastreamento com um desempenho melhor ou igual ao original. Verificou-se que controlador apresenta região de modelagem mais ampla que o modelo utilizado no controlador original, além de exibir melhor desempenho computacional, devido a ordem do problema de controle e o número de regras *fuzzy* serem menores.

No segundo caso, o arranjo de controle proposto mostrou-se viável e apresenta-se como uma nova opção de solução para o problema de rastreamento, embora não apresente o desempenho obtido com os controladores com pré-alimentação. Porém este tipo de controlador apresenta vantagens como: a utilização de um modelo válido globalmente para o problema; a capacidade de garantir limites nas entradas de controle; e é conveniente na definição da trajetória de referência, para planejamento em tempo de execução, pois é possível verificar factibilidade da trajetória em relação ao estado atual do robô.

## **5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS**

Este trabalho tratou o problema de controle do rastreamento de trajetórias para Robôs Móveis Diferenciais (RMDs). O tipo de robô estudado se enquadra na classe de sistemas subatuados, cuja característica é possuir grau de atuação menor que o grau de liberdade.

Característica de subatuação implica em menor número de atuadores, complexidade construtiva reduzida e menor peso quando comparado com sistemas similares e totalmente atuados. Esse fato oferece vantagem em realizar tarefas com melhor eficiência energética porém, insere dificuldades para controlá-lo.

Além disso, em virtude das suas propriedades construtivas, a categoria do robô sofre também a influência de restrições não-holonômicas, as quais tornam ainda mais complexos o planejamento de locomoção e o projeto de controladores.

A construção de modelos matemáticos para estes sistemas é, geralmente, mais complexa e resulta em modelos em espaço de estado compostos. O sistema considerado neste trabalho, o RMD, tem restrições não-holonômicas, subatuação, com características de acoplamento que agregam complexidade à síntese de controle e geração de trajetórias factíveis.

Assumindo-se que existe um sistema de navegação para o RMD e que trajetórias factíveis são conhecidas, optou-se por solucionar o problema de rastreamento de trajetórias para esse robô por meio do desenvolvimento de duas estratégias de controle utilizando uma técnica *fuzzy* baseada em modelo, o Compensador Paralelo Distribuído (CPD).

A primeira estratégia de controle proposta, baseada e comparada com a desenvolvida por Guechi et al. (2009) por meio de simulações e experimentos, apresenta as seguintes contribuições:

- Melhoria no desempenho de controle de rastreamento de trajetórias para RMDs;
- Aumento da região de validade do modelo de controle;

- Exibe uma estrutura de controle que obtém melhor desempenho computacional, para o problema tratado.

A segunda estratégia de controle proposta baseia-se na eliminação da pré-alimentação da malha de compensação, incumbindo um único controlador de todo o esforço de atuação necessário para resolver o problema de rastreamento. Embora o desempenho desta técnica não seja melhor do que o dos controladores que possuem pré-alimentação, esta proposta mostrou-se válida pelas seguintes contribuições:

- Uma nova abordagem para aplicação da técnica de controle proposta por Ohtake, Tanaka e Wang (2009);
- Resolução do problema de rastreamento para um RMD utilizando um CPD que atua diretamente no erro de rastreamento e não no modelo do erro residual;
- Capacidade de análise das entradas e saídas do sistema de acordo com as limitações do sistema real, utilizando requisitos de desempenho especificados nas *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) do problema de controle.

Além disso, os desenvolvimentos desta tese contribuíram com resultados paralelos que não constam neste documento, como:

- Implementação da técnica de planejamento de trajetória que considera os limites do RMD na obtenção de trajetórias factíveis;
- Construção de um ambiente experimental, com características de tempo-real, para teste de soluções de controle para ao robô *Powerbot*, utilizando a ferramenta Matlab.

Este trabalho gerou publicações, em periódicos, diretamente relacionados à tese e também alguns desenvolvidos em paralelo:

- BERTOL, D.W.; BARASUOL, V.; MARTINS, N.A.; DE PIERI, E.R. Stiffness control of robot manipulators in the operational space using fuzzy mapping of dynamic functions. *Control and Cybernetics*. v. 42, n. 3, p. 639-661, 2013.

- MARTINS, N.A.; ELYOUSSEF, E.S.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; MORENO, U.F.; CASTELAN, E.B. Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with kinematic disturbances: a variable structure control design. *Revista IEEE América Latina*, v. 9, p. 276-283, 2011.
- MARTINS, N.A.; ELYOUSSEF, E.S.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; MORENO, U.F.; CASTELAN, E.B. Nonholonomic mobile robot with kinematic disturbances in the trajectory tracking: a variable structure controller. *Learning and Nonlinear Models*, v. 8, p. 23-40, 2010.
- MARTINS, N.A.; BERTOL, D.W.; LOMBARDI, W.C.; DE PIERI, E.R.; CASTELAN, E.B. Neural dynamic controllers for the trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot including the actuators dynamics. *International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, v. 1, p. 39-44, 2009;

Além de algumas publicações em anais de congressos:

- SOUZA, C.; RAFFO, G.V.; BERTOL, D.W.; CASTELAN, E.B. Identification and control of a commercial quadrotor helicopter. *Robocontrol'2012 - 5th Workshop in Applied Robotics and Automation*, 2012.
- MARTINS, N.A.; ALENCAR, M.; LOMBARDI, W.C.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; FERASOLI, H. A proposed neural control for the trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with disturbances. *Lecture Notes in Computer Science*. v. 7552, p. 330-338, 2012.
- BERTOL, D.W.; BARASUOL, V.; MARTINS, N.A.; DE PIERI, E.R. Fuzzy mapping of dynamic functions to control robot manipulators in the operational space. *21st International Congress of Mechanical Engineering*, 2011.

- ELYOSSEF, E.S.; MARTINS, N.A.; DE PIERI, E.R.; BERTOL, D.W.; JUNGERS, M. On a wheeled mobile robot trajectory tracking control: 1st and 2nd order sliding modes applied to a compensated inverse dynamics. *Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM*, 2010.
- BARASUOL, V.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R. Mapeamento fuzzy de funções dinâmicas para controle de manipuladores no espaço operacional. *Congresso Brasileira de Sistemas Fuzzy*, 2010.
- MARTINS, N.A.; ELYOUSSEF, E.S.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; MORENO, U.F.; CASTELAN, E.B. Seguimento de trajetória de um robô móvel não-holonômico com perturbações cinemáticas: um projeto de controle a estrutura variável. *VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, 2010.
- ELYOUSSEF, E.S.; MARTINS, N.A.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; JUNGERS, M. On a wheeled mobile robot tracking control: sliding mode control design. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, 2010.
- MARTINS, N.A.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R. Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot considering the actuator dynamics: design of a neural dynamic controller based on sliding mode theory. *19th International Conference on Artificial Neural Networks*, 2009.
- MARTINS, N.A.; BERTOL, D.W.; DE PIERI, E.R.; CASTELAN, E.B. Control of mobile robot considering actuator dynamics with uncertainties in the kinematic and dynamic models. *International Work-Conference on Artificial Neural Networks*, 2009.

## 5.1 TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento das pesquisas, abriu perspectivas para alguns trabalhos futuros, listados a seguir:

- Desenvolvimento de uma interface sem o cascataemento de controladores, pois atualmente o *Powerbot* não possibilita o controle aplicado diretamente aos atuadores;
- Extensão da estrutura do controle ampliado, para que incorpore as propriedades inerciais do robô e considerações acerca da classe de trajetórias com variações de aceleração;
- Ampliação do método de planejamento de trajetórias, incorporando limites globais de aceleração e limitações na capacidade de bateria do robô;
- Estudo da geração de trajetórias factíveis em um nível acima de abstração, considerando obstáculos e um objetivo de navegação.



## REFERÊNCIAS

- BERTOL, D. *Contribuições ao Desenvolvimento e Construção de um Robô Móvel com Rodas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Automação e Sistemas) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.
- BLAZIC, S. Takagi-Sugeno vs. Lyapunov-based tracking control for a wheeled mobile robot. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, v. 5, n. 8, p. 667–676, 2010.
- BLOCH, A. *Nonholonomic mechanics and control*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 2003. v. 24. ISBN 9780387955353.
- BROCKETT, R. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory*, v. 27, p. 181–191, 1983.
- BUBECK, A.; WEISSHARDT, F.; VERL, A. Bride - a toolchain for framework-independent development of industrial service robot applications. In: *ISR/Robotik 2014; 41st International Symposium on Robotics; Proceedings of*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1–6.
- CAMPION, G.; BASTIN, G.; D'ANDREA-NOVEL, B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 12, n. 1, p. 47–62, 1996. ISSN 1042296X.
- CAMPION, G.; D'ANDREA-NOVEL, B.; BASTIN, G. Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.]: IEEE, 1991. p. 1184–1189. ISBN 0-7803-0450-0.
- CHOI, J.-w.; CURRY, R.; ELKAIM, G. Path planning based on bézier curve for autonomous ground vehicles. In: *Advances in Electrical and Electronics Engineering - IAENG Special Edition of the World Congress on Engineering and Computer Science 2008*. [S.l.]: IEEE, 2008. p. 158–166. ISBN 978-0-7695-3555-5.
- CHOSET, H.; LYNCH, K. M.; HUTCHINSON, S.; KANTOR, G.; BURGARD, W.; KAVRAKI, L. E.; THRUN, S. *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms and Implementations*. [S.l.]: A Bradford Book, 2005. v. 22. 632 p. ISSN 0269-8889. ISBN 978-0262033275.

- DING, B.; LUO, X.; WEI, S. A survey on stability research of discrete-time takagi-sugeno fuzzy control systems. In: *Control and Automation (ICCA), 2010 8th IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 411–416. ISSN 1948-3449.
- DUMITRASCU, B.; FILIPESCU, A.; MINZU, V.; FILIPESCU, A. Backstepping control of wheeled mobile robots. In: *System Theory, Control, and Computing (ICSTCC), 2011 15th International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1–6.
- FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 14, n. 5, p. 676–697, out. 2006. ISSN 1063-6706.
- FENG, G. *Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach*. 1st. ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 2010. ISBN 1420092642, 9781420092646.
- FILIPESCU, A.; MINZU, V.; DUMITRASCU, B.; FILIPESCU, A.; MINCA, E. Trajectory-tracking and discrete-time sliding-mode control of wheeled mobile robots. In: *Information and Automation (ICIA), 2011 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 27–32.
- GONZALEZ, F.; GUARNIZO, J.; BENAVIDES, G. Emulation system for a distribution center using mobile robot, controlled by artificial vision and fuzzy logic. *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, v. 12, n. 4, p. 557–563, June 2014.
- GUECHI, E.; LAUBER, J.; DAMBRINE, M.; BLAZIC, S.; KLANCAR, G. Tracking-error model-based PDC control for mobile robots with acceleration limits. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Ieee, p. 197–202, ago. 2009.
- GUECHI, E.; LAUBER, J.; DAMBRINE, M.; KLANCAR, G.; BLAZIC, S. PDC control design for non-holonomic wheeled mobile robots with delayed outputs. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, v. 60, n. 3-4, p. 395–414, abr. 2010. ISSN 0921-0296.
- HANSFORD, D. Chapter 4 - b?zier techniques. In: KIM, G. F. H.-S. K. H.-S. (Ed.). *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: North-Holland, 2002. p. 75 – 109. ISBN 978-0-444-51104-1.
- HO, Y.-J.; LIU, J.-S. Collision-free curvature-bounded smooth path planning using composite Bezier curve based on Voronoi diagram. In:

*2009 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation - (CIRA)*. [S.l.]: IEEE, 2009. p. 463–468. ISBN 978-1-4244-4808-1.

IEEE-STD-1278.1. *IEEE standard for distributed interactive simulation - application protocols*. [S.l.: s.n.], 1995. ISBN 1-55937-572-8.

JOLLY, K.; KUMAR, R.; VIJAYAKUMAR, R. A Bezier curve based path planning in a multi-agent robot soccer system without violating the acceleration limits. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 57, n. 1, p. 23–33, jan. 2009. ISSN 09218890.

KANAYAMA, Y.; KIMURA, Y.; MIYAZAKI, F.; NOGUCHI, T. A stable tracking control method for a non-holonomic mobile robot. In: *IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems IROS '91*. [S.l.]: IEEE, 1991. p. 1236–1241. ISBN 0-7803-0067-X.

KAYACAN, E.; KAYACAN, E.; RAMON, H.; KAYNAK, O.; SAEYS, W. Towards agrobots: trajectory control of an autonomous tractor using type-2 fuzzy logic controllers. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, v. 20, n. 1, p. 287–298, Feb 2015.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. 750 p. ISBN 0-13-067389-7.

KIM, C.; CHWA, D. Obstacle avoidance method for wheeled mobile robots using interval type-2 fuzzy neural network. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, PP, n. 99, p. 1–1, 2014.

KLANCAR, G.; SKRJANC, I. Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 55, n. 6, p. 460–469, 2007.

LAUMOND, J.-P.; SEKHAVAT, S.; LAMIRAUD, F. Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots. In: LAUMOND, J.-P. (Ed.). *Lecture Notes in Control and Information Sciences: Robot Motion Planning and Control*. London: Springer-Verlag, 1998. cap. 1, p. 1–53. ISBN 3-540-76219-1.

LEPETIC, M.; KLANCAR, G.; SKRJANC, I.; MATKO, D.; POTOČNIK, B. Time optimal path planning considering acceleration limits. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 45, n. 3-4, p. 199–210, dez. 2003. ISSN 09218890.

LIN, P.; ABNEY, K.; BEKEY, G. *Robot Ethics: The Ethical and Social Implications of Robotics*. [S.l.]: MIT Press, 2011. ISBN 9780262297752.

LIZARRAGA, D. A. Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, v. 16, n. 4, p. 255–277, mar. 2004. ISSN 0932-4194.

LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.]: IEEE, 2004. p. 284–289. ISBN 0-7803-8636-1.

MAMDANI, E. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 121, n. 12, p. 1585, 1974. ISSN 00203270.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. In: *Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*. [S.l.]: IEEE, 2001. p. 127–132. ISBN 0-7803-7078-3.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. Fuzzy model-based servo and model following control for nonlinear systems. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, v. 39, n. 6, p. 1634–1639, Dec 2009.

OLFATI-SABER, R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Tese (Thesis) — Massachusetts Institute of Technology, 2001.

ORIOLO, G.; DE LUCA, A.; VENDITTELLI, M. WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 10, n. 6, p. 835–852, nov. 2002. ISSN 1063-6536.

REHMAN, F.; AHMED, M. Steering control algorithm for a class of wheeled mobile robots. *Control Theory Applications, IET*, v. 1, n. 4, p. 915–924, July 2007. ISSN 1751-8644.

ROSS, T. *Fuzzy logic with engineering applications*. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470743768.

SHOJAEI, K.; SHAHRI, A. M.; TARAKAMEH, A. Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in

presence of parametric and nonparametric uncertainties. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, v. 27, n. 1, p. 194–204, fev. 2011. ISSN 07365845.

SICILIANO, B.; KHATIB, O. *Springer Handbook of Robotics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-23957-4.

SKRJANC, I.; KLANCAR, G. Cooperative Collision Avoidance between Multiple Robots Based on Bézier Curves. In: *2007 29th International Conference on Information Technology Interfaces*. [S.l.]: IEEE, 2007. p. 451–456. ISBN 953-7138-09-7. ISSN 1330-1012.

SMITH, H.; DAVISON, E. Design of industrial regulators: integral feedback and feedforward control. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, v. 119, n. 8, p. 1210–1216, August 1972.

SPONG, M. Underactuated mechanical systems. *Control Problems in Robotics and Automation*, Springer, v. 230, p. 135–150, 1998.

SUGENO, M. On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 7, n. 2, p. 201–224, abr. 1999. ISSN 10636706.

SUGENO, M.; KANG, G. Fuzzy modelling and control of multilayer incinerator. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 18, n. 3, p. 329–345, abr. 1986. ISSN 01650114.

SUGENO, M.; KANG, G. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, n. 1, p. 15–33, out. 1988. ISSN 01650114.

SUN, C.; WANG, Y.; CHANG, C. Design of T-S fuzzy controller for two-wheeled mobile robot. In: *Proceedings of 2011 International Conference on System Science and Engineering*. [S.l.]: IEEE, 2011. p. 223–228. ISBN 978-1-61284-351-3.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. Switching control of an r/c hovercraft: stabilization and smooth switching. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, v. 31, n. 6, p. 853–863, Dec 2001.

TANAKA, K.; WANG, H. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach.* [S.l.]: Wiley-Interscience, 2001. ISBN 0471323241.

TOH, K. C.; TODD, M.; TUTUNCU, R. H. Sdpt3 – a matlab software package for semidefinite programming. *OPTIMIZATION METHODS AND SOFTWARE*, v. 11, p. 545–581, 1999.

TORABI, L.; GUPTA, K. An autonomous 9-dof mobile-manipulator system for in situ 3d object modeling. In: *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on.* [S.l.: s.n.], 2012. p. 4540–4541. ISSN 2153-0858.

TZAFESTAS, S. G. 5 - mobile robot control i: The lyapunov-based method. In: TZAFESTAS, S. G. (Ed.). *Introduction to Mobile Robot Control.* Oxford: Elsevier, 2014. p. 137 – 183. ISBN 978-0-12-417049-0.

TZAFESTAS, S. G. 7 - mobile robot control iii: Adaptive and robust methods. In: TZAFESTAS, S. G. (Ed.). *Introduction to Mobile Robot Control.* Oxford: Elsevier, 2014. p. 237 – 268. ISBN 978-0-12-417049-0.

TZAFESTAS, S. G. 8 - mobile robot control iv: Fuzzy and neural methods. In: TZAFESTAS, S. G. (Ed.). *Introduction to Mobile Robot Control.* Oxford: Elsevier, 2014. p. 269 – 317. ISBN 978-0-12-417049-0.

VERMEIREN, L.; DEQUIDT, A.; GUERRA, T.; RAGO-TIRMANT, H.; PARENT, M. Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination: An urban transportation system. *Control Engineering Practice*, v. 19, n. 7, p. 744–756, jul. 2011. ISSN 09670661.

WANG, H.; LI, J.; NIEMANN, D.; TANAKA, K. T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller: a universal framework for nonlinear control systems. *The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 2, p. 549–554, 2000.

WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Proceedings of 1995 International Conference on Fuzzy Systems*, Ieee, v. 2, p. 531–538, 1995.

WIT, C. Canudas de. Trends in mobile robot and vehicle control. In: SICILIANO, B.; VALAVANIS, K. (Ed.). *Control Problems in Robotics and Automation.* [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998, (Lecture

Notes in Control and Information Sciences, v. 230). p. 151–175. ISBN 978-3-540-76220-1.

YASUNO, T.; TANAKA, D.; KUWAHARA, A. Autonomous navigation system based on collision danger-degree for unmanned ground vehicle. In: *Power Electronics Conference (IPEC-Hiroshima 2014 - ECCE-ASIA), 2014 International*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 3179–3184.

YING, H. General takagi-sugeno fuzzy systems are universal approximators. In: *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, p. 819–823 vol.1. ISSN 1098-7584.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

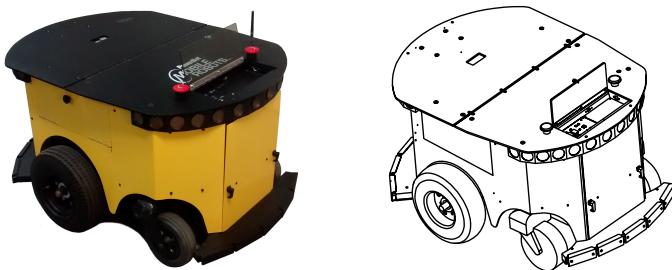


## APÊNDICE A - ROBÔ POWERBOT

Este apêndice contém informações sobre as características do robô móvel utilizado para verificar o controladores descritos no trabalho.

O Robô Móvel Diferencial (RMD) *Powerbot*, ver Fig. 63, fabricado pela empresa *MobileRobots* é composto por duas rodas convencionais que possuem atuação independentemente e duas rodas *caster* passivas utilizadas como apoio para balanceamento da plataforma. Em sua composição encontram-se: sonares frontais e traseiros; acelerômetro; giroscópio; bússola; odometria; câmera com controle de posição; para-choques frontal e traseiro com sensores de toque; um computador interno com placa de captura de vídeo; e comunicação sem fio (802.11b/g), ver Fig. 64.

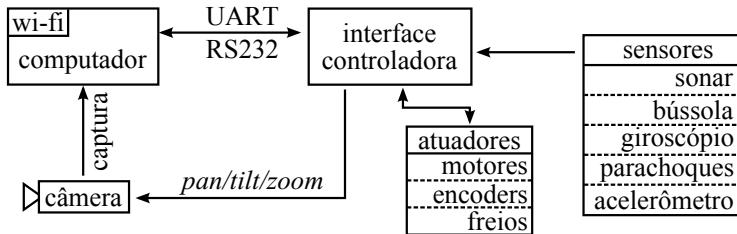
**Figura 63:** Robô *Powerbot*.



A localização do robô no ambiente é fornecida pelo *firmware* do robô que utiliza a técnica de *dead reckoning* (IEEE-STD-1278.1, 1995), com correção de erro através da fusão dos dados do acelerômetro, giroscópio e bússola.

A seguir é descrito como foi implementada a malha de controle no robô, assim como é apresentado dados para verificação desta solução.

**Figura 64:** Arquitetura de *hardware* do *Powerbot*.



## A.1 ARQUITETURA DE SOFTWARE/HARDWARE

Na Figura 64 encontra-se a ilustração em blocos da arquitetura de *hardware* do *Powerbot*. Nota-se que os atuadores e parte do sensoriamento só são acessíveis através da *controladora principal* do robô.

Todos os dados obtidos dos sensores, são preprocessados e encapsulados em um pacote de informações que é enviado, através de comunicação serial RS-232, à uma frequência selecionável entre 1 Hz e 1 kHz.

As entradas de controle são em termos de suas velocidades (do corpo ou das rodas), que são tratadas como referências da malha de controle interna, composta por PIDs à uma frequência de 200 Hz, com ganhos configuráveis em *firmware*. O acesso direto ao acionamento dos motores não é possível, o que impede a aplicação de referências de torque.

O fabricante fornece a biblioteca *Advanced Robot Interface for Applications* (ARIA), que contém métodos para conexão com o robô, tratamento do pacote de dados e gerenciamento das tarefas de controle do robô.

A solução de laço de controle da biblioteca utiliza a frequência de envio dos pacotes de dados pelo robô para iniciar cada ciclo de execução do código do controlador. Embora herde a frequência de chegada dos pacotes de dados, a solução original do *Powerbot* não fornece garantias temporais de execução, ou seja, embora o robô estivesse mandando pacotes a uma frequência garantida, o software de controle poderia não

estar apto a recebê-los, perdendo passos de controle.

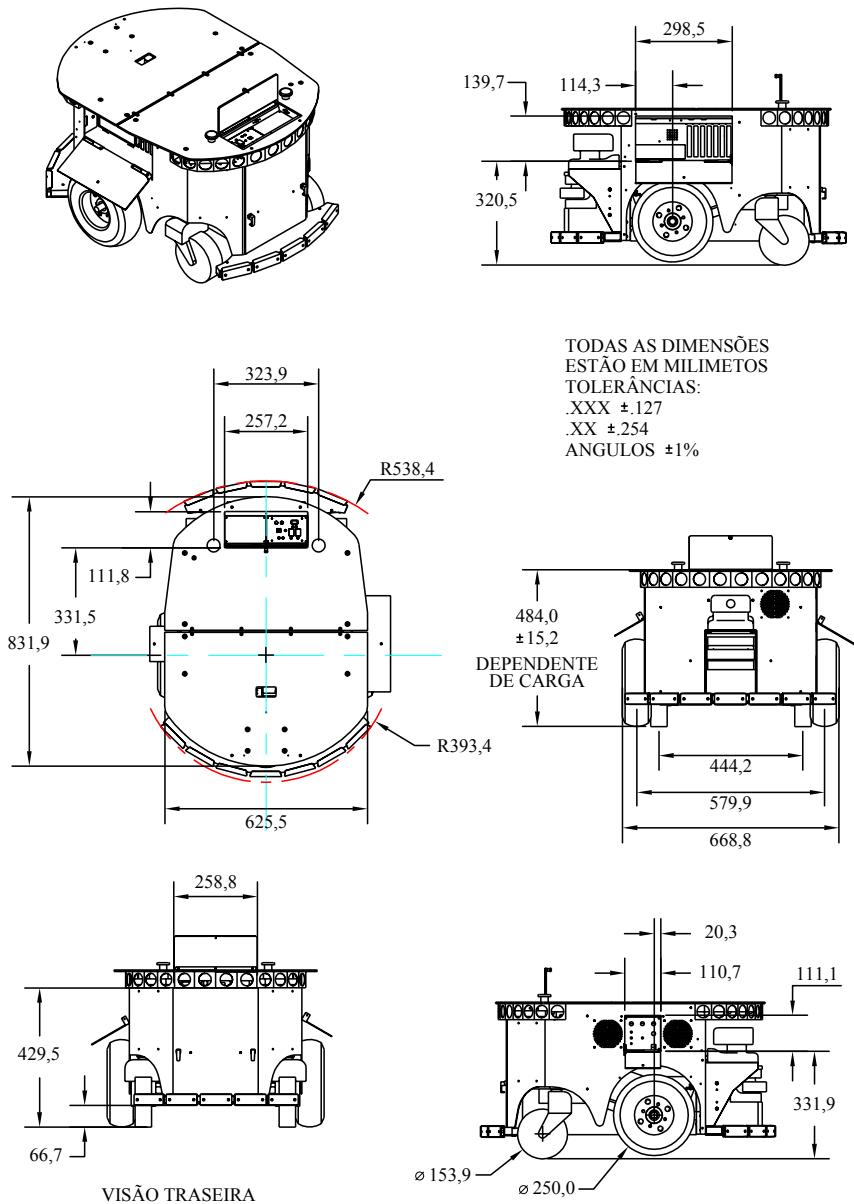
Desta forma para que houvesse maior previsibilidade sobre a periodicidade da tarefa de controle, foi implementada uma malha de controle utilizando como base o *toolbox* de tempo-real do *software Matlab/Simulink*, da empresa *MathWorks* em conjunto com os métodos de conexão e comunicação da biblioteca ARIA. Assim foi possível implementar um sistema de controle com frequência de 200 Hz e com capacidade de análise de perdas de *deadlines*.

Completando as informações, na Tab. 7 e na Fig. 65 encontram-se os parâmetros e o esquemático detalhado das dimensões do robô, respectivamente.

**Tabela 7:** Parâmetros do *Powerbot*.

Parâmetro	Magnitude	Descrição
Parâmetros de disposição física		
r	0,135 [m]	Raio da roda
a	0,66 [m]	Distância das rodas ao eixo de simetria do robô
b	0 [m]	Distância do eixo das rodas ao ponto de referência R
Parâmetros inerciais		
$m_c$	110 [kg]	Massa do corpo do robô
$m_r$	5 [kg]	Massa de cada roda do robô
$I_c$	11,4180 [kg.m <sup>2</sup> ]	Inércia do corpo do robô
$I_w$	0,0456 [kg.m <sup>2</sup> ]	Inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao plano da roda
$I_r$	0,7293 [kg.m <sup>2</sup> ]	Inércia do conjunto roda e rotor, em relação ao eixo da roda
Parâmetros do atuador		
n	22,3	Fator de redução da engrenagem de ligação motor/roda
$K_b$	0,02 [rad/s/V]	Constante da velocidade do motor
$K_t$	0,2247 [Nm/A]	Constante de torque do motor
$L_a$	0,01 [H]	Indutância do motor
$R_a$	6 [Ohm]	Resistência de armadura
Parâmetros do PID interno do robô		
$k_p$	40	Ganho proporcional
$k_i$	0	Ganho integral
$k_d$	20	Ganho diferencial

**Figura 65:** Especificações do Powerbot.





## APÊNDICE B - PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO

**Tabela 8:** Ganhos calculados para o controlador de Guechi et al. (2010) - parte 1/2.

$F_1 = \begin{bmatrix} -23,2608 & -2,0081 \\ 7,4078 & -40,8053 \\ 1,3474 & -12,1908 \end{bmatrix}^T$	$F_2 = \begin{bmatrix} -23,3112 & -2,4261 \\ 8,0804 & -43,2958 \\ 1,4895 & -12,3672 \end{bmatrix}^T$
$F_3 = \begin{bmatrix} -23,2564 & -2,2739 \\ 7,4697 & -40,7932 \\ 1,4945 & -12,1752 \end{bmatrix}^T$	$F_4 = \begin{bmatrix} -23,0306 & -5,4390 \\ 14,8563 & -42,3896 \\ 3,1664 & -12,1383 \end{bmatrix}^T$
$F_5 = \begin{bmatrix} -22,2995 & -0,1289 \\ 16,5660 & -1,2140 \\ 3,5798 & -0,3332 \end{bmatrix}^T$	$F_6 = \begin{bmatrix} -22,4967 & -1,2275 \\ 16,7636 & -1,9657 \\ 3,5371 & -0,5760 \end{bmatrix}^T$
$F_7 = \begin{bmatrix} -22,2186 & -0,1107 \\ 17,0879 & -1,2120 \\ 3,7130 & -0,3327 \end{bmatrix}^T$	$F_8 = \begin{bmatrix} -22,1442 & 1,9660 \\ 18,5701 & -1,9660 \\ 4,1143 & -0,5761 \end{bmatrix}^T$
$F_9 = \begin{bmatrix} -23,2565 & 2,2734 \\ -7,4649 & -40,7954 \\ -1,4933 & -12,1755 \end{bmatrix}^T$	$F_{10} = \begin{bmatrix} -23,0297 & 5,4421 \\ -14,8624 & -42,3879 \\ -3,1673 & -12,1383 \end{bmatrix}^T$

**Tabela 9:** Ganhos calculados para o controlador de Guechi et al. (2010) - parte 2/2.

$F_{11} = \begin{bmatrix} -23,2609 & 2,0075 \\ -7,4029 & -40,8075 \\ -1,3462 & -12,1910 \end{bmatrix}^T$	$F_{12} = \begin{bmatrix} -23,3112 & 2,4266 \\ -8,0787 & -43,2977 \\ -1,4889 & -12,3674 \end{bmatrix}^T$
$F_{13} = \begin{bmatrix} -22,2185 & -0,1093 \\ -17,0854 & -1,2065 \\ -3,7123 & -0,3312 \end{bmatrix}^T$	$F_{14} = \begin{bmatrix} -22,1478 & -1,2161 \\ -18,5606 & -1,9340 \\ -4,1129 & -0,5675 \end{bmatrix}^T$
$F_{15} = \begin{bmatrix} -22,2991 & 0,1299 \\ -16,5652 & -1,2085 \\ -3,5796 & -0,3317 \end{bmatrix}^T$	$F_{16} = \begin{bmatrix} -22,4976 & 1,2248 \\ -16,7731 & -1,9338 \\ -3,5393 & -0,5675 \end{bmatrix}^T$

**Tabela 10:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário A: parâmetros da simulação.

Controlador	(GUECHI et al., 2010)
Modelo de simulação	Ideal, Eqs. (2.9)
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0,05 \ 0,05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 11:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário B: parâmetros da simulação.

Controlador	(GUECHI et al., 2010)
Modelo de simulação	Realístico, Eq. (2.18) e Eq. (2.22)
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Saturações	
Velocidade linear	$v_{\max} <  2,1  \text{ m/s}$
Velocidade angular	$\omega_{\max} <  5,236  \text{ m/s}$
ddp dos motores	$u_{a,\max} <  24  \text{ V}$
corrente de armadura dos motores	$i_{a,\max} <  4.08  \text{ A}$
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 12:** Controlador de Guechi et al. (2010) - cenário C: parâmetros do experimento.

Controlador	(GUECHI et al., 2010)
Modelo de simulação	Robô real
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	discreta (sem estados contínuos)
Tempo de amostragem	0.005 s
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 13:** Tarefa de estabilização: parâmetros da simulação.

Controlador	CPD
Modelo de simulação	Ideal, Eqs. (2.9)
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	Automático
Tolerância relativa	$1e^{-5}$

**Tabela 14:** Controlador com pré-alimentação - cenário A: parâmetros da simulação.

Controlador	Controlador com pré-alimentação, Eq. 4.19
Modelo de simulação	Ideal, Eqs. (2.9)
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 15:** Controlador com pré-alimentação - cenário B: parâmetros da simulação.

Controlador	Controlador com pré-alimentação, Eq. 4.19
Modelo de simulação	Realístico, Eq. (2.18) e Eq. (2.22)
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Saturações	
Velocidade linear	$v_{\max} <  2,1  \text{ m/s}$
Velocidade angular	$\omega_{\max} <  5,236  \text{ m/s}$
ddp dos motores	$u_{a,\max} <  24  \text{ V}$
corrente de armadura dos motores	$i_{a,\max} <  4.08  \text{ A}$
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 16:** Controlador com pré-alimentação - cenário C: parâmetros do experimento.

Controlador	Controlador com pré-alimentação, Eq. 4.19
Modelo de simulação	Robô real
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	discreta (sem estados contínuos)
Tempo de amostragem	0.005 s
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 17:** Ganhos calculados para o controlador ampliado

$F_1 = \begin{bmatrix} -25, 8338 & 196, 9474 \\ -19, 7104 & -258, 2285 \\ 232, 5222 & -1322, 4894 \\ 132, 3764 & 2324, 3890 \end{bmatrix}^T$	$F_2 = \begin{bmatrix} -19, 7104 & -258, 2285 \\ 25, 8338 & -196, 9474 \\ 132, 3764 & 2324, 3890 \\ -232, 5222 & 1322, 4894 \end{bmatrix}^T$
$F_3 = \begin{bmatrix} 19, 7104 & 258, 2285 \\ -25, 8338 & 196, 9474 \\ -132, 3764 & -2324, 3890 \\ 232, 5222 & -1322, 4894 \end{bmatrix}^T$	$F_4 = \begin{bmatrix} 25, 8338 & -196, 9474 \\ 19, 7104 & 258, 2285 \\ -232, 5222 & 1322, 4894 \\ -132, 3764 & -2324, 3890 \end{bmatrix}^T$
$F_5 = \begin{bmatrix} -19, 7104 & 258, 2285 \\ -25, 8338 & -196, 9474 \\ 132, 3764 & -2324, 3890 \\ 232, 5222 & 1322, 4894 \end{bmatrix}^T$	$F_6 = \begin{bmatrix} -25, 8338 & -196, 9474 \\ 19, 7104 & -258, 2285 \\ 232, 5222 & 1322, 4894 \\ -132, 3764 & 2324, 3890 \end{bmatrix}^T$
$F_7 = \begin{bmatrix} 25, 8338 & 196, 9474 \\ -19, 7104 & 258, 2285 \\ -232, 5222 & -1322, 4894 \\ 132, 3764 & 2324, 3890 \end{bmatrix}^T$	$F_8 = \begin{bmatrix} 19, 7104 & -258, 2285 \\ 25, 8338 & 196, 9474 \\ -132, 3764 & 2324, 3890 \\ -232, 5222 & -1322, 4894 \end{bmatrix}^T$

**Tabela 18:** Controlador ampliado - cenário A (circulo): parâmetros da simulação.

Controlador	Controlador ampliado, Eq. 4.34
Modelo de simulação	Ideal, Eqs. (2.9)
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 19:** Controlador ampliado - cenário A (bézier): parâmetros da simulação.

Controlador	Controlador ampliado, Eq. 4.34
Modelo de simulação	Ideal, Eqs. (2.9)
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 20:** Controlador ampliado - cenário B: parâmetros da simulação.

Controlador	Controlador ampliado, Eq. 4.34
Modelo de simulação	Realístico, Eq. (2.18) e Eq. (2.22)
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Saturações	
Velocidade linear	$v_{\max} <  2,1  \text{ m/s}$
Velocidade angular	$\omega_{\max} <  5,236  \text{ m/s}$
ddp dos motores	$u_{a,\max} <  24  \text{ V}$
corrente de armadura dos motores	$i_{a,\max} <  4.08  \text{ A}$
Parâmetros do simulador	
Função de integração	ode45 (Dormand-Prince)
Passo de integração	Variável
Passo de integração máximo	0.01
Tolerância relativa	$1e^{-3}$
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 21:** Controlador ampliado - cenário C: parâmetros do experimento.

Controlador	Controlador ampliado, Eq. 4.34
Modelo de simulação	Robô real
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	discreta (sem estados contínuos)
Tempo de amostragem	0.005 s
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0, 05 \ 0, 05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 22:** Ganhos calculados para o controlador ampliado dinâmico

$F_1 = \begin{bmatrix} -11,4221 & 114,2196 \\ -11,4221 & -114,2196 \\ 96,8518 & -968,5053 \\ 96,8518 & 968,5053 \\ 59,2493 & -592,4854 \\ 59,2493 & 592,4854 \end{bmatrix}^T$	$F_2 = \begin{bmatrix} -11,4221 & -114,2196 \\ 11,4221 & -114,2196 \\ 96,8518 & 968,5053 \\ -96,8518 & 968,5053 \\ 59,2493 & 592,4854 \\ -59,2493 & 592,4854 \end{bmatrix}^T$
$F_3 = \begin{bmatrix} 11,4221 & 114,2196 \\ -11,4221 & 114,2196 \\ -96,8518 & -968,5053 \\ 96,8518 & -968,5053 \\ -59,2493 & -592,4854 \\ 59,2493 & -592,4854 \end{bmatrix}^T$	$F_4 = \begin{bmatrix} 11,4221 & -114,2196 \\ 11,4221 & 114,2196 \\ -96,8518 & 968,5053 \\ -96,8518 & -968,5053 \\ -59,2493 & 592,4854 \\ -59,2493 & -592,4854 \end{bmatrix}^T$

**Tabela 23:** Controlador ampliado dinâmico: parâmetros do experimento.

Controlador	Controlador ampliado dinâmico, Eq. 4.41
Modelo de simulação	Robô real
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	discreta (sem estados contínuos)
Tempo de amostragem	0.005 s
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0,05 \ 0,05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$

**Tabela 24:** Ganhos calculados para o controlador ampliado integral

$F_1 = \begin{bmatrix} -8,8917 & 88,9161 \\ -8,8917 & -88,9161 \\ 51,1667 & -511,6587 \\ 51,1667 & 511,6587 \\ 74,6502 & -746,4896 \\ 74,6502 & 746,4896 \\ 39,7727 & -397,7202 \\ 39,7727 & 397,7202 \end{bmatrix}^T$	$F_2 = \begin{bmatrix} -8,8917 & -88,9161 \\ 8,8917 & -88,9161 \\ 51,1667 & 511,6587 \\ -51,1667 & 511,6587 \\ 74,6502 & 746,4896 \\ -74,6502 & 746,4896 \\ 39,7727 & 397,7202 \\ -39,7727 & 397,7202 \end{bmatrix}^T$
$F_3 = \begin{bmatrix} 8,8917 & 88,9161 \\ -8,8917 & 88,9161 \\ -51,1667 & -511,6587 \\ 51,1667 & -511,6587 \\ -74,6502 & -746,4896 \\ 74,6502 & -746,4896 \\ -39,7727 & -397,7202 \\ 39,7727 & -397,7202 \end{bmatrix}^T$	$F_4 = \begin{bmatrix} 8,8917 & -88,9161 \\ 8,8917 & 88,9161 \\ -51,1667 & 511,6587 \\ -51,1667 & -511,6587 \\ -74,6502 & 746,4896 \\ -74,6502 & -746,4896 \\ -39,7727 & 397,7202 \\ -39,7727 & -397,7202 \end{bmatrix}^T$

**Tabela 25:** Controlador ampliado integral: parâmetros do experimento.

Controlador	Controlador ampliado integral, Seção 4.6.4
Modelo de simulação	Robô real
Deslocamento de referência	$d = 0.1$
Plataforma de software	Simulink - Matlab R2014a
Parâmetros do simulador	
Função de integração	discreta (sem estados contínuos)
Tempo de amostragem	0.005 s
Condições iniciais	
Posição do robô	$\xi = [-0,05 \ 0,05 \ 0]^T$
Velocidade do robô	$\dot{\xi} = [0 \ 0 \ 0]^T$