



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS

FUNDAMENTOS DE CONTROLE CLÁSSICO

Sumário

I	Controle Contínuo	1
1	Introdução	3
1.1	Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada	5
1.2	Componentes de um sistema de controle	5
1.3	Comparação de Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada	6
1.4	Aplicações em Engenharia Elétrica	8
1.5	Uma breve história da engenharia de controle	8
2	Modelagem e representação de sistemas de controle	11
2.1	Introdução	11
2.2	Modelos de sistemas físicos	11
2.2.1	Redução de ordem e dinâmica não-modelada	11
2.2.2	Obtenção de modelos	12
2.3	Representação de Sistemas Através de Diagramas de Bloco	12
2.3.1	Elementos básicos do diagrama de blocos	13
2.3.2	Álgebra de Diagramas de Blocos	14
2.4	Diagrama de fluxo de sinal	16
2.4.1	Elementos e definições	16
2.4.2	Caminhos que não se tocam	17
2.4.3	Álgebra de diagramas de fluxo de sinal	17
2.4.4	Construção do diagrama de fluxo de sinal	18
2.4.5	Regra de Mason	19
2.5	Representação genérica de sistemas de controle por diagramas de blocos	21
3	Resposta de sistemas de controle	27
3.1	Introdução	27
3.2	Sistemas de primeira e segunda ordem	27
3.3	Resposta no tempo	27
3.3.1	Sistemas de primeira ordem	28
3.3.2	Sistemas de segunda ordem	28
3.3.3	Efeito dos zeros	31
3.4	Resposta em frequência	32
3.5	Resposta no tempo e na frequência de sistemas em malha fechada	34

3.6	Resposta em frequência e ruído	34
3.7	Conclusões sobre o efeito de pólos e zeros	35
4	Propriedades Básicas de Sistemas Realimentados	37
4.1	Introdução	37
4.2	Propriedades e Funções de transferência básicas	37
4.2.1	Rastreamento ou seguimento da referência (precisão)	38
4.2.2	Rejeição de perturbações	38
4.2.3	Sensibilidade ao ruído	39
4.2.4	Sensibilidade paramétrica	39
4.2.5	Estabilidade	39
4.3	Estudo de Caso: Controle de velocidade	40
4.3.1	Modelo do sistema	40
4.3.2	Rastreamento e rejeição de perturbações	41
4.3.3	Sensibilidade	42
4.3.4	Rastreamento Dinâmico	43
4.4	Rastreamento em regime permanente (precisão) e tipo de sistema	44
4.4.1	Rastreamento e sinais padrão	44
4.4.2	Tipos de sistema	44
4.5	Estabilidade	50
4.5.1	Estabilidade Entrada-Saída (BIBO-estabilidade)	50
4.5.2	Estabilidade Interna	52
4.5.3	Crítério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	52
4.5.4	Lugar das raízes	57
4.5.5	Estabilidade no domínio da frequência	74
5	Objetivos do controle e estruturas básicas de controladores	95
5.1	Introdução	95
5.2	Compensação Série	96
5.3	Características desejáveis do sistema controlado	96
5.3.1	Posição dos pólos	97
5.3.2	Resposta em frequência	97
5.4	Estrutura de controladores	97
5.4.1	Controlador Proporcional	97
5.4.2	Controle proporcional-derivativo (PD)	97
5.4.3	Controlador Proporcional-Integral (PI)	98
5.4.4	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)	100
5.4.5	Compensador de Avanço de Fase	101
5.4.6	Compensador de Atraso de Fase	105
6	Métodos diretos de projeto	109
6.1	Introdução	109
6.2	Controle de Processos de 1ª ou 2ª Ordem	109
6.2.1	Controle de Processos de 1ª Ordem	109
6.2.2	Controle de Processos de 2ª Ordem	115
6.3	Método de Ziegler Nichols	121
6.3.1	Projeto baseado na resposta da planta	121
6.3.2	Projeto baseado na resposta em malha fechada	122

7	Projeto usando o Lugar Geométrico das Raízes	129
7.1	Introdução	129
7.2	Projeto do compensador de Avanço de Fase	129
7.3	Projeto do Compensador de Atraso de Fase	134
8	Projeto no Domínio da Frequência	139
8.1	Introdução	139
8.1.1	Compensação via Compensador de Avanço de Fase	139
8.1.2	Compensação via Compensador de Atraso de Fase	140
II	Controle Discreto	145
9	Introdução ao Controle Discreto	147
9.1	Introdução	147
9.2	Definições básicas	148
9.2.1	Tipos de sinais	148
9.3	Amostragem e reconstrução do sinal	149
9.3.1	Amostragem	149
9.3.2	Reconstrução de sinais	153
10	Modelagem e resposta de sistemas discretos	155
10.1	Introdução	155
10.2	Equações diferença	155
10.3	Função de transferência discreta	155
10.3.1	Obtenção da função de transferência discreta	156
10.4	Álgebra de blocos	158
10.4.1	Associação em cascata	158
10.4.2	Associação em paralelo	159
10.4.3	Malha fechada	159
10.5	Mapeamento entre o plano s e o plano z	161
10.5.1	Mapeamento do semi-plano esquerdo	161
10.5.2	Faixa primária e faixas complementares	161
11	Precisão e estabilidade	165
11.1	Introdução	165
11.2	Precisão de sistemas discretos	165
11.3	Erro aos sinais padrão e tipos de sistema	166
11.3.1	Erro ao degrau	166
11.3.2	Erro à rampa	167
11.3.3	Erro à parábola	167
11.4	Estabilidade	168
11.4.1	CrITÉrio de Jury	169
11.4.2	CrITÉrio de Routh-Hurwitz	170
11.4.3	Lugar das raízes	171
12	Projeto de controladores discretos	175
12.1	Introdução	175
12.2	Estruturas de controladores	175
12.3	Controle Digital por Emulação	176
12.3.1	Controle por emulação via Euler	176

12.3.2	Método de Tustin	177
12.3.3	Método da transformação casada de pólos-zeros	180
12.4	Projeto por métodos discretos	182
12.4.1	Projeto pelo lugar das raízes	183
12.4.2	Projeto no domínio da frequência	187
12.5	Questões de Implementação	191

Parte I

Controle Contínuo

CAPÍTULO 1

Introdução

A engenharia de controle baseia-se no princípio da realimentação (ou retroação) e objetiva o controle de determinadas variáveis de um sistema. Embora esteja tradicionalmente ligada à engenharia elétrica, a engenharia de controle é interdisciplinar e encontra aplicações em engenharia química, mecânica, aeronáutica, biomédica, etc. Em engenharia elétrica o número de aplicações é muito grande e este capítulo cita alguns exemplos encontrados em diversas áreas.

Um processo industrial simples permite ilustrar o problema básico da engenharia de controle. O exemplo considerado é o controle de velocidade de um motor de corrente contínua em uma linha de produção industrial. O objetivo é manter constante a velocidade do motor, o qual aciona uma carga. Esta velocidade, denominada de referência, pode ser escolhida pelo operador. A carga pode variar, mas mesmo assim a velocidade deve ser mantida o mais próximo possível da velocidade de referência. Pode-se ainda considerar que além de possíveis variações da carga, o uso intensivo de um tal sistema industrial provocará desgaste e portanto variações dos parâmetros do sistema com o tempo. No entanto, neste exemplo, apenas perturbações externas (variação da carga) serão consideradas.

Uma primeira solução seria verificar a tensão a ser aplicada ao motor para que, acionando a carga, se obtenha a velocidade de referência. Esta situação é apresentada na Figura 1.1(a). À velocidade de referência ω_{ref} corresponde a tensão de armadura que deve ser aplicada para se obter a saída desejada. Se todos os parâmetros do sistema se mantiverem constantes, então a velocidade desejada será obtida na saída do sistema. Se, no entanto, a carga variar, então a velocidade de saída não será a mesma. Como a entrada não tem nenhuma informação sobre a saída, um erro de velocidade persistirá. A variação de carga pode ser considerada como uma perturbação que atua no sistema. Esta situação é ilustrada na Figura 1.1(b).

Variações paramétricas, como desgaste de componentes também podem provocar um erro na saída. Um controle como o descrito é um controle em malha aberta, pois nenhuma informação da saída real do sistema é usada para modificar a entrada.

Uma segunda solução é fechar a malha de controle, ou seja, comparar a referência desejada com a saída e a diferença entre as duas, chamada de erro, é usada como entrada do sistema (Figura 1.2).

Um aumento de carga reduzindo a velocidade origina um erro maior, implicando em uma maior tensão de armadura no motor, que tende a aumentar a velocidade e portanto diminuir o erro. Neste caso o sistema tende a corrigir o erro de velocidade, mesmo que variações de carga (ou seja perturbações) ocorram. Variações paramétricas também são levadas em conta. Sobre esta idéia simples, o conceito de realimentação, repousa grande parte da teoria de controle.

A esta altura pode-se perguntar se simplesmente fechar a malha de controle, como proposto, resolve

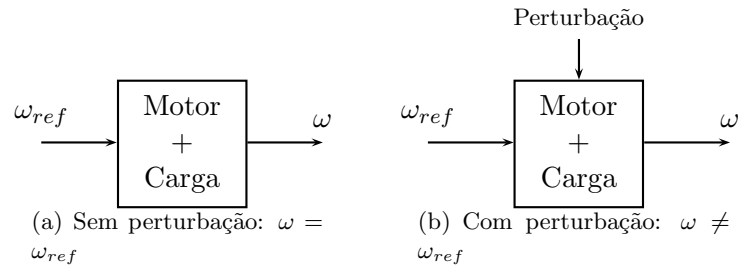


Figura 1.1: Controle de velocidade em malha aberta

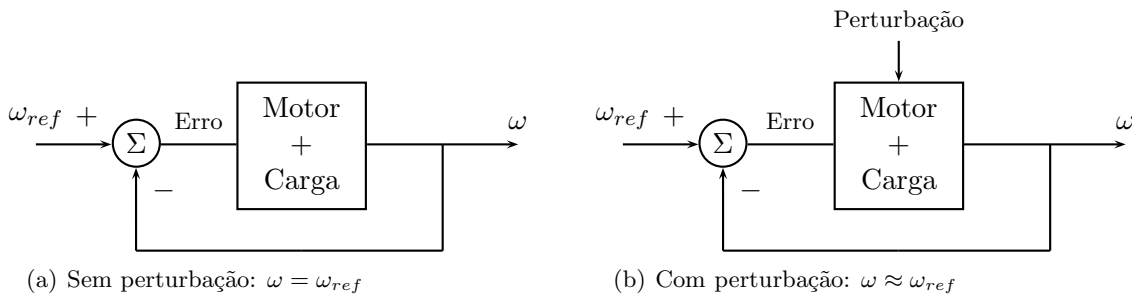


Figura 1.2: Controle de velocidade em malha fechada

todos os problemas do controle de velocidade deste exemplo. Para responder a esta questão deve-se perguntar quais são os requisitos de desempenho que seria razoável colocar para este sistema. Inicialmente considera-se que o sistema vai começar a operar e que o operador especificou uma velocidade de referência. É importante que no regime permanente o erro de velocidade com relação à referência seja nulo ou pelo menos limitado. Se houver uma variação de carga, ou seja uma perturbação, novamente o erro de velocidade deve ser pequeno ou nulo. Foi mostrado que a realimentação resolve este problema. Mas além dos requisitos mencionados, deve-se estabelecer outros que se referem ao desempenho em regime transitório, ou seja, como o sistema evolui para atingir o novo ponto de operação (ponto de equilíbrio). Um requisito razoável seria que o motor atingisse a velocidade final com uma certa rapidez, ou seja com um bom tempo de resposta. Além disso, esta resposta não deveria ser muito oscilatória, ou seja, o sistema em malha fechada deve apresentar um bom amortecimento. Mais importante ainda, o sistema deve atingir um ponto de equilíbrio, e não se afastar continuamente do valor final, ou seja, deve ser estável. A Figura 1.3 apresenta algumas possíveis formas da resposta.

Pode-se então classificar os requisitos de desempenho para o sistema em malha fechada como sendo:

- requisitos de desempenho transitório, tais como estabilidade, baixo tempo de resposta e adequado amortecimento
- requisitos de desempenho em regime permanente, tais como erros baixos ou nulos à referência ou à perturbações.

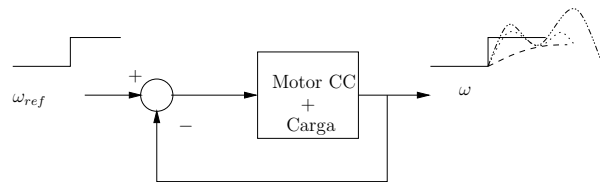


Figura 1.3: Possíveis respostas do sistema em malha fechada

Atender a todos estes requisitos, que podem inclusive ser conflitantes, não é, em geral, possível simplesmente fechando a malha de controle. Deve-se então modificar o sistema em malha fechada, pela adição de um controlador, para que este sistema apresente as características de desempenho tanto transitórias, como em regime permanente, desejadas. O projeto deste controlador, usando técnicas de controle clássicas constitui o objetivo final deste texto. Nos capítulos seguintes, são apresentados os conceitos e ferramentas para atingir este objetivo.

Essencialmente o projeto de tais controladores envolve a modelagem do sistema (ou processo ou planta) a ser controlado, a análise do desempenho deste sistema e a síntese do controlador para atender os requisitos de projeto.

1.1 Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada

Definição 1 *Um Sistema de Controle em Malha Aberta (SCMA) utiliza um controlador conectado em série com o processo a ser controlado, de modo que a entrada do processo deve ser tal que sua saída se comportará como desejado. A característica importante é que a ação de controle independe da saída.*

Observe-se que um sistema de controle deste tipo fornecerá a saída desejada se não ocorrerem perturbações externas que alterem o valor da saída ou alterações paramétricas internas do sistema. Se alguma destas ocorrer, a saída muda, mas a ação de controle continua exatamente a mesma.

Definição 2 *Um Sistema de Controle em Malha Fechada (SCMF) utiliza uma medida adicional da saída (resposta) real a fim de compará-la com a resposta desejada do sistema.*

O SCMF também é chamado **Servomecanismo**. O termo servomecanismo era originalmente empregado para denotar uma classe de sistemas de controle para os quais a referência era constante. Atualmente o termo servomecanismo é usado em sentido amplo, significando **Sistema de Controle em Malha Fechada (SCMF)**. No entanto, usa-se ainda a expressão problema de servomecanismo em conexão com o objetivo de seguir uma referência constante e problema de rastreamento, em conexão com o objetivo de seguir uma referência que varia com o tempo.

Embora o conceito de sistema de controle em malha aberta seja usado, sistemas de controle reais são essencialmente de malha fechada. Isto leva à definição geral de sistemas de controle.

Definição 3 *Sistema de Controle é um sistema que tende a manter uma relação pré-estabelecida entre duas variáveis do sistema através da comparação de funções destas variáveis e utilizando a diferença como meio de controle.*

1.2 Componentes de um sistema de controle

Uma versão detalhada do diagrama funcional de um SCMF é dada na Figura 1.4. Este diagrama mostra os principais componentes do sistema de controle, definidos a seguir.

Referência: Valor desejado da variável a ser controlada.

Comparador: Dispositivo que constrói o sinal de erro entre o valor desejado e o obtido.

Controlador: Dispositivo que manipula o sinal de erro, gerando um sinal de controle que será aplicado no sistema, afim de corrigir a variável a ser controlada.

Atuador: Dispositivo que recebe o sinal de controle e gera um sinal com potência suficiente para atuar sobre o sistema.

Sistema: Dispositivo ou fenômeno que se deseja operar com alguma finalidade (objetivo de controle). Um sistema é representado por uma variável de entrada (controle), uma de saída (controlada) e uma relação (função de transferência) entre elas.

Medidor: (transdutor) Dispositivos responsáveis pela medição e conversão da variável a ser controlada para fins de comparação e obtenção do erro de saída.

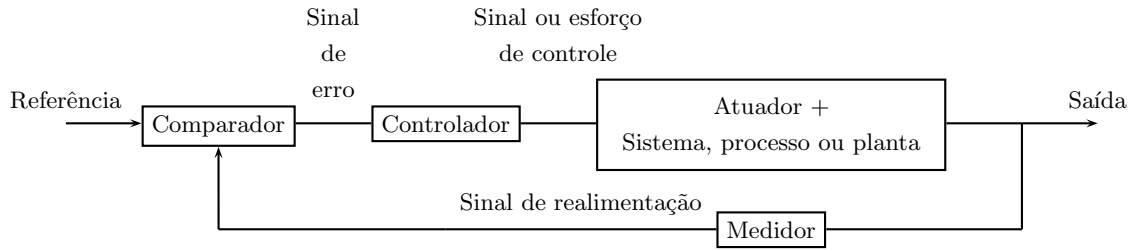


Figura 1.4: Diagrama de um sistema de controle em malha fechada

1.3 Comparação de Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada

O exemplo descrito no começo deste capítulo será usado para comparar o desempenho de um sistema em malha aberta com o de um sistema em malha fechada. Para isto, um modelo simplificado do sistema de controle será usado. O motor de corrente contínua será representado apenas por um ganho. Isto significa que toda a dinâmica do sistema é desprezada. Nos capítulos seguintes, a dinâmica completa do mesmo sistema será apresentada.

O conjunto motor mais carga é representado por um ganho $K_{motor} = 10 \text{ rpm/Volt}$. Isto significa que uma aumento (diminuição) de 1 Volt na tensão do motor provoca um aumento (diminuição) de 10 rpm .

A perturbação é um aumento de carga. Supõe-se que um aumento de carga de 1 N.m produz uma queda de velocidade de 2 rpm . Portanto a perturbação é modelada através de um ganho de -2 rpm/N.m .

O diagrama do sistema, usando os dados acima, é apresentado na Figura 1.5. Observa-se que como o sistema é linear, vale o princípio de superposição de efeitos e pode-se estudar separadamente o efeito da referência e da perturbação.

Considera-se inicialmente o sistema em malha aberta, como apresentado na Figura 1.6 Para que a saída tenha o mesmo valor da entrada em regime permanente, adiciona-se um controlador, que no caso é simplesmente um ganho que adapta o valor da referência desejada, ao valor da tensão de armadura para produzir a velocidade desejada. O ganho do controlador é $\frac{1}{10}$.

Para $d = 0$, tem-se que $\omega = 10 \times \frac{1}{10} \omega_{ref}$, ou $\omega = \omega_{ref}$. Para uma velocidade de referência de, por exemplo, 1000 rpm , tem-se exatamente o mesmo valor de saída.

Considera-se agora o caso de um aumento de carga tal que $d = 100 \text{ N.m}$. Um simples cálculo mostra que o valor final da velocidade é 800 rpm . Portanto o sistema é sensível a perturbação, ou mais precisamente, não rejeita a perturbação.

Considera-se agora o sistema em malha fechada, como mostrado na Figura 1.7.

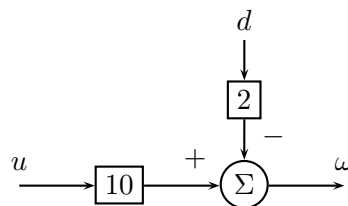


Figura 1.5: Modelo do sistema

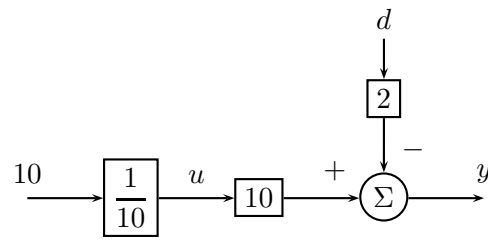


Figura 1.6: Sistema em malha aberta

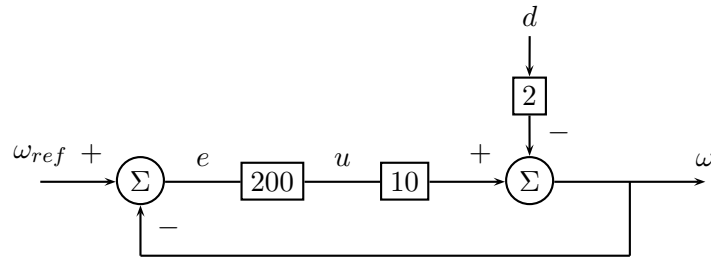


Figura 1.7: Sistema em malha fechada

O controlador será novamente um ganho. Somente neste caso o ganho terá um valor elevado. A razão desta escolha ficará claro no desenvolvimento apresentado nos capítulos seguintes. O ganho escolhido é $K_c = 200$. Considerando-se inicialmente o sistema sem perturbação, ou seja, $d = 0$, a saída pode ser calculada por $\omega = 200 \times 10 \times (\omega_{ref} - \omega)$ ou $\omega = 0.9995 \omega_{ref}$. Para $\omega_{ref} = 1000 \text{ rpm}$ tem-se que $\omega = 999.5 \text{ rpm}$. Embora o erro seja diferente de zero, ele pode ser reduzido aumentando-se o ganho. Será visto, no entanto, que este aumento pode ser limitado por considerações de desempenho dinâmico do sistema.

Considera-se agora o caso com a perturbação. O valor da saída é $\omega = 200 \times 10(\omega_{ref} - \omega) - 2d$ ou $\omega = \frac{2000}{2001} \omega_{ref} - \frac{1}{2001} d$. Para $\omega_{ref} = 1000 \text{ rpm}$ e $d = 100$, como no caso da malha aberta, tem-se uma saída $\omega = 999.45 \text{ rpm}$. Para o caso da malha aberta o valor de saída era de 800 rpm .

Vamos considerar agora uma variação paramétrica, ou seja, vamos supor que um parâmetro, no caso o ganho do processo com valor de 10, tem uma variação de -20% , passando para 8. Esta variação pode ser devida a um desgaste de componentes com o tempo, a variação com temperatura, ou simplesmente devido ao fato de que o parâmetro não foi precisamente determinado. Considerando o sistema em malha aberta, sem perturbação, para a mesma referência $\omega_{ref} = 1000 \text{ rpm}$ a saída é $\omega = 8 \times \frac{1}{10} \times 1000 = 800 \text{ rpm}$. Observa-se assim uma considerável variação da velocidade real do motor. Para o sistema em malha fechada, com o mesmo ganho anterior do controlador de 200 tem-se $\omega = 200 \times 8 \times (\omega_{ref} - \omega)$ ou $\omega = 999.37 \text{ rpm}$.

Este exemplo mostra claramente as vantagens do sistema de controle em malha fechada. Tanto o erro a perturbações quanto as variações paramétricas são reduzidos. No entanto a análise foi restrita ao comportamento em regime permanente. Observa-se que tanto a planta quanto o efeito da perturbação foram modeladas por constantes. Este modelo não reflete o comportamento real do sistema, embora possa ser usado para estudar o regime permanente. O comportamento dinâmico será estudado nos capítulos seguintes, mas algumas conclusões são adiantadas na comparação seguinte entre sistemas de controle de malha aberta e malha fechada.

- Os sistemas com realimentação apresentam uma precisão melhor (maior capacidade de seguir fielmente a entrada). Isto ficou claro do exemplo discutido anteriormente. Quando perturbações ou variações paramétricas estão presentes o erro do sistema em malha aberta pode ser muito grande.

- Os sistemas em malha fechada apresentam menor sensibilidade a variações nas características (por exemplo, parâmetros) do sistema. Conforme discutido anteriormente, variações de parâmetro afetam mais sistemas de malha aberta, provocando grandes erros.
- Os efeitos de não-linearidades e distorções são reduzidas em sistemas de malha fechada. A razão é semelhante à dos casos anteriores.
- A faixa de frequências nas quais o sistema responde satisfatoriamente é maior em sistemas em malha fechada. Isto será discutido nos próximos capítulos e é associado à possibilidade de controlar a velocidade de resposta do sistema através do ajuste de um compensador adequado.
- Os sistemas em malha fechada apresentam maior tendência para oscilação e instabilidade. Um sistema estável (e o conceito será discutido no Capítulo 3) pode ser instável em malha fechada, se os parâmetros não forem escolhidos adequadamente. O projeto do controlador deve levar em conta a estabilidade e amortecimento do sistema em malha fechada.

1.4 Aplicações em Engenharia Elétrica

Embora a aplicação de sistemas de controle permeie muitas áreas da engenharia esta seção apresenta algumas aplicações à engenharia elétrica.

- **Sistemas elétricos de potência**

A operação de sistemas elétricos depende de várias malhas de controle que atuam nos geradores e em outros equipamentos. Pode-se citar como exemplos a malha de controle de tensão dos geradores, que permite controlar a tensão terminal, e a malha de controle de velocidade, que permite controlar a frequência. As perturbações são as variações da carga dos consumidores. Controladores são ainda usados para estabilizar ou aumentar o amortecimento do sistema, evitando oscilações indesejáveis de potência e tensão.

- **Eletrônica de potência**

O controle de conversores e inversores é realizado por sistemas de controle específicos.

- **Eletrônica**

Um grande número de equipamentos eletrônicos usam a realimentação para o controle de variáveis.

- **Engenharia biomédica**

Muitos sistemas biológicos podem ser modelados como sistemas de controle.

1.5 Uma breve história da engenharia de controle

O objetivo desta seção é apresentar um breve histórico da evolução da engenharia de controle visando situar as técnicas usadas neste curso com relação ao estado atual da teoria.

O uso de algumas técnicas rudimentares de controle na Grécia e em Alexandria são descritas em documentos históricos. Nos séculos XVII e XVIII vários dispositivos de controle foram criados visando resolver alguns problemas práticos. Mas foi a revolução industrial no século XVIII, com o desenvolvimento de processos industriais, que deu o impulso ao desenvolvimento das técnicas de controle. Um dos problemas comuns na época era o controle da velocidade de teares. Watt desenvolveu um sistema de controle usando o chamado pêndulo de Watt como sensor de velocidade. Isto permitia o controle em malha fechada da velocidade controlado a injeção de vapor em máquinas a vapor. Eventualmente tais sistemas apresentavam um comportamento instável, o que levou a uma pesquisa teórica da razão deste

comportamento. Em 1868 Maxwell publicou um artigo analisando o comportamento dinâmico dos sistemas de controle. A abordagem usada foi a modelagem do sistema por equações diferenciais sendo que Maxwell demonstrou que para determinadas faixas de valores dos parâmetros as soluções das equações eram instáveis. Na mesma época, Routh e Hurwitz desenvolveram técnicas que permitiam determinar diretamente a estabilidade do sistema sem a necessidade da solução das equações.

Um marco no desenvolvimento da teoria de controle foi a publicação de um trabalho pelo matemático russo A. Lyapunov em 1897. Este trabalho foi traduzido para o francês em 1907 e em inglês em 1947. Pouco divulgado no ocidente, o trabalho de Lyapunov continuou a ser desenvolvido na então União Soviética, o que permitiu aos pesquisadores soviéticos grandes avanços especialmente na teoria de sistemas não-lineares e uma liderança na área que se manteve até os anos 1950.

Na década de 1920, engenheiros dos laboratórios Bell trabalhavam com o problema de comunicação a longa distância nos Estados Unidos. O problema de reforço de sinais através de amplificadores levou ao desenvolvimento de técnicas no domínio da frequência. Nyquist e Bode, assim como vários outros associados a estas técnicas, eram engenheiros dos laboratórios Bell. Eventualmente tais técnicas foram usadas para o projeto de sistemas de controle. O início da Segunda Guerra mundial estimulou a pesquisa em sistemas de controle, visando o uso militar. Nos Estados Unidos o MIT foi um centro de desenvolvimento de tais técnicas. Outros desenvolvimentos se seguiram, inclusive com o aparecimento da técnica do lugar das raízes, criada por Evans em 1947.

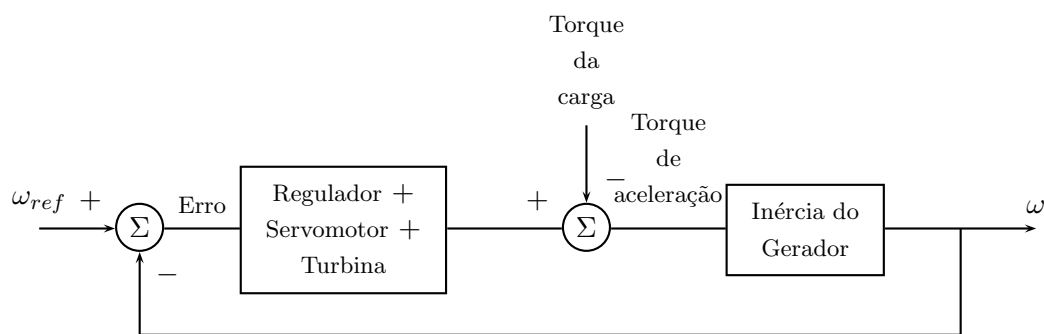
A teoria de controle ao final dos anos 1950 já consistia de um corpo de conhecimento consolidado, com forte ênfase em técnicas baseadas no uso de métodos freqüenciais e com muitas aplicações industriais. No entanto a demanda por novas técnicas, especialmente no florescente setor aéro-espacial impulsionou o desenvolvimento do chamado controle moderno. O controle moderno retomou muitas das idéias de Lyapunov, usando técnicas no domínio do tempo. O caso de sistemas multivariáveis (com várias entradas e várias saídas) pode ser facilmente tratado com técnicas modernas. O nome de R. Kalman aparece com destaque entre os criadores do controle moderno.

Atualmente a teoria de controle é bastante extensa mas a relação entre vários aspectos foi melhor estabelecida. Assim, técnicas da freqüência para sistemas multivariáveis foram desenvolvidas e a relação entre o domínio do tempo e da freqüência melhor compreendidas. Mas os termos controle clássico e controle moderno ainda são usados.

O objetivo deste texto é apresentar as técnicas associadas ao controle clássico. Estas técnicas ainda são as ferramentas comuns na maior parte das aplicações industriais. O seu conhecimento também é essencial para o entendimento do controle moderno.

Exercícios

1. Considere um avião com um sistema automático de navegação (piloto automático). Faça o diagrama de blocos deste sistema. Quais as perturbações que atuam no sistema?
2. Considere um automóvel. Este sistema pode ser considerado como um sistema realimentado. Esquematize o diagrama de blocos e analise o comportamento do sistema.
3. A figura abaixo mostra o diagrama simplificado de um sistema de controle de frequência de uma usina elétrica. Analise o comportamento deste sistema. Qual o objetivo deste controle? Identifique o controlador, o atuador e o processo. Qual a natureza da perturbação que atua no sistema? O que aconteceria em um sistema elétrico se não existisse esta malha de controle?



CAPÍTULO 2

Modelagem e representação de sistemas de controle

2.1 Introdução

A análise e projeto de sistemas de controle exigem o uso de um modelo para o sistema a ser controlado. O objetivo deste capítulo é introduzir o problema da modelagem de sistemas de controle. A simplificação de modelos e a questão de dinâmica não-modelada é inicialmente discutida. Apresenta-se então os princípios da obtenção de modelos. O uso de diagramas de blocos é discutido e a álgebra de blocos é apresentada. A seguir são introduzidos os diagramas de fluxo de sinal e a regra de Mason. O capítulo é concluído com a discussão da representação genérica de sistemas de controle por diagramas de blocos.

2.2 Modelos de sistemas físicos

A modelagem de sistemas é essencial em engenharia e em particular para o projeto de sistemas de controle. Os modelos de processos podem ser determinados por ensaios de campo, quando o modelo é obtido a partir do comportamento entrada/saída, em geral na forma de função de transferência, ou a partir do conhecimento da estrutura interna do sistema. Neste último caso determinam-se as equações diferenciais que descrevem o sistema. A partir destas equações pode-se obter funções de transferência ou as equações de estado do sistema. Os processos podem ser elétricos, mecânicos, eletro-mecânicos ou químicos. As leis básicas da física permitem obter as equações que descrevem os processos. Para aplicações em engenharia, no entanto, simplificações são normalmente usadas na obtenção de modelos. Estas simplificações são possíveis se aspectos do comportamento do sistema podem ser desprezados. Por exemplo, se o comportamento mais lento de um processo eletro-mecânico está sendo considerado, então transitórios elétricos, que são rápidos, podem ser desprezados. Para que o projeto seja realizado de forma mais fácil, uma característica desejável é que o modelo seja linear. Embora muitos sistemas sejam essencialmente não-lineares, modelos linearizados podem ser usados dentro de certos limites. A seguir algumas questões de redução de ordem e obtenção de modelos são discutidas.

2.2.1 Redução de ordem e dinâmica não-modelada

A determinação de um modelo adequado é uma fase crítica, e às vezes difícil do projeto. O termo modelo adequado é usado aqui para indicar um modelo matemático que reproduz as características do sistema

na escala de tempo de interesse. Assim, em um processo lento, alguns fenômenos rápidos podem ser desconsiderados, se eles não tiverem efeito significativo na variável ou variáveis a serem controladas. O mesmo pode ocorrer no caso de um processo rápido, onde fenômenos lentos podem, em alguns casos, serem desconsiderados no modelo. Um exemplo que ilustra estas afirmações são os controles de tensão e frequência em um sistema elétrico de potência. Estes dois laços de controle coexistem em uma usina, mas usualmente modelos diferentes são usados para o projeto de cada um deles. O controle da tensão terminal de um gerador é rápido, ao passo que o controle de frequência envolve elementos com resposta mais lenta. Usa-se então um modelo que descreve apenas a dinâmica rápida do sistema para o projeto do controle de tensão e um modelo que descreve apenas a dinâmica lenta para o caso do controle de frequência.

A simplificação de modelos, como descrito acima, é freqüentemente necessária para se evitar um modelo de dimensão elevada. A dinâmica desprezada é chamada de **dinâmica não-modelada**. É preciso notar que a dinâmica não-modelada pode emergir em determinadas situações e neste caso o modelo será inadequado, pois não reproduzirá os fenômenos que aparecem no sistema real.

2.2.2 Obtenção de modelos

Basicamente dois métodos podem ser usados para determinar o modelo de um processo a ser controlado. O primeiro método parte da descrição da física do processo a partir das equações que descrevem a natureza dos fenômenos envolvidos (elétricos, mecânicos, químicos, etc.). O segundo método baseia-se na identificação do sistema a partir de ensaios que relacionam a entrada e a saída. Neste caso não há necessidade de conhecer os detalhes ou os diversos componentes que formam o processo. Apenas a relação entrada-saída é importante.

No controle clássico, independente do método que tenha sido usado para obtê-lo, o modelo deve relacionar as entradas e saídas do sistema. Portanto, o modelo consiste basicamente de funções de transferência relacionando as diversas entradas e saídas do sistema.

2.3 Representação de Sistemas Através de Diagramas de Bloco

O método dos diagramas de bloco para representar um sistema procura combinar a descrição puramente matemática do sistema através de equações, com a visualização proporcionada por um diagrama.

Um bloco pode representar um único componente ou um grupo de componentes, mas cada bloco é completamente caracterizado por uma função de transferência.

Definição 4 *Um **diagrama de Blocos (DB)** consiste de blocos operacionais interligados que mostram a direção de fluxo e as operações sobre as variáveis do sistema de tal modo que se estabelece uma relação entre entrada e saída quando se percorre um caminho sobre o diagrama.*

O fluxo de variáveis do sistema de um bloco para outro é representado por uma linha. Como funções de transferência caracterizam os blocos, apenas equações algébricas e operações de soma e multiplicação estão envolvidas nos blocos.

Exemplo 2.3.1 Resistência: A equação é $I(s) = \frac{1}{R}V(s)$. Dependendo da entrada escolhida tem-se os diagramas de blocos mostrados na Figura 2.1.

Exemplo 2.3.2 Indutância: Para a indutância a equação é $V(s) = sLI(s)$. Os diagramas de bloco correspondentes são dados na Figura 2.2

Exemplo 2.3.3 Capacitância: A equação é $V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$, sendo os diagramas de bloco correspondentes mostrados na Figura 2.3.



Figura 2.1: Diagramas de bloco para a resistência



Figura 2.2: Diagramas de bloco para a indutância



Figura 2.3: Diagramas de bloco para a capacitância

2.3.1 Elementos básicos do diagrama de blocos

Os diagramas de bloco são constituídos basicamente de blocos associados à operação de multiplicação entre a entrada e a função de transferência do bloco, produzindo a saída, a somadores, que fornecem como saída a soma algébrica dos sinais de entrada, e pontos de ramificação, onde o mesmo sinal se ramifica e é levado a pontos diferentes do diagrama.

2.3.1.1 Blocos

Blocos são associados à operação de multiplicação entre a entrada do bloco e a função de transferência correspondente ao bloco, produzindo a saída.

2.3.1.2 Somadores ou pontos de soma

Os somadores produzem como saída a soma algébrica dos sinais de entrada, como ilustra a Figura 2.4.

2.3.1.3 Pontos de Ramificação

Nos pontos de ramificação, o mesmo sinal se ramifica e é levado a pontos diferentes do diagrama, como mostrado na Figura 2.5.

2.3.1.4 Outros componentes

Embora estes componentes básicos sejam suficientes para descrever sistemas lineares, os diagramas de blocos também podem ser usados para descrever sistemas não-lineares. Neste caso blocos podem ser

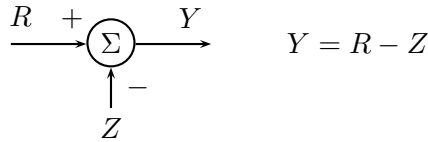


Figura 2.4: Somador

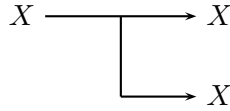


Figura 2.5: Ponto de ramificação

associados a não-linearidades e multiplicadores também podem estar presentes.

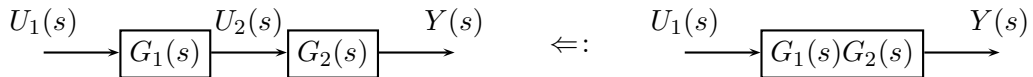
2.3.2 Álgebra de Diagramas de Blocos

A transformação de diagramas de blocos permite a simplificação de diagramas complexos, podendo-se obter um diagrama que relaciona diretamente a variável de entrada e a de saída.

Existem algumas regras que permitem a realização desta transformação, e que são apresentadas a seguir.

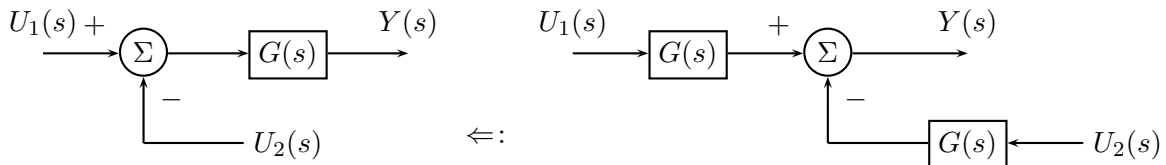
2.3.2.1 Combinação de blocos em série ou cascata

Quando blocos estão em cascata, pode-se obter um bloco equivalente simplesmente multiplicando-se as funções de transferência dos blocos. A figura mostra o caso de dois blocos em cascata, mas o mesmo se aplica a um número qualquer de blocos.



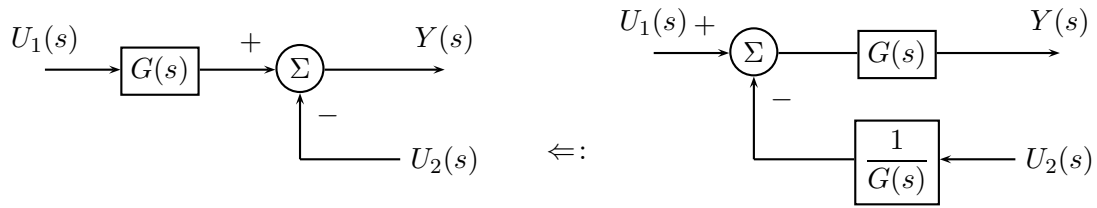
2.3.2.2 Movimentação de um ponto de soma para trás de um bloco

No exemplo apresentado na figura abaixo, observa-se à esquerda, que o sinal U_2 é multiplicado pela função de transferência $G(s)$. Para que nada seja alterado, aquele sinal deve ser multiplicado por $G(s)$ após o deslocamento do ponto de soma. Deve-se então acrescentar um bloco $G(s)$ na entrada $U_2(s)$.



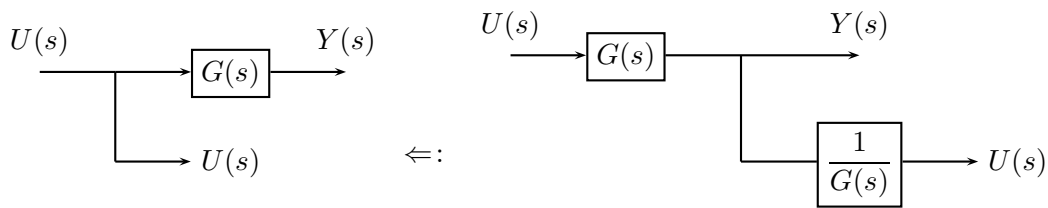
2.3.2.3 Movimentação de um ponto de soma para frente de um bloco

Neste caso o sinal $U_2(s)$, não multiplica $G(s)$. Após a mudança do ponto de soma ele ainda não deve multiplicar aquela função. Deve-se então adicionar um bloco $\frac{1}{G(s)}$, na entrada $U_2(s)$, para não alterar o valor de $Y(s)$.



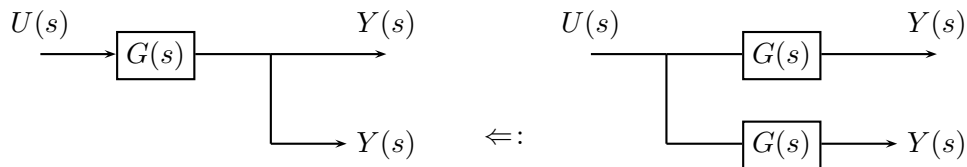
2.3.2.4 Movimentação de um ponto de ramificação para trás de um bloco

A simples mudança do ponto de soma alteraria o valor da variável na ramificação. Para manter o valor $U(s)$ deve-se então adicionar um bloco com valor $\frac{1}{G(s)}$, para manter o valor de saída $U(s)$.



2.3.2.5 Passagem de um ponto de ramificação para frente de um bloco

A variável na ramificação, no lado esquerdo da figura abaixo, é $Y(s) = G(s)U(s)$. Para manter este valor, após a mudança do ponto de ramificação, deve-se adicionar um bloco $G(s)$.



Observa-se que todas as regras anteriores podem ser obtidas pela simples observação do fato de que as variáveis não podem ter seus valores alterados, não havendo necessidade de decorá-las.

2.3.2.6 Eliminação de malha fechada

O caso de eliminação de malha fechada pode ser obtido facilmente a partir da manipulação das equações algébricas que representam o diagrama de blocos. Assim, da Figura 2.6 abaixo,

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[U(s) \pm H(s)Y(s)] \quad (2.3.1)$$

Isolando-se $Y(s)$ obtém-se:

$$[1 \mp G(s)H(s)]Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.3.2)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \quad (2.3.3)$$

Se a realimentação for negativa, então

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.3.4)$$

e se for positiva

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \quad (2.3.5)$$

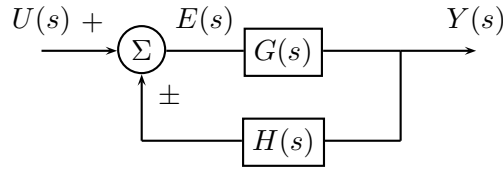


Figura 2.6: Sistema realimentado

Para o caso $H(s) = 1$, a função de transferência equivalente é simplesmente

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.3.6)$$

Exemplo 2.3.4 Para o circuito mostrado na Figura 2.7

1. Construa o diagrama de blocos.
2. Reduza o diagrama de blocos a um único bloco relacionando entrada e saída.

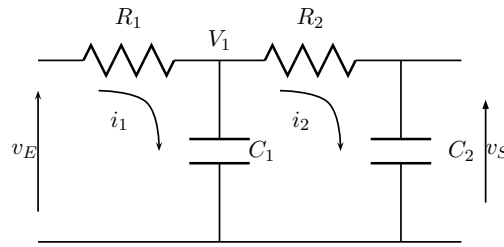


Figura 2.7: Figura para o Exemplo 4

2.4 Diagrama de fluxo de sinal

O diagrama de fluxo de sinal é uma ferramenta visual para representar a relação causal entre componentes do sistema. O diagrama de fluxo de sinal, além do uso para obtenção de uma função de transferência equivalente de um sistema, pode ser usado para explicar vários conceitos de controle moderno.

A Figura 2.8 ilustra um diagrama de fluxo de sinal.

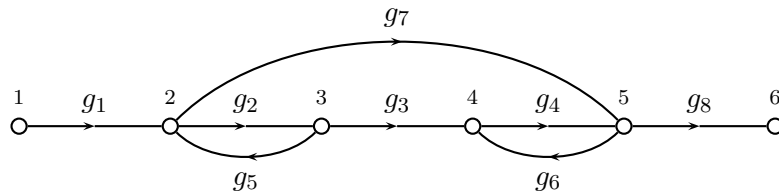


Figura 2.8: Diagrama de fluxo de sinal

2.4.1 Elementos e definições

A seguir são apresentadas algumas definições relacionadas ao diagrama de fluxo de sinal.

2.4.1.1 Nós

Sinais internos como a entrada comum para vários blocos ou a saída de um somador, são chamados nós. Nós são usados para representar variáveis. No exemplo da Figura 2.8 tem-se os nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

2.4.1.2 Caminho

É a seqüência de nós conectados, a rota passando de uma variável a outra, na direção do fluxo, sem incluir nenhuma variável mais de uma vez. Na Figura 2.8 os caminhos 123 e 2345 são exemplos de caminhos.

2.4.1.3 Caminho direto

Caminho da entrada para a saída, sem incluir nenhum nó mais de uma vez. No exemplo da Figura 2.8 tem-se dois caminhos diretos; 1256 e 123456.

2.4.1.4 Malha

Caminho que se origina e termina no mesmo nó. Na Figura 2.8 tem-se duas malhas; 232 e 454.

2.4.1.5 Ganho do caminho

Produto dos ganhos dos ramos que formam um caminho. Por exemplo, na Figura 2.8, o ganho do caminho direto 1256 é $g_1 g_7 g_8$.

2.4.1.6 Ganho de malha

É o ganho do caminho associado com uma malha. Na Figura 2.8 o ganho da malha 232 é $g_2 g_5$.

2.4.1.7 Nó de entrada (fonte)

É um nó que possui somente ramos que se afastam dele. No exemplo da Figura 2.8 o nó 1 é o nó fonte.

2.4.1.8 Nó de saída (sorvedouro)

É um nó que possui apenas ramos que se dirigem a ele. Na Figura 2.8 o nó 6 é o nó de saída.

2.4.2 Caminhos que não se tocam

Caminhos não se tocam se não existem nós comuns entre eles. No exemplo da Figura 2.8 as malhas 232 e 454 não se tocam. Já os caminhos diretos 1256 e 123456 se tocam com as duas malhas.

2.4.3 Álgebra de diagramas de fluxo de sinal

Algumas regras simples permitem eliminar nós e simplificar um diagrama de fluxo de sinal. Estas regras são similares às regras de álgebra de blocos.

1. O valor da variável representada por um nó é igual a soma de todos os sinais que entram no nó.
2. O valor da variável representada por um nó é transmitido por todos os ramos que deixam o nó.
3. Ramos paralelos na mesma direção conectando dois nós podem ser substituídos por um único ramo com ganho igual à soma dos ganhos dos ramos em paralelo.
4. Uma conexão em série de ramos unidirecionais pode ser substituído por um único ramo com ganho igual ao produto dos ganhos dos ramos.

5. Uma malha com realimentação pode ser substituída por um equivalente, como mostrado na Figura a ser apresentada em aula.

2.4.4 Construção do diagrama de fluxo de sinal

O diagrama de fluxo de sinal pode ser construído facilmente a partir do diagrama de blocos do sistema. Consideram-se as variáveis de entrada e de saída como sendo nós fonte e sorvedouro, respectivamente. Além disso, as variáveis de saída dos somadores, variáveis de entrada de blocos e variáveis de entrada comum a vários blocos também são tomados como nós. Ao se construir o diagrama de fluxo de sinal a partir do diagrama de blocos deve-se observar que o nó não deve ser confundido com um somador. O nó representa uma variável cujo valor é a soma dos sinais que incidem neste nó. É importante notar que o diagrama de fluxo de sinal não é único. Pode-se escolher um número diferente de nós e ainda se representar o mesmo sistema.

Exemplo 2.4.1 Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.9. Vamos construir o diagrama de fluxo de sinal partir deste diagrama.

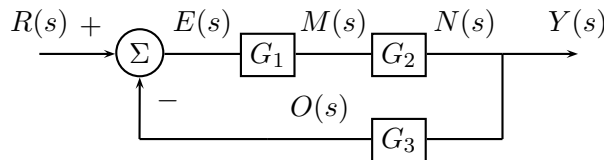


Figura 2.9: Diagrama de blocos para o exemplo 5

O primeiro passo é identificar as variáveis que serão representadas por nós no diagrama de fluxo. As variáveis $R(s)$ e $Y(s)$ corresponderão aos nós de entrada e saída, respectivamente. Escolhemos ainda as variáveis $E(s)$, $M(s)$, $N(s)$ e $O(s)$ para serem representadas por nós no diagrama de fluxo. Estes nós podem então ser desenhados, conforme a Figura 2.10.

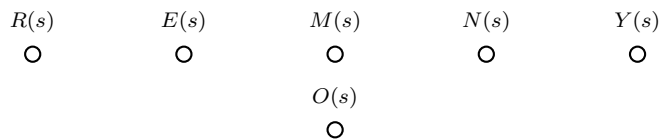


Figura 2.10: Nós representados no diagrama de fluxo de sinal

A seguir indentificam-se os ramos que incidem nestes nós. O valor de cada nó corresponde a soma dos valores dos sinais incidentes. Para facilitar a explicação, iremos nos referir a cada nó correspondente a uma variável pelo nome da própria variável. Começamos pela variável $R(s)$. Esta variável é a entrada e portanto nenhum ramo terminará no nó $R(s)$. A variável $E(s)$ é a soma de $R(s)$ e do negativo de $N(s)$. Portanto haverá um ramo incidente vindo do nó $R(s)$, com ganho unitário, e um ramo vindo de $N(s)$ com ganho -1 . Isto é mostrado na Figura 2.11

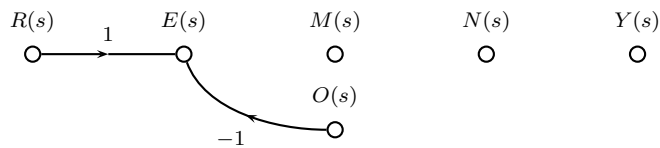
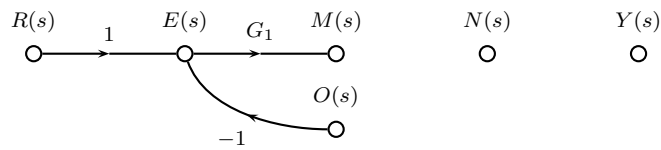
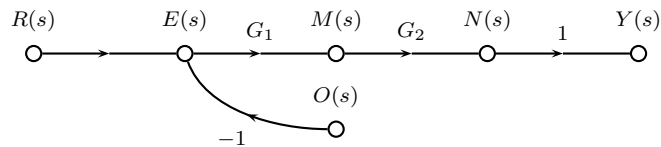


Figura 2.11: Adição dos ramos incidentes no nó $E(s)$

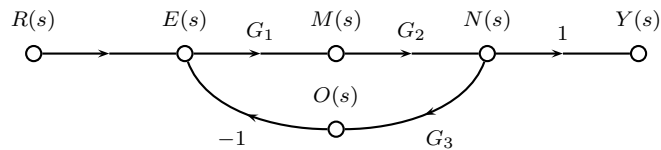
A variável $M(s)$ tem um valor que corresponde ao valor de $E(s)$ multiplicado por G_1 . Portanto existe um ramo incidente em $M(s)$ vindo de $E(s)$ com ganho G_1 , como mostrado na Figura 2.12.

Figura 2.12: Adição dos ramos incidentes no nó $M(s)$

A variável $N(s)$ é o valor de $M(s)$ multiplicado por G_2 e portanto existe um ramo incidente em $N(s)$ vindo de $M(s)$ com ganho G_2 . O valor de $Y(s)$ é o valor de $N(s)$ e portanto existe um ramo incidente em $Y(s)$ com ganho 1. O diagrama até este ponto é mostrado na Figura 2.13.

Figura 2.13: Adição dos ramos incidentes nos nós $N(s)$ e $Y(s)$

Finalmente a variável $O(s)$ corresponde ao valor de $N(s)$ multiplicado por G_3 . Portanto um ramo parte de $N(s)$ e termina em $O(s)$ com ganho G_3 . Com isto o diagrama de fluxo de sinal está completo, como mostrado na Figura 2.14.

Figura 2.14: Adição do ramo incidente no nó $O(s)$

Exemplo 2.4.2 Apresentado em sala de aula

Exemplo 2.4.3 Apresentado em sala de aula

Exemplo 2.4.4 Apresentado em sala de aula

2.4.5 Regra de Mason

A função de transferência de um sistema pode ser determinada a partir do diagrama de fluxo de sinal através da regra de Mason. Esta regra é útil em casos onde é muito difícil determinar a função de transferência equivalente de um diagrama de blocos usando a álgebra de blocos.

A regra de Mason é dada por

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_i G_i \Delta_i \quad (2.4.1)$$

onde:

$G_i \rightarrow$ Ganho do i -ésimo caminho direto

$\Delta = 1 - \sum$ (todos os ganhos das malhas individuais)

+ \sum (produto dois à dois dos ganhos das malhas que não se tocam)

- \sum (produto três à três dos ganhos das malhas que não se tocam)

+ \sum (produto quatro à quatro dos ganhos das malhas que não se tocam)

- \sum (produto cinco à cinco dos ganhos das malhas que não se tocam)....

$\Delta_i \rightarrow$ Valor de Δ para a parte do diagrama que não toca o i -ésimo caminho direto.

Exemplo 2.4.5 Considere o sistema dado pela Figura 2.4.5

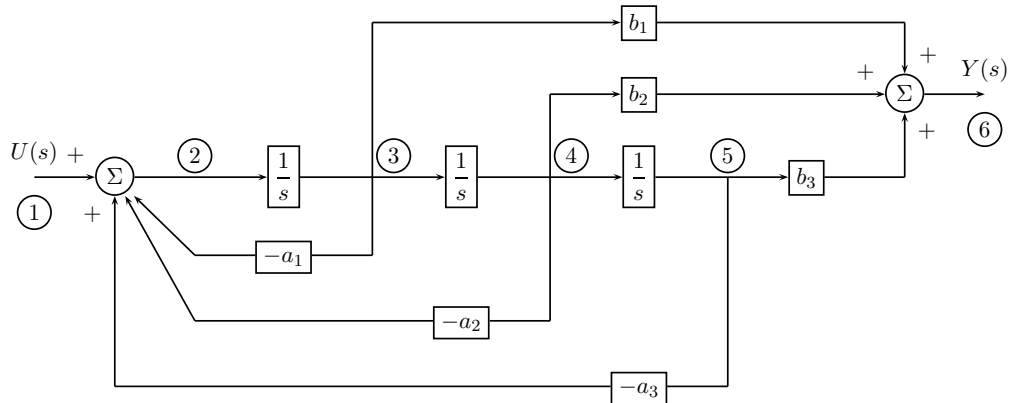


Figura 2.15: Diagrama de blocos

O diagrama de fluxo de sinal correspondente é apresentado em sala de aula. Usando-se a regra de Mason tem-se:

<i>Caminho Direto</i>	<i>Ganho</i>
1236	$G_1 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot b_1 \cdot 1$
12346	$G_2 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot b_2 \cdot 1$
123456	$G_3 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot b_3 \cdot 1$
<i>Malha</i>	
232	$l_1 = \frac{1}{s} \cdot (-a_1)$
2342	$l_2 = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot (-a_2)$
23452	$l_3 = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot (-a_3)$

Determinantes

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3) + 0$$

$$\Delta_1 = 1 - 0$$

$$\Delta_2 = 1 - 0$$

$$\Delta_3 = 1 - 0.$$

Aplicando a fórmula temos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 G_i \Delta_i \right) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

Exemplo 2.4.6 Apresentado em sala de aula

Caminho direto

12456

1236

Ganho

$$G_1 = H_1 H_2 H_3$$

$$G_2 = H_4$$

Malha

242

454

565

236542

$$l_1 = H_1 H_5 \quad \text{Não toca} \quad l_3$$

$$l_2 = H_2 H_6$$

$$l_3 = H_3 H_7 \quad \text{Não toca} \quad l_1$$

$$l_4 = H_4 H_7 H_6 H_5$$

Determinantes

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 l_3) - 0$$

$$\Delta_1 = 1 - 0$$

$$\Delta_2 = 1 - l_2 + 0.$$

Logo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} (G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2)$$

2.5 Representação genérica de sistemas de controle por diagramas de blocos

Com o conhecimento deste capítulo sobre a representação de sistemas por diagramas de bloco e a álgebra de blocos podemos retornar à representação de sistemas de controle por várias formas.

De forma mais genérica, um sistema de controle pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.16.

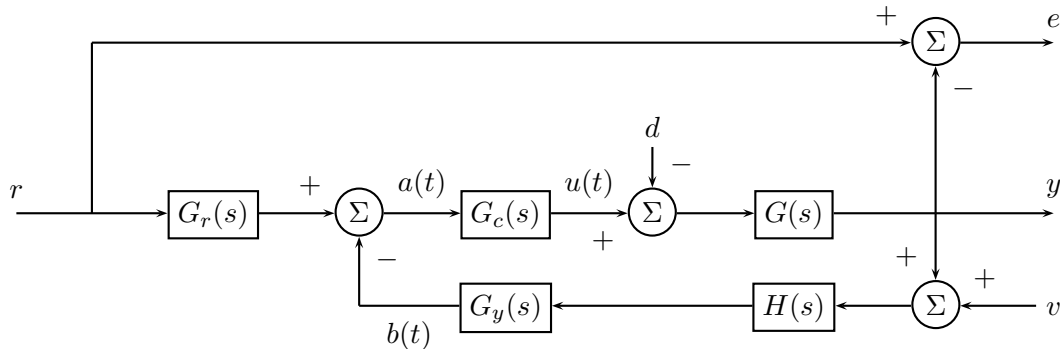


Figura 2.16: Diagrama de blocos típico de um sistema de controle

Neste diagrama os seguintes elementos são definidos

$G_r(s)$ Pré-filtro da referência;

$G_y(s)$ Pré-filtro de saída;

$G_c(s)$ Dinâmica de controle e do atuador (potência);

$d(t)$ Perturbação ou distúrbio da carga;

$v(t)$ Ruído de medida;

$G(s)$ F.T. do sistema a ser controlado (planta);

$H(s)$ F.T. do sensor/transdutor.

Observe que o sistema tem 3 entradas, a referência r , uma entrada de perturbação d e uma entrada de ruído v . Estas duas últimas se diferenciam pela faixa de frequências envolvidas. Enquanto a perturbação tem em geral componentes de baixa frequência, o ruído tem componentes de alta frequência. Em geral o ruído está associado ao medidor, mas diversas fontes de ruído podem estar presentes no sistema. O ponto onde o ruído entra no sistema depende da física do problema. A representação mostrada na Figura 2.16 deve-se ao fato de que em geral o ruído está associado ao medidor. No entanto, sempre é possível manipular o diagrama de blocos, usando a álgebra de blocos, para colocá-lo na forma apresentada na Figura 2.16, com a perturbação e o ruído entrando nos pontos indicados. Isto será mostrado mais adiante.

O sistema da Figura 2.16 apresenta 3 controladores: o controlador $G_c(s)$, o controlador G_y , na malha de realimentação e o controlador G_r na entrada. O controlador $G_c(s)$ é o controlador que será objeto de estudo neste texto. O controlador também pode ser colocado na malha de realimentação, mas não consideraremos este caso. Finalmente a função de transferência D_r tem em geral a função de converter a referência, velocidade, por exemplo, em um sinal elétrico. Da mesma forma, a função de transferência do medidor transforma um sinal, velocidade em rpm por exemplo, em um sinal elétrico a ser comparado no somador.

Uma observação importante é que o sinal $a(t)$, que sai do somador não é o sinal de erro. O sinal de erro é obtido neste diagrama genérico através de um segundo somador que compara a referência com a saída do sistema. Este somador não representa a física do modelo mas simplesmente é uma representação de uma operação matemática para obter o erro.

Usando a álgebra de blocos e supondo $G_r \neq 0$ e ainda desconsiderando-se o ruído, obtem-se o diagrama da Figura 2.17.

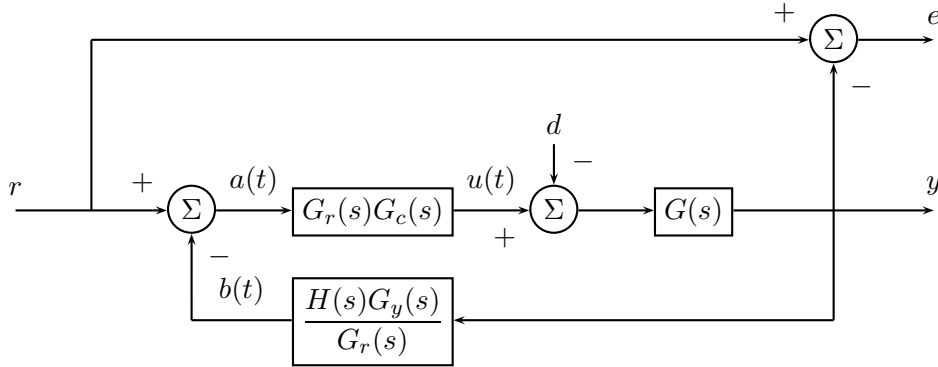


Figura 2.17: Diagrama de blocos simplificado do sistema de controle

Vamos considerar a seguir que $G_y = 1$ e $G_r = 1$, ou seja, não consideramos a existência de controlador na malha de realimentação e do pré-filtro. Vamos considerar ainda que a perturbação age diretamente na saída do sistema. Como observado anteriormente, a entrada de perturbação depende da física do problema. Na Figura 2.17 esta entrada antecede a planta. Usando álgebra de blocos, pode-se transferir esta entrada de modo que ela atua diretamente na saída. Note que uma perturbação equivalente, dada por $D' = G(s)D(s)$, pode ser definida. Manteremos a mesma notação $D(s)$ para a perturbação levada à saída do sistema, embora a perturbação transferida seja diferente. Com isto, o sistema é representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.18, onde não representamos o somador que fornece o erro. É importante salientar que isto não significa perda de generalidade. Poderíamos ter redefinido $G(s)$ e $H(s)$ na Figura 2.17 para ainda obter a Figura 2.18.

Um caso especial é o caso onde a realimentação é unitária. A realimentação unitária é obtida ou por manipulação do diagrama de blocos ou considerando que em geral a variável de interesse, que é a variável acessível, é a saída do medidor. Assim, em um processo onde a saída é uma vazão em litros por segundo,

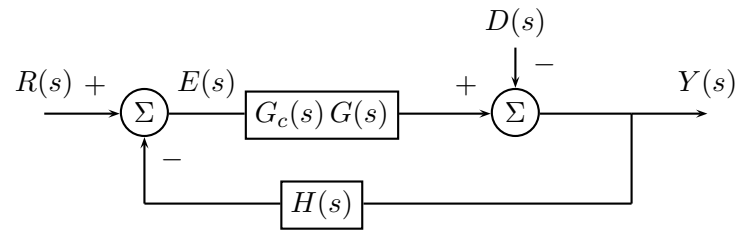


Figura 2.18: Sistema com perturbação levada a saída

a variável de interesse é a saída do medidor, em volts correspondentes a uma determinada vazão. Pode-se então, sem perda de generalidade, considerar em muitos casos o sistema tendo realimentação unitária, como mostrado na Figura 2.19. Neste caso observa-se que o sinal de saída do somador é o sinal do erro.

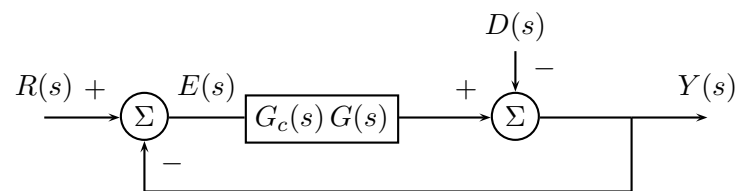


Figura 2.19: Sistema com realimentação unitária e perturbação levada à saída

Exercícios

1. Para o diagrama de blocos da Figura 2.20 determine:

- as funções de transferência $\frac{Y(s)}{R(s)}$, $\frac{Y(s)}{D(s)}$ e $\frac{E(s)}{R(s)}$, por redução do diagrama de blocos.
- o diagrama de fluxo de sinal.
- as mesmas funções de transferência usando a regra de Mason.

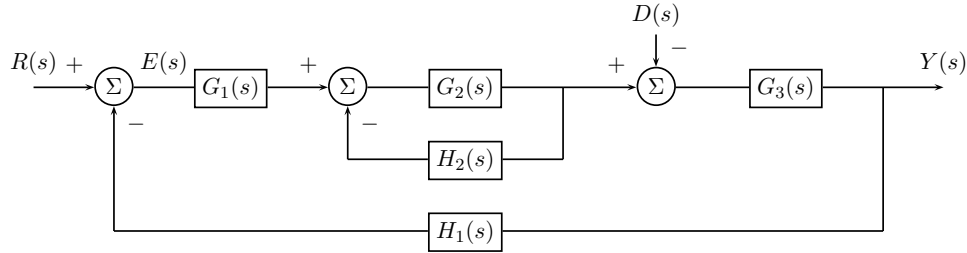


Figura 2.20: Diagrama de blocos do Exercício 1

2. Para o sistema mostrado na Figura 2.21

- construa o diagrama de blocos.
- determine a função de transferência $\frac{I_2(s)}{I_g(s)}$ por redução do diagrama de blocos.
- construa o diagrama de fluxo de sinal.
- determine a função de transferência $\frac{I_2(s)}{I_g(s)}$, usando a regra de Mason.

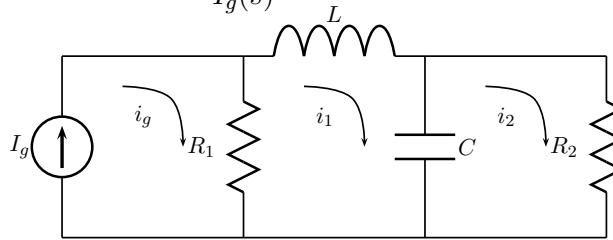


Figura 2.21: Figura para o Exemplo 2

3. Seja o sistema que consiste de um tubo de comprimento L , onde escoa um fluido com velocidade constante v . A temperatura na entrada do tubo é $u(t)$. A temperatura do fluido na saída é $y(t)$. Não existem perdas térmicas ao longo do tubo. Determine a função de transferência $\frac{Y(s)}{U(s)}$. Defina a constante de tempo $T \triangleq \frac{L}{v}$. O que se conclui de um sistema que apresenta retardo puro? Qual o termo que representa este retardo na função de transferência?

4. Para o sistema da Figura 2.22

- Determine as funções de transferência $\frac{Y(s)}{R_i(s)}$ para $i = 1 \dots 4$ e $\frac{Y(s)}{E(s)}$
- Determine $Y(s)$ usando o princípio da superposição.

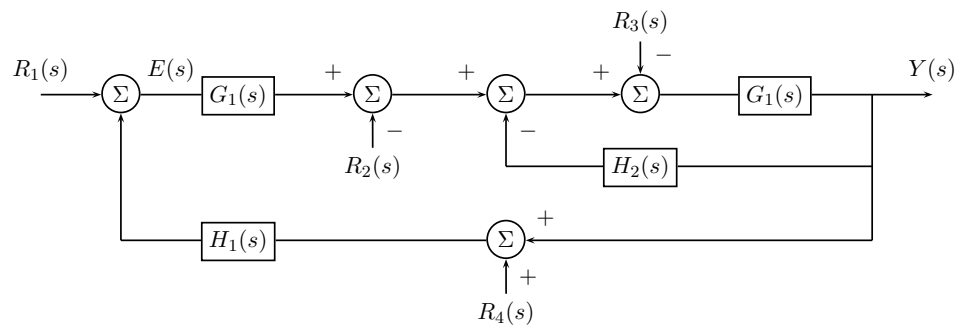


Figura 2.22: Diagrama de blocos do Exercício 4

- c. Construa o diagrama de fluxo de sinal e determine as mesmas funções de transferência usando a regra de Mason.

CAPÍTULO 3

Resposta de sistemas de controle

3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo estudar a resposta no tempo e na frequência de sistemas dinâmicos e em particular o uso dos resultados na determinação da resposta de sistemas de controle. Estudaremos a resposta no tempo e a resposta no domínio da frequência. Mostraremos ainda a relação entre as duas respostas. Um sistema dinâmico invariante no tempo pode ser representado por uma equação diferencial ordinária ou por sua função de transferência. Neste capítulo o interesse maior é na determinação da resposta a partir do uso da função de transferência.

3.2 Sistemas de primeira e segunda ordem

A resposta de sistemas dinâmicos, a partir da função de transferência, é determinada pelos pólos e zeros daquela função e pelo sinal de entrada do sistema. Embora sistemas de controle possam ter ordem elevada, muitos sistemas reais apresentam dominância de primeira ou segunda ordem. Ou seja, embora a função de transferência que representa o sistema tenha ordem elevada, pode-se usar um modelo de primeira ou segunda ordem para representá-lo. Mesmo representando o sistema com o modelo completo, pode-se sempre considerar a resposta como constituída de uma soma de respostas de sistemas de primeira e segunda ordem ao mesmo sinal de entrada. Para isto basta fazer a decomposição da função de transferência em frações parciais. Portanto o estudo da resposta de sistemas de primeira e segunda ordem é essencial para especificar a resposta de sistemas de ordem mais elevada. Os sinais de entrada podem ter qualquer forma, mas novamente, pode-se considerar alguns sinais padrão como indicando o comportamento do sistema de controle.

Tanto a resposta no tempo como a resposta em frequência são de interesse para o estabelecimento de figuras de mérito para a análise e o projeto de sistemas de controle. Na sequência serão estudadas as respostas de sistemas de primeira e segunda ordem a alguns sinais padrão, inicialmente no domínio do tempo e depois no domínio da frequência.

3.3 Resposta no tempo

A resposta no tempo está associada a posição dos pólos e zeros da função de transferência que representa o sistema. A resposta no tempo fornece algumas figuras de mérito importantes para a análise e projeto.

O tempo de resposta ou acomodação é uma destas figuras.

Definição 5 *O tempo de resposta ou tempo de acomodação a $x\%$ é o tempo para a resposta do sistema entrar e permanecer em uma faixa de $x\%$ em torno do valor final da resposta.*

Os valores usuais de x são 5, 2 e 1. Denotaremos estes tempos de resposta por $t_{r5\%}$, $t_{r2\%}$ e $t_{r1\%}$, respectivamente.

3.3.1 Sistemas de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem, sem zero, tem uma função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{1 + s\tau} \quad (3.3.1)$$

Supondo que a entrada $U(s)$ é um degrau de valor E , ou seja $U(s) = \frac{E}{s}$ então a resposta $Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{1 + s\tau} \frac{E}{s} \quad (3.3.2)$$

ou, determinado a anti-transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, a resposta no tempo é dada por

$$y(t) = K E (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.3.3)$$

A resposta é uma exponencial, tendendo assintoticamente ao valor $K E$. O pólo da função de transferência é dado por $p = -\frac{1}{\tau}$. Observa-se que o pólo da função de transferência de $G(s)$ determina a forma da resposta, que pode ser expressa em função de e^{pt} .

O tempo de resposta a 5% pode ser calculado por $0.95 K E = K E (1 - e^{-\frac{t_{r5\%}}{\tau}})$ ou

$$t_{r5\%} = 3 \tau \quad (3.3.4)$$

O tempo de resposta a 2% pode ser calculado por $0.98 K E = K E (1 - e^{-\frac{t_{r2\%}}{\tau}})$ ou

$$t_{r2\%} = 3.9 \tau \quad (3.3.5)$$

O tempo de resposta a 1% pode ser calculado por $0.99 K E = K E (1 - e^{-\frac{t_{r1\%}}{\tau}})$ ou

$$t_{r1\%} = 4.6 \tau \quad (3.3.6)$$

3.3.2 Sistemas de segunda ordem

Para o caso de sistemas de segunda ordem, dois casos serão considerados:

- os dois pólos são reais
- os dois pólos são complexos conjugados

3.3.2.1 Caso de pólos reais

Neste caso a função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad (3.3.7)$$

com $\tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0$.

A resposta do sistema a um degrau $U(s) = \frac{E}{s}$ é dada por

$$Y(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \frac{E}{s} \quad (3.3.8)$$

ou, usando a transformada inversa de Laplace, com condições iniciais nulas:

$$y(t) = K \left(E + \frac{E\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_2 - \tau_1} + \frac{E\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2} \right) \quad (3.3.9)$$

Definindo-se $c_1 = \frac{E\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$ e $c_2 = \frac{E\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$,

$$y(t) = K(E + c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}) \quad (3.3.10)$$

Neste caso os pólos são reais e dados por $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ e $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$, sendo que a resposta pode ser expressa por

$$y(t) = K(E + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}) \quad (3.3.11)$$

Novamente os pólos determinam a forma da resposta do sistema. Se um dos pólos for dominante, ou seja, se um dos pólos estiver bem mais próximo do eixo imaginário que o outro, a resposta inicial apresentará a contribuição dos dois pólos, mas a contribuição do pólo associado à constante de tempo mais rápida logo desaparece permanecendo somente a contribuição de um único pólo. A resposta do sistema de segunda ordem será então bem semelhante a uma resposta do tipo primeira ordem.

3.3.2.2 Caso de pólos complexos

Consideraremos a função de transferência como sendo dada por

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

com os pólos dados por $p_1 = \sigma \pm j\omega_p$, onde $\sigma = -\zeta\omega_n$ e $\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. A resposta no domínio do tempo é dada por

$$y(t) = K \left(\frac{E(\sigma^2 + \omega_p^2) e^{(\sigma + j\omega_p)t}}{-2\omega_p^2 + 2\sigma\omega_p j} + \frac{E(\sigma^2 + \omega_p^2) e^{(\sigma - j\omega_p)t}}{-2\omega_p^2 - 2\sigma\omega_p j} + E \right) \quad (3.3.12)$$

ou, definindo-se $c_1 = \frac{E(\sigma^2 + \omega_p^2)}{-2\omega_p^2 + 2\sigma\omega_p j}$ e $c_2 = \frac{E(\sigma^2 + \omega_p^2)}{-2\omega_p^2 - 2\sigma\omega_p j}$ tem-se

$$y(t) = K(c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + E) \quad (3.3.13)$$

onde $c_1 = \bar{c}_2$, e a barra denota o conjugado.

Pode-se escrever então

$$c_1 = \rho e^{j\phi t} \quad (3.3.14)$$

$$c_2 = \rho e^{-j\phi t} \quad (3.3.15)$$

e a Equação 3.3.13 pode ser escrita como

$$y(t) = K(\rho e^{j\phi t} e^{\sigma t} e^{-j\omega_p t} + \rho e^{-j\phi t} e^{\sigma t} e^{j\omega_p t}) \quad (3.3.16)$$

ou ainda

$$y(t) = K(\rho e^{\sigma t} e^{j(\omega_p t + \phi)} + \rho e^{\sigma t} e^{j(\omega_p t + \phi)}) \quad (3.3.17)$$

Portanto a resposta pode ser dada por

$$y(t) = K(Me^{\sigma t} \cos(\omega_p t + \phi) + E) \quad (3.3.18)$$

onde $M = 2\rho$. Portanto a resposta de um sistema de segunda ordem, com pólos complexos, tem uma componente senoidal, com uma envoltória dada por $e^{\sigma t}$. A frequência da senóide é ω_p .

Verifica-se então uma associação entre a posição dos pólos no plano complexo e a forma da resposta. Os pólos complexos podem ser expressos como $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, onde ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência natural de amortecimento. A frequência $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a frequência natural da oscilação e corresponde à parte imaginária do pólo. A Figura 3.1 mostra a relação entre a posição dos pólos no plano complexo e aquelas grandezas. O ângulo θ mostrado na figura é tal que $\cos \theta = \zeta$.

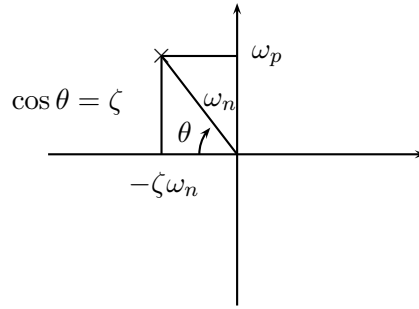


Figura 3.1: Relação entre pólos e características da resposta

Um simples cálculo mostra que $\frac{\sigma}{\omega_p} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$. O coeficiente de amortecimento é uma indicação do decaimento da resposta com o tempo. Para $\zeta = 0$ tem-se $\sigma = 0$, a senóide mantém uma amplitude constante, com uma frequência de oscilação $\omega_p = \omega_n$. Ou seja, a frequência natural é a frequência na qual o sistema oscila quando o amortecimento é zero. Para baixos valores de ζ tem-se que $\zeta \approx \frac{\sigma}{\omega_p}$.

Algumas figuras de mérito são definidas, do mesmo modo que para sistemas de primeira ordem, as quais dão indicações sobre a resposta do sistema. Para sistemas de segunda ordem, subamortecidos, as seguintes figuras de mérito são usadas:

Tempo de resposta ou acomodação : mesma definição usada anteriormente. O tempo de resposta pode ser dado na forma de ábacos ou calculado através de fórmulas aproximadas. As fórmulas aproximadas usam a envoltória da resposta para determinar o tempo de resposta. Da Equação (3.3.18) segue que o desvio da resposta final E do sistema deve-se a uma exponencial multiplicada pelo termo em *coseno*. Podemos considerar, fazendo uma aproximação, que os tempos de resposta a 1%, 2% e 5%, correspondem ao tempos em que a exponencial passa de seu valor máximo em $t = 0$ para 1%, 2% e 5%, respectivamente. Obtem-se assim os seguintes tempos de resposta:

$$\begin{aligned} e^{-\zeta\omega_n t_{r_{1\%}}} &= 0.01 &=:& \quad t_{r_{1\%}} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \\ e^{-\zeta\omega_n t_{r_{2\%}}} &= 0.02 &=:& \quad t_{r_{2\%}} = \frac{3.9}{\zeta\omega_n} \\ e^{-\zeta\omega_n t_{r_{5\%}}} &= 0.05 &=:& \quad t_{r_{5\%}} = \frac{3.0}{\zeta\omega_n} \end{aligned}$$

Tempo de subida É o tempo que leva para a resposta variar de 10% a 90% do valor final. Este valor é dado aaproximadamente por

$$t_s \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

Sobressinal ou ultrapassagem É a diferença entre o valor do primeiro pico da resposta e o valor final da resposta. Este valor pode ser calculado a partir da resposta do sistema de segunda ordem. Derivando-se a resposta obtém-se

$$M_p = e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Tempo do sobressinal É o tempo no qual ocorre o valor da primeira ultrapassagem. O tempo da primeira ultrapassagem ou do sobressinal é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$$

Estas figuras de mérito estão ilustradas na Figura 3.2.

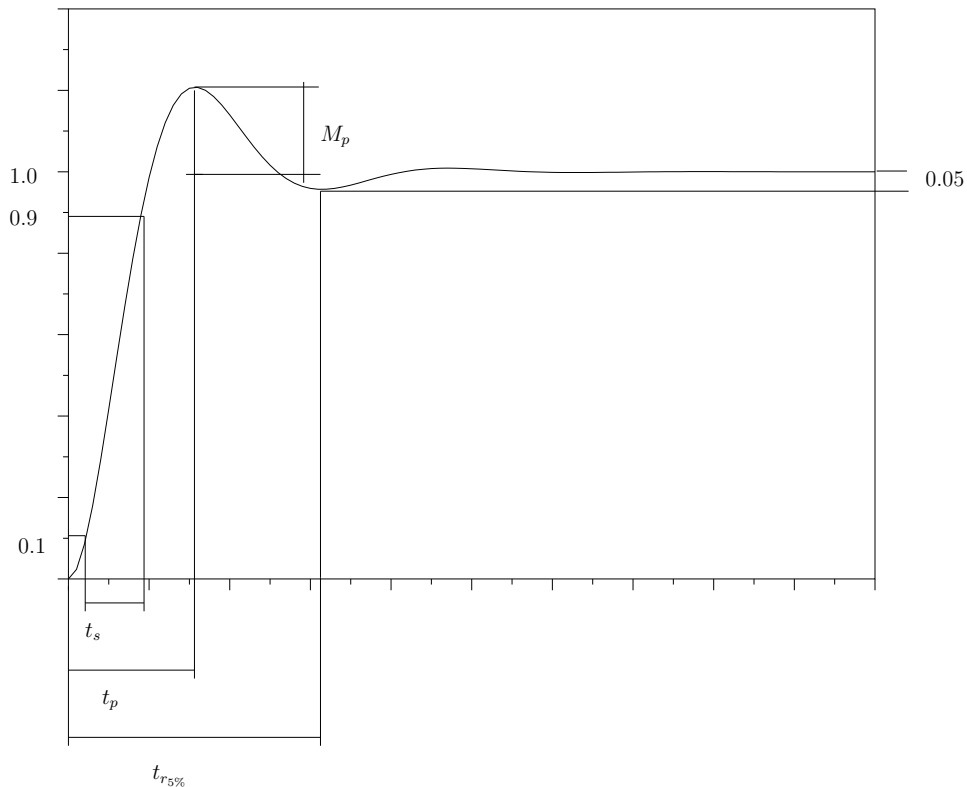


Figura 3.2: Figuras de mérito para sistema de segunda ordem

3.3.3 Efeito dos zeros

Ilustraremos o efeito dos zeros através da resposta no tempo de funções de transferência de segunda ordem sem zeros, com um zero no lado esquerdo do plano complexo e com um zero no lado direito. Usaremos o **Scilab** para determinar as respostas. A entrada será um degrau unitário. A função de transferência para o caso sem zeros é

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

O programa em **Scilab** para traçar o gráfico da resposta é

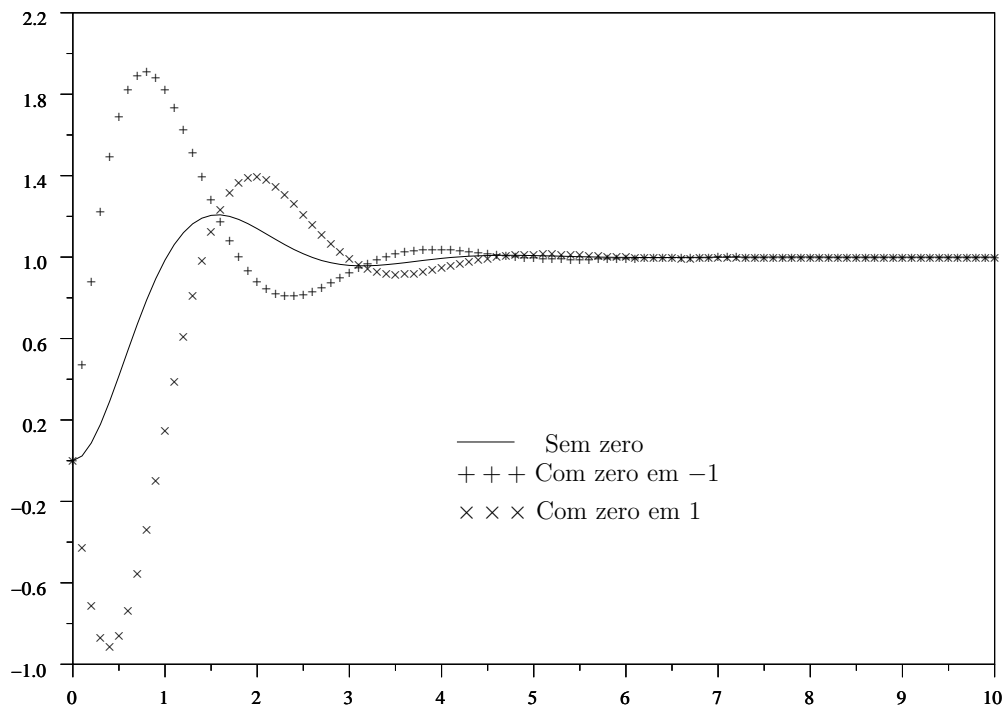


Figura 3.3: Resposta do sistema com e sem zeros

```
s=%s;
g=5/(s^2+2*s+5);
g=syslin("c",g);
t=0:0.1:10;
y=csim("step",t,g);
plot2d(t,y);
```

onde a função de transferência g deve ser modificada para incluir efeito de zeros. Para um zero no semi-plano esquerdo, em -1 , a função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 5}$$

e para um zero no semi-plano direito, em $+1$, a função de transferência é

$$G(s) = \frac{5(1-s)}{s^2 + 2s + 5}$$

A resposta para os três casos é mostrada na Figura 3.3.

3.4 Resposta em frequência

A resposta em frequência de um sistema tem uma relação direta com a resposta no domínio do tempo. As abordagens no tempo e frequência se complementam e o domínio da frequência permite vislumbrar

informações adicionais sobre o comportamento do sistema. A resposta no domínio da frequência baseia-se na decomposição de um sinal como uma soma de sinais exponenciais. No caso de sinais periódicos, esta decomposição baseia-se na série de Fourier, onde o sinal é expresso como uma soma de senos e cossenos com frequências discretas. Para sinais não periódicos, o sinal é expresso como uma soma de senos e cossenos com frequência contínua, o que leva à transformada de Fourier. Para sinais crescentes no tempo tem-se a Transformada de Laplace. Todas estas abordagens são estudadas em teoria de sistemas lineares e não serão repetidas aqui.

O ponto principal a ser desenvolvido nesta seção é de que a resposta de um sistema a um determinado sinal pode ser estudada em termos do efeito do sistema sobre as componentes de frequência do sinal. Isto pode ser feito usando o diagrama de Bode do sistema. No estudo seguinte, o nosso interesse será em sistemas de segunda ordem, mas as mesmas idéias se aplicam a sistemas de qualquer ordem. Em geral, sistemas reais tem um par de pólos dominantes que domina a resposta do sistema.

A frequência de corte é uma característica importante de um sistema de segunda ordem estando associado tanto à velocidade de resposta do sistema como à banda passante ou faixa de passagem, ou seja às frequências que são transmitidas pelo sistema. A frequência de corte é definida como o valor de frequência para a qual o sistema tem uma redução de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou -3 dB com relação ao valor em regime. Para uma função de transferência $G(s)$ o valor da frequência de corte corresponde ao valor $G(0) - 3 \text{ dB}$, ou, em unidades físicas, a uma redução do valor em

A Figura 3.4 apresenta a resposta em frequência com a indicação da frequência de corte e a banda ou faixa de passagem, para um sistema.

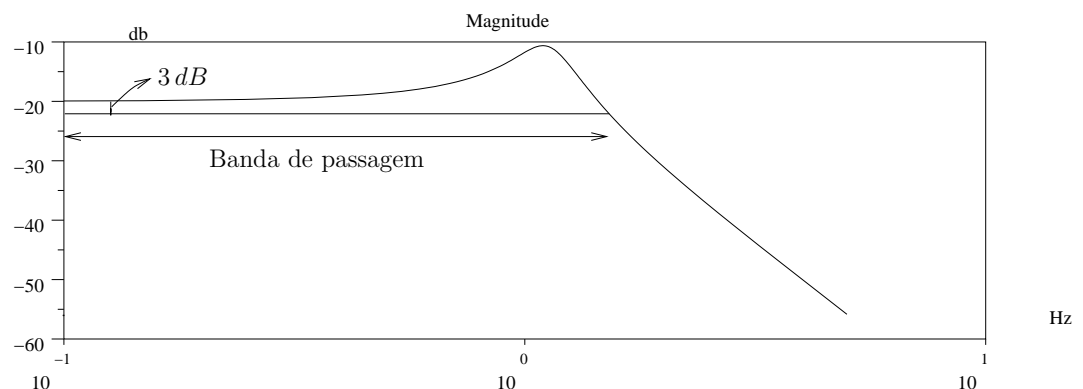


Figura 3.4: Resposta em frequência de um sistema

Do diagrama da Figura 3.4 pode-se observar que a partir da frequência de corte o ganho do sistema é reduzido. Um sinal de entrada rápido tem componentes de frequência elevada. Componentes do sinal de entrada com frequências maiores do que a frequência de corte são filtradas pelo sistema, além de sofrerem um atraso maior no tempo, devido à característica de fase do sistema. Se a frequência de corte for reduzida, o sinal de saída terá componentes de baixa frequência e a resposta do sistema será lenta. Pode-se então concluir que quanto menor a frequência de corte, mais componentes de frequência serão cortadas e mais lento será o sinal.

Conclui-se então que para se ter um sistema com resposta rápida a frequência de corte do sistema deve ser elevada.

Além da banda de passagem, um outro parâmetro de interesse é o pico apresentado pelo diagrama de Bode, que depende do amortecimento associado aos pólos complexos do sistema. Quando menor o amortecimento, maior é o valor do pico. Este pico não existe para o caso de pólos reais. Portanto, além

da informação sobre o tempo de resposta dado pela frequência de corte, o tamanho do pico no diagrama de Bode dá uma informação sobre o amortecimento. Para sistemas de ordem mais elevada, a presença de um ou mais picos de valor elevado indica a presença de pólos pouco amortecidos no sistema.

É interessante analisar o efeito de zeros na função de transferência. Para isto, adicionamos um zero à função de transferência usada na Figura 3.4. A resposta é mostrada na Figura 3.5. Zeros aumentam

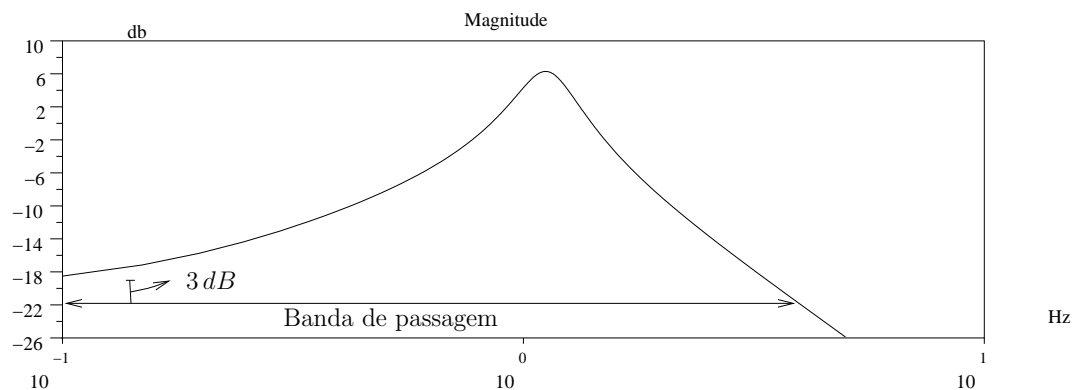


Figura 3.5: Resposta em frequência de um sistema com zero adicionado

o ganho do sistema a partir da frequência onde eles ocorrem. Assim o efeito da presença de zeros é amplificar a magnitude nas frequências mais altas e portanto tornar a resposta mais rápida.

3.5 Resposta no tempo e na frequência de sistemas em malha fechada

Para o caso de sistemas de controle em malha fechada, os mesmos princípios anteriores se aplicam. Neste caso a função de transferência de interesse é a função de transferência de malha fechada.

Um aspecto particular no caso de sistemas de malha fechada é a relação que se pode estabelecer entre a banda de passagem da resposta em frequência de **malha fechada** e a frequência de cruzamento de ganho do sistema em **malha aberta**. A frequência de cruzamento de ganho, a ser estudada nos próximos capítulos, corresponde à frequência onde o ganho do diagrama de Bode do sistema em malha aberta 0 dB . O interesse aqui é usar informações da malha aberta para concluir sobre a resposta no tempo do sistema em malha fechada.

A frequência de cruzamento de ganho do sistema em **malha aberta** pode ser usada como uma estimativa (grosseira) da frequência de corte do sistema em **malha fechada**. Assim se a frequência de cruzamento de ganho é baixa, o sistema de malha fechada terá uma resposta lenta. Se esta frequência for elevada o sistema será mais rápido. No entanto, nem sempre é desejável aumentar muito a frequência de cruzamento de ganho e portanto a faixa de passagem do sistema de malha fechada. Um fator que limita a faixa de passagem é a existência de ruído, como visto na próxima seção.

3.6 Resposta em frequência e ruído

Várias fontes de ruído estão presentes em um sistema de controle. Componentes eletrônicos, escovas de motores são exemplos de geradores de ruído. Um modelo para o ruído é o chamado ruído branco. A característica deste ruído é ter um espectro de frequência uniforme para todas as frequências. Um

modelo chamado ruído colorido é obtido passando um ruído branco através de um filtro linear. Mas a característica do ruído é ter componentes significativas em altas frequências.

Um sistema com resposta rápida tem uma banda de passagem larga e portanto filtra pouco o ruído. Um sistema com resposta lenta tem uma banda de passagem estreita e portanto tem maior efeito de filtrar o ruído.

No projeto de sistemas de controle, deve-se conciliar os requisitos de rapidez de resposta e filtragem de ruído.

3.7 Conclusões sobre o efeito de pólos e zeros

A partir do estudo anterior pode-se tirar algumas conclusões sobre o efeito de pólos e zeros

Localização dos pólos Quanto mais à esquerda estiver localizado o pólo mais rápida será a componente da resposta no tempo devida a este pólo. O pólo mais à direita tem uma componente de resposta mais lenta e domina a resposta temporal.

Zeros próximos de zeros Os zeros de uma função de transferência diminuem o efeito dos pólos que estão próximos à ele. Quanto mais próximo maior a diminuição.

Variações rápidas de sinais Pólos filtram variações bruscas do sinal de entrada e zeros amplificam.

Exercícios

1. Determine o tempo de resposta a 5% dos seguintes sistemas:

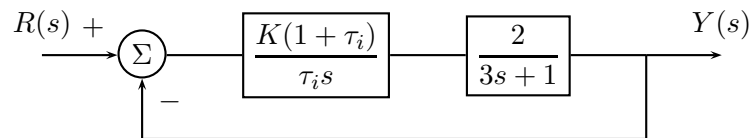
- $F(s) = \frac{2}{s+3}$
- $F(s) = \frac{1}{(s+4)(s+2)}$
- $F(s) = \frac{1}{4s^2 + 3s + 1}$

2. Para cada um dos casos abaixo, dizer se o sistema é amortecido, sub-amortecido, criticamente amortecido ou super-amortecido. Determine também o ganho estático, a razão de amortecimento e, onde aplicável, a frequência natural.

- $F(s) = \frac{25}{20s^2 + 36s + 45}$
- $F(s) = \frac{48}{s^2 + 10s + 16}$
- $F(s) = \frac{15}{25s^2 + 16}$
- $F(s) = \frac{100}{25s^2 + 40s + 16}$

3. Usando o **Scilab** trace as curvas de resposta a um degrau de amplitude 2 para cada um dos sistemas do Exercício 1.

4. Determine os valores de K e T para que o sistema abaixo se comporte como um sistema de segunda ordem com $\xi = 0,7$ e $\omega = 2 \text{ rad/seg}$.



5. Usando os parâmetros do exemplo anterior, use o **Scilab** para determinar a resposta no tempo $y(t)$ a um degrau de amplitude 2 em $R(t)$, ou seja $R(s) = \frac{2}{s}$. Observe o erro do sistema em regime permanente. Qual a razão para este valor de erro?

CAPÍTULO 4

Propriedades Básicas de Sistemas Realimentados

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar propriedades básicas de um sistema de controle realimentado. Estas propriedades estão relacionadas ao comportamento do sistema com relação a seguimento de uma referência, efeito de perturbações e variações paramétricas, e comportamento dinâmico do sistema. O seguimento de uma referência e o efeito de perturbações são caracterizados principalmente pelos erros do sistema em regime permanente. Variações paramétricas influenciam no comportamento do sistema segundo a sensibilidade do sistema com relação aos parâmetros. Finalmente uma exigência fundamental para um sistema de controle é a estabilidade. Esta característica intrínseca do sistema assegura que após uma perturbação limitada, a saída do sistema não aumentará indefinidamente. Neste capítulo, estas questões são inicialmente examinadas através de um exemplo. A seguir um estudo detalhado de cada aspecto é apresentado.

4.2 Propriedades e Funções de transferência básicas

Nesta seção analisaremos algumas funções de transferência relacionadas às propriedades que queremos estudar, especialmente o seguimento de referências e o efeito de perturbações e ruído. O diagrama de blocos do sistema é representado na Figura 4.1.

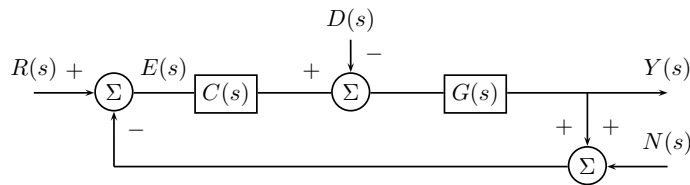


Figura 4.1: Configuração com realimentação unitária

Podemos considerar na função de transferência da Figura 4.1, as entradas como sendo a referência $R(s)$, a perturbação $D(s)$ e o ruído $N(s)$. A saída $Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = \frac{GC(s)}{1 + GC(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + GC(s)} - \frac{GC(s)}{1 + GC(s)} N(s) \quad (4.2.1)$$

Podemos então considerar três funções de transferência de interesse.

A função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{GC(s)}{1 + GC(s)} \quad (4.2.2)$$

relaciona a saída com a referência. Esta função

$$T = \frac{GC(s)}{1 + GC(s)} \quad (4.2.3)$$

é chamada de função de sensibilidade complementar.

A função de transferência

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + GC(s)} \quad (4.2.4)$$

relaciona a saída com a perturbação e é chamada de função de sensibilidade à perturbação.

A função de transferência

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{GC(s)}{1 + GC(s)} \quad (4.2.5)$$

relaciona a saída com o ruído e é chamada de função de sensibilidade ao ruído.

Além destas três funções de podemos definir uma quarta função de transferência definida como

$$S = \frac{1}{1 + GC(s)} \quad (4.2.6)$$

Esta função de transferência corresponde à relação entre o erro e a referência, ou seja,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + GC(s)} \quad (4.2.7)$$

Observa-se que esta função de transferência relaciona-se à função sensibilidade complementar por

$$S + T = 1 \quad (4.2.8)$$

Propriedades importantes de sistemas de controle em malha fechada podem ser analisadas a partir das propriedades destas funções de transferência. A seguir analisaremos algumas delas.

4.2.1 Rastreamento ou seguimento da referência (precisão)

Da Equação 4.2.1, considerando $R(s) = N(s) = 0$ segue que para obtermos um seguimento da referência, ou seja $Y(s) \approx R(s)$, deve-se ter $GC(s) \gg 1$. Pode-se concluir que elevados valores de ganho na malha direta assegura esta propriedade. Este ganho depende da planta e do controlador e varia com a frequência. No entanto o maior interesse é assegurar que em regime permanente a saída siga a referência, e um elevado ganho do controlador em baixas frequências é suficiente para assegurar um bom desempenho do sistema de controle em termos de rastreamento.

4.2.2 Rejeição de perturbações

Da função de transferência 4.2.1 a perturbação modifica o valor de saída através da função de sensibilidade à perturbação definida dada por

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + GC(s)} \quad (4.2.9)$$

Neste caso o objetivo é minimizar a magnitude desta função de sensibilidade assegurando boas propriedades de rejeição de perturbação. Isto é conseguido para elevados valores de $|1 + GC(s)|$. Note que isto ocorre para elevados valores de magnitude de $GC(s)$, quando a função de sensibilidade à perturbação se reduz a $\frac{1}{C(s)}$ e com ganhos elevados do controlador, tem-se redução do efeito da perturbação. Portanto a característica do controlador que assegura rastreamento da referência também assegura a propriedade desejada de rejeição de perturbação.

4.2.3 Sensibilidade ao ruído

Da função de sensibilidade ao ruído 4.2.5 e de 4.2.1 observa-se que o ruído afeta pouco a saída se $GC(s) \rightarrow 0$. Este requisito é conflitante com os requisitos anteriores de seguimento da referência e rejeição de perturbação. No entanto, o ruído tem componentes de alta frequência e se a magnitude $GC(s)$ tiver valores baixos em altas frequências e valores elevados em baixas frequências, pode-se conciliar os requisitos de rastreamento de referência, rejeição de perturbação e baixa sensibilidade a ruídos.

4.2.4 Sensibilidade paramétrica

Na obtenção de modelos de sistemas parte-se da hipótese de que os valores dos parâmetros são conhecidos e constantes. Na realidade variações nas condições de operação como mudanças de temperatura, desgaste de componentes, etc, provocam mudanças nos valores dos parâmetros. Assim, mesmo que os valores dos parâmetros tenham sido obtidos corretamente, e deve-se assinalar que, além de possíveis erros, alguns parâmetros podem ser difíceis de serem determinados, o controlador projetado usando o modelo irá operar em um sistema cujos parâmetros reais diferem do modelo.

O objetivo aqui é estudar o efeito que a variação paramétrica tem no ganho em regime permanente, ou seja, o ganho entre a entrada e a saída em regime permanente. Este ganho será representado por T . Na Figura 4.1 o ganho em regime permanente é dado por $\frac{GC(0)}{1 + GC(0)}$.

Definição 6 A *Sensibilidade Paramétrica*, do ganho T , em regime permanente, com relação a um parâmetro P , é definida por $S_P^T = \frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta P}{P}}$

Esta definição é geral e pode ser aplicada com relação a qualquer parâmetro do sistema. A interpretação desta definição é que ela indica a variação percentual do ganho para uma variação percentual de um parâmetro. A definição pode ser aplicada tanto para o ganho de malha aberta quanto para a malha fechada, o que é mostrado a seguir.

Nem sempre é possível uma aplicação direta desta definição. Se o ganho T for uma função não-linear do parâmetro em relação ao qual deve-se calcular a sensibilidade, então a expansão em série de Taylor, mantendo-se apenas os termos de primeira ordem, permite o cálculo da sensibilidade, ou seja:

$$T + \Delta T = T + \frac{dT}{dP} \Delta P + \dots \quad (4.2.10)$$

Considerando-se apenas o termo de primeira ordem,

$$\Delta T = \frac{dT}{dP} \Delta P \quad (4.2.11)$$

ou ainda

$$\frac{\frac{\Delta T}{T}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \quad (4.2.12)$$

e portanto a sensibilidade pode ser calculada como

$$S_P^T = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \quad (4.2.13)$$

4.2.5 Estabilidade

Um sistema de controle deve ser estável, ou seja, uma entrada limitada não deve produzir um aumento ilimitado da saída. A propriedade de estabilidade será estudada neste capítulo.

4.3 Estudo de Caso: Controle de velocidade

Esta seção ilustra as propriedades básicas de um sistema de controle usando o sistema de controle de velocidade apresentado no Capítulo 1. Mas aqui consideraremos a dinâmica do sistema, ou seja o sistema é representado por funções de transferência que descrevem o comportamento dinâmico do sistema e não apenas por simples ganhos. O exemplo compara sistemas em malha aberta e malha fechada, destacando as vantagens do sistema em malha fechada com relação às propriedades de rastreamento de referência, rejeição de perturbações, sensibilidade a ruído, sensibilidade a variação paramétrica e estabilidade.

4.3.1 Modelo do sistema

Os principais componentes do sistema de controle de velocidade descrito no Capítulo 1 são o motor de corrente contínua e a carga.

O motor de corrente contínua é representado por 3 equações:

Equação da armadura

$$e + L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a \quad (4.3.1)$$

onde e é a força eletromotriz, v_a é a tensão de armadura e R_a e L_a são a resistência e a indutância da armadura, respectivamente.

Equação da força eletromotriz

$$e = K_e \frac{d\theta_m}{dt} \quad (4.3.2)$$

onde θ_m é o ângulo mecânico e K_e é uma constante. É comum desprezar-se a indutância da armadura quando modela-se o motor de corrente contínua em aplicações de controle. Aqui manteremos o modelo completo o que levará a um modelo de segunda ordem para o sistema.

Equação do torque gerado

$$T_m = K_t i_a \quad (4.3.3)$$

onde T_m é o torque mecânico gerado pelo motor e K_t uma constante.

Segunda lei de Newton para o movimento de rotação

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + b \frac{d\theta_m}{dt} + d = T_m \quad (4.3.4)$$

onde J_m é a inércia do conjunto motor-carga, b representa um coeficiente de atrito e d representa a variação de carga que constitui a perturbação. Uma perturbação positiva corresponde a um aumento de carga e portanto a um maior torque resistente que deve ser contrabalançado pelo motor.

A velocidade é escolhida como variável de saída, ou seja, $y = \dot{\theta}_m$, e as equações (4.3.2) e (4.3.4) podem ser escritas como

$$e = K_e y \quad (4.3.5)$$

$$J_m \dot{y} + by + d = T_m \quad (4.3.6)$$

Tomando-se a transformada de Laplace das Equações (4.3.1), (4.3.3), (4.3.5) e (4.3.6) tem-se:

$$E(s) + L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) = V_a(s) \quad (4.3.7)$$

$$E(s) = K_e Y(s) \quad (4.3.8)$$

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \quad (4.3.9)$$

$$J_m s Y(s) + b Y(s) + D(s) = T_m(s) \quad (4.3.10)$$

Isolando-se $I_a(s)$ na Equação (4.3.7), usando-se as equações (4.3.8) e (4.3.9) e substituindo-se na Equação (4.3.10) obtém-se:

$$Y(s) = \frac{1}{A(s)} \left[\frac{K_t}{bR_a + K_e K_t} V_a(s) - (R_a + sL_a) D(s) \right] \quad (4.3.11)$$

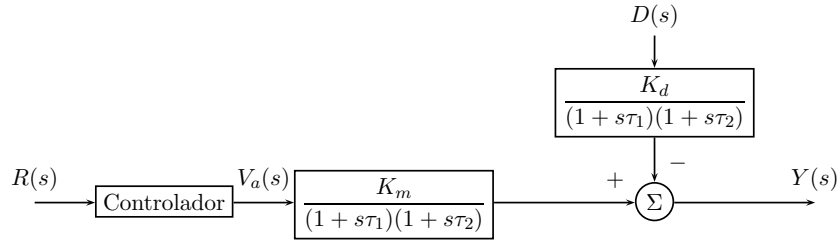


Figura 4.2: Modelo do sistema de controle de velocidade

onde

$$A(s) = \frac{J_m L_a}{b R_a + K_e K_t} s^2 + \frac{J_m R_a + b L_a}{b R_a + K_e K_t} s + 1 \quad (4.3.12)$$

O denominador $A(s)$ foi escrito, por conveniência, na forma mônica (termo independente igual a 1). Este termo pode ser fatorado na forma

$$A(s) = (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \quad (4.3.13)$$

onde $-\frac{1}{\tau_1}$ e $-\frac{1}{\tau_2}$ são as raízes de $A(s) = 0$.

Definindo-se ainda $K_m = \frac{K_t}{b R_a + K_e K_t}$ e $K_d = R_a + s L_a$ o modelo do sistema pode ser escrito como

$$Y(s) = \frac{K_m}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} V_a(s) - \frac{K_d}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} D(s) \quad (4.3.14)$$

O sistema pode ser então representado pela Figura 4.2 onde $R(s)$ correspondente à referência em um controlador a ser definido, foi incluído. Usando este modelo estudaremos a seguir o comportamento do sistema em malha aberta e em malha fechada.

4.3.2 Rastreamento e rejeição de perturbações

Um dos objetivos do sistema de controle de velocidade é manter a velocidade para uma referência especificada a despeito de perturbações que atuem no sistema. Consideraremos os casos do sistema em malha aberta e em malha fechada.

4.3.2.1 Controle em malha aberta

Neste caso o controlador é escolhido de modo que $v_a = K r$, e portanto o controlador é apenas um ganho K . O ganho K é determinado de tal maneira que $y(t) = r(t)$ no regime permanente quando $d(t) = 0$. Com $d(t) = 0$ e para assegurar que $y_{rp} = r$ o valor do ganho do controlador deve ser $K = \frac{1}{K_m}$. A saída em regime permanente é dada por

$$y_{rp} = K K_m r_0 = \frac{1}{K_m} K r_0 = r_0 \quad (4.3.15)$$

Portanto, sem perturbação é possível fazer a saída seguir a entrada com erro zero no regime permanente.

Consideraremos agora o caso que além da referência $R(s) = \frac{r_0}{s}$, tem-se uma perturbação constante (degrau) $D(s) = \frac{d_0}{s}$. Usando-se o teorema do valor final, tem-se que

$$y_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{A(s)} \left[K_m K \frac{r_0}{s} - K_d \frac{d_0}{s} \right] \quad (4.3.16)$$

ou

$$y_{rp} = r_0 - K_d d_0 \quad (4.3.17)$$

O erro é dado por $e(t) = r(t) - y(t)$. Em regime permanente o erro é

$$e_{rp} = K_d d_0 \quad (4.3.18)$$

Como não há controle sobre K_d , que depende dos parâmetros do sistema, o erro é proporcional à perturbação, sem que se possa controlá-lo, podendo ser muito grande para valores elevados do distúrbio.

4.3.2.2 Controle em malha fechada

Neste caso a tensão de armadura é dada por $V_a(s) = K [R(s) - Y(s)]$. Tem-se então

$$Y(s) = \frac{1}{A(s)} \{K_m K [R(s) - Y(s)] - K_d D(s)\} \quad (4.3.19)$$

Isolando-se $Y(s)$ tem-se

$$Y(s) = \frac{K_m K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) + K_m K} R(s) - \frac{K_d}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) + K_m K} D(s) \quad (4.3.20)$$

Consideremos o caso sem perturbação, $D(s) = 0$ e com referência $R(s) = \frac{r_0}{s}$. Usando-se o teorema do valor final tem-se

$$y_{rp} = \frac{K_m K}{1 + K_m K} r_0 \quad (4.3.21)$$

Usando-se um ganho elevado para o controlador, tem-se que

$$y_{rp} \approx r_0 \quad (4.3.22)$$

Consideremos agora o caso onde a perturbação é diferente de zero, e dada por $\frac{d_0}{s}$. Usando-se o teorema do valor final, tem-se:

$$y_{rp} = \frac{K_m K}{1 + K_m K} r_0 - \frac{K_d}{1 + K_m K} d_0 \quad (4.3.23)$$

Para valores elevados do ganho K do controlador tem-se que $\frac{K K_m}{1 + K_m K} \approx 1$ e $\frac{K_d}{1 + K K_m} \approx 0$, ou seja a perturbação afeta pouco a saída. No regime permanente, tem-se então

$$y_{rp} \approx r_0 \quad (4.3.24)$$

Observa-se que, com um valor elevado do ganho K , o efeito da perturbação é reduzido, ou seja a influência do distúrbio $d(t)$ no erro de regime é bem menor que em malha aberta. Deve-se observar, no entanto, que em geral não é possível aumentar o ganho do controlador a vontade, já que restrições de comportamento dinâmico limitam este valor. Da Equação (4.3.23) observa-se ainda que a mesma ação que diminui o erro à referência, ou seja, o aumento de ganho, é a mesma que diminui o efeito da perturbação.

4.3.3 Sensibilidade

O modelo do controle de velocidade foi obtido com a hipótese de que os valores dos parâmetros são conhecidos e constantes. Aqui vamos supor que uma mudança nos valores dos parâmetros mude o valor de K_m para $K_m + \Delta K_m$. Não vamos considerar a perturbação e portanto não consideraremos eventuais mudanças em K_d . Calcularemos a sensibilidade do ganho de malha aberta e do ganho em malha fechada com relação a variações de K_m .

4.3.3.1 Sensibilidade do ganho de malha aberta em regime permanente

O ganho do controle é o mesmo calculado anteriormente ($K = \frac{1}{K_m}$), e a entrada é um degrau de valor r_0 , como anteriormente.

$$\begin{aligned}\frac{y_{rp}}{r_0} &= T_{MA} + \Delta T_{MA} \\ &= K(K_m + \Delta K_m) \\ &= \frac{1}{K_m}(K_m + \Delta K_m) \\ &= \underbrace{1}_{T_{MA}} + \underbrace{\frac{\Delta K_m}{K_m}}_{\Delta T_{MA}}\end{aligned}$$

então, $\frac{\Delta T_{MA}}{T_{MA}} = \frac{\Delta K_m}{K_m}$.

Aplicando-se a definição de sensibilidade tem-se

$$S_{K_m}^{T_{MA}} = \frac{\frac{\Delta T_{MA}}{T_{MA}}}{\frac{\Delta K_m}{K_m}} = 1 \quad (4.3.25)$$

No caso da malha aberta, uma variação paramétrica de 10% no parâmetro K_m provoca 10% de variação no ganho em regime permanente.

4.3.3.2 Sensibilidade do ganho de malha fechada em regime permanente

Para malha fechada no regime permanente $T_{MF} = \frac{K_m K}{1 + K_m K}$ e o ganho é uma função não-linear do parâmetro K_m . Usaremos então a Equação (4.2.13), para calcular a sensibilidade.

Assim para a M.F. temos

$$\begin{aligned}S_{K_m}^{T_{MF}} &= \frac{K_m}{T_{MF}} \frac{dT_{MF}}{dK_m} \\ &= \frac{K_m}{\frac{K_m K}{1 + K_m K}} \frac{K(1 + K_m K) - K(K_m K)}{(1 + K_m K)^2} \\ &= \frac{1}{1 + K_m K}\end{aligned}$$

Comparando-se este resultado com o caso de malha aberta, conclui-se que o sistema em malha fechada é menos sensível a variações paramétricas. Esta sensibilidade pode ser reduzida aumentando o ganho do controlador.

4.3.4 Rastreamento Dinâmico

Um sistema de controle deve ser capaz não somente de rastrear um sinal de referência constante ou rejeitar uma perturbação constante, como também de rastrear ou rejeitar sinais que variam no tempo. Isto está relacionado à resposta dinâmica do sistema, ou seja, a rapidez de resposta e amortecimento apresentado por esta resposta.

Um controlador do tipo ganho constante, para o sistema de controle de velocidade que estamos considerando, em malha aberta, não tem efeito na dinâmica do sistema, pois os pólos são dados pelo denominador da função de transferência 4.3.14, $-\frac{1}{\tau_1}$ e $-\frac{1}{\tau_2}$ e não dependem do controlador.

Para o caso de malha fechada, no entanto, o mesmo controlador modifica a dinâmica do sistema, já que os pólos são as raízes do denominador da função de transferência 4.3.20.

Da mesma maneira, a resposta ao distúrbio não depende do controlador, no caso da malha aberta. Porém o controlador afeta a resposta ao distúrbio em malha fechada já que novamente os pólos são as raízes da função de transferência 4.3.20.

Uma escolha adequada do ganho K do controlador pode fornecer o desempenho transitório desejado, assegurando a capacidade de rastreamento dinâmico do sistema. A melhor escolha do ganho K do controlador é um compromisso entre vários fatores:

- Rapidez e pouca oscilação da resposta ao degrau do sinal de referência, o que está associado à posição dos pólos de malha fechada.
- Pouca influência do sinal de distúrbio e baixo erro em regime permanente, o que está associado a ganhos elevados.

Para conciliar estes requisitos, estruturas mais complexas de controladores podem ser necessários. No próximo capítulo os requisitos de projeto e as estruturas de controladores são abordados em detalhe.

4.4 Rastreamento em regime permanente (precisão) e tipo de sistema

4.4.1 Rastreamento e sinais padrão

Rastreamento se refere à capacidade do sistema de controle de seguir (rastrear) uma referência, ou seja, o erro entre a referência e a saída do sistema de controle é nula ou pequena. O erro em regime permanente é definido como $\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$.

É importante observar que o estudo em regime permanente só tem sentido se o sistema atinge um regime permanente. Este problema está associado ao conceito de estabilidade., que será estudado na próxima seção. Aqui partimos da hipótese de que o sistema é **estável**.

O erro em regime permanente é em geral estudado para 3 sinais padrão; o degrau, a rampa e a parábola. A razão da escolha destes sinais se deve ao requisito que um sistema de controle deve atender em termos de capacidade de rastreamento. Consideremos um uma usina geradora de energia elétrica. Um sistema de controle presente em todas as plantas geradoras é o sistema de controle de tensão. O objetivo é simplesmente manter a tensão constante. Neste caso a referência é um degrau. Consideremos ainda o exemplo da planta de geração. Um segundo laço de controle presente nestas plantas é o controle de frequência. Em determinados horários do dia (por exemplo, de manhã cedo e ao final do dia há um aumento de carga, que em geral cresce na forma de uma rampa de carga. A geração deve acompanhar a demanda e a referência neste caso é uma rampa. Finalmente, consideremos um radar seguindo um avião que acelera com aceleração constante. Neste caso, a referência do sistema de controle do radar é uma parábola.

Para o caso mais geral, a entrada de referência é um sinal genérico. A entrada de referência, neste caso, pode ser representada por um polinômio obtido através da série de Taylor. Em muitas aplicações a trajetória de referência não é conhecida a priori e por esse motivo é comum utilizar-se os primeiros termos da série de Taylor como base para o problema de rastreamento. A motivação para isso é que se o erro de rastreamento em regime permanente for pequeno para os primeiros termos da série, ele também será pequeno para uma grande classe de sinais de referência.

4.4.2 Tipos de sistema

Sistemas estáveis são classificados em **tipos de sistemas** conforme o grau do polinômio de entrada para o qual o erro em regime é constante. Assim, sistemas são do tipo 0, 1 e 2, se o erro é constante para polinômios de entrada de graus 0, 1 e 2, respectivamente.

O tipo do sistema pode ser definido com respeito às entradas de referência e/ou perturbação.

Suponha que a referência seja representada pela série

$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad (4.4.1)$$

Usando superposição vamos analisar o erro para cada parcela da soma, isto é, $r(t) = \frac{t^k}{k!}1(t)$, para um dado k , com transformada de Laplace correspondente dada por $R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$. Aqui $1(t)$ representa a função degrau unitário¹.

Vamos limitar o estudo até $k = 2$, mas tipos de sistema superiores a 2 poderiam ser definidos usando o mesmo princípio. A tabela a seguir resume os sinais padrão a serem usados.

k	$r(t)$
0	degrau unitário
1	rampa unitária (inclinação 1)
2	parábola unitária(derivada segunda com inclinação 1)

As parcelas acima recebem o nome de referência em posição ($k = 0$), velocidade ($k = 1$) e aceleração ($k = 2$).

4.4.2.1 Tipos de sistemas quanto a entrada de referência

Para calcular o erro de regime permanente para a entrada de referência devemos obter a função de transferência de $r(t)$ para $e(t)$. O sistema considerado é mostrado na Figure 4.3.

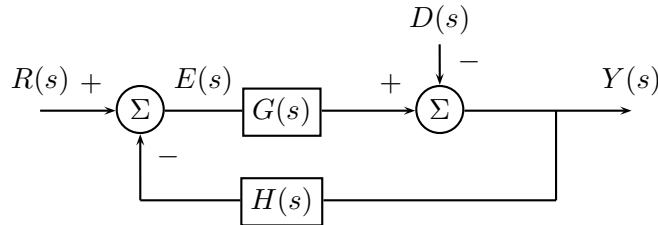


Figura 4.3: Sistema para o cálculo do erro em regime

A função de transferência $T(s)$, entre entrada e saída, é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.4.2)$$

onde $T(s)$ é a função de transferência de malha fechada. Como $E(s) = R(s) - Y(s)$ segue que

$$E(s) = (1 - T(s))R(s)$$

Esta é a equação geral do erro e pode ser usada em regime permanente ou transitório. O interesse aqui é o cálculo do erro em regime permanente.

Supondo-se que todos os pólos de $sE(s)$ estão no semi-plano esquerdo do plano complexo (parte real negativa), o que é verdade desde que o sistema foi suposto estável, pode-se aplicar o teorema do valor final para se obter o erro em regime permanente.

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 - T(s)}{s^{k+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - T(s)}{s^k} \quad (4.4.3)$$

Tabela 4.1: Caracterização do tipo de sistemas

k	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - T(s)}{s^k}$	tipo do sistema	propriedade
0	constante	0	erro constante para o degrau
1	constante	1	erro constante para a rampa
2	constante	2	erro constante para a parábola

Se este limite for constante e não nulo então o sistema é do tipo k . A Tabela 4.1 a seguir resume o resultado para $k = 0, 1, 2$. Note pela expressão do limite que um sistema do tipo 1 apresenta erro constante para rampa e conseqüentemente erro nulo para degrau ($k = 0$). Um sistema do tipo 2 tem erro constante para a parábola e erros nulos para o degrau e a rampa.

Tipos de sistema no caso de realimentação unitária No caso de realimentação unitária a identificação do tipo de sistema é direta. O sistema considerado é mostrado na Figura 4.4.

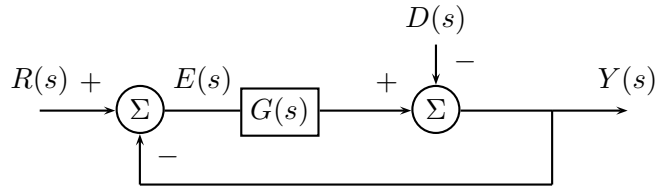


Figura 4.4: Sistema com realimentação unitária

Neste caso tem-se que $1 - T(s) = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$ e o erro é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Usando-se o teorema do valor final temos

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{(1 + G(s))s^{k+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + G(s))s^k} \quad (4.4.4)$$

Para um degrau $k = 0$ e, se o sistema é do tipo 0, o erro é constante e diferente de zero e dado por:

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (4.4.5)$$

onde

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (4.4.6)$$

recebe o nome de **ganho estático** ou **constante de erro de posição**.

Para uma entrada em rampa, $k = 1$, temos

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + G(s))s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \quad (4.4.7)$$

¹A função degrau unitário é comumente representada por $u(t)$

Para o sistema ser do tipo 1 devemos ter

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \text{constante} \neq 0 \quad (4.4.8)$$

o que ocorre apenas quando $G(s)$ possui um pólo na origem. Nessas condições temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = K_v \quad (4.4.9)$$

que recebe o nome de **ganho de velocidade** ou **constante de erro velocidade** e o erro de regime é dado por

$$e_{rp} = \frac{1}{K_v} \quad (4.4.10)$$

De forma análoga podemos deduzir que para uma entrada do tipo parábola, $k = 2$, o sistema será do tipo 2 se $G(s)$ possuir 2 pólos na origem e nesse caso teremos

$$e_{rp} = \frac{1}{K_a} \quad (4.4.11)$$

onde

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

recebe o nome de **ganho de aceleração** ou **constante de erro de aceleração**.

Portanto, no caso de realimentação unitária, a determinação do tipo do sistema quanto a entrada de referência é trivial. Basta verificar o número de integradores na função de transferência de malha direta. A Tabela 4.2 a seguir resume este caso.

Tabela 4.2: Resumo de tipos no caso de realimentação unitária

Tipo	$G(s)$	Erro ao degrau	Erro à rampa	Erro à parábola
0	$K_p \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
1	$\frac{K_v}{s} \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	$\frac{K_a}{s^2} \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Exemplo 4.4.1 Dado o sistema representado na Figura 4.5, que representa um problema de rastreamento de satélite por uma antena, determine o tipo do sistema com relação à entrada de referência.

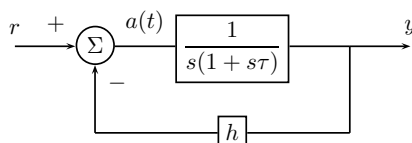


Figura 4.5: Problema de rastreamento de um satélite por uma antena

Seja $G(s) = \frac{1}{s(1+s\tau)}$. O erro é dado por

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s)(1 - T(s)) \\ &= R(s) \left(1 - \frac{G}{1+hG} \right) \\ &= \frac{1+(h-1)G}{1+hG} R(s) \end{aligned}$$

O erro de regime permanente para uma entrada degrau unitário é então dado por

$$\begin{aligned} e_{rp} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1+(h-1)G}{1+hG} \frac{1}{s} \\ &= \frac{h-1}{h} \end{aligned}$$

Para $h \neq 1$ (realimentação não unitária) o sistema é do tipo 0 (embora exista um integrador). Para $h = 1$, $e_{ss} = 0$ e o sistema é do tipo 1.

4.4.2.2 Tipo do Sistema com Relação à entrada de Perturbação

Da mesma forma como definimos tipo de sistema para entrada referência, podemos definir tipo de sistema para entradas de perturbação. No caso da perturbação, é importante entender o significado do erro. Para isto, consideramos a referência como zero. O erro será $e(t) = r(t) - y(t) = -y(t)$. Portanto, em regime permanente

$$\begin{aligned} e_{rp} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \end{aligned}$$

Portanto, para calcular o erro à entrada de perturbação basta obter a função de transferência entre perturbação e saída e aplicar a mesma idéia anterior, isto é, o sistema é do tipo 0 se perturbações do tipo degrau resultam um erro constante em regime permanente. Será do tipo 1 se uma perturbação rampa ocasiona um erro constante e assim por diante.

A saída é calculada, com $R(s) = 0$, por

$$Y(s) = T_d(s)D(s) \quad (4.4.12)$$

onde T_d é a função de transferência entre a entrada de perturbação e a saída.

Para o caso especial de realimentação unitária, o tipo do sistema será determinado pelo número de integradores localizados antes do ponto onde a perturbação é injetada. Um sistema do tipo 1 implica que a perturbação constante (degrau) não afeta a saída em regime permanente. Do mesmo modo, para um sistema do tipo 2, perturbações constantes ou em rampa não afetam a saída.

Exemplo 4.4.2 Tipo de sistema para um motor CC. Seja o sistema de controle de posição com motor DC, representado na Figura 4.6.

Os parâmetros são $\tau = 1$, $A = 1$, $K_l = 1$. Determine o tipo do sistema e propriedades com respeito à:

- referência em degrau;
- perturbação em degrau;

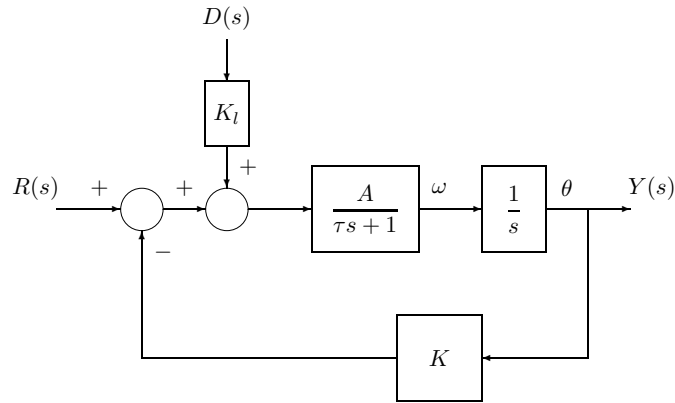


Figura 4.6: Sistema de controle de posição com motor CC

c. referência em rampa.

Solução:

a. F.T. de r para y ($d = 0$)

$$T(s) = \frac{1}{s(s+1) + k}$$

Erro do sistema:

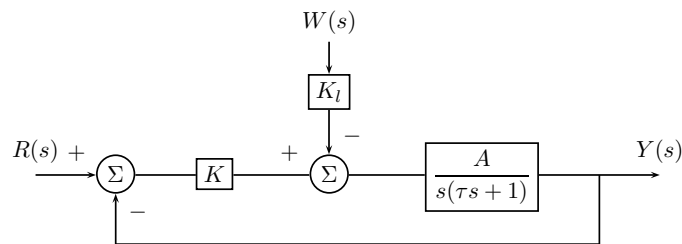
$$E(s) = R(s)[1 - T(s)] = \frac{s(s+1) + k - 1}{s(s+1) + k} R(s)$$

Para entrada em degrau $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1) + k - 1}{s(s+1) + k} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k-1}{k}$$

Para $k \neq 1$ temos $e_{rp} \neq 0$ embora exista um integrador no canal direto e o sistema é do tipo 0.

Vamos alterar um pouco a estrutura para considerar o caso onde a realimentação é unitária, como mostrado na Figura 4.7.



4

Figura 4.7: Configuração com realimentação unitária

Neste caso, o integrador no canal direto é capaz de eliminar erros da resposta ao degrau. Agora a nova função de transferência é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{k}{s(s+1) + k}$$

e para $R(s) = \frac{1}{s}$ (degrau unitário) temos

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

para qualquer K .

b. Para as duas configurações a função de transferência do distúrbio para a saída Y é

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = T_d(s) = \frac{1}{s(s+1)+k}$$

e para um distúrbio constante (degrau unitário) temos

$$e_{rp} = Y_{rp} = \frac{1}{k}$$

sistema tipo 0.

Logo o sistema é incapaz de rejeitar a perturbação completamente. O integrador no canal direto não é capaz de eliminar o erro de regime porque o distúrbio é injetado antes do integrador.

Em resumo: A F.T. de r para e , na figura (a) com $k = 1$ e na figura (b) com k arbitrário, é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+k}$$

A presença do zero na origem ("zero bloqueante") provocou erro nulo para degrau de referência. Como não existe zero bloqueado na F.T. $\frac{E(s)}{w(s)}$ o sistema não é capaz de rejeitar perturbações constantes.

c. Para entrada em rampa temos:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)+k-1}{s(s+1)+k} \frac{1}{s^2}$$

$$k \neq 1 =: e_{ss} = \infty$$

$$k = 1 =: e_{ss} = \frac{1}{k} = 1.$$

O erro é o mesmo para a figura (b).

4.5 Estabilidade

Todo sistema de controle deve ser capaz de operar em regime permanente e quando isto ocorre dizemos que o sistema é estável.

Estudaremos a seguir duas formas de se caracterizar a estabilidade de um sistema: estabilidade entrada-saída e estabilidade interna.

4.5.1 Estabilidade Entrada-Saída (BIBO-estabilidade)

Definição 7 Um sistema é **BIBO**-estável se entradas limitadas produzem saídas limitadas.

O termo **BIBO**-estabilidade vem das iniciais em inglês da expressão **B**ounded **I**input-**B**ounded **O**utput, ou seja, entrada limitada-saída limitada.

Definição 8 Um sinal $m(t)$ é limitado se existe um número M tal que $m(t) \leq M, \forall t$.

Por esta definição, o *seno* é limitado, enquanto uma rampa é um sinal ilimitado. Assim, uma entrada senoidal em um sistema estável vai produzir uma saída limitada. Já uma rampa, que é um sinal ilimitado, pode produzir um sinal de saída ilimitado mesmo em um sistema estável.

Seja $h(t)$ a resposta ao impulso do sistema. A seguir será demonstrado que um sistema é estável se, e somente se, a integral $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$ for limitada, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

A resposta $y(t)$ do sistema ao sinal de entrada $u(t)$ é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (4.5.1)$$

Se $u(t)$ é limitado então existe em M tal que $|u| \leq M < \infty$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

logo a saída será limitada se $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$ for limitada, ou seja a condição de suficiência foi demonstrada.

Por outro lado, supondo que $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau$ não é limitada, perguntamos se ainda $y(t)$ pode ser limitada, ou seja queremos provar a condição de necessidade da integral ser limitada. Como $y(t)$ deve ser limitada para todos os sinais de entrada limitados, basta escolher o sinal de entrada seguinte

$$\begin{cases} u(t - \tau) = 1, & \text{se } h(\tau) > 0 \\ u(t - \tau) = -1, & \text{se } h(\tau) < 0 \end{cases} \quad (4.5.2)$$

que resulta no sinal de saída

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (4.5.3)$$

que só é limitado se $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$ for limitada. Portanto esta é uma condição necessária.

Seria difícil demonstrar a estabilidade de um sistema a partir da definição de BIBO-estabilidade. Infinitos sinais limitados deveriam ser aplicados e as saídas correspondentes observadas. Felizmente existe um resultado que não demonstramos aqui, que permite um critério simples para a determinação da estabilidade.

A integral $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$ é limitada se, e somente se, a função de transferência a entrada e saída do sistema não possui pólos sobre o eixo imaginário ou no lado direito do plano complexo.

Conclusão: Um sistema é **BIBO**-estável se, e somente se, sua função de transferência não possuir pólos sobre o eixo imaginário no semi-plano direito.

4.5.2 Estabilidade Interna

Definição 9 *Um sistema linear é internamente estável se para entrada nula e qualquer condição inicial a resposta tende assintoticamente para zero.*

A resposta de entrada nula e condições iniciais dadas podem ser representadas por

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^m + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \\ &= \frac{k(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \end{aligned}$$

onde, $p_i(z_i)$ são as raízes do denominador(numerador), b_i, z_i são constantes definidas pelas condições iniciais. p_i são os pólos da função de transferência $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ do sistema. Os parâmetros a_i , e portanto os pólos p_i dependem dos parâmetros físicos do sistema e não das condições iniciais.

No domínio do tempo, a resposta é

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} \quad (4.5.4)$$

onde k_i depende das condições iniciais e p_i são os pólos do sistema.

Da Equação (4.5.4) segue que $y(t)$ tende assintoticamente para zero se, e somente se, todos os pólos da função de transferência possuírem parte real negativa, isto é $\text{Re}(p_i) < 0$.

Note que para sistemas lineares invariantes no tempo as duas noções de estabilidade acima estudadas são equivalentes e dependem apenas dos pólos da função de transferência satisfazerem a condição $\text{Re}(p_i) < 0$.

4.5.3 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

O estudo da estabilidade de sistemas de controle consiste em verificar a localização dos pólos de malha fechada da função de transferência do sistema. Os pólos são as raízes do polinômio denominador desta função. Existem vários métodos para se testar a localização das raízes de um polinômio. Em particular esses métodos são úteis na determinação de faixas (intervalos) onde os coeficientes do polinômio podem se encontrar de tal forma que suas raízes tenham parte real negativa garantindo assim a estabilidade.

Seja o polinômio

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.5.5)$$

Este polinômio pode ser fatorado da forma

$$a(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (4.5.6)$$

onde p_i , com $i = 1 \dots n$, são as raízes do polinômio, e a_n é suposto positivo.

Fazendo-se a multiplicação dos fatores, tem-se

$$\begin{aligned} a(s) &= a_n \left[s^n - \left(\sum_i p_i \right) s^{n-1} + \left(\sum \text{das raízes combinadas duas a duas} \right) s^{n-2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum \text{das raízes combinadas três a três} \right) s^{n-3} + \dots + (-1)^n (p_1 p_2 \dots p_n) \right] \end{aligned}$$

Observa-se que uma raiz nula implica no termo independente nulo. No caso de um sistema de controle, se o polinômio denominador da função de transferência tiver o termo independente nulo, isto já implica em sistema instável. Qualquer outro coeficiente nulo só pode ocorrer se existirem raízes com sinais opostos. Também da Equação (4.5.7) segue que, se o sistema for estável, então cada coeficiente do polinômio será positivo. Uma mudança de sinal dos coeficientes do polinômio já indica raízes no lado direito fechado do

plano complexo. No entanto, embora as condições de que todos os coeficientes sejam diferentes de zero e não apresentem mudança de sinal sejam necessárias, elas ainda não são suficientes para garantir que todas as raízes estão no lado esquerdo plano complexo.

Em 1874 Routh desenvolveu um critério direto de estabilidade, que permite verificar a localização das raízes de um polinômio sem que elas sejam explicitamente calculadas. Este critério usa a tabela ou arranjo mostrado a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & & \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & & \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 s^2 & * & * & & & & \\
 s^1 & * & & & & & \\
 s^0 & * & & & & &
 \end{array}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
 b_2 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
 b_3 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_{n-7}}{a_{n-1}} \\
 c_1 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1} \\
 c_2 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1} \\
 c_3 &= \frac{- \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_{n-7} - a_{n-1}b_4}{b_1}
 \end{aligned}$$

Este arranjo é construído seguindo um procedimento sistemático.

1. Na linha correspondente a s^n colocam-se os coeficientes do polinômio em ordem decrescente com relação ao grau dos termos, começando com o grau n , e pulando o coeficiente seguinte. Assim, os coeficientes de grau $n-2$, $n-4$ e assim sucessivamente, são posicionados.
2. Na linha seguinte, correspondente a s^{n-1} , colocam-se os coeficientes do polinômio que foram pulados na primeira linha, em ordem decrescente quanto ao grau.
3. Os coeficientes das linhas seguintes são calculados usando as duas linhas anteriores, como indicado acima.
4. Para as linhas correspondentes aos termos s^1 e s^0 , existe apenas um termo.

Critério de Routh O número de raízes no semi-plano direito é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela. Portanto todas as raízes estão no semi-plano esquerdo se todos os elementos da primeira coluna da tabela tiverem o mesmo sinal (positivos se $a_n > 0$).

Exemplo 4.5.1 *O polinômio*

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

possui todos os coeficientes positivos. Verifique se todas as raízes estão no SPE.

Solução: Construimos o arranjo de Routh,

$$\begin{array}{rcccc} s^6 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ s^5 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ s^4 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ s^3 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ s^2 & d_1 & d_2 & & \\ s^1 & e_1 & e_2 & & \\ s^0 & f_1 & & & \end{array}$$

onde os elementos são calculados por

$$b_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{5}{2} \quad b_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{4} = 0 \quad b_3 = \frac{- \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 4$$

$$c_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2,5 & 0 \end{vmatrix}}{2,5} = 2 \quad c_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2,5 & 4 \end{vmatrix}}{2,5} = \frac{-12}{5} \quad c_3 = \frac{- \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2,5 & 0 \end{vmatrix}}{2,5} = 0$$

$$d_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 2,5 & 0 \\ 2 & \frac{-12}{5} \end{vmatrix}}{2} = 3 \quad d_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 2,5 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = 4$$

$$e_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 2 & -\frac{12}{5} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-76}{15} \quad e_2 = \frac{- \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 0$$

$$f_1 = \frac{- \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ \frac{-76}{15} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-76}{15}} = 4$$

Como existem 2 trocas de sinal nos elementos da primeira coluna, concluímos que existem 2 raízes fora do SPE.

4.5.3.1 Propriedades e casos especiais

Existem algumas propriedades que simplificam a aplicação do critério de Routh-Hurwitz ou permitem resolver alguns casos especiais, como o aparecimento de zeros na primeira coluna. Estes resultados são teoremas, mas não apresentaremos demonstrações destes resultados.

Teorema 1 (Divisão ou multiplicação de uma linha por um número) *Os coeficientes de qualquer linha podem ser multiplicados ou divididos por um número positivo.*

Exemplo 4.5.2 *A ser apresentado em aula*

Teorema 2 (Coeficiente nulo na primeira coluna) Quando o primeiro elemento de uma das linhas for nulo, mas existem elementos diferente de zero na mesma linha, 3 procedimentos podem ser usados para aplicar o critério de Routh-Hurwitz:

1. Substituir s por $\frac{1}{x}$, onde x é uma nova variável em função da qual o polinômio será escrito. A tabela é então construída usando o novo polinômio.
2. Multiplicar o polinômio por $(s+a)$, com $a > 0$. Por conveniência, escolhe-se $a = 1$. O procedimento introduz uma raiz no polinômio localizada no semi-plano esquerdo e portanto não altera o resultado do critério de Routh-Hurwitz.
3. Substituir o zero por $\varepsilon \neq 0$, pequeno e com o mesmo sinal do termo da linha anterior, na primeira coluna, e prosseguir com a aplicação do método. O sinal dos elementos da primeira coluna é determinado considerando que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemplo 4.5.3 *A ser apresentado em aula*

Teorema 3 (Uma linha nula) Quando todos os elementos de uma linha forem nulos o polinômio tem raízes sobre o eixo imaginário ou reais simétricas em relação ao eixo imaginário. Para o caso de sistemas de controle isto já indica instabilidade, mas a aplicação do critério de Routh-Hurwitz produz informações importantes sobre a natureza das raízes do sistema e é interessante prosseguir com a aplicação do critério. Se a i -ésima linha é nula, formamos o seguinte polinômio auxiliar

$$a_1(s) = \beta_1 s^{i+1} + \beta_2 s^{i-1} + \beta_3 s^{i-3} + \dots \quad (4.5.7)$$

onde β_i são os coeficientes da linha anterior ($i-1$). Em seguida substituímos a linha nula pela linha formada com os coeficientes da derivada de $a_1(s)$ e completamos a tabela. Ao resultado obtido com a tabela deve-se adicionar o fato de que **as raízes de $a_1(s)$ também são raízes de $a(s)$** .

Exemplo 4.5.4 *Dado o polinômio*

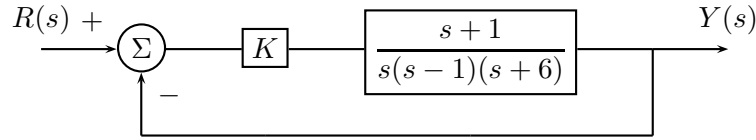
$$a(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 \quad (4.5.8)$$

	s^5	1	11	28	
	s^4	5	23	12	
	s^3	6,4	25,6		
	s^2	3	12		
	s^1	0	0		$\leftarrow a_1(s) = 3s^2 + 12$
Nova	s^1	6	0		$\leftarrow \frac{da_1}{ds} = 6s$
	s^0	12			

Não há mudança de sinal na primeira coluna, logo todas as raízes estão no semi-plano esquerdo, exceto aquelas raízes que também são raízes de $a_1(s)$ e que estiverem sobre o eixo imaginário

$$a_1(s) = s^2 + 4 = 0 \quad e, \text{ portanto} \quad s = \pm 2j$$

Uma aplicação importante do critério de Routh-Hurwitz em sistemas de controle é a determinação da faixa de valores de um parâmetro para o qual o sistema é estável. O exemplo a seguir ilustra esta aplicação.



Exemplo 4.5.5 Determine a faixa de ganho K para a qual o sistema da Figura 4.5.5, é estável.
A equação característica é

$$1 + K \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)} = 0$$

ou $s^3 + 5s^2 + (K-6)s + K = 0$

Aplicando-se o critério de Routh temos

s^3	1	$K-6$
s^2	5	K
s^1	$(K - K(K-6))\frac{-1}{s}$	0
s^0	K	

Para a estabilidade devemos ter $K > 0$ e $5K - 30 - K > 0$ e portanto $K > \frac{30}{4}$

4.5.3.2 Estabilidade relativa

Algumas vezes há interesse em saber não somente se o sistema é estável, mas também se todas as raízes estão em uma região a esquerda de uma linha, por exemplo, a esquerda de $s = -\sigma_1$, com $\sigma_1 > 0$. O critério de Routh-Hurwitz pode ainda ser aplicado, com uma translação de eixos, movendo a origem para $s = -\sigma_1$.

A translação do eixo é dada por

$$s = z - \sigma_1 \quad (4.5.9)$$

Observe que a origem na referência s deve corresponder a σ_1 na referência z e portanto a transformação a ser usada é fácil de ser determinada.

Exemplo 4.5.6 Para o sistema com equação característica

$$s^3 + 7s^2 + 25s + 39 = 0 \quad (4.5.10)$$

deseja-se testar se todas as raízes estão a esquerda de -1 .

Usamos a transformação $s = z - 1$, e obtemos a nova equação característica

$$z^3 + 4z^2 + 14z + 20 = 0 \quad (4.5.11)$$

Formando-se o arranjo de Routh obtém-se

z^3	1	14
z^2	4	20
z^1	9	
z^0	20	

Portanto, todas as raízes da equação original estão a esquerda de $s = -1$ no plano s .

4.5.4 Lugar das raízes

A técnica do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) ou simplesmente Lugar das Raízes (LR) é um método gráfico para plotar o lugar das raízes no plano s correspondente à variação de um parâmetro do sistema. Este método fornece uma medida da sensibilidade das raízes do sistema a uma variação do parâmetro em consideração.

O método permite avaliar o ajuste de parâmetros do sistema de forma a se obter uma resposta satisfatória no que diz respeito ao lugar geométrico das raízes.

O princípio básico do método é a relação existente entre os pólos da Função de Transferência em Malha Fechada (FTMF) e os pólos e zeros da Função de Transferência em Malha Aberta (FTMA) e o seu ganho.

As principais vantagens do método são as seguintes:

- a solução exata e detalhada dos regimes transitórios e permanente pode ser obtida facilmente. Isto devido ao fato de os pólos de malha fechada serem diretamente obtidos do lugar geométrico das raízes.
- soluções aproximadas podem ser obtidas com uma considerável redução de trabalho, quando soluções exatas não são requeridas.

O objetivo desta seção é a apresentação do método de construção do lugar geométrico das raízes e a interpretação dos resultados.

Exemplo 4.5.7 Exemplo introdutório Considere o sistema de controle em MF mostrado na Figura 4.8.

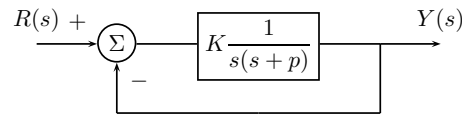


Figura 4.8: Diagrama de blocos do sistema de 2ª. ordem

A FTMF deste sistema de 2ª ordem é igual a

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s(s+a)}{1 + K/s(s+a)} = \frac{K}{s^2 + as + K}$$

onde a equação característica é expressa como

$$a(s) = s^2 + as + K = 0$$

A aplicação do critério de Routh-Hurwitz nesta equação fornece

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K \\ s^1 & a & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

O sistema é estável se $K > 0$ e $p > 0$. Se uma destas (ou as duas simultaneamente) condições não for satisfeita (isto é, $K < 0$ e/ou $p < 0$), o sistema será instável.

Variação das raízes da equação característica $a(s) = 0$

As raízes da equação característica mostrada anteriormente são dadas por

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4K}}{2}$$

para as quais são observados os seguintes casos:

- $4K < p^2$: raízes reais e diferentes
- $4K = p^2$: raízes reais e iguais
- $4K > p^2$: raízes complexas conjugadas

Vamos estudar a variação da posição dos pólos da função de transferência, ou seja, das raízes da equação característica para dois parâmetros, o ganho K e o parâmetro p , o qual está associado à posição do pólo de malha aberta.

1. Supondo $p = 2$, observe a variação das raízes para $-\infty < K < +\infty$. As raízes da equação característica são dadas, neste caso, por $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$.

Para diferentes faixas de variação do ganho tem-se:

$-\infty < K < 0$: 2 raízes, uma positiva e outra negativa

$K = 0$: $s_1 = 0$ e $s_2 = -2$; ou seja, as raízes são os pólos da FTMA

$0 < K < 1$: s_1 e s_2 são números reais negativos

$K = 1$: $s_1 = s_2 = -1$

$1 < K < +\infty$: raízes complexas conjugadas com partes reais iguais a -1

O lugar das raízes é apresentado na Figura 4.9.

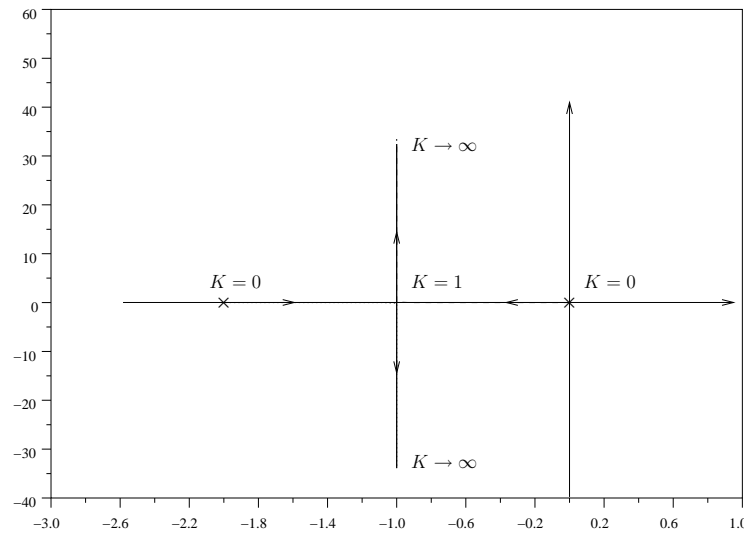


Figura 4.9: LGR para variações $-\infty < K < +\infty$, com $p = 2$

2. Supondo agora que o ganho K é mantido constante com valor $K = 1$, vamos determinar o lugar geométrico das raízes para $0 < p < +\infty$

As raízes da equação característica são dadas por

$$s_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4K - p^2}}{2}\right)^2}$$

Para diferentes faixas de variação de p tem-se:

$$\begin{aligned}
 &p = 0: s_{1,2} = \pm j\sqrt{K} \text{ (raízes complexas e iguais)} \\
 &\left. \begin{aligned} &p > 0 \\ &4K > p^2 \end{aligned} \right\} \text{duas raízes complexas conjugadas, com parte real igual a } -p/2 \\
 &p^2 = 4K: \text{duas raízes reais, ambas iguais a } -p/2 \\
 &\left. \begin{aligned} &p^2 > 4K \\ &p > 0 \end{aligned} \right\} \text{duas raízes reais, uma positiva e outra negativa}
 \end{aligned}$$

O lugar das raízes é mostrado na Figura 4.10.

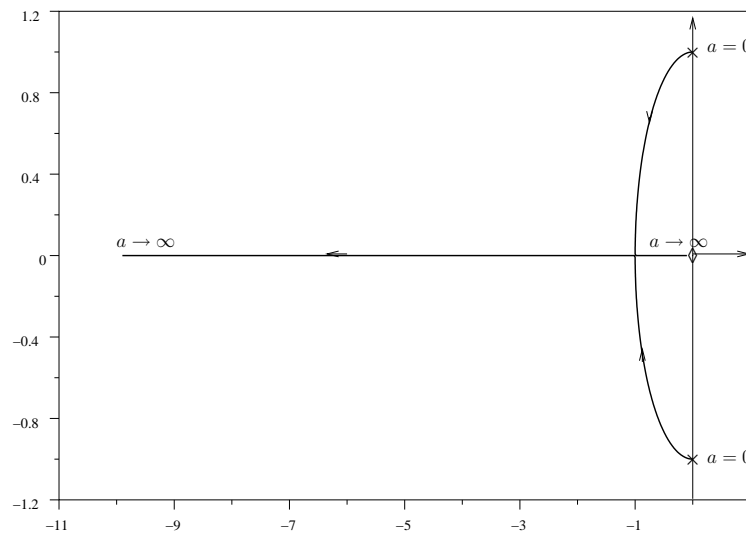


Figura 4.10: LGR para variações $0 < a < +\infty$

Este exemplo mostra que é possível plotar o Lugar Geométrico das Raízes com relação a variação de qualquer parâmetro do sistema, embora geralmente seja o ganho o parâmetro variável. Voltaremos a esta questão posteriormente.

4.5.4.1 Fundamentos Teóricos do LGR

Considere o caso geral do sistema de controle com realimentação mostrado na Figura 4.11, onde o ganho K foi representado explicitamente. Em todo o desenvolvimento a seguir, vamos considerar o ganho como o parâmetro variável.

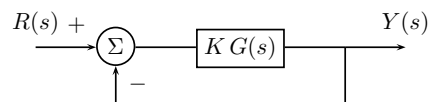


Figura 4.11: Sistema de controle com realimentação

A função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (4.5.12)$$

e

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

é a função de transferência em malha fechada.

O método do Lugar Geométrico das Raízes plota as raízes do denominador da função de transferência $\frac{Y(s)}{R(s)}$, isto é, de $a(s) = 1 + KG(s)$.

A determinação dos pólos da FTMF é feita à partir da equação característica $1 + KG(s) = 0$. A solução desta equação fornece

$$KG(s) = -1 \quad (4.5.13)$$

Esta equação pode ser desdobrada em duas outras:

$$|KG(s)| = 1 \quad (4.5.14)$$

chamada condição de módulo e

$$\angle KG(s) = (2l + 1)\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.5.15)$$

chamada condição de ângulo.

Estas equações, chamadas equações de pertinência, por indicarem os pontos que pertencem ao lugar das raízes, estabelecem as duas condições que devem ser satisfeitas para que um ponto s_t do plano complexo seja um pólo em malha fechada:

1. O ângulo de $KG(s_t)$ deve corresponder ao semi-eixo real negativo do plano- s , ou seja, deve ser -180° ou um múltiplo ímpar de -180°
2. O módulo de $KG(s_t)$ deve ser unitário.

Observe que a condição de módulo é equivalente a

$$|G(s)| = \frac{1}{K}$$

Como o parâmetro K é o parâmetro variável, esta equação será satisfeita para qualquer ponto s do plano complexo. Portanto a **condição de pertinência que realmente decide se um ponto pertence ao lugar das raízes é a condição de ângulo**. A condição de módulo é usada apenas para determinar qual o ganho para o qual o ponto é um pólo da malha fechada.

Observação 1 No desenvolvimento anterior para chegar às condições de pertinência, consideramos o sistema da Figura 4.11, onde a realimentação é unitária. No entanto, as condições de pertinência podem ser derivadas para o sistema com realimentação não-unitária, como representado na Figura 4.12. Neste

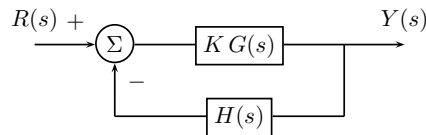


Figura 4.12: Sistema de controle com realimentação

caso, as condições de pertinência são

$$\begin{aligned} |KG(s)H(s)| &= 1 \\ \angle KG(s)H(s) &= (2l + 1)\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

A regra geral é usar a função de transferência de malha aberta.

É interessante interpretar as condições de pertinência em termos geométricos. Para isto basta usar a interpretação de números complexos como vetores no plano complexo.

Considerando a função de transferência $G(s)$, com pólos dados por $p_i, i = 1, \dots, n$ e zeros $z_j, j = 1 \dots m$, calculada em um ponto teste do plano complexo s_t

$$G(s) = \frac{(s_t - z_1)(s_t - z_2) \dots (s_t - z_m)}{(s_t - p_1)(s_t - p_2) \dots (s_t - p_n)} \quad (4.5.16)$$

Cada termo $s_t - z_j$ corresponde a um vetor do ponto z_j ao ponto s_t , com módulo $|s_t - z_j|$ e ângulo θ_{z_j} . Do mesmo modo, cada termo $s_t - p_i$ corresponde a um vetor do ponto p_i ao ponto s_t , com módulo $|s_t - p_i|$ e ângulo θ_{p_i} . Portanto, para que o ponto s_t pertença ao lugar das raízes, deve-se ter que

$$\sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} = -180^\circ \quad (4.5.17)$$

A construção do lugar geométrico das raízes para um sistema particular é iniciada com a localização dos pólos e zeros de malha aberta no plano complexo. Outros pontos do LGR podem ser obtidos, escolhendo-se vários pontos do teste, e determinando se eles satisfazem ou não a condição de ângulo. O ângulo de $G(s)$ pode ser facilmente obtido em qualquer ponto de teste no plano complexo, através da medição dos ângulos que contribuem a ele (pólos e zeros da FTMA). Por exemplo, considere o sistema de controle por realimentação onde,

$$FTMA = G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_2)(s + p_3)}, \quad K > 0 \text{ e } p_1 = 0$$

Num ponto de teste s_t , $G(s)$ tem o valor:

$$G(s_t) = \frac{K(s_t + z_1)(s_t + z_2)}{s(s_t + p_2)(s_t + p_3)}$$

O ângulo de $G(s)$ é

$$\angle G(s_t) = \sum \hat{\text{ângulos}}(\text{zeros}) - \sum \hat{\text{ângulos}}(\text{pólos})$$

ou seja,

$$\angle G(s_t) = \angle(s_t + z_1) + \angle(s_t + z_2) - [\angle(s_t) + \angle(s_t + p_2) + \angle(s_t + p_3)]$$

A Figura 4.13 ilustra geometricamente o cálculo do ângulo de $G(s_t)$.

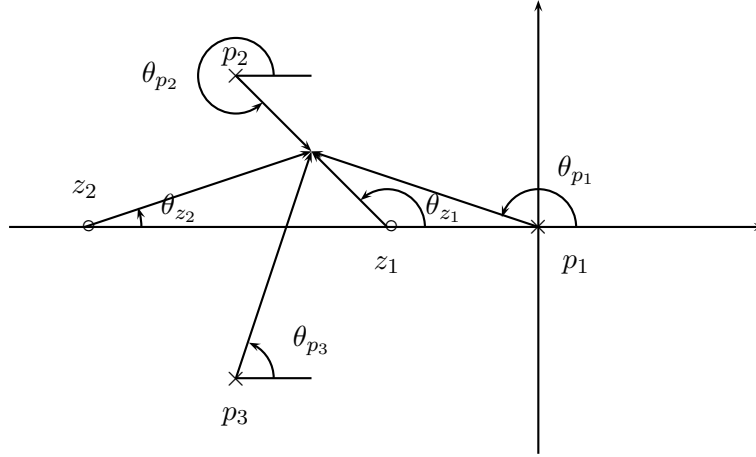
O ponto de teste s_t pertence ao lugar geométrico das raízes se e somente se

- $(\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots$
- $|G(s_t)| = 1$, ou seja,

$$K = \frac{|s_t| \times |s_t + p_2| \times |s_t + p_3|}{|s_t + z_1| \times |s_t + z_2|}$$

Se a soma algébrica dos ângulos é igual a $\pm l 180^\circ$, $l = 1, 3, 5 \dots$ o ponto s_t pertence ao LGR. Caso contrário, s_t não pertence ao LGR e um novo ponto deverá ser testado. No primeiro caso, as magnitudes dos vetores $(s_t + z_i)$, $i = 1, n$ e $(s_t + p_j)$, $j = 1, m$ são determinadas e substituídas na equação do módulo de $G(s)$, para o cálculo do valor do ganho K no ponto s_t .

Felizmente, a construção do LGR não implica numa busca infinita no plano complexo. Desde que os zeros da equação característica são funções contínuas dos coeficientes, o LGR é uma curva contínua, e, por conseguinte, deve ter certas formas gerais governadas pelo número e posição dos pólos e zeros de malha aberta. Uma vez estabelecidas as regras de construção, a plotagem do LGR deixará de ser tediosa e lenta. A seguir são apresentadas as regras básicas que auxiliam na determinação aproximada do LGR.

Figura 4.13: Cálculo do ângulo de fase de $G(s)$

4.5.4.2 Regras Para a Construção do LGR ($0 \leq K < \infty$)

Número de ramos O número de lugares geométricos separados é igual a ordem da equação característica. Portanto, tem-se tantas raízes (ou ramos) do lugar das raízes quanto for a ordem da equação característica. Cada segmento ou ramo do lugar descreve a variação de um pólo particular do sistema em malha fechada, quando o ganho K varia na faixa $0 \leq K < +\infty$

Começo e término do LR Os pólos de malha aberta definem o começo do LGR ($K = 0$) e os zeros de MA definem o fim do LGR ($K \rightarrow +\infty$). Isso pode ser facilmente mostrado considerando a equação

$$|G(s_t)| = 1 = \frac{K|s_t + z_1||s_t + z_2|}{|s_t||s_t + p_2||s_t + p_3|}$$

- Nos pólos de malha aberta ($s_t = 0$, $s_t = -p_2$ e $s_t = -p_3$), K deve ser igual a zero para satisfazer a equação $|G(s_t)| = 1$.
- Nos zeros de MA ($s_t = -z_1$ e $s_t = -z_2$), K deve tender a $+\infty$ para que $|G(s_t)| = 1$.

Quando a ordem de denominador da FTMA for maior do que a do numerador, o lugar geométrico terminará em zeros no infinito. O número de zeros no infinito é a diferença $n - m$ entre o número de pólos e o número de zeros.

Seções do eixo real que fazem parte do LR Seções do eixo real fazem parte do LGR se o número de pólos e zeros à direita de um ponto de exploração no eixo é ímpar.

Esta regra é consequência direta da condição de pertinência angular. Pólos e zeros sobre o eixo real, à esquerda do ponto teste, contribuem com ângulo zero e portanto não tem influência na condição angular. Se o número de pólos e zeros a direita for par, a contribuição total será um múltiplo de 360° e portanto não atende à condição angular.

Assíntotas e zeros no infinito Para $K \rightarrow \infty$ a equação $G(s) = -\frac{1}{K}$ será satisfeita para valores de s tais que $G(s) = 0$. A condição

$$G(s) = \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = 0$$

pode ocorrer em duas situações:

1. $s = z_i$ com $i = 1, \dots, m$, quando $m = n$, ou seja, para o mesmo número de pólos e zeros.

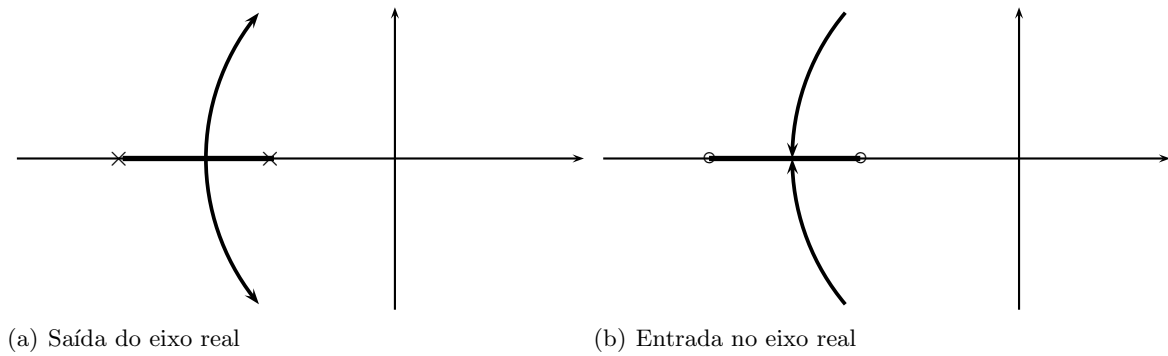


Figura 4.14: Pontos de separação do eixo real

2. $s \rightarrow \infty$ no caso onde $n > m$, ou seja o número de pólos é maior que o número de zeros.

Portanto, se m é o número de zeros finitos e n é o número de pólos finitos, $n - m$ seções do LGR terminam no infinito, tendendo para zeros no infinito.

Para $K \rightarrow \infty$ m pólos convergem para os m zeros $\{z_1, \dots, z_m\}$ e os $n - m$ pólos restantes convergem para o infinito segundo assíntotas que podem ser determinadas da seguinte forma. Visto do infinito a equação característica pode ser aproximada por

$$G(s)_{s \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{(s - \alpha)^{m-n}} = \frac{-1}{K}$$

onde $\alpha = \frac{\sum P_i - \sum z_i}{n - m}$ é o pólo médio “visto do infinito” que tem multiplicidade $n - m$ e está sobre o eixo real.

Os ângulos das assíntotas ao lugar das raízes são dados por

$$\phi_l = \frac{(1 + 2l)180^\circ}{n - m}$$

onde, $l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - m - 1)$.

A intersecção das assíntotas com o eixo real acontece em σ_0 , dado por

$$\sigma_0 = \frac{(\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros})}{(n - m)}$$

onde n e m são os mesmos anteriormente definidos.

O valor de σ_0 é basicamente o centróide da configuração de pólos e zeros em MA.

Pontos de separação ou múltiplas raízes O ponto de separação do LGR do eixo real corresponde ao ponto onde um ramo deixa ou entra no eixo real. Este ponto corresponde à existência de raízes múltiplas. O ponto de separação corresponde à saída do eixo real se ocorrer entre dois pólos e à entrada no eixo real se ocorrer entre dois zeros. A Figura 4.14 ilustra estes casos. Para o caso de dois pólos, observa-se que o ganho parte de zero e aumenta até um valor máximo, quando então o ramo deixa o eixo real. Para o caso de dois zeros, o ramo entra no eixo real com um valor mínimo e então aumenta para infinito quando atinge os zeros. Portanto pontos de separação correspondem a pontos de máximo ou mínimo da função

$$K = -\frac{1}{G(s)} \quad (4.5.18)$$

Os pontos de separação podem então ser facilmente obtidos calculando-se a derivada da função $K(s) = -\frac{1}{G(s)}$, com relação a s e igualando-se a zero.

$$\frac{d\left(-\frac{1}{G(s)}\right)}{ds} = 0 \quad (4.5.19)$$

Interseção com o eixo imaginário A intersecção do LGR com o eixo imaginário pode ser determinada através do critério de Routh-Hurwitz.

Ângulo de partida (chegada) de pólos (zeros) complexos Quando existirem pólos e zeros complexos, ramos do lugar das raízes saem ou chegam destes pólos e zeros, respectivamente.

O ângulo de saída de um pólo (ou chegada a um zero) complexo pode ser calculado aplicando-se a condição de pertinência angular

$$\angle G(s) = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como desejamos apenas determinar a direção na qual o lugar das raízes se afasta do pólo ou se aproxima do zero, podemos tomar um ponto teste próximo ao pólo (ou zero). A condição angular pode ser aplicada a este ponto, que deve pertencer ao lugar das raízes. A interpretação geométrica da condição angular é útil para entender o método. Como o ponto é próximo ao pólo (ou zero), mantemos como incógnita apenas o ângulo do vetor que parte do pólo (ou zero) cuja direção do lugar das raízes deseja-se determinar. Os ângulos dos vetores que partem dos demais pólos e zeros do sistema e terminam no ponto teste, são aproximados pelos ângulos dos vetores que partem destes pólos e zeros e terminam no pólo (ou zero), cuja direção do lugar das raízes deseja-se determinar.

Para ilustrar este método, considere o sistema

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

que, para $K = 0$ fornece o diagrama inicial mostrado na Figura 4.15, com $p_1 = 0$, $p_2 = -2 - j2$ e $p_3 = -2 + j2$.

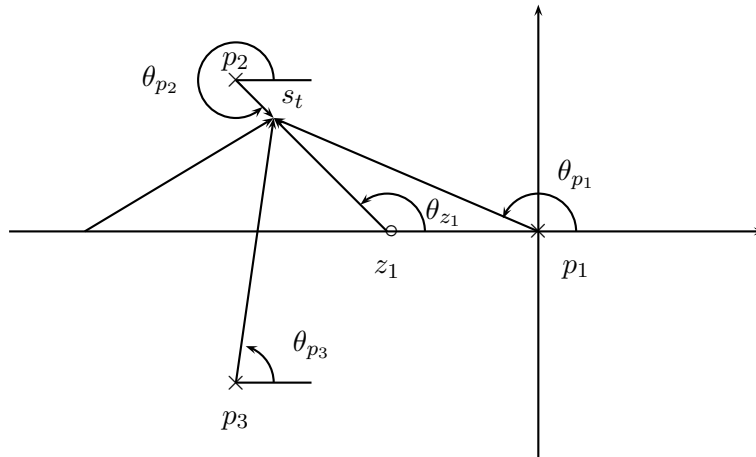


Figura 4.15: Ângulo de saída de um pólo

Observe que se o ponto estiver muito próximo da raiz considerada, os ângulos θ_{p_1} , θ_{p_3} e θ_{z_1} serão aproximadamente iguais a 135° , 90° e 116.6° , respectivamente. Aplicando-se a condição de pertinência de ângulo, tem-se:

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = -180^\circ$$

ou usando-se as aproximações,

$$116.6^\circ - 135^\circ - \theta_{p_2} - 90^\circ = -180^\circ$$

e segue que a direção de afastamento do lugar das raízes de p_2 é $\theta_{p_2} = -71.6^\circ$

Uma vez esboçado o LGR utilizando-se as regras apresentadas, a exatidão gráfica pode ser aumentada determinando-se a posição exata de alguns pontos. Isto pode ser facilmente realizado usando-se a equação do ângulo de $G(s)$, isto é $\angle G(s)$. O ganho K em qualquer ponto é determinado com auxílio da equação do módulo de $G(s)$, isto é $|G(s)|$.

Algumas observações sobre o LR

1. O parâmetro de interesse deve aparecer como fator multiplicativo. Se este parâmetro for o ganho K , a equação característica deve estar na forma

$$1 + KG(s) = 0$$

2. A função de transferência $G(s)$ deve estar na forma mónica como mostrado a seguir

$$1 + KG(s) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

Exemplo 4.5.8 : *Dado a planta com função de transferência*

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+5)}$$

determinar o LGR para o sistema em malha fechada com realimentação unitária.

Não há necessidade de seguir rigorosamente a seqüência das regras dadas. Mas aqui seguiremos o procedimento na seqüência indicada.

Número de seções do LGR *Como o sistema é de terceira ordem tem-se 3 ramos no lugar das raízes.*

Pólos e zeros de malha aberta *Os pólos e zeros de malha aberta definem o começo e fim do lugar das raízes. O número de pólos da FTMA é 3, $p_1 = 0$, $p_2 = -4$ e $p_3 = -5$. Logo $n = 3$. O número de zeros finitos da FTMA é zero. Logo $m = 0$. Posicionamos os pólos no plano complexo, como mostrado na Figura 4.16.*

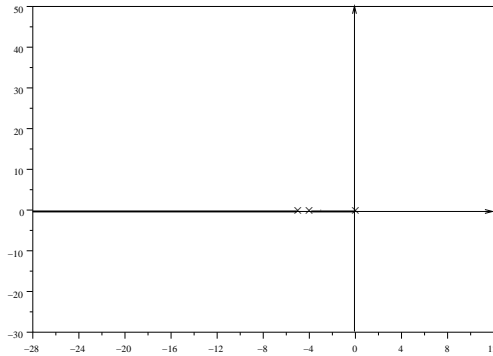
Pontos do eixo real que pertencem ao lugar das raízes *Os segmentos do eixo real que pertencem ao lugar das raízes estão entre os pólos 0 e -4 e entre -5 e $-\infty$. Estes segmentos são indicados na Figura 4.16(b)*

Assíntotas *Como $n = 3$ e $m = 0$, existem $3 - 0 = 3$ zeros no infinito. Portanto existirão 3 assíntotas.*

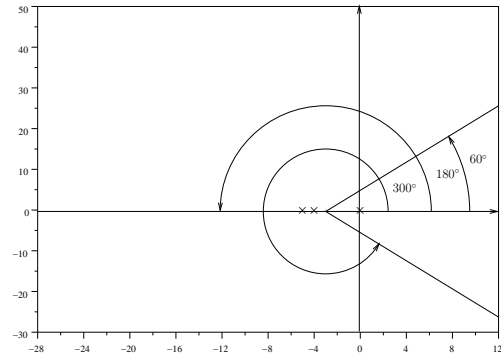
A intercessão destas assíntotas com o eixo real (centróide) e o ângulo destas assíntotas são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Centróide:} & \sigma_0 = \frac{0-4-5}{3-0} = -3 \\ \text{Ângulos:} & \phi_0 = 60^\circ, \phi_1 = 180^\circ, \phi_2 = 300^\circ \end{array} \right.$$

As assíntotas estão representadas na Figura 4.16(a).



(a) Pólos da FTMA



(b) Assíntotas

Figura 4.16: Construção do LR

Pontos de separação Estes pontos correspondem a pontos de máximo ou mínimo da função $K(s) = -\frac{1}{G(s)}$, ou

$$K(s) = -(s^3 + 9s^2 + 20s)$$

Derivando-se com relação a s e igualando-se a zero:

$$K'(s) = -(3s^2 + 18s + 20) = 0 : s_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times 3 \times 20}}{6}$$

A solução fornece duas raízes, ou seja, dois pontos no eixo real:

$$s_{1,2} = \begin{cases} -1,5 \\ -4,5 \end{cases}$$

No entanto a última raiz está situada num ramo que não faz parte do LGR, e portanto apenas a solução $s = 1.5$ corresponde a um ponto de separação. Veremos mais adiante o significado da raiz que ficou fora do LR.

Interseção com o eixo imaginário O critério de Routh-Hurwitz é aplicado à equação $a(s) = s^3 + 9s^2 + K = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20 \\ s^2 & 9 & K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{180 - K}{9} \quad c_1 = K$$

$$c_1 \geq 0 \text{ e } b_1 \geq 0 : K = 180$$

Equação auxiliar:

$$9s^2 + K = 0 : s = \pm\sqrt{20}j \rightarrow \pm 4,47j$$

O Lugar das Raízes completo é mostrado na Figura 4.17.

Exemplo 4.5.9 Construa o lugar das raízes para a planta com função de transferência

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$$

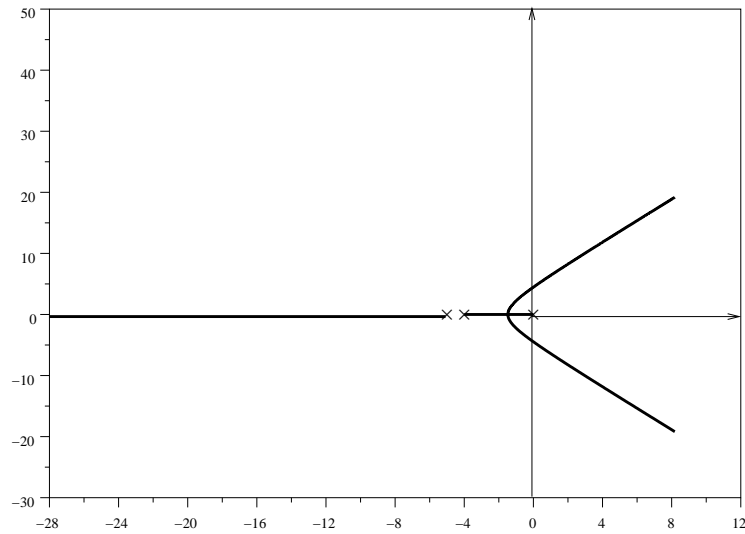
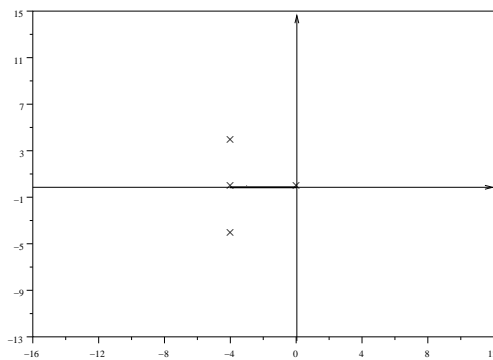


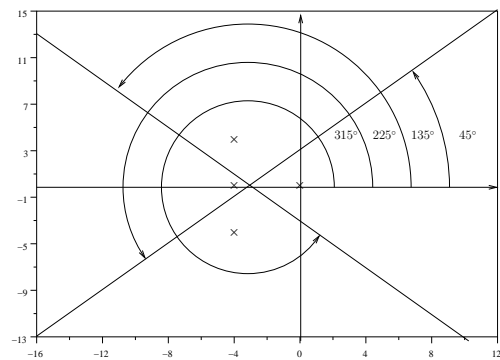
Figura 4.17: LGR de $G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+5)}$

Número de seções do LGR O sistema é de quarta ordem tendo então o lugar das raízes 4 ramos.

Zeros e pólos de malha aberta Tem-se $n = 4$ ($0, -4, 4 + j4, 4 - j4$) e $m = 0$. Os pólos de malha aberta são localizados no plano complexo como mostrado na Figura 4.18(a)



(a) Pólos da FTMA



(b) Assíntotas

Figura 4.18: Construção do LR

Pontos que pertencem ao eixo real O lugar das raízes existe no segmento entre os pólos 0 e -4, como mostrado na Figura 4.18(a).

Assíntotas Tem-se $n - m = 4$ zeros no infinito, ou seja, 4 assíntotas, com intercessão com o eixo real e com ângulo das assíntotas dados por:

$$\text{Centróide} \quad \sigma_A = \frac{-4 - 4 + 4j - 4 - 4j}{4} = -3$$

$$\text{Ângulos:} \quad \phi_0 = 45^\circ, \phi_1 = 135^\circ, \phi_2 = 225^\circ, \phi_3 = 315^\circ$$

Pontos de separação *Derivando-se a função*

$$K(s) = -(s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s)$$

obtem-se

$$K'(s) = -(4s^3 + 36s^2 + 128s + 128) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} -1, 58 \\ s_2 = 3.71 + 2.55j \\ s_3 = 3.71 - 2.55j \end{array} \right.$$

Somente a primeira raiz tem significado. As raízes complexas são desconsideradas.

Intersecção com o eixo imaginário *Aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz tem-se*

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 64 & K \\ s^3 & 12 & 128 & 0 \\ s^2 & b_1 & b_2 & \\ s^1 & c_1 & c_2 & \\ s^0 & d_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = 53,33 \quad b_2 = K \geq 0 : K \geq 0$$

$$c_1 = \frac{128 \times 53,33 - 12K}{53,33} \geq 0 : K \leq 570 \quad c_2 = 0$$

$$d_1 = K \geq 0 : K \geq 0$$

Equação auxiliar: $53,33s^2 + K = 0 : s = \pm 3,25j$

Ângulo de partida dos pólos complexos *Como existem dois pólos complexos, deve-se calcular o ângulo de partida, com o qual o ramo deixa cada pólo complexo.*

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_4} = 180^\circ \\ \theta_{p_1} + 90^\circ + \theta_{p_3} + 90^\circ = 180^\circ \\ \theta_{p_1} + \theta_{p_3} = 0^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta_3 \approx 135^\circ \\ \theta_1 \approx -135^\circ \\ \theta_2 \approx 225^\circ \end{array} \quad (4.5.20)$$

O lugar das raízes completo é mostrado na Figura 4.19

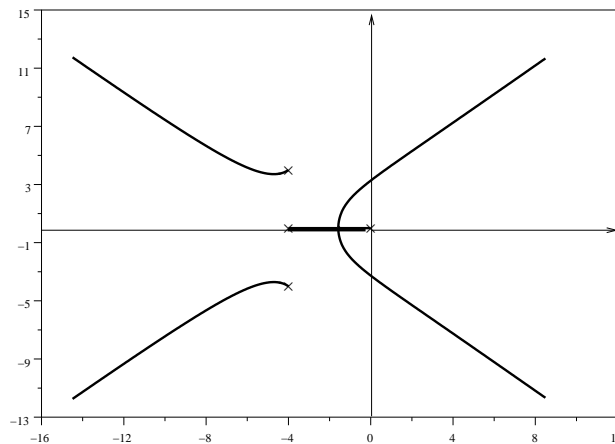


Figura 4.19: LGR de $\frac{K}{s(s+4)(s^2+8s+32)}$

4.5.4.3 Construção do LGR Para $-\infty < K \leq 0$

O lugar das raízes para o caso em que o parâmetro é negativo, é chamado de lugar das raízes complementar. Para valores do parâmetro negativos, as regras de construção do LR são alteradas. A razão é essencialmente o fato de que um valor negativo introduz um ângulo de 180° , o que altera a condição de pertinência. As seguintes regras se aplicam:

Origem e término dos ramos Considerando que as raízes da equação característica satisfazem a equação

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = -\frac{1}{K}$$

segue que quando $K \rightarrow -\infty$ tem-se $b(s) = 0$ ou $s \rightarrow \infty$. Quando $K = 0$ tem-se que $a(s) = 0$. Portanto, para $-\infty < K < 0$, o lugar das raízes parte dos zeros de $G(s)$ para $K \rightarrow -\infty$ e termina nos pólos de $G(s)$.

Ramos sobre o eixo real Os pontos do LGR sobre o eixo real estão à esquerda de um número par de pólos mais zeros finitos.

Assíntotas O ponto de intercessão com o eixo real é o mesmo que para o caso de parâmetro positivo e dado por:

Centro:

$$\sigma_0 = \frac{\sum(\text{pólos em MA}) - \sum(\text{zeros finitos em MA})}{(n - m)}$$

No entanto, devido à contribuição de 180° , do parâmetro negativo, os ângulos das assíntotas são dados por

$$\phi_l = \frac{2l180}{(n - m)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1)$$

Todas as demais regras se mantêm.

O exemplo a seguir ilustra a utilidade do lugar das raízes complementar.

Exemplo 4.5.10 O diagrama de controle de frequência de uma unidade de geração hidráulica é mostrado na Figura 4.20.

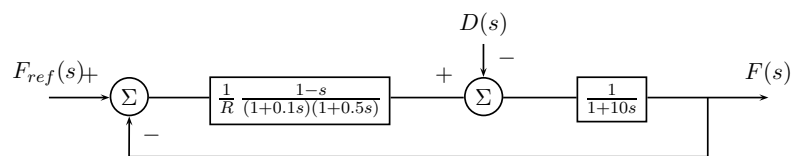


Figura 4.20: Controle de frequência

O objetivo desta malha de controle é manter a frequência do sistema em presença de perturbações. As perturbações são as variações de carga provocadas pelos usuários da rede elétrica.

O parâmetro R é chamado de estatismo e indica a relação entre o aumento de geração da unidade e a queda de frequência. Como o controle é proporcional, esta queda de frequência corresponde ao erro em regime permanente após uma variação de carga. Este parâmetro pode variar teoricamente no intervalo $0 < R < \infty$. Quando $R = 0$ o regulador é isócrono, ou seja, o erro de frequência é zero para qualquer aumento de carga. Em sistemas reais um valor em torno de 0.05 é usado para R . O objetivo aqui é traçar o lugar das raízes para $0 < R < \infty$.

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{1}{R} \frac{1 - s}{(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)(1 + 10s)}$$

Colocando-se esta função de transferência na forma mônica tem-se

$$G(s) = \frac{-1}{0.5R} \frac{1-s}{(1+0.1s)(1+0.5s)(1+10s)}$$

ou ainda

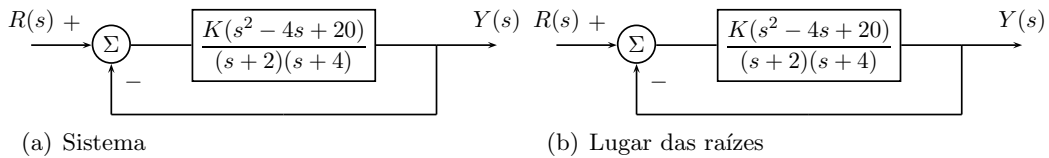
$$G(s) = K \frac{1-s}{(1+0.1s)(1+0.5s)(1+10s)}$$

onde $K = \frac{-1}{0.5R}$.

Assim, para $0 < R < \infty$ o lugar das raízes corresponde a $-\infty < K < 0$, ou seja, é o lugar das raízes complementar. As regras apresentadas podem ser usadas para contruir o lugar das raízes mostrado na Figura.

O lugar geométrico das raízes pode apresentar um comportamento que pode parecer não seguir as regras dadas. O próximo exemplo mostra uma situação interessante, mas onde as regras são realmente seguidas.

Exemplo 4.5.11 Determine o lugar das raízes, com $-\infty < K < \infty$ para o sistema da Figura 4.21(a)



O traçado do lugar das raízes é mostrado na Figura. Observe que o sistema tem dois pólos e dois zeros de malha aberta. Portanto não há zeros no infinito. O lugar das raízes, no entanto, mostra para $K < 0$ um ramo indo para o infinito no semi-eixo real positivo e um ramo vindo do infinito no semi-eixo real negativo, o que pode parecer uma contradição.

O traçado usando as regras está, no entanto, realmente correto. Os pólos de malha fechada são dados pela equação característica que é

$$1 + \frac{K(s^2 - 4s + 20)}{(s+2)(s+4)} \text{ ou seja } = \frac{-(6-4K) \pm \sqrt{96K^2 + 64K + 68}}{K+1}$$

Observa-se que quando K tende para -1 , os pólos são reais e tendem para o infinito. Portanto o ramo tende para infinito segundo o semi-eixo real positivo quando K tende a -1 com $K > -1$ e retorna segundo o semi-eixo real negativo para $K < -1$, terminando no pólo de malha aberta em -4 . Portanto as regras fornecem corretamente o traçado do lugar das raízes, mas é necessário a interpretação do que acontece neste caso.

O próximo exemplo mostra que algumas vezes existem várias possibilidades para o traçado o lugar das raízes, mas que as regras indicam exatamente qual é a alternativa correta.

4.5.4.4 Cancelamento de pólos/zeros

No caso de cancelamento de pólos por zeros, a função de transferência pode ainda apresentar o pólo cancelado, o qual deve aparecer no lugar das raízes.

Seja inicialmente o sistema apresentado na Figura 4.22. onde

$$G(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)} k \quad H(s) = \frac{s+a}{s+d}$$

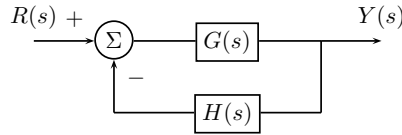


Figura 4.21: Cancelamento de pólo-zero

Para construir o lugar das raízes devemos usar a função de transferência de malha aberta. Nesta função, dada por $G(s)H(s)$, o pólo em $-a$ cancela com o zero em $-a$. No entanto, se calcularmos a função de transferência de malha fechada, temos

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+c)(s+d)}{[(s+b)(s+d) + k(s+c)](s+a)}$$

Ou seja, o pólo $-a$ cancelado aparece na função de transferência de malha fechada. Este pólo não aparece no lugar das raízes e é um pólo fixo, ou seja, permanece na mesma localização qualquer que seja o valor do parâmetro variável, e portanto nenhum ramo parte deste pólo.

Consideremos agora a configuração mostrada na Figura 4.22. com as mesmas funções de transferência

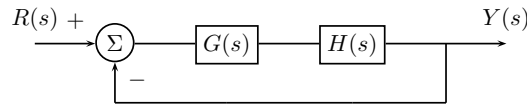


Figura 4.22: Cancelamento de pólo-zero

$G(s)$ e $H(s)$.

Na função de transferência de malha aberta, usada para construir o LR, o pólo em $-a$ é cancelado. Quando determinamos a função de transferência de malha fechada obtemos

$$\frac{s+c}{(s+b)(s+d) + s+c}$$

e portanto o pólo em $s = -a$ não é mais um pólo de malha fechada. Concluimos que quando o cancelamento é na malha direta, o pólo é realmente cancelado na função de transferência de malha fechada.

4.5.4.5 Lugar das raízes para um parâmetro diferente do ganho

Algumas vezes o parâmetro variável no sistema não é o ganho, e neste caso o lugar das raízes não pode ser construído diretamente. O exemplo a seguir ilustra o procedimento usado.

Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s(s+c)} \quad (4.5.21)$$

Deseja-se traçar o lugar das raízes para o parâmetro c . A equação característica do sistema é

$$1 + \frac{1}{s(s+c)} = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 + cs + 1 = 0 \quad (4.5.22)$$

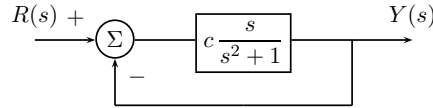
Dividindo-se por $s^2 + 1$ tem-se

$$1 + c \frac{s}{s^2 + 1} \quad (4.5.23)$$

Observe que esta equação é a equação característica do sistema da Figura 4.23

Pode-se então traçar o lugar das raízes para o sistema com função de transferência de malha aberta

$$\frac{s}{s^2 + 1} \quad (4.5.24)$$

Figura 4.23: Sistema equivalente com c como ganho

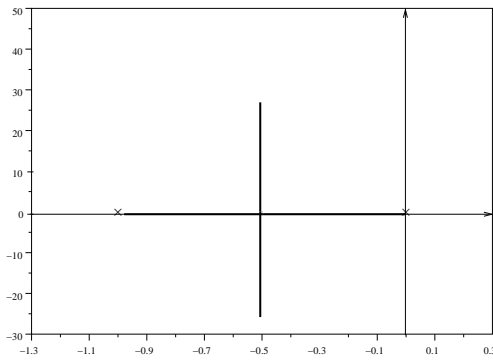
4.5.4.6 Efeito de pólos-zeros no L.R.

Uma questão que pode facilmente ser analisada pelo lugar das raízes é o efeito da adição de pólos e zeros a um sistema.

Adição de pólos Para ilustrar este efeito, seja o sistema com função de transferência de malha aberta dada por

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (4.5.25)$$

O lugar das raízes deste sistema é dada apresentado na Figura 4.24(a).



(a) Sistema original

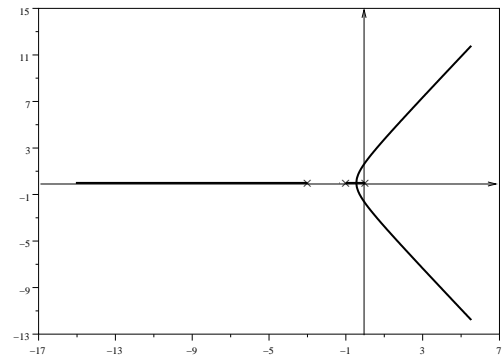
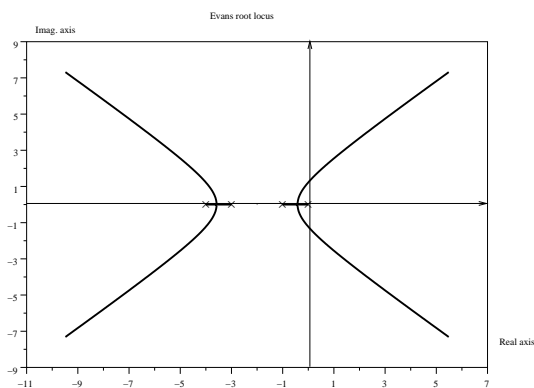
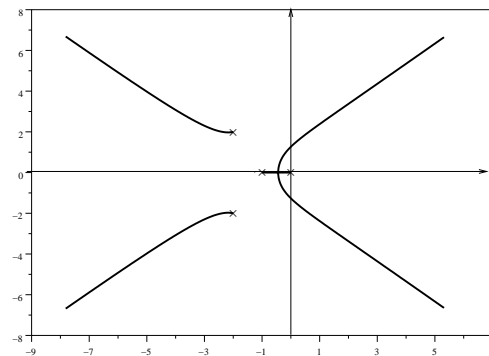
(b) Adição de pólo em -3 (c) Adição de mais um pólo em -4 (d) Adição de pólos complexos em $-2 \pm j2$

Figura 4.24: Efeito da adição de pólos

Consideremos inicialmente a adição de um pólo em $s = -3$. A função de transferência de malha aberta é então

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)} \quad (4.5.26)$$

o lugar das raízes é agora apresentado na Figura 4.24(b)

Consideremos a adição de mais um pólo em -4 , ou seja, a função de transferência de malha aberta é

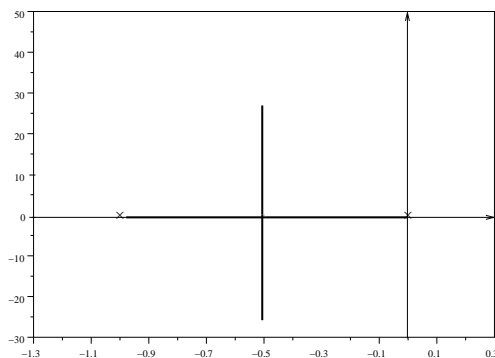
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)} \quad (4.5.27)$$

O lugar das raízes correspondente é mostrado na Figura 4.24(c)

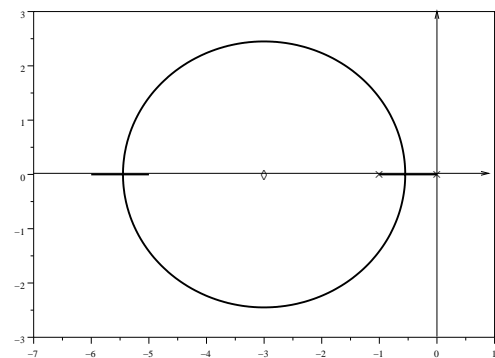
Para o caso onde um par de pólos complexos em $-2 \pm j2$ for adicionado ao sistema original, tem-se o lugar das raízes da Figura 4.24(d).

Através destes exemplos pode-se concluir que a adição de pólos à função de transferência $G(s)H(s)$ desloca o lugar das raízes para o lado direito do plano complexo, o que tem efeito desestabilizante no sistema. Note que os pólos tendem a reduzir o valor do ângulo das assíntotas, o que "entorta" os ramos para o lado direito.

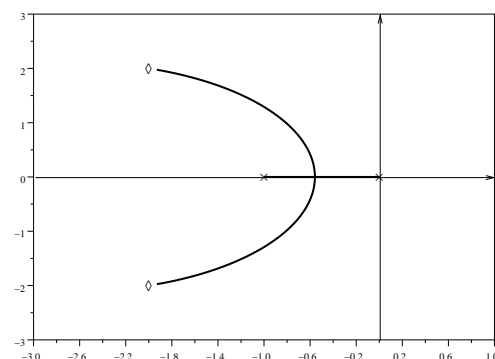
Adição de zeros Consideremos o sistema original, dado por 4.5.25. Um zero é adicionado em -3.5 . O LR do sistema é mostrado na Figura 4.25(b).



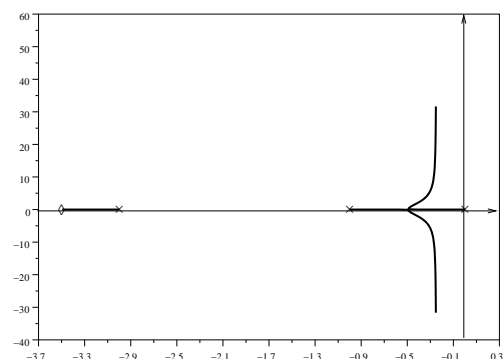
(a) Sistema original



(b) Adição de zero em -3



(c) Adição de zeros complexos $-2 \pm j2$



(d) Adição de pólo em -3 e de zero em 3.5

Figura 4.25: Efeito da adição de zeros

Se um par de zeros complexos for adicionado, então o lugar das raízes é dado na Figura 4.25(c)

Seja agora o sistema 4.5.26, com mais um zero real adicionado. O lugar das raízes é mostrado na Figura 4.25(d).

Observe que as assíntotas que tinham inclinação $\pm 60^\circ$, passam a ter inclinação $\pm 90^\circ$.

Dos exemplos estudados, observamos que a adição de zeros desloca o lugar das raízes para a esquerda e tem, portanto, um efeito estabilizante no sistema.

4.5.5 Estabilidade no domínio da frequência

Toda a análise de estabilidade desenvolvida até aqui foi baseada no estudo das raízes da equação característica do sistema. No entanto, a estabilidade também pode ser estudada a partir da resposta em frequência do sistema, como dada, por exemplo, pelo diagrama de Bode e pelo diagrama polar do sistema.

A condição de estabilidade é dada pela equação característica

$$1 + KG = 0$$

, ou

$$\begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle G(s) = -180^\circ \end{cases}$$

Supondo que o lugar das raízes seja o mostrado na Figura, onde o cruzamento do eixo imaginário ocorre para $K = K_c$, com $\omega = \omega_c$, a condição no limiar da instabilidade (pólos sobre o eixo imaginário $j\omega$), corresponde à $\begin{cases} |K_c G(j\omega_c)| = 1 \\ \angle G(j\omega_c) = -180^\circ \end{cases}$

Do exemplo acima concluímos que o sistema é estável desde que $|KG(j\omega)| < 1$ na frequência onde $\angle G(j\omega) = -180^\circ$. Esta conclusão não é genérica pois existem sistemas estáveis que não satisfazem essa condição. Para resolver essa dificuldade devemos utilizar o critério de estabilidade de Nyquist.

4.5.5.1 Critério de Nyquist

O critério de estabilidade de Nyquist relaciona a função $G(j\omega)$ com o número de pólos de M.F. no semi-plano direito (SPD) e está baseado no resultado conhecido como *Princípio do argumento*.

O *Princípio do argumento* tem uma derivação rigorosa na teoria de funções de variáveis complexas, mas a abordagem usada a seguir apenas expõe a base deste princípio.

Consideremos uma função de transferência $G_1(s)$, com a configuração de pólos e zeros no plano complexo, mostrada na Figura 4.26. Consideremos ainda um contorno fechado no plano complexo, denotado C_1 , na mesma figura. Vamos determinar a variação angular de $G_1(s)$ quando s varia sobre o

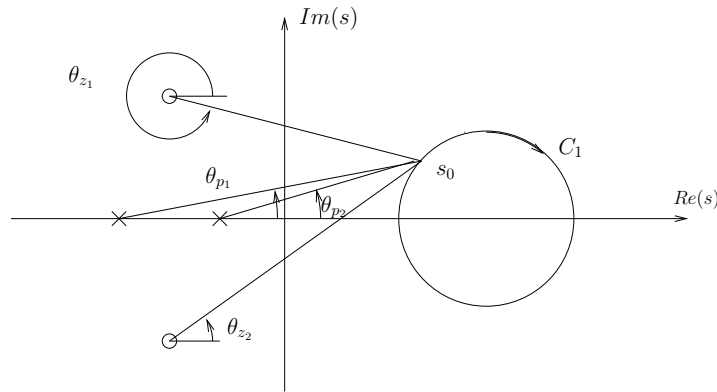


Figura 4.26: Contorno C_1 indicando variação de s

contorno C_1 , realizando uma volta completa no sentido horário. Este cálculo não é difícil se lembrarmos da interpretação vetorial de números complexos. Ou seja, estaremos acompanhando a variação dos ângulos dos vetores que começam em cada zero e cada pólo de $G_1(s)$, e terminam em s . Isto está representado na Figura 4.26. Para o ponto s_0 sobre o contorno, tem-se que,

$$\angle G_1(s_0) = \alpha = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2})$$

O gráfico de G_s é mostrado na Figura 4.27

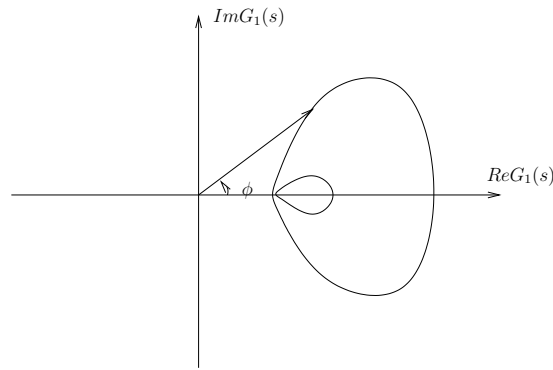


Figura 4.27: Gráfico de $G_1(s)$ quando s varia sobre o contorno C_1

Observa-se que este gráfico não envolve a origem. O envolvimento da origem significaria uma variação angular de 360° da função de transferência. Ou seja, o vetor que representa $G_1(s_0)$, parte da origem e termina em $G_1(s_0)$, com ângulo α . Este vetor não completa nenhuma volta em torno da origem.

Seja agora $G_2(s)$, com pólos e zeros conforme mostrado na Figura 4.28.

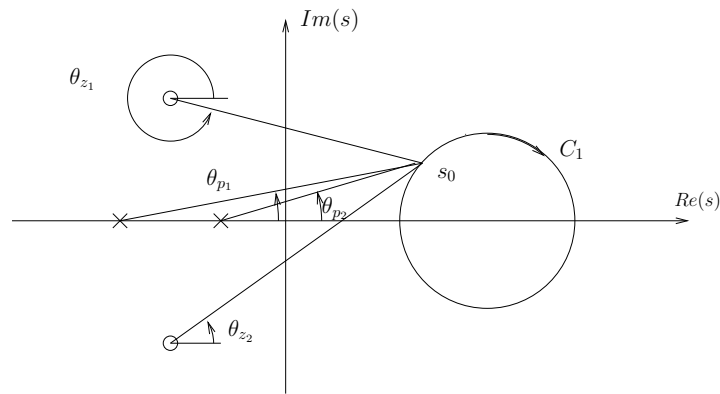


Figura 4.28: Contorno C_2 indicando variação de s

Devido ao pólo no interior do contorno C^2 , o ângulo de G^2 sofre uma variação de 360° após s_0 fazer uma volta sobre C^1 . Então o ângulo de G_2 também sofre uma volta de 360° (no sentido anti-horário, por ser um pólo em C^2), como mostrado na Figura 4.29. Logo G_2 envolve a origem no sentido anti-horário. Com estes resultados, podemos enunciar o princípio do argumento.

Princípios do argumento: o mapa de contorno de uma função complexa envolve a origem se o contorno contem uma singularidade (pólo ou zero) da função.

Generalização: múltiplas singularidades podem estar no contorno. O número e o sentido dos envoltimentos da origem então mudam. Por exemplo, se o número de pólos e zeros dentro de C_1 é o mesmo, então não haverá envolvimento da origem.

Este resultado pode ser aplicado ao problema de estabilidade. Suponha que C_1 é o contorno que envolve todo o semiplano direito (SPD), como mostrado na Figura 4.30. Então $G(s)$ envolve a origem somente se tiver um pólo ou zero no lado direito.

O objetivo agora é usar os resultados anteriores para determinar a estabilidade de um sistema de controle em malha fechada.

Considere o sistema com função de transferência de malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (4.5.28)$$

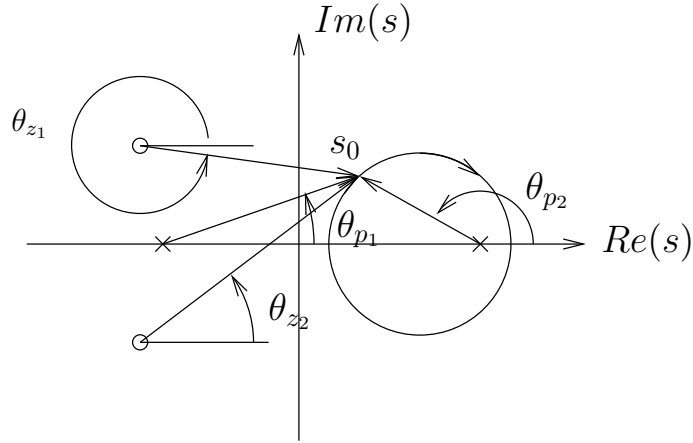


Figura 4.29: Gráfico de $G_2(s)$ quando s varia sobre o contorno C_2

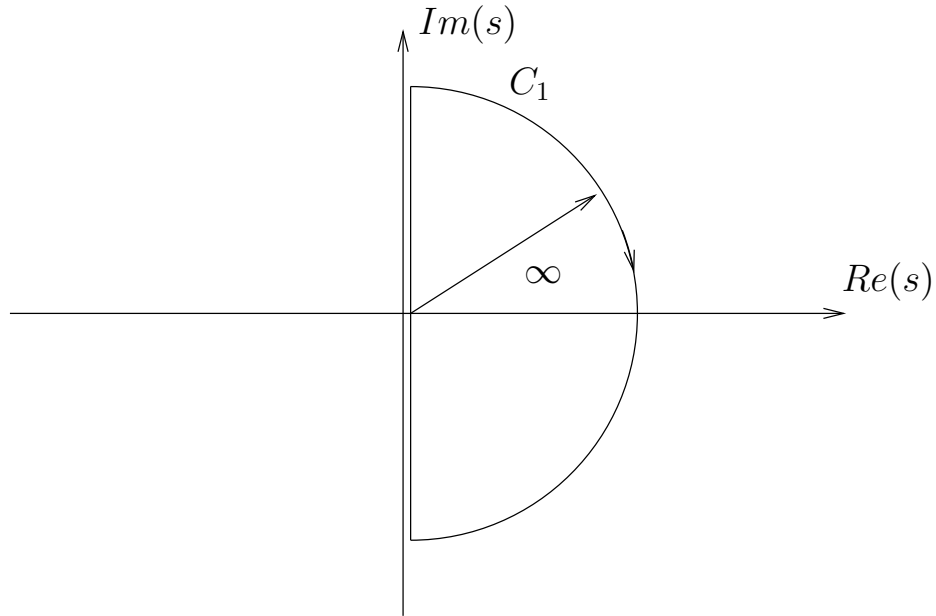


Figura 4.30: Contorno C_1 envolvendo todo o lado direito do plano complexo

com raízes de malha fechada dadas por $1 + K G(s) = 0$.

Devemos definir o contorno e a função cujo mapeamento envolve ou não a origem, quando a variável s percorre o contorno. Escolheremos o contorno C_1 que envolve todo o semi-plano direito. A função a ser mapeada será $1 + K G(s)$.

Se o contorno que envolve o SPD contem um zero ou pólo de $1 + K G(s)$ então $1 + K G(s)$ vai envolver a origem. Note que $1 + K G(s)$ é $K G(s)$ deslocado à direita de uma unidade. Portanto se o gráfico de $1 + K G(s)$ envolve a origem, o gráfico de $K G(s)$ vai envolver o ponto -1 do eixo real.

Desta forma -1 é o ponto crítico e o cálculo de $K G(s)$ é o diagrama polar ou de Nyquist (magnitude e ângulo de $K G(jw)$).

Para se determinar se um envolvimento é devido a um pólo ou zero, pode-se escrever.

$$1 + K G(s) = 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{a(s) + K b(s)}{a(s)}$$

Os pólos de $1 + KG(s)$ são os pólos de $G(s)$, e em geral, sabe-se se existem pólos de malha fechada no SPD.

Se não existirem pólos de $G(s)$ no SPD, o envolvimento do ponto -1 por $KG(s)$ indica que um zero de $1 + KG(s)$ está no SPD e e portanto um pólo do sistema em malha fechada.

Generalização: um contorno C_1 no sentido horário envolvendo um zero de $1 + KG(s)$, ou seja, um pólo instável de MF, resulta em $KG(s)$ envolvendo o ponto -1 no sentido horário. Se C_1 envolve um pólo de $1 + KG(s)$, ou seja, um pólo instável de MA, haverá um envolvimento de -1 por $KG(s)$ no sentido anti-horário.

O número líquido de envoltimentos, N é igual ao número de zeros (pólos de malha fechada) no SPD, Z , menos o número de pólos de malha aberta no SPD, P . Chega-se então à relação:

$$N = Z - P \quad (4.5.29)$$

que relaciona pólos de malha fechada, de malha aberta e número de envoltimentos do ponto -1 .

O procedimento para aplicar o critério de Nyquist resume-se nos seguintes passos:

Diagrama polar da FTMA Traça-se o diagrama polar de $KG(j\omega)$. Devido à simetria plota-se apenas para $\omega \rightarrow 0$ a ∞ . Desde que $n < m$ (número de zeros menor do que o número de pólos), a parte de C_1 correspondente à $s \rightarrow \infty$ é mapeada próxima à origem. Ou seja, deve-se mapear $KG(s)$ para $s \rightarrow -j\infty$ a $j\infty$, ou de 0 a $+j\infty$ e então refletindo-se com relação ao eixo real.

Número de pólos de malha aberta O número de pólos de malha aberta instáveis é conhecido da função de transferência de malha aberta. Portanto P é conhecido.

Número de envoltimentos de -1 Determine o número de envolvimento do ponto -1 . Isto pode ser feito traçando um vetor que começa em -1 e termina sobre o diagrama polar. O ponto final do vetor deve se deslocar desde o ponto do diagrama correspondente a $\omega = -\infty$ até o ponto correspondente a $\omega = +\infty$. Verifique quantas voltas completas em torno de -1 foram completadas pelo vetor no sentido horário (positivo) e anti-horário (negativo). Alternativamente, trace uma reta partindo de -1 , em qualquer direção, e veja quantas vezes o gráfico cruza esta reta da esquerda para a direita (positivo) ou da direita para a esquerda (negativo). A soma algébrica destes valores é o número N de envoltimentos.

Número de pólos de malha fechada Aplica-se a relação $N = Z - P$, determinando-se Z .

Em geral, o sistema de malha aberta é estável e portanto $P = 0$. Neste caso, o sistema de malha fechada é estável se $N = 0$ ou seja, se não existir envolvimento do ponto -1 .

Exemplo 4.5.12 Considere o sistema de segunda ordem da Figura 4.31. Determine a estabilidade do

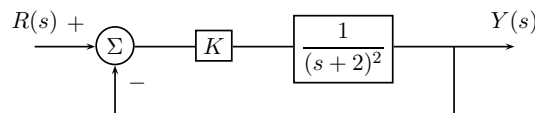


Figura 4.31: Exemplo do critério de Nyquist

sistema para $K = 1$.

A função de transferência de malha aberta não tem nenhum pólo instável. Logo $P = 0$. O diagrama polar é apresentado na Figura 4.32.

Contando o número de envoltimentos do ponto -1 tem-se $N = 0$. Logo, $Z = 0$, $P = 0: Z = 0$. Logo o sistema é estável.

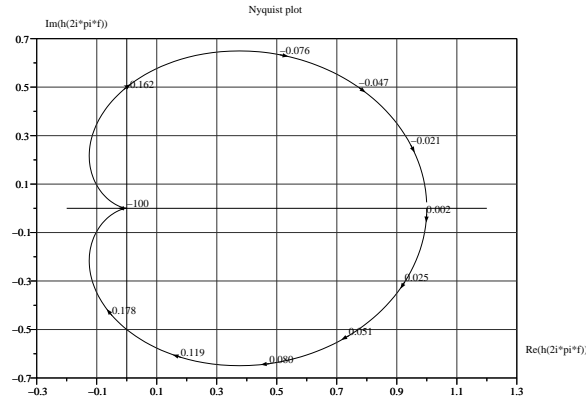


Figura 4.32: Diagrama polar

4.5.5.2 Critério de Nyquist para uma faixa de ganho

Para aplicar o critério de Nyquist, deve-se traçar o diagrama polar, o que requer que o ganho seja conhecido a priori. No entanto, às vezes deseja-se determinar a faixa de ganhos para a qual o sistema é instável, sem fixar inicialmente o ganho. Nestes casos testa-se o envolvimento de $-\frac{1}{K}$ por $G(s)$. Observa-se que isto é equivalente a testar o envolvimento de -1 por $KG(s)$.

Exemplo 4.5.13 Para o exemplo anterior deseja-se determinar a faixa de ganho para o qual o sistema é estável.

Deve-se ter: $-\frac{1}{K} < 0$ ou $-\frac{1}{K} > 1$ (para $K > 0$), logo $K > -1$ para o sistema ser estável.

4.5.5.3 Função de malha aberta com pólo na origem

No caso onde a função de transferência de malha aberta tem pólos na origem, o contorno deve ser modificado, para evitar que o contorno passe sobre os pólos. Isto é feito através de uma modificação do contorno, próximo à origem, através de um semi-círculo em torno da origem, com raio ϵ tendendo a zero, como mostrado na Figura.

Deve-se então mapear o semi-círculo em torno do pólo na origem, dado por $\epsilon e^{j\theta}$, com θ variando de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Este mapeamento é determinado pelo pólo (ou pólos) na origem da função de transferência de malha aberta. É fácil de ver, para o caso de um pólo da função de transferência de malha aberta na origem, que o pólo determina o mapeamento, ou seja, supondo a função de transferência $G(s) = \frac{1}{s}G'$, o mapeamento do semi-círculo é dado por $G(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}}G'(\epsilon e^{j\theta})$, este mapeamento corresponde a $\frac{1}{\epsilon}e^{-j\theta}$, e portanto o semi-círculo em torno da origem é mapeado em um semi-círculo de raio infinito que vai de $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, ou seja, um semi-círculo no sentido horário. Para um número qualquer p de pólos na origem, tem-se p semi-círculos de raio infinito no sentido horário.

Exemplo 4.5.14 Função de transferência de malha aberta com zero na origem Considere o sistema dado na Figura 4.34. O objetivo é determinar o número de pólos de malha fechada no lado direito do plano complexo.

O diagrama polar para esta função, considerando $K = 1$, é mostrado na Figura 4.35

Como existe um pólo na origem, temos um semi-círculo de raio infinito no sentido horário, de $\omega = 0^-$ a ω^{0+} . Podemos agora aplicar o critério de Nyquist. Vamos considerar o ganho variável, e portanto

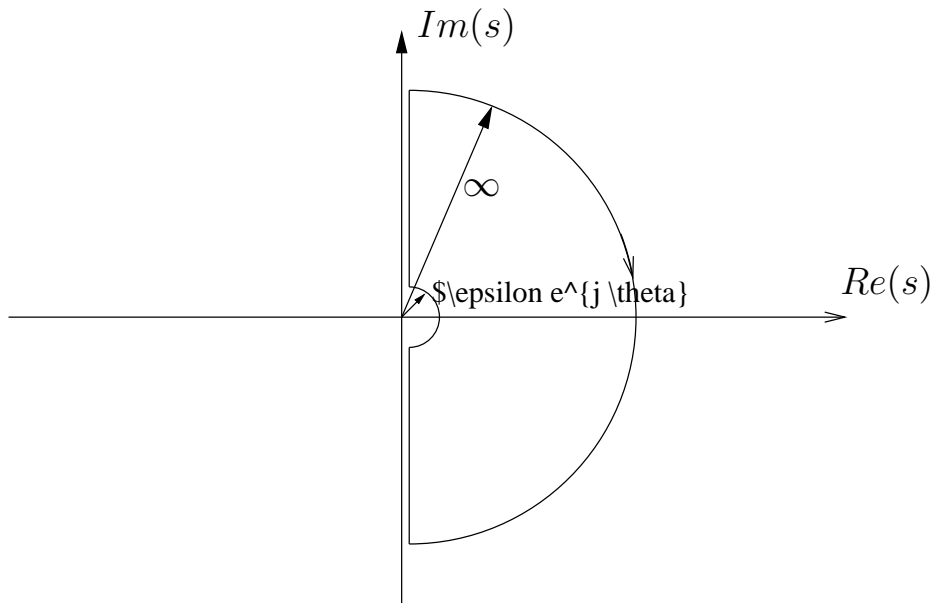


Figura 4.33: Contorno C_1 envolvendo todo o lado direito do plano complexo

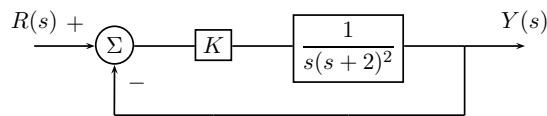


Figura 4.34: Função de transferência de malha aberta com pólo na origem

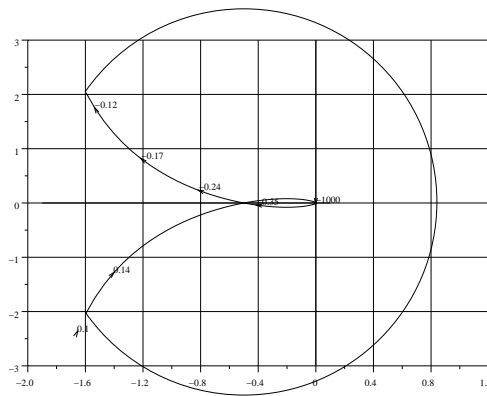


Figura 4.35: Diagrama polar para o caso de um pólo na origem

determinaremos o envolvimento do ponto $-\frac{1}{K}$. Para $-0,5 < -\frac{1}{K} < 0$: $N = 2$, $P = 0$ e $Z = 2$, ou seja, sistema instável.

Se $-\frac{1}{K} < 0$ (no eixo real positivo), então $N = 1$, $P = 0$ e $Z = 1$. Este é o caso de $K < 0$. Se K for pequeno, então $-\frac{1}{K}$ não é envolvido e $N = 0$, $P = 0$: $2 = 0$, o que resulta em sistema estável.

Exemplo 4.5.15 Sistema instável em malha aberta. Considere o sistema da Figura unistol.

O diagrama polar deste sistema, para $K = 1$, é apresentado na Figura 4.37. Como existe um pólo na

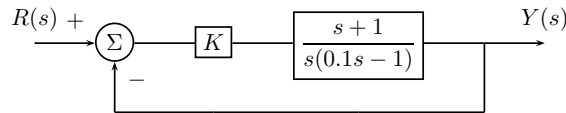


Figura 4.36: Sistema instável em malha aberta

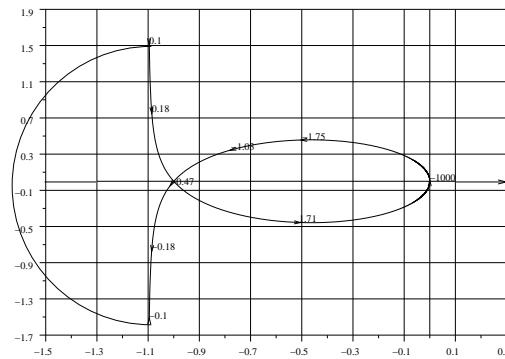


Figura 4.37: Diagrama polar para sistema instável em malha aberta

origem, temos que completar o diagrama polar com um semi-círculo no sentido horário, indo de $\omega = 0^-$ a $\omega 0^+$.

Podemos estudar a estabilidade do sistema, para a variação de K , usando o critério de Nyquist.

Para $K > 1$, tem-se $N = -1$, $P = 1$ e portanto $N = 0$.

Para $K < 1$, tem-se $N = +1$, $P = 1$ e $Z = 2$. Portanto o sistema é instável. Observe que no caso de um pólo de malha aberta instável, é preciso existir envolvimento para o sistema poder ser estável.

4.5.5.4 Margens de Estabilidade

Muitas vezes é desejável conhecer não somente se um sistema é estável, mas qual a distância da instabilidade, o que permite determinar qual o valor que um parâmetro pode variar para se atingir a condição de instabilidade. No caso do critério de Nyquist, a distância do diagrama polar ao ponto -1 é uma medida da margem de estabilidade. Ao invés de medir diretamente este valor, as definições de margem de ganho e margem de fase fornecem uma indicação daquela distância, sendo úteis tanto para a análise quanto para o projeto de sistemas de controle. Estas margens podem ser medidas tanto no diagrama de Nyquist quanto no diagrama de Bode.

Considerando o diagrama de Nyquist da Figura 4.38 observa-se que se a função de transferência for multiplicada por MG , o diagrama passa exatamente em cima do ponto -1 . Por outro lado, se o diagrama for girado no sentido horário por um ângulo MF , novamente o diagrama passa pelo ponto -1 . Nos dois casos o sistema atinge o limiar da instabilidade. Isto leva às seguintes definições de margem de ganho e margem de fase.

Definição 10 Margem de ganho (MG) Fator pelo qual o ganho deve ser multiplicado para se obter o ganho crítico.

Se o ganho do sistema for K e K_c é o ganho crítico correspondente ao limiar da instabilidade, então

$$K_c = K \times MG \quad (4.5.30)$$

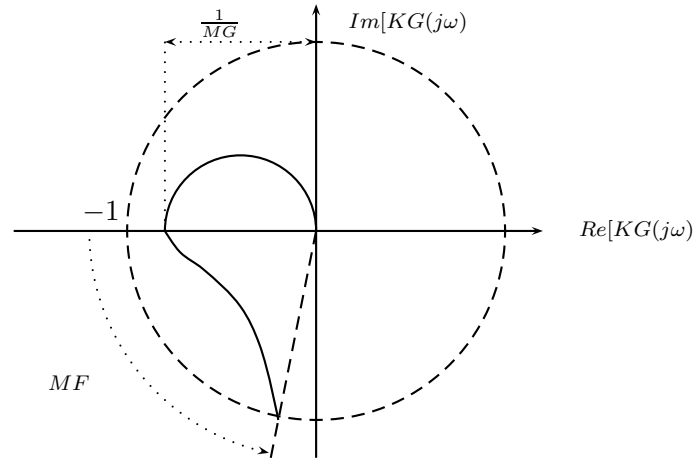


Figura 4.38: Margens de ganho e de fase

Se o ganho for em dB, então a margem de ganho é o valor que somado ao ganho atual leva o sistema ao limiar da instabilidade

$$K_c|_{dB} = K|_{dB} + MG|_{dB} \quad (4.5.31)$$

A margem de ganho pode ser determinada do Diagrama de Bode, do diagrama polar ou ainda L.R.

Definição 11 *Margem de fase (MF)* valor correspondente a quanto $\angle G(j\omega)$ excede -180°

As margens de ganho e fase, usando o diagrama de Nyquist, são mostradas na Figura 4.38.

As margens de ganho e fase podem ser determinadas facilmente do DB, como mostrado na Figura 4.39. Observe a correspondência entre estas margens como determinadas pelos dois diagramas.

4.5.5.5 Relação entre MF e amortecimento

A margem de fase fornece uma indicação do amortecimento de um sistema em malha fechada. Embora a relação seja derivada para um sistema de segunda ordem, pode-se generalizar este resultado para sistemas de ordem mais elevada, que tenham um par de pólos dominantes.

Seja o sistema dado na Figura 4.40.

A função de transferência de malha fechada é

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s + \omega_n^2} \quad (4.5.32)$$

com amortecimento ζ .

Vamos calcular a margem de fase deste sistema. Para isto usamos a função de transferência de malha aberta. Os seguintes passos nos fornecem aquela margem.

Frequência de cruzamento A passagem por 0 dB é dada por

$$\left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_c)(j\omega_c + 2\zeta\omega_n)} \right| = 1 \quad (4.5.33)$$

Com isto obtemos a frequência de cruzamento ω_c .

Cálculo da margem de fase A margem de fase é dada por $MF = 180 + \angle \frac{\omega_n^2}{(j\omega_c)(j\omega_c + 2\zeta\omega_n)}$. Com o valor calculado na equação anterior tem-se

$$MF = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \quad (4.5.34)$$

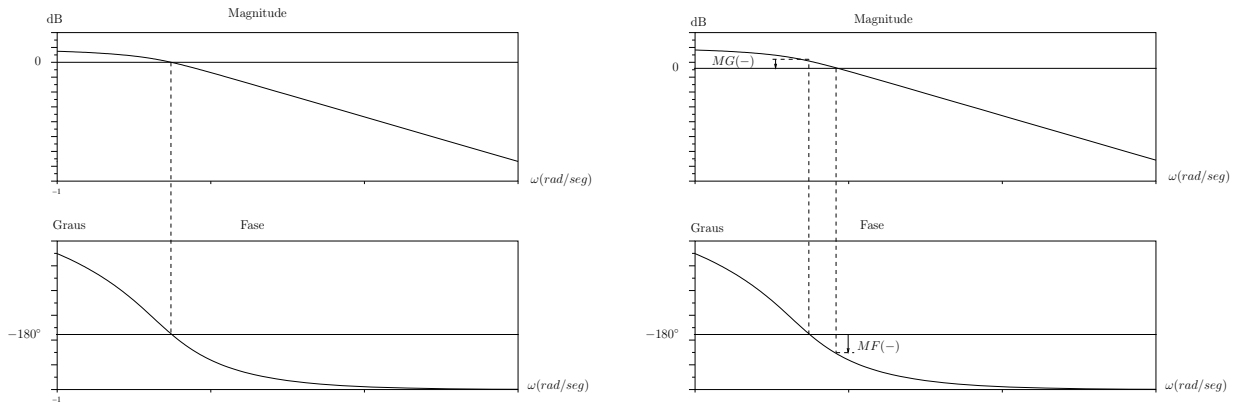
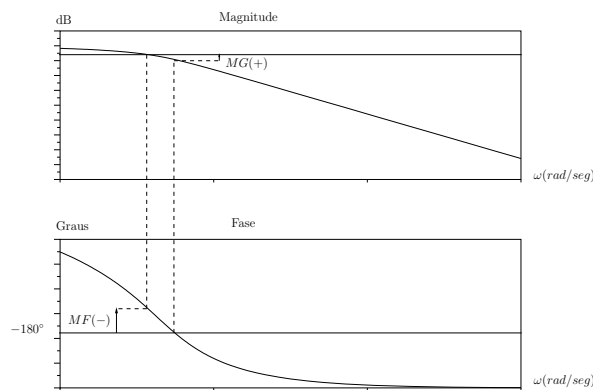
(a) Ganho $K = K_{crit}$ (b) Ganho $K > K_{crit}$ (c) Ganho $K < K_{crit}$

Figura 4.39: Margem de ganho e fase a partir do Diagrama de Bode

O gráfico relacionando margem de fase e amortecimento é dado na Figura 4.5.5.5.

Observa-se que é possível traçar uma aproximação para esta curva através de uma reta passando pelo par $(10^\circ, 0.2)$ e (60°) . Com isto, tem-se uma relação importante entre margem de fase e amortecimento

$$\zeta \approx \frac{MF}{100} \quad \text{ou} \quad \zeta \cong 0,01MF$$

Limitações do uso da margem de ganho e fase O uso das margens de ganho e fase é limitado em alguns sistemas. Para sistemas de primeira e segunda ordem, o diagrama de fase nunca cruza -180° , e portanto não se pode determinar uma margem de fase. O ganho pode ser aumentado sem limite e o sistema ainda será estável, ou seja, a margem de ganho é infinita. Em alguns sistemas pode-se ter várias passagens por 0 dB ou por -180° , sendo as margens de ganho e fase definidas de maneira não única. Em outros sistemas ainda, pode-se ter conflito entre a MG e a MF, com, por exemplo, uma MG negativa

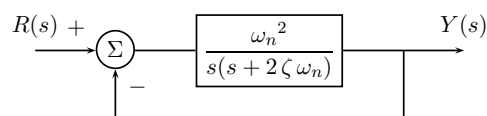
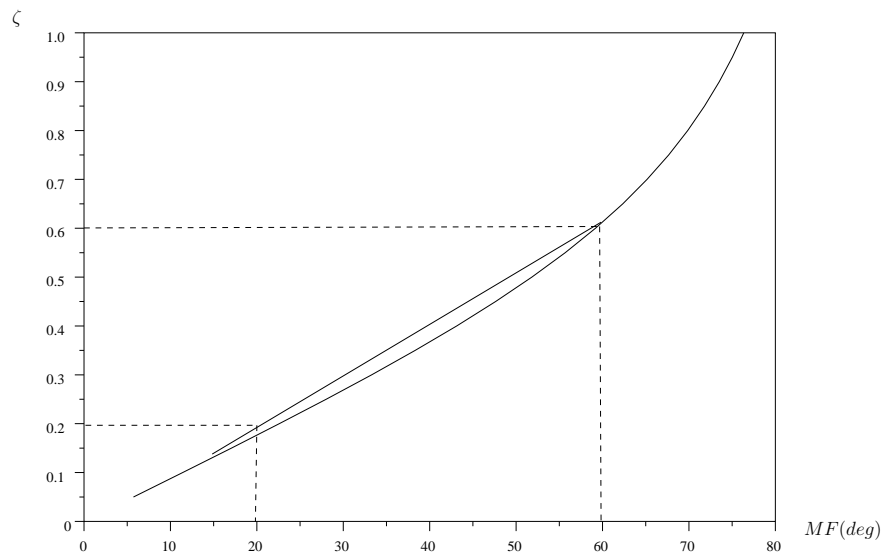


Figura 4.40: Relação entre amortecimento e margem de fase



e uma MF positiva. Neste caso, o critério de Nyquist pode ser aplicado para dirimir qualquer dúvida e determinar a estabilidade do sistema.

A seguir são apresentados exemplos que ilustram alguns destes caso.

Exemplo 4.5.16 *Propriedades de estabilidade de um sistema condicionalmente estável.* Considere o sistema com função de transferência de malha aberta dada por $G(S) = \frac{K(s+10)^2}{s^3}$.

O diagrama polar é mostrado na Figura para $K = 7$. Observe que devido à presença de 3 pólos de malha aberta na origem, tem-se 3 semi-círculos no sentido horário, indo de 0^- a 0^+ , com raio infinito.

Observa-se que a MF é positiva, mas a MG é menor que 1, e portanto negativa em dB. Usando-se o critério de Nyquist, tem-se $N = Z - P$, com $N = 0$, $P = 0$ e portanto $Z = 0$

Exemplo 4.5.17 *Sistema com múltiplas frequências de cruzamento.* Considere o sistema com função de transferência de malha aberta dada por $G(s) = \frac{85(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$

O diagrama polar deste sistema é apresentado em aula. Observa-se que o sistema apresenta 3 pontos de cruzamento com o círculo unitário, e portanto tem frequências de cruzamento correspondentes ao ganho. Com isto pode-se definir 3 margens de fase, A escolha é pela proximidade do ponto -1. A menor variação de fase para chegar a este ponto determina a escolha. Portanto a MF escolhida é 37° .

Exercícios

1. Considere o sistema abaixo:

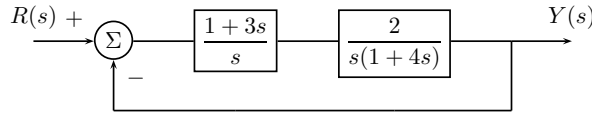


Figura 4.41: Exercício 1

Pede-se o erro em regime permanente e_{rp} para as entradas a seguir:

- $R(t) = 3 + 4t$
 - $R(t) = 5 + 6t + 4t^2$
 - $R(t) = 1 + 2t + t^2 + 3t^2 + 3t^3$
2. Para o sistema abaixo, determine o mínimo valor do ganho K de modo que:
- Quando $C(s)=1$, o erro estático ao degrau deve ser no máximo de 1%;
 - Quando $C(s) = \frac{3}{s}$, o erro estático a $R(t) = 6t + 5$ deve ser no máximo igual a 0.01.

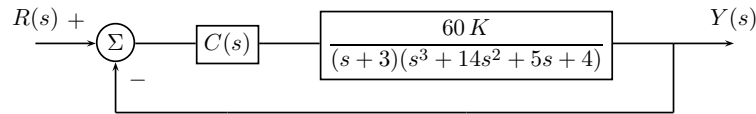


Figura 4.42: Exercício 2

3. Considere o sistema de controle em malha fechada abaixo. Os parâmetros do modelo são os seguintes: $\tau = 4\alpha = 9$; $\beta = 3$; $K-1 = 4$; $K-2 = 2$. Determine o erro estático à entrada $r(t) = 5 + 2t + 0,2t^2$

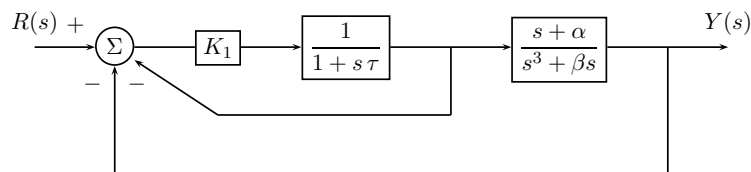


Figura 4.43: Exercício 3

- Determine o erro estático do sistema abaixo à entrada: $R(t) = 2t^2 - 9t + 17$
- Esboçar o Lugar Geométrico das Raízes ($0 \leq K \leq \infty$) correspondentes aos sistemas cujas configurações de pólos e zeros de malha aberta estão indicadas na Figura 4.45.
- Determine as propriedades geométricas pertinentes e esboce o Lugar Geométrico das raízes, com $0 \leq K \leq \infty$, para os sistemas cujas funções de transferência em malha aberta estão dadas abaixo:
 - $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+5)}$

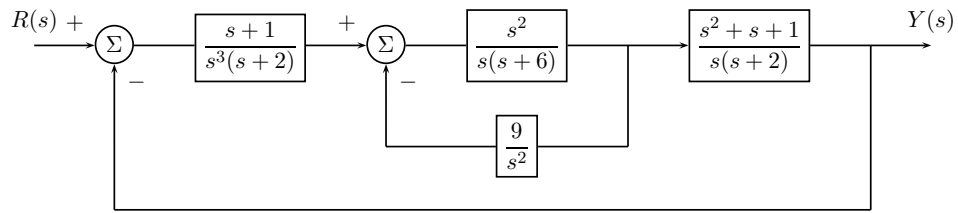


Figura 4.44: Exercício 4

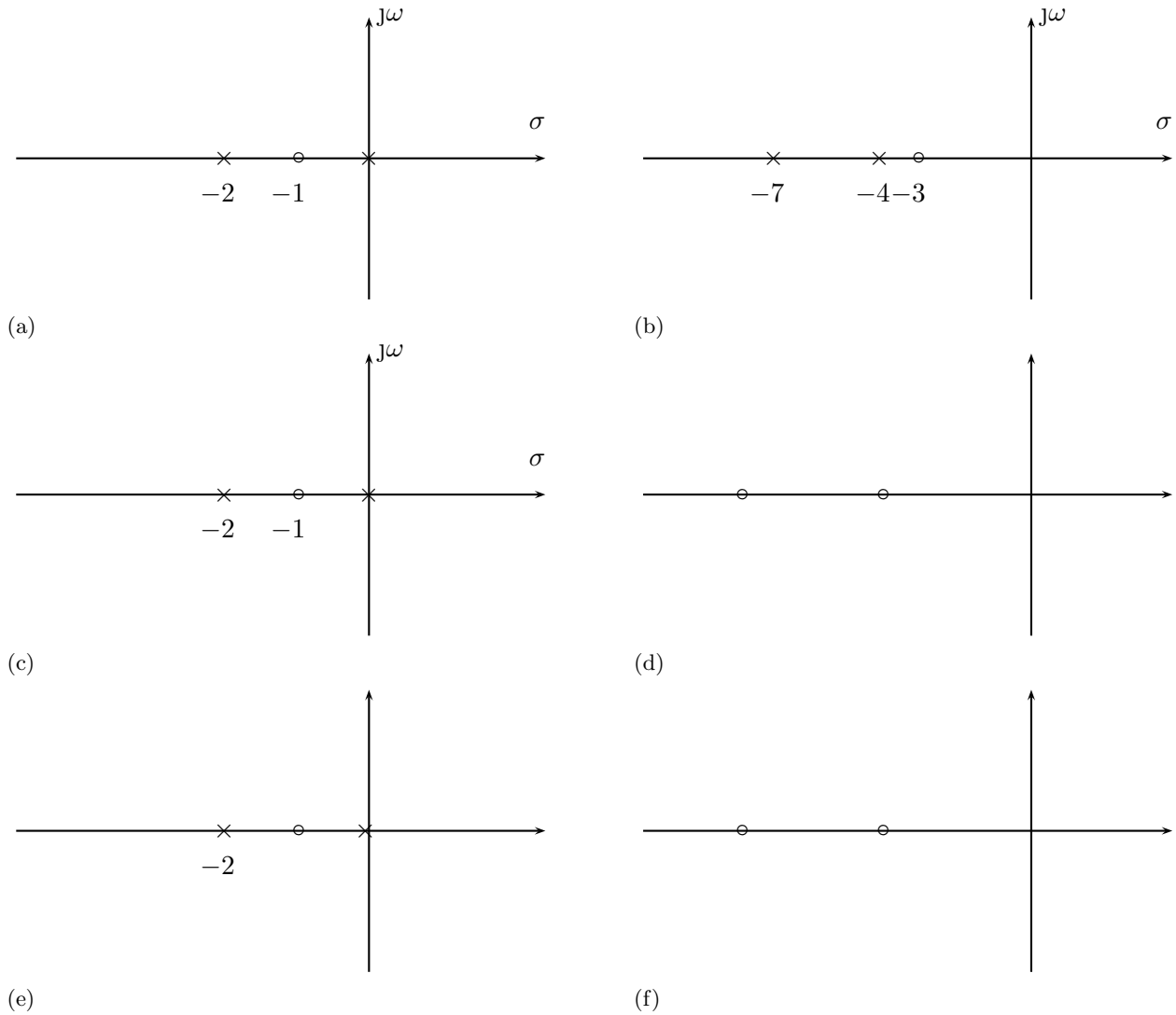


Figura 4.45: Exercício 5

$$\text{b. } G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)(s^2+8s+20)}$$

$$\text{c. } G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s^2+6s+10)}$$

$$\text{d. } G(s)H(s) = \frac{K}{(1+0,5s)(1+0,2s)(1+s)^2}$$

7. Determine a faixa de valores de K para a qual cada um dos sistemas em malha fechada, cujas

funções de transferência em malha aberta são dadas no problema anterior, é estável.

8. Dado o sistema em malha fechada abaixo, determine o lugar geométrico das raízes em M.F no plano -s quando a constante de tempo τ varia de 0 a ∞ .

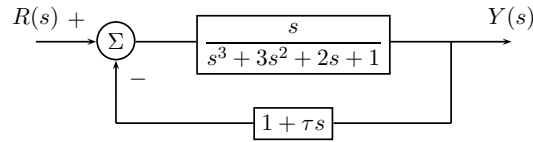


Figura 4.46: Exercício 8

9. Dadas as funções de transferência abaixo, calcule a margem de ganho, a margem de fase e estime o amortecimento ζ .

a. $G(s) = \frac{5}{(1 + 4s)(1 + 10s)}$

b. $G(s) = \frac{3(1 + 10s)}{(1 + 2s)(1 + 5s)}$

c. $G(s) = \frac{(1 + 4s)}{s(1 + 3s)(1 + 10s)}$

d. $G(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 3)}$

e. $G(s) = \frac{8(1 - 2s)}{(1 + 2s)(1 + 15s)}$

10. Dadas as funções de transferência abaixo, determine a estabilidade do sistema em malha fechada, usando o critério de Nyquist.

a. $G(s) = \frac{4(s + 3)}{s(s + 2)(s + 5)}$

b. $G(s) = \frac{15}{(s + 1)(s + 5)}$

c. $G(s) = \frac{8(1 + 5s)}{(1 + 2s)}$

d. $G(s) = \frac{10(s - 4)}{(s + 3)(s + 7)}$

e. $G(s) = \frac{(s - 3)}{(s + 5)(s - 1)}$

11. Considere o sistema dado na Figura 4.47.

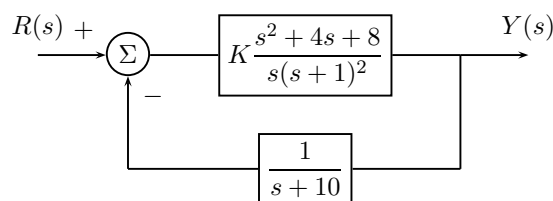


Figura 4.47: Exercício 11

- a. Esboce o lugar das raízes, calculando todas as grandezas relevantes, como assíntotas, centróide, ângulos de partida, pontos de separação, cruzamento com o eixo imaginário, quando aplicável.
- b. Supondo $K = 10$, determine os erros para:
 - i) referência do tipo degrau unitário;
 - ii) referência do tipo rampa unitária;
 - iii) perturbação tipo rampa na entrada da planta.

12. Para o sistema da Figura 4.48

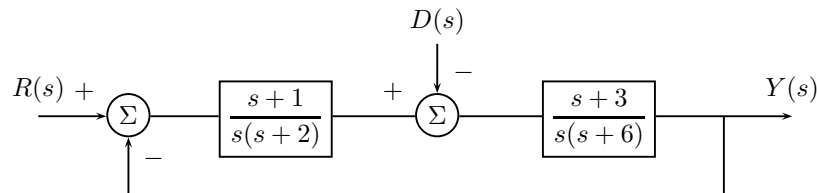


Figura 4.48: Exercício 12

- a. Determine, calculando, quando aplicável, as constantes de erro correspondentes:
 - i) o erro a uma referência do tipo rampa unitária;
 - ii) o erro a uma perturbação do tipo degrau unitário.
 - b. Para o mesmo sistema da Figura 4.48, mas com uma realimentação com ganho 2, determine:
 - o erro a uma referência do tipo rampa unitária;
 - o erro a uma perturbação do tipo rampa unitária.
13. Determine as margens de ganho e de fase e as frequências de cruzamento de ganho e de fase dos sistemas de controle com realimentação unitária negativa, com as seguintes plantas:
- a.

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s}$$

- b. Diagrama de Bode dado pela Figura 4.49. Neste caso indique também graficamente as margens de ganho e fase.
14. Um sistema de controle, tem a planta

$$G(s) = K \frac{s - 0.1}{(s + 2)(s + 1)}$$

O diagrama de Nyquist correspondente, traçado para $K = 1$ é mostrado na Figura 4.50.

- a. Determine se o sistema é estável para o ganho $K = 10$.
 - b. Determine a faixa de ganhos para a qual o sistema é estável, usando o critério de Nyquist.
15. Um sistema de controle, com uma planta estável tendo um pólo na origem e nenhum pólo no semi-plano direito aberto, teve o ganho ajustado para atender à condição de erro. O diagrama de Nyquist resultante é mostrado na Figura 4.51. O sistema nesta condição é instável.
- a. Confirme que o sistema é instável aplicando o critério de estabilidade de Nyquist.

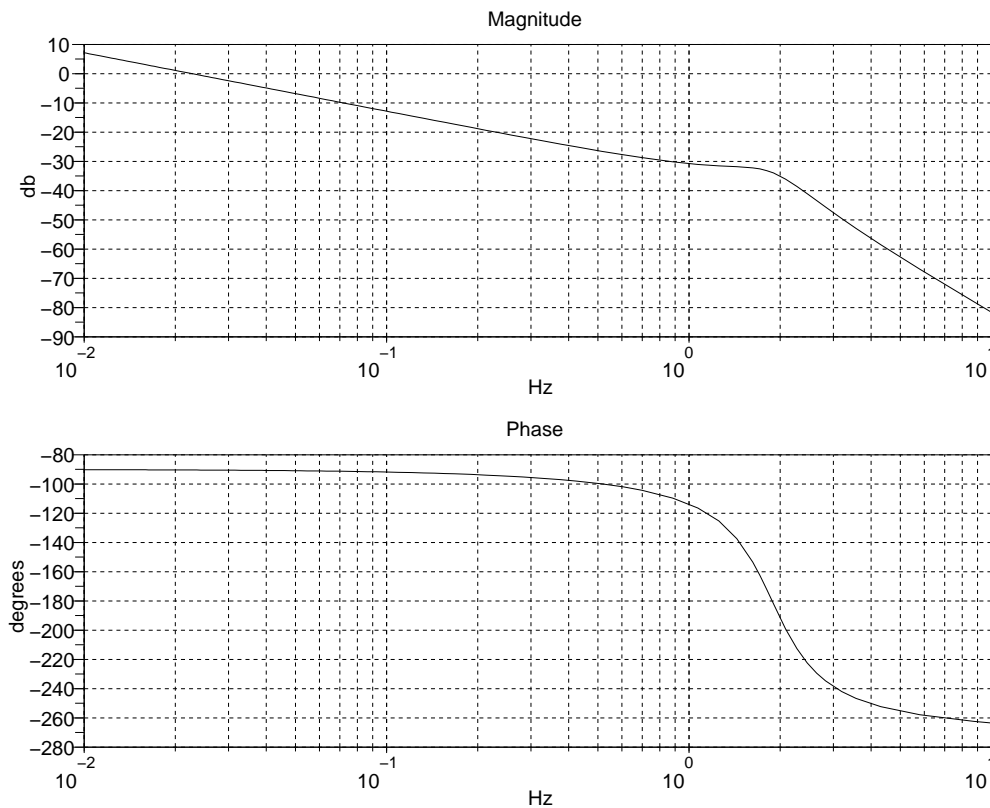


Figura 4.49: Exercício 13

- b. Esboce o Diagrama de Bode e indique as margens de ganho e fase.
- c. Deseja-se projetar um controlador que estabilize o sistema e assegure uma margem de fase de 30° . A função de transferência do controlador é $\frac{1 + sT_1}{1 + sT_2}$. O parâmetro T_2 foi fixado em 0.1. Calcule o valor adequado para T_1 usando a informação fornecida pelo diagrama de Nyquist. Use o critério de Routh-Hurwitz para confirmar que o sistema é estável com o controlador.
16. O diagrama de Nyquist da função de transferência de uma planta é dado na Figura 4.52. A planta tem dois integradores e nenhum pólo no lado direito aberto do plano complexo.
- Determine a estabilidade do sistema quando a malha de controle é fechada através de uma realimentação unitária.
 - Qual o aumento ou diminuição de ganho que torna o sistema estável ou instável?
17. Para o sistema mostrado na Figura 4.53
- Trace o LR, para $-\infty < p < \infty$, calculando todas as grandezas relevantes, como pontos de separação, ângulos de assíntotas, ângulos de partida, passagem pelo eixo imaginário, etc.
 - Indique a faixa de valores de p para a qual o sistema é estável
18. Para o sistema da Figura 4.54

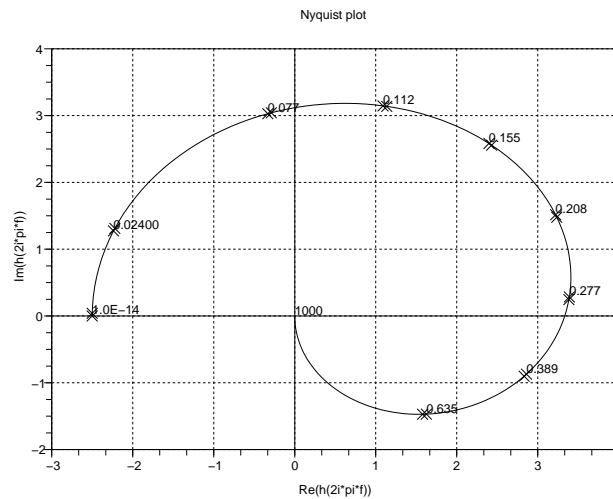


Figura 4.50: Exercício 14

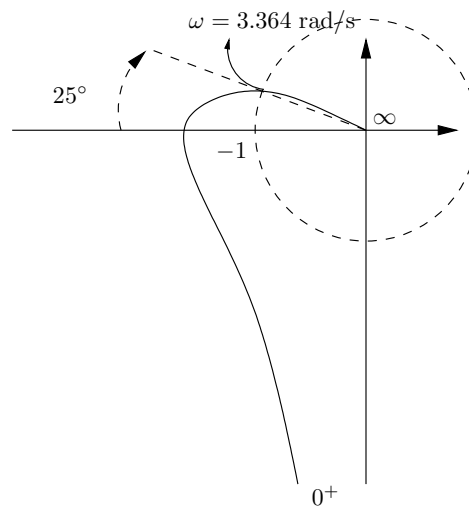


Figura 4.51: Exercício 15

- Para $H(s) = 1$, trace o lugar das raízes **detalhadamente**, para $-\infty < K < \infty$, calculando todas as grandezas relevantes.
 - Para $H(s) = s + 1$ **esboce** o lugar das raízes, para $-\infty < K < \infty$.
 - Comente sobre o efeito de adicionar uma ação derivativa na malha de realimentação.
19. A função de transferência $G(s)$ em malha aberta de um sistema de controle com realimentação unitária tem um diagrama de Bode dado na Figura 4.55.
- Determine o fator K_c pelo qual o ganho de $G(s)$ deve ser **multiplicado** para o sistema ter uma margem de fase de 40° .
 - Determine o fator K_c pelo qual o ganho de $G(s)$ deve ser **multiplicado** para o sistema ter uma margem de ganho de 20 dB.

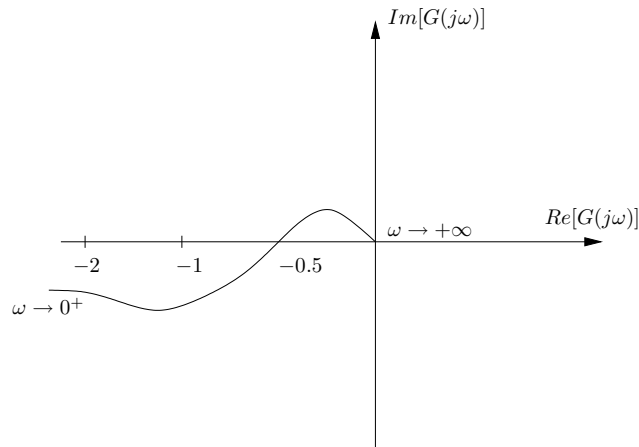


Figura 4.52: Exercício 16

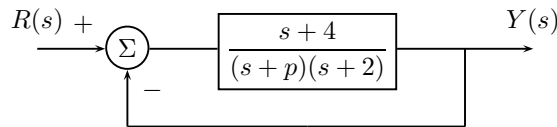


Figura 4.53: Exercício 17

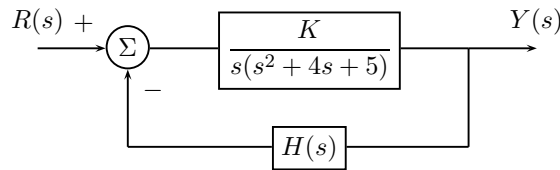


Figura 4.54: Exercício 18

20. Esboce o lugar das raízes para $K = 1$ e $0 < \alpha < \infty$
- Determine os valores de α e K que resultarão em um par de pólos em malha fechada com amortecimento $\zeta = 0.01$ e uma frequência natural $\omega_n = 100 \text{ rad/seg}$, **usando o critério de Routh-Hurwitz**.
21. Para a planta com função de transferência $\frac{K(s+3)}{(s^2+2)(s-2)(s+5)}$
- Trace o lugar das raízes para $-\infty < K < \infty$, calculando toda a informação relevante, como ângulos das assíntotas, pontos de separação, ângulos de partida e passagem pelo eixo imaginário, quando esta informação se aplicar.
 - Determine a faixa de valores **positivos** de K para que existam apenas duas raízes no semi-plano direito.
22. Para o sistema cujo diagrama de Bode é mostrado na Figura 4.56, determine as margens de ganho e fase, indicando-as na figura.
- É possível concluir sobre a estabilidade do sistema a partir destas margens? Por que?
 - A partir do diagrama de Bode esboce o diagrama polar e aplique o critério de Nyquist para determinar a estabilidade do sistema. O sistema tem um pólo na origem.

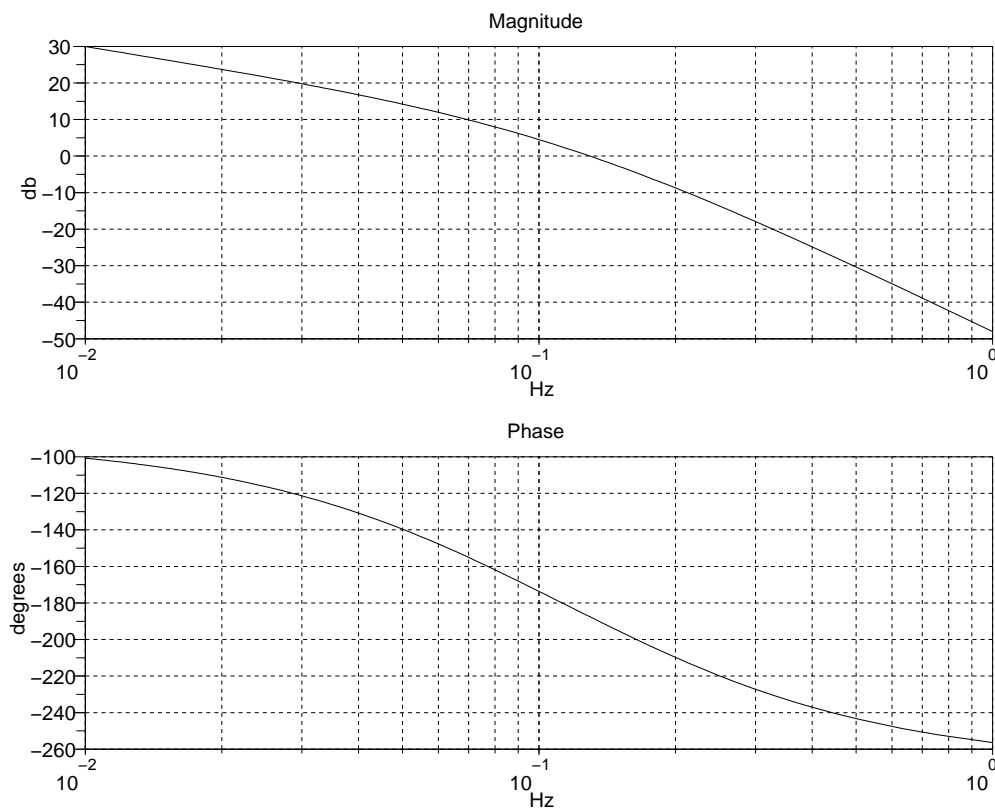


Figura 4.55: Exercício 19

23. Um sistema com realimentação unitária e com a planta dada por $\frac{K(s^2 + 3s + 30)}{s^n(s + 5)}$ deve ter um erro de $1/6000$ para uma entrada $10t$. Determine K e n para atender à especificação.
24. Considere o sistema de controle em malha fechada dado na Figura 4.57.
- Trace o lugar das raízes para $-\infty < p < \infty$, calculando toda a informação relevante, como ângulos das assíntotas, pontos de separação e ângulos de partida.
 - Determine o ganho e as raízes imaginárias puras correspondentes ao cruzamento com o eixo imaginário.
25. Considere o diagrama de Bode de uma planta, dada na Figura 4.58. O diagrama é traçado para dois ganhos K_1 e K_2 .
- Determine as margens da fase e ganho e estime o amortecimento para cada um dos ganhos usados.
 - Suponha que o engenheiro responsável resolva deslocar o medidor para um ambiente menos hostil, mas que introduz um atraso puro de 5 seg , correspondente a uma função de transferência e^{-5s} em cascata com a planta. Determine o efeito desta mudança nas margens de estabilidade calculando a nova margem de fase para o ganho K_1 .
26. Considere o sistema de controle em malha fechada dado na Figura 4.59.

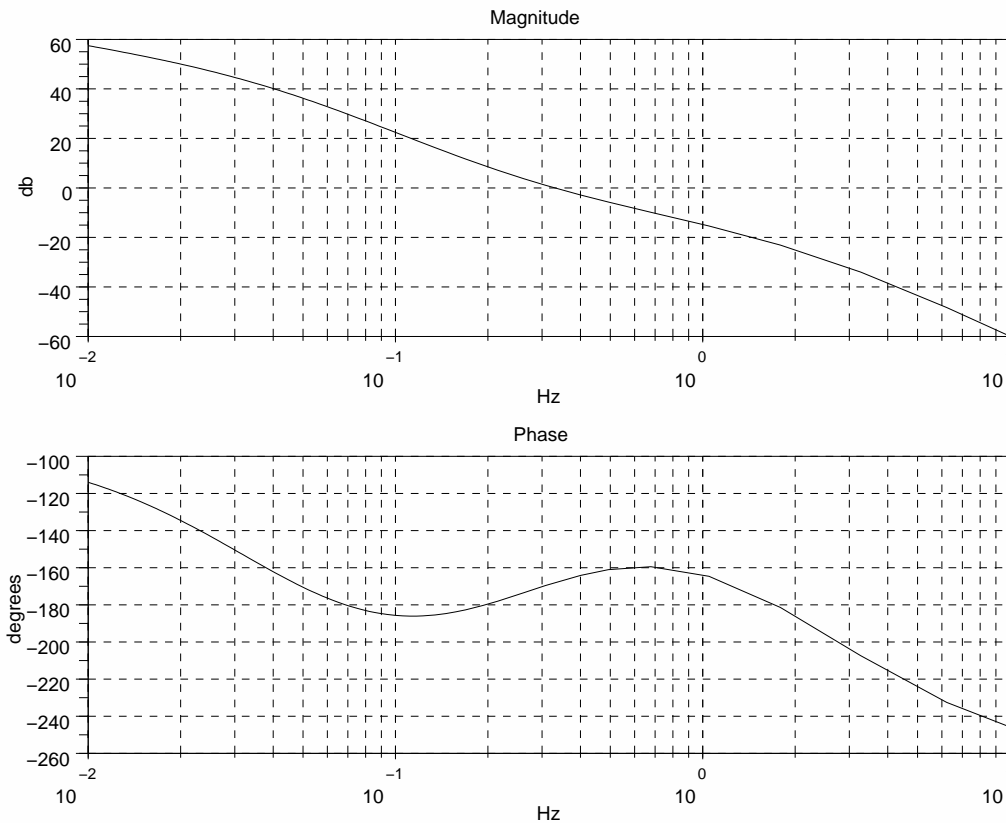


Figura 4.56: Exercício 22

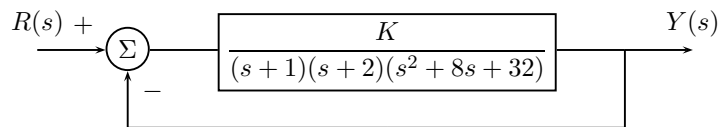


Figura 4.57: Exercício 24

- Use o **critério de Routh-Hurwitz** para determinar os valores de p para os quais existem pólos de malha fechada com parte real igual a -2 .
 - Trace o lugar das raízes para $-\infty < p < \infty$, indicando todos os pontos relevantes.
27. Considere o diagrama de Bode de uma planta de segunda ordem, dada na Figura 4.60.
- Determine a margem da fase e estime o amortecimento, do sistema em malha fechada.
 - Qual é a margem de ganho? Como este valor pode ser interpretado a partir da definição de margem de ganho e do lugar das raízes de um sistema de segunda ordem?
28. O diagrama de Nyquist de um sistema de controle é apresentado na Figura 4.61.
- Determine as margens de ganho e fase para o sistema.
 - O que este diagrama implica em termos de estabilidade para o sistema? Esboce o típico lugar das raízes para um sistema deste tipo e comente.

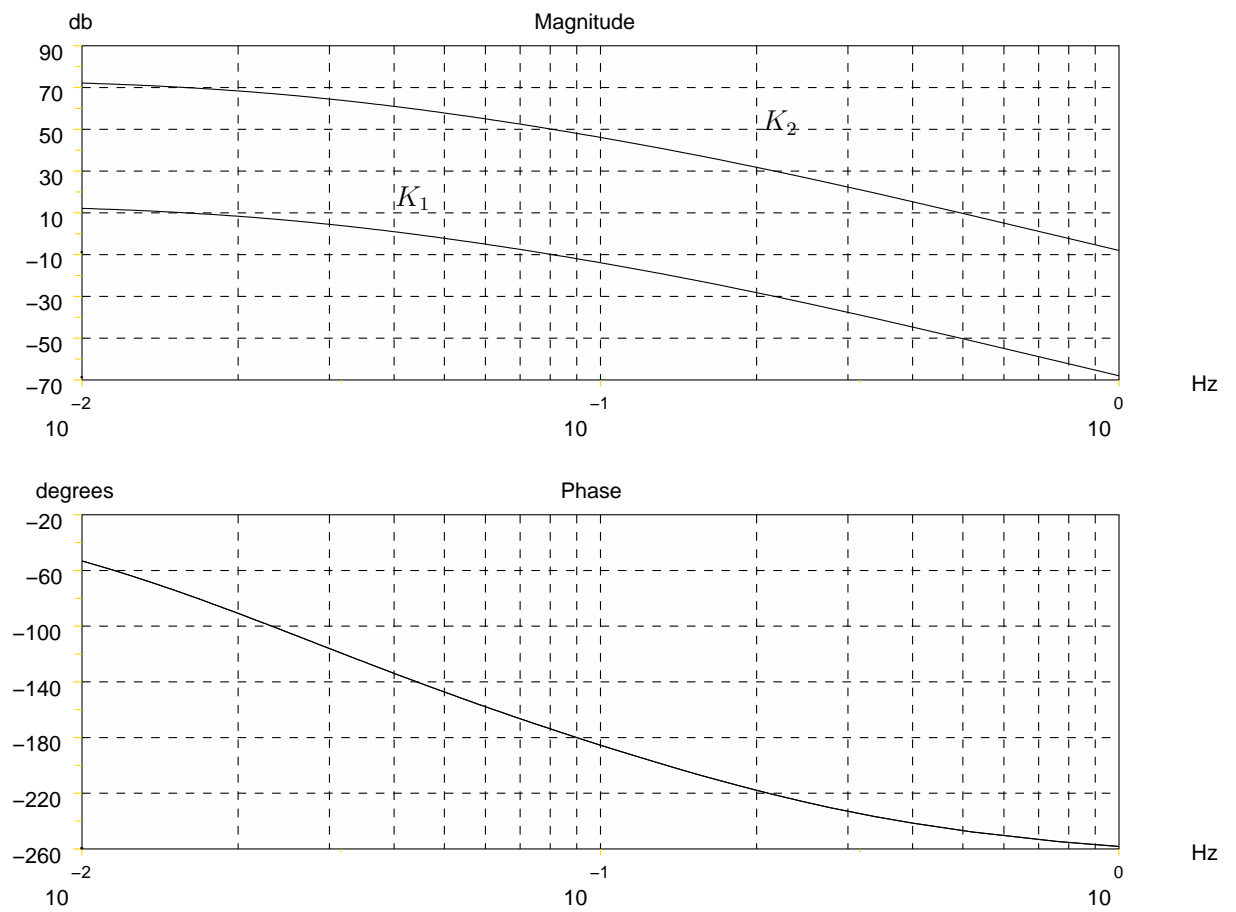


Figura 4.58: Exercício 25

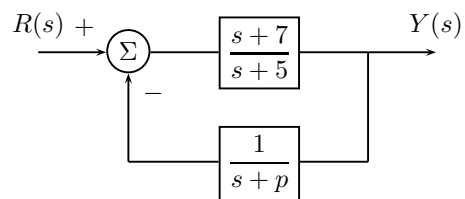


Figura 4.59: Exercício 26

- c. Esboce um típico diagrama de Bode para este tipo de sistema e indique as margens de ganho e fase.

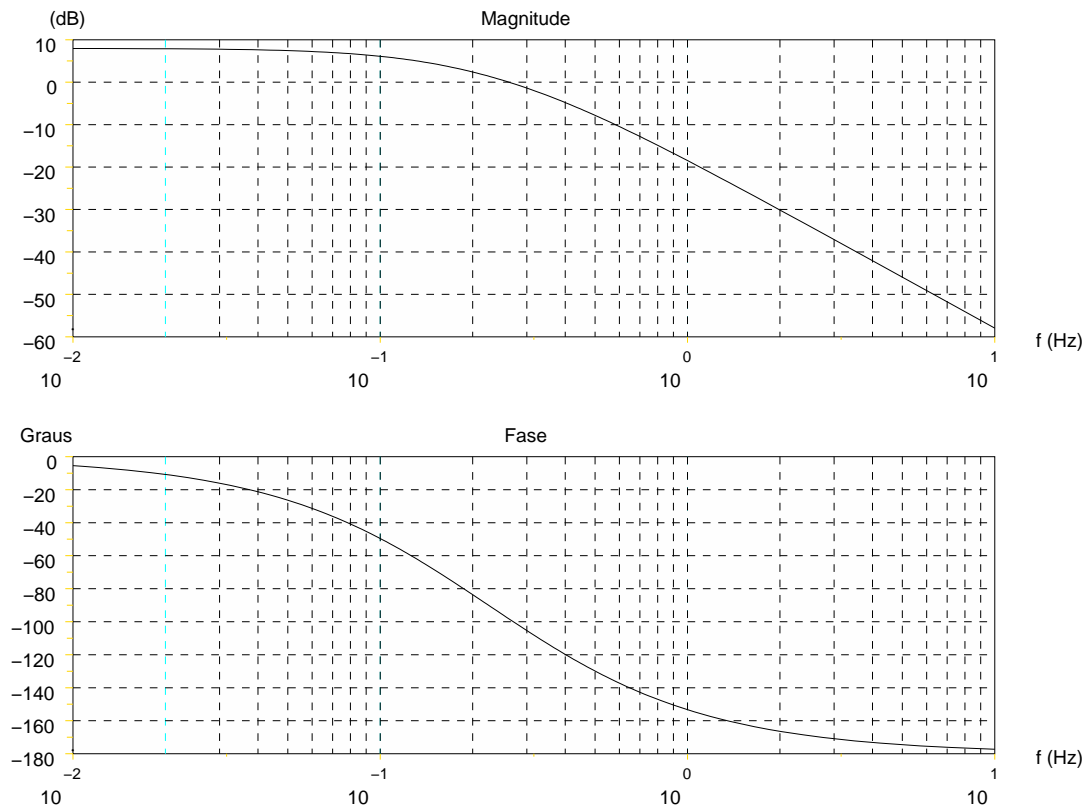


Figura 4.60: Exercício 27

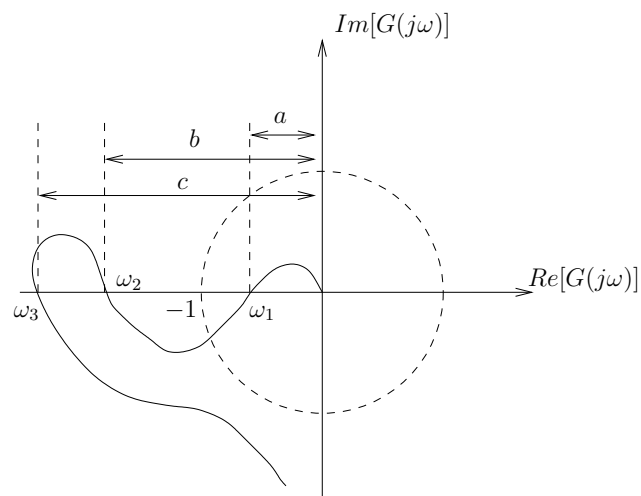


Figura 4.61: Exercício 28

CAPÍTULO 5

Objetivos do controle e estruturas básicas de controladores

5.1 Introdução

Quando o sistema em malha fechada não atende os requisitos de projeto em termos de desempenho em regime e transitório desejados, deve-se modificar a função de transferência através do uso de um controlador ou compensador. Este controlador deve ter as propriedades adequadas para modificar as características do sistema, para que os requisitos de projeto sejam atingidos. Embora diversas estruturas de controle possam ser usadas, os controladores são geralmente escolhidos dentre alguns tipos básicos de estrutura, o que facilita a análise do seu comportamento e o projeto dos seus parâmetros. Não se justifica, na maior parte das aplicações, a escolha de estruturas diferentes das padronizadas. Em geral, quanto mais complexa a estrutura de um controlador, com maior número de parâmetros, maior é a liberdade em atender diversos requisitos de projeto, mas mais complexo é o ajuste dos parâmetros. Neste capítulo discutiremos tanto estes princípios gerais de projeto e os requisitos sobre os controladores, como as estruturas que atendem àqueles requisitos. Os controladores apresentados nesta seção serão usados nos capítulos seguintes, os quais abordam a questão do projeto, ou seja, da determinação dos parâmetros dos controladores visando algum desempenho especificado do sistema em malha fechada. O projeto de sistemas de controle visa obter um desempenho do sistema tal que

1. o sistema seja estável,
2. a resposta transitória do sistema seja "aceitável",
3. o erro em regime permanente que atenda às especificações.

Para se obter tal desempenho, o primeiro passo consiste no ajuste dos parâmetros do sistema de modo a atender as especificações (1) a (3) acima. Para tanto, pode-se lançar mão dos métodos já estudados. Por exemplo, usando-se o Lugar Geométrico das Raízes é possível determinar o valor do ganho estático de modo a assegurar um desempenho estável, para uma dada razão de amortecimento dos pólos dominantes. Ou, alternativamente, os Diagramas de Bode podem ser usados para ajustar parâmetros do sistema de modo a se obter margem de ganho e fase especificadas etc... Contudo, nem sempre é possível se obter o desempenho desejado através de simples ajuste de parâmetros. Muitas vezes as especificações em termos do regime transitório e aquelas que dizem respeito ao regime permanente são conflitantes, de modo que

não é possível se atender a ambas as especificações ajustando-se os parâmetros do sistema existente. Nestes casos, faz-se necessário partir-se para um re-estudo da estrutura do sistema. Assim, pode-se dizer de maneira ampla que o projeto de sistema de controle diz respeito ao arranjo da estrutura do sistema e à seleção de parâmetros (e componentes) convenientes. A alteração na estrutura e/ou o ajuste de um sistema de controle de modo que se obtenha o desempenho desejado é chamada compensação. Como o nome indica, a compensação visa suprir as deficiências do sistema com o fim de se obter o desempenho desejado. Os métodos de projeto a serem vistos nos capítulos subseqüentes para sistemas de 1ª e 2ª ordem (através de controladores passa-baixo, PI, PID) são métodos de compensação. Neste capítulo, se re-examinará o problema da compensação de sistemas usando-se como ferramenta os Diagramas de Bode e o Lugar Geométrico das Raízes.

5.2 Compensação Série

Este é o tipo de compensação mais comum, e será o único a ser estudado aqui. Seja $G(s)$ a função de transferência do processo e $C(s)$ a FT do controlador (ou compensador). Como $D(s)$ é conectado em cascata com $C(s)$, a função de transferência de malha fechada do sistema composto, supondo-se realimentação unitária, será $C(s)G(s)$.

A função de transferência $C(s)$ do compensador tem geralmente uma estrutura fixada (que pode ser alterada no decorrer do projeto) e seus parâmetros são escolhidos de modo a se alterar a forma da resposta em frequência de $G(s)$. No caso mais geral, $C(s)$ tem a forma

$$C(s) = K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)} \quad (5.2.1)$$

5.3 Características desejáveis do sistema controlado

O sistema em malha fechada, com o controlador projetado, deve apresentar algumas características básicas tanto do ponto de vista de desempenho em regime permanente quanto em regime transitório. O desempenho transitório envolve a estabilidade, amortecimento e tempo de resposta. O desempenho em regime permanente se refere aos erros em regime a diversos sinais padrão. De forma genérica podemos descrever os requisitos de projeto como sendo:

Estabilidade Esta é uma característica fundamental para sistemas de controle, que devem ser estáveis para a faixa de variação esperada dos parâmetros.

Boa resposta transitória Do ponto de vista de desempenho dinâmico, além da estabilidade o sistema deve apresentar uma adequada resposta transitória, no sentido de que o amortecimento deve ser elevado e o tempo de resposta deve ser reduzido. A determinação precisa dos valores de amortecimento e tempo de resposta dependem dos requisitos de projeto e limitações decorrentes das próprias características do sistema controlado. Respostas do tipo exponencial amortecida (tipo 1ª ordem) ou do tipo oscilatória amortecida (tipo 2ª ordem) com um amortecimento entre 0,43 e 0,70, são consideradas como adequadas.

Erro nulo ou baixo O sistema deve apresentar um erro nulo ou baixo em regime permanente a sinais padrão como degrau, rampa ou parábola. O sinal a ser usado depende dos objetivos do sistema de controle.

No Capítulo 3 foi visto que as características de resposta de um sistema podem ser analisadas do ponto de vista da posição dos pólos no plano complexo ou em termos das características da resposta em frequência do sistema, como dadas, por exemplo, pelo diagrama de Bode. Analisaremos a seguir as características desejáveis do sistema do ponto de vista da posição dos pólos no plano complexo e da resposta em frequência, e a ação esperada do controlador para que aquelas características sejam atingidas.

5.3.1 Posição dos pólos

A posição dos pólos dominantes do sistema pode ser relacionada ao amortecimento e tempo de resposta do sistema, como vimos no Capítulo 2. Do ponto de vista de desempenho transitório, quanto mais afastados os pólos dominantes do eixo imaginário, mais rápido é o sistema. O amortecimento também aumenta com a proximidade dos pólos do eixo real. Se o sistema em malha fechada não tem o desempenho transitório esperado, então o controlador deve modificar o lugar das raízes assegurando que os pólos dominantes estejam localizados de tal forma a atender àqueles requisitos.

Do ponto de vista do desempenho em regime permanente, o ganho correspondente à posição dos pólos dominantes deve ser alto o suficiente para garantir que o erro esteja dentro da faixa fixada. Novamente o controlador deve atuar no sentido de atender a este requisito, mas sem alterar o lugar das raízes significativamente em torno da posição dos pólos dominantes.

5.3.2 Resposta em frequência

Pode-se resumir as características desejáveis do sistema de controle em termos da resposta em frequência, dizendo que o diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta deve apresentar altos ganhos em baixas frequências e baixos ganhos em altas frequências. Altos ganhos em baixas frequências estão diretamente relacionados à altas constantes de erro (ou seja, altos ganhos estáticos, de velocidade, etc). Por outro lado, baixos ganhos em altas frequências, assegura maiores margens de ganho ou de fase. Portanto, do ponto de vista do desempenho em regime permanente, o controlador deve permitir o aumento de ganho nas baixas frequências, impedindo que a margem de fase seja deteriorada. Do ponto de vista da resposta transitória o controlador deve aumentar a margem de fase e a banda de passagem do sistema, para assegurar que os requisitos de amortecimento e de tempo de resposta sejam atendidos.

5.4 Estrutura de controladores

Nesta seção as estruturas de controle usadas para atender os requisitos de projeto discutidos na seção anterior, serão apresentados.

5.4.1 Controlador Proporcional

Neste caso o controlador é simplesmente um ganho. A função de transferência é dada por

$$C(s) = K \quad (5.4.1)$$

O sinal de controle é dado por $u = Ke$. Como apenas um parâmetro pode ser ajustado, o atendimento de requisitos de projeto é limitado.

5.4.2 Controle proporcional-derivativo (PD)

O controlador puramente derivativo tem uma ação de controle dada por $u(t) = KT_D \frac{de}{dt}$, ou seja, proporcional a derivada do erro. A constante T_D é a constante de derivação. A função de transferência do controlador é dada por

$$C(s) = K T_D s \quad (5.4.2)$$

Observa-se que, se $e(t)$ é constante, a saída do controlador é zero. No controle derivativo a correção depende da taxa de variação do erro. Um controlador derivativo exibe uma resposta antecipatória, estando adiantado de T_D segundos com relação ao controlador proporcional. Este comportamento indica que o controlador derivativo é adequado para melhorar o comportamento transitório do sistema.

Em geral usa-se um controlador proporcional-derivativo, onde o sinal de controle é proporcional ao erro e à derivada do erro. A ação de controle é dada por $u(t) = Ke(t) + KT_D \frac{de(t)}{dt}$ e a função de transferência do controlador é

$$C(s) = K(1 + sT_D) \quad (5.4.3)$$

Neste caso a posição do zero e o ganho podem ser ajustados, através do ajuste dos dois parâmetros K e T_D .

Deve-se observar que um controlador com a estrutura apresentada não é realizável fisicamente. Sempre existirá um pólo na implementação real do controlador. No entanto pode-se considerar que o pólo está suficientemente distante no lado esquerdo do plano complexo para que o modelo possa ser usado.

Um problema com o controlador proporcional-derivativo é o alto ganho que ele apresenta em altas frequências. Como resultado o ruído, que tem componentes de altas frequência será amplificado. Esta questão será discutida na abordagem de projeto no domínio da frequência.

5.4.2.1 Configuração pólo-zero

A configuração zero-pólo do controlador proporcional-derivativo é apresentada na Figura 5.1. O controlador apresenta um zero próximo do eixo imaginário e um pólo, que não aparece no modelo, distante à esquerda no eixo real.

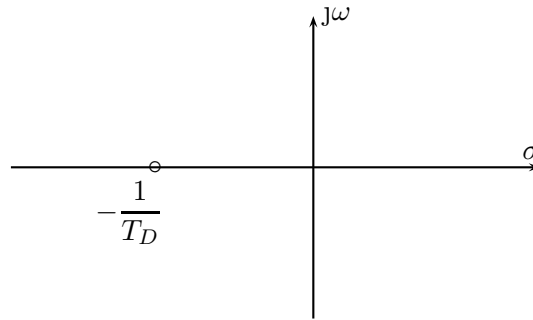


Figura 5.1: Configuração pólo-zero do controlador PD

5.4.2.2 Resposta em frequência

O diagrama de Bode do controlador PD é apresentado na Figura 5.2.

5.4.3 Controlador Proporcional-Integral (PI)

O controlador integral puro tem uma ação de controle $u(t)$ proporcional a integral do erro.

$$u(t) = \frac{K}{T_I} \int_{t_o}^t d\eta \quad (5.4.4)$$

Usando a transformada de Laplace a função de transferência do controlador é:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = C(s) = \frac{K}{T_I s}$$

Este controlador permite obter um erro nulo à entrada degrau ($e_{rp} = 0$), devido a uma integração. Prefere-se, no entanto usar um controlador proporcional-integral, que mantém as propriedades quanto ao erro, mas apresenta mais graus de liberdade para o ajuste.

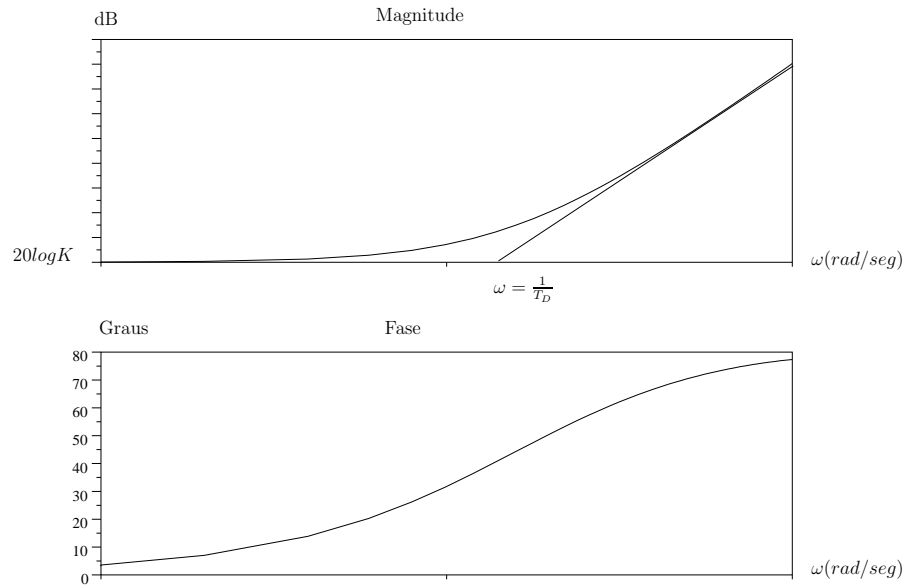


Figura 5.2: Diagrama de Bode do controlador proporcional-derivativo

A ação de controle $u(t)$ do proporcional-integral é proporcional ao erro $e(t)$ e à integral do erro

$$u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int_0^t e(\eta) d\eta$$

ou

$$u(t) = K_1 \left[e(t) + \frac{K_2}{K_1} \int_0^t e(\eta) d\eta \right]$$

Nota-se que, desde que se tome $e(t) = A \int e(\eta) d\eta$, o coeficiente A tem necessariamente como unidade o inverso de tempo. Como consequência, escreve-se

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{T_I}, \quad \text{onde } T_I \text{ tem a dimensão de tempo}$$

e portanto

$$u(t) = K_1 \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\eta) d\eta \right]$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace nesta equação obtém-se,

$$u(s) = K_1 \left[1 + \frac{1}{sT_I} \right] e(s)$$

Portanto, a função de transferência do controlador é

$$C(s) = K \left[1 + \frac{1}{sT_I} \right]$$

com o ganho $K = K_1$ e a constante de tempo T_I reguláveis.

A constante T_I é chamada constante integral (ou *reset time*). $\frac{1}{T_I}$ é uma medida da velocidade da resposta. Tem-se ainda que T_I é o tempo para que a saída do integrador atinja o valor K para uma entrada unitária.

5.4.3.1 Configuração pólo-zero

É interessante analisar a configuração pólo-zero do controlador PI (Figura 5.3). O pólo do controlador está fixo na origem. O zero pode ser posicionado através da escolha de T_I e está a esquerda do pólo. O ganho pode ser ajustado. Portanto tem-se dois parâmetros ajustáveis do controlador K e T_I .

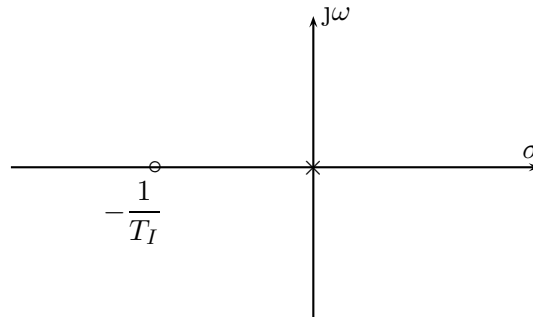


Figura 5.3: Configuração pólo-zero do controlador PI

5.4.3.2 Resposta em frequência

O diagrama de Bode de um controlador proporcional-integral está mostrado na Figura 5.4.

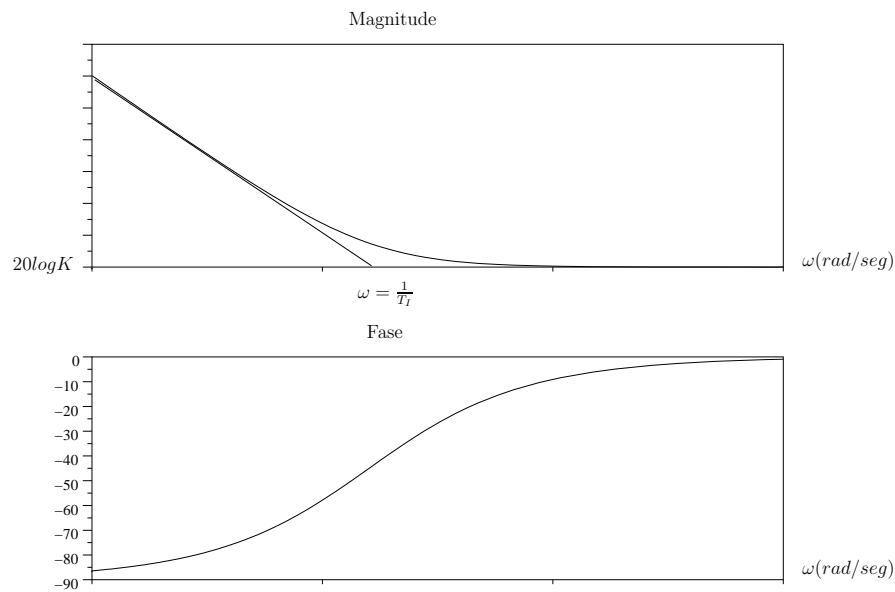


Figura 5.4: Diagrama de Bode do controlador proporcional-integral

5.4.4 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

O controlador PID consiste em se elaborar um controle que é a soma de três termos: um termo proporcional ao erro, um termo proporcional a integral do erro e um termo proporcional a derivada do erro. Este tipo de controle é muito usado na indústria, pois permite regular o amortecimento e o tempo de resposta do controle de um processo modelado por um sistema de 2ª ordem.

5.4.4.1 Estruturas do controlador PID

Duas formas principais podem representar este tipo de controlador, a primeira das quais sendo expressa por

$$u(t) = Ae(t) + B \int_0^t e(t)dt + C \frac{de(t)}{dt} = A \left[e(t) + \frac{B}{A} \int_0^t e(t)dt + \frac{C}{A} \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Por razão de homogeneidade, os coeficientes (B/A) e (C/A) são necessariamente do tipo $(1/T_1)$ e T_2 , onde T_1 e T_2 são constantes de tempo. Aplicando-se a transformada de Laplace obtém-se uma primeira forma para o controle PID.

$$C(s) = A \left[1 + \frac{1}{sT_1} + sT_2 \right]$$

ou, de outra forma,

$$C(s) = \frac{A}{sT_1} [T_1T_2s^2 + T_1s + 1]$$

Em geral, uma segunda forma é preferida, na qual representa-se o regulador PID como resultado da colocação em série de um controlador PI seguido de um controlador PD. (Fisicamente, no caso de um controlador analógico, isto corresponde a uma placa eletrônica (PI) cuja saída alimenta uma segunda placa (PD)). Escreve-se então

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) (1 + sT_D)$$

A comparação das equações anteriores fornece,

$$\frac{K}{T_I} = \frac{A}{T_1}, \quad T_I + T_D = T_1 \quad \text{e} \quad T_I T_D = T_1 T_2$$

5.4.4.2 Configuração pólo-zero

A configuração pólo-zero do controlador PID é apresentada na Figura 5.5.

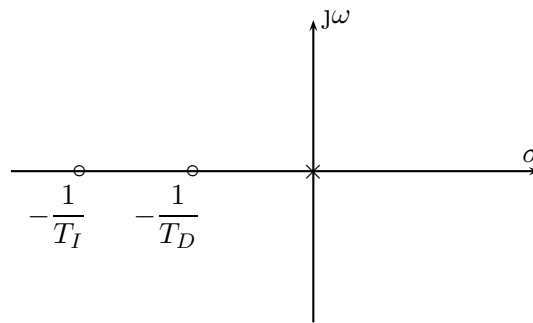


Figura 5.5: Configuração pólos-zero do controlador PID

5.4.4.3 Resposta em frequência do controlador PID

A resposta em frequência do controlador PID é apresentado na Figura 5.6.

5.4.5 Compensador de Avanço de Fase

O controlador de avanço de fase tem a seguinte função de transferência:

$$C(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \text{com} \quad \alpha < 1 \quad (5.4.5)$$

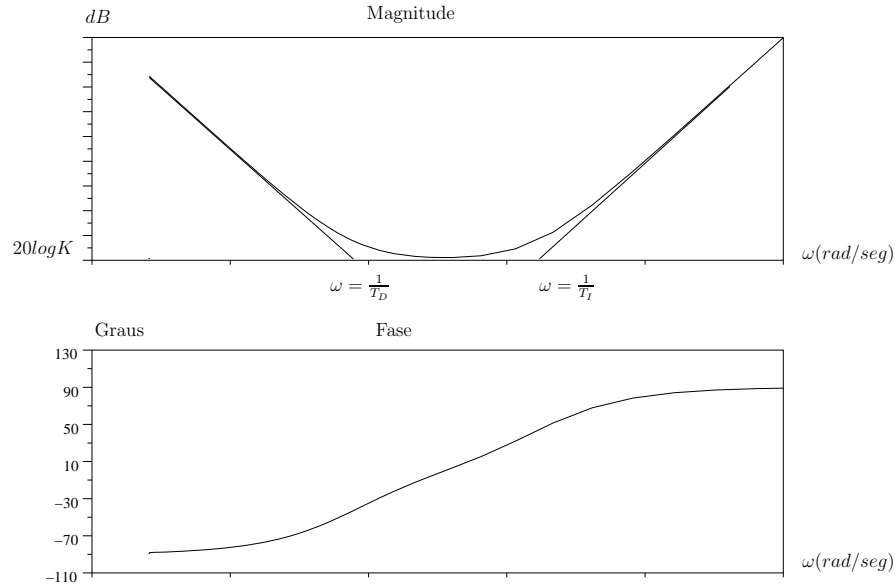


Figura 5.6: Diagrama de Bode do controlador proporcional-integral-Derivativo

O controlador de avanço de fase aproxima a ação de um controlador proporcional-derivativo. Este compensador também é apresentado na forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad (5.4.6)$$

com $|z| < |p|$.

5.4.5.1 Configuração pólo-zero

A comparação da configuração pólos-zeros deste controlador (Figura 5.7) com a do PD, dado na Figura 5.1, mostra que o primeiro aproxima a ação do segundo.

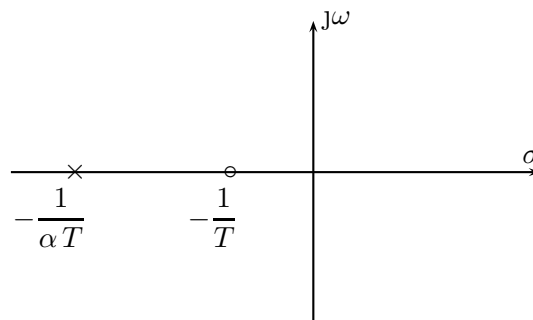


Figura 5.7: Configuração pólo-zero do controlador de avanço de fase

5.4.5.2 Resposta em frequência

A resposta em frequência do compensador de avanço de fase é mostrada na Figura 5.8. É interessante comparar esta figura com a Figura 5.2. Embora o controlador de avanço aproxime a ação do controlador PD, ele não apresenta um alto ganho nas altas frequências.

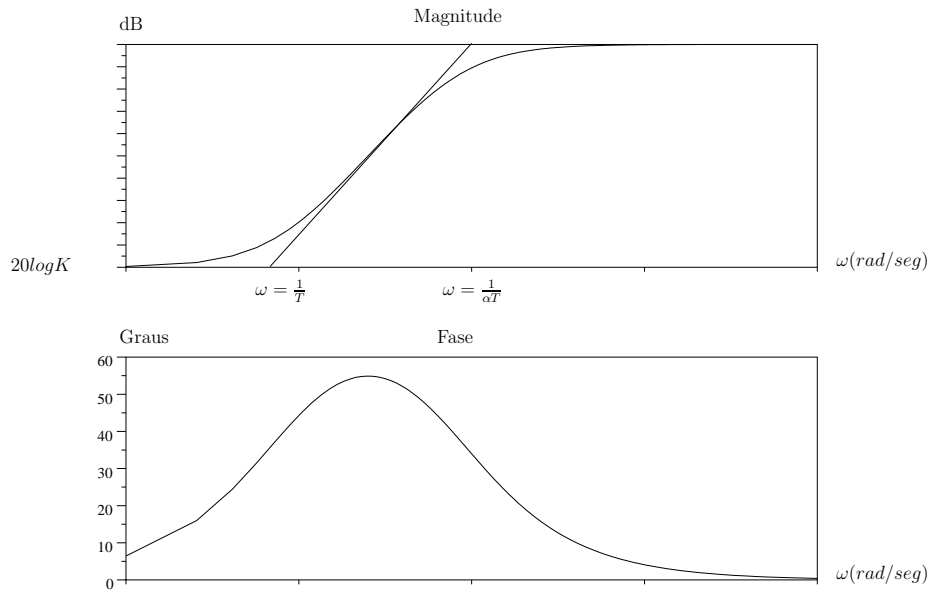


Figura 5.8: Diagrama de Bode do controlador de avanço de fase

Observa-se nos diagramas de Bode que, nas baixas frequências ($\omega < \frac{1}{T}$) se introduz uma atenuação igual a $20 \log \alpha$. Assim a estrutura do avanço de fase é fundamentalmente um filtro “passa-altas”: as altas frequências passam enquanto que as baixas frequências são atenuadas. Além disso, introduz-se um ângulo de avanço de fase apreciável na faixa $\omega = \frac{1}{T}$ a $\omega = \frac{1}{\alpha T}$

Cálculo do ângulo de máxima fase

Este é o ângulo onde ocorre o máximo avanço de fase do compensador. A fase é dada por:

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega \alpha T)$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{T(1 + \omega^2 \alpha^2 T^2) - T(1 + \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T \alpha^2)(1 + \omega^2 T^2)}$$

Para

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = 0 \quad \text{segue que} \quad \omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

onde ω_{max} é a frequência em que ocorre a fase máxima. Este resultado mostra que ω_{max} é a média geométrica das frequências do zero e do pólo.

A fase máxima é obtida de

$$\varphi_{max} = \varphi(\omega_{max}) = \arctan\left(\frac{T}{T\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha T}{T\sqrt{\alpha}}\right)$$

o que, após simplificações resulta em

$$\tan \varphi_{max} = \frac{1 - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

o que leva à

$$\sen \varphi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

O módulo na fase máxima é obtido a partir de

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

e

$$|C(j\omega_{max})| = K \frac{\sqrt{1 + (\omega_{max}T)^2}}{\sqrt{1 + (\omega_{max}\alpha T)^2}} = K \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

e portanto, em dB

$$20 \times \log |C(j\omega_{max})| = 20 \log K + 10 \log \frac{1}{\alpha}$$

A curva de φ_{max} em função de α é mostrada na figura 5.9.

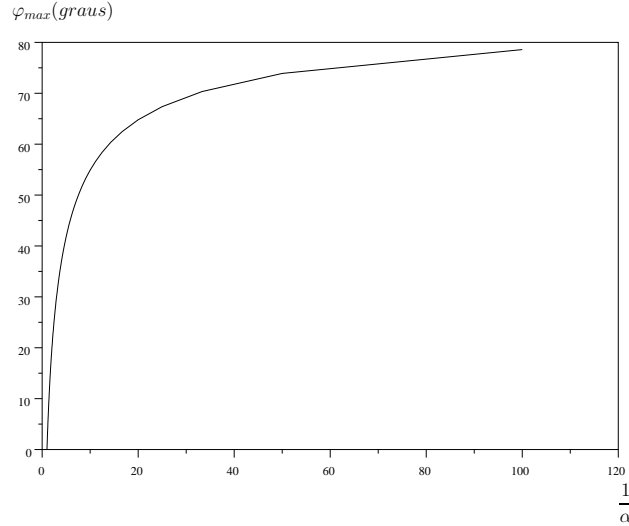


Figura 5.9: Curva $\varphi_{max} \times \frac{1}{\alpha}$

O ângulo de fase que pode ser obtido usando-se este compensador não pode, portanto, passar muito de 70 graus. Ângulos maiores requereriam valores muito grandes de α , devido à tendência de saturar o valor do ângulo de avanço. Assim, se for desejado um $\varphi_{max} > 70$ graus deve-se usar dois circuitos de avanço de fase em cascata.

O compensador de avanço de fase é usado para melhorar a margem de fase do sistema através da adição de um ângulo de fase positivo. No lugar geométrico das raízes, este compensador permite a reconfiguração do LGR de modo a fornecer o posicionamento desejado dos pólos em malha fechada.

5.4.5.3 Realização de uma Função de Transferência de Avanço de Fase

A função de transferência do compensador de atraso de fase pode ser obtida com o circuito mostrado na figura 5.10.

A FT deste circuito pode ser calculada calculando-se a soma das correntes no nó 1.

$$\frac{v_e - v_1}{R_2 + \frac{R_1}{1+sR_1C}} + \frac{v_s - v_1}{R_F} = 0$$

Para um alto ganho do amplificador tem-se $v_1 \rightarrow 0$ e portanto

$$\frac{v_e}{R_2 + \frac{R_1}{1+sR_1C}} + \frac{v_s}{R_F} = 0$$

ou

$$\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_F}{R_1 + R_2} \left(\frac{1 + sR_1C}{1 + s\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}} \right)$$

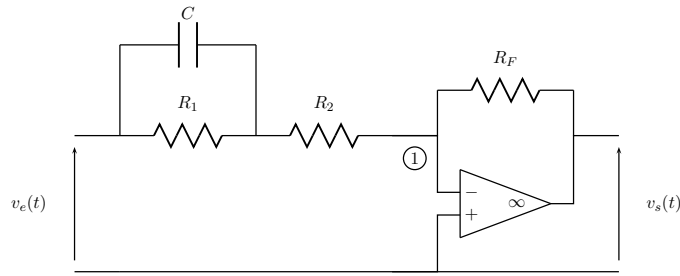


Figura 5.10: Realização do compensador de avanço de fase

Fazendo-se

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{R_F}{R_1 + R_2} \\ T &= R_1 C \\ \alpha &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

obtem-se

$$C(s) = -K_c \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} \quad \alpha > 1$$

5.4.6 Compensador de Atraso de Fase

O controlador de atraso de fase tem a função de transferência

$$C(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \text{com} \quad \alpha > 1 \quad (5.4.7)$$

Este controlador aproxima um controlador proporcional-integral. Este compensador também é apresentado na forma

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad (5.4.8)$$

com $|z| > |p|$.

O compensador de atraso de fase é usado principalmente quando a resposta transitória é satisfatória, mas o erro em regime permanente é grande. Neste caso, o compensador funciona como um mecanismo auto-adaptativo para reduzir o ganho nas frequências que produzem ganho e fase próximas a $1,0$ e -180 graus, respectivamente, de modo a fornecer um comportamento transitório aceitável. Assim, é possível se trabalhar com um valor mais alto de ganho estático e, portanto ter erros em regime permanente pequenos. Por exemplo, considere um sistema (processo) do tipo zero, cujo ganho estático é K_0 , o qual fornece um erro estático ao degrau igual a,

$$e_1(\infty) = \frac{1}{1 + K_0}$$

Suponha que $e_1(\infty)$ é inaceitável (muito grande). Para reduzi-lo, pode-se usar o compensador da equação acima, ajustando-se o ganho K_c de modo a se obter o erro estático desejado:

$$e_1(\infty) = \frac{1}{1 + K_0 K_c}$$

Contudo, este aumento de ganho pode ser obtido sem prejudicar o desempenho transitório do sistema. Assim, α e τ devem ser determinados para se obter uma redução de ganho a altas frequências. Deve-se salientar, contudo, que a introdução de fase negativa que acompanha a redução do ganho é normalmente uma influência desestabilizante já que reduz a margem de fase M_φ . Por isso, o valor de α deve ser limitado, de modo que o atraso de fase fornecido não ultrapasse 5 graus.

5.4.6.1 Configuração pólo-zero

A configuração pólo-zero do controlador de atraso de fase é mostrada na Figura 5.11. Uma comparação

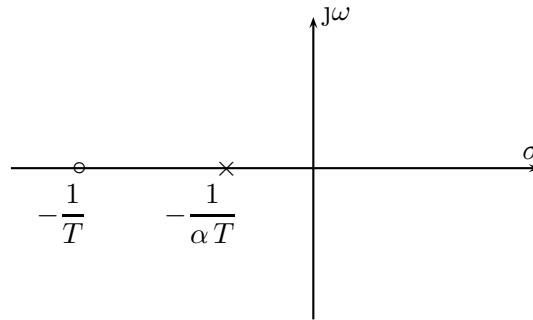


Figura 5.11: Configuração pólo-zero do controlador de atraso de fase

da configuração pólos-zeros deste controlador (Figura 5.11) com a configuração do PI dado na Figura 5.3, confirma este fato. O controlador apresenta um pólo próximo da origem e um zero mais afastado à esquerda.

5.4.6.2 Resposta em frequência

A resposta em frequência do controlador de atraso de fase é mostrada na Figura 5.12

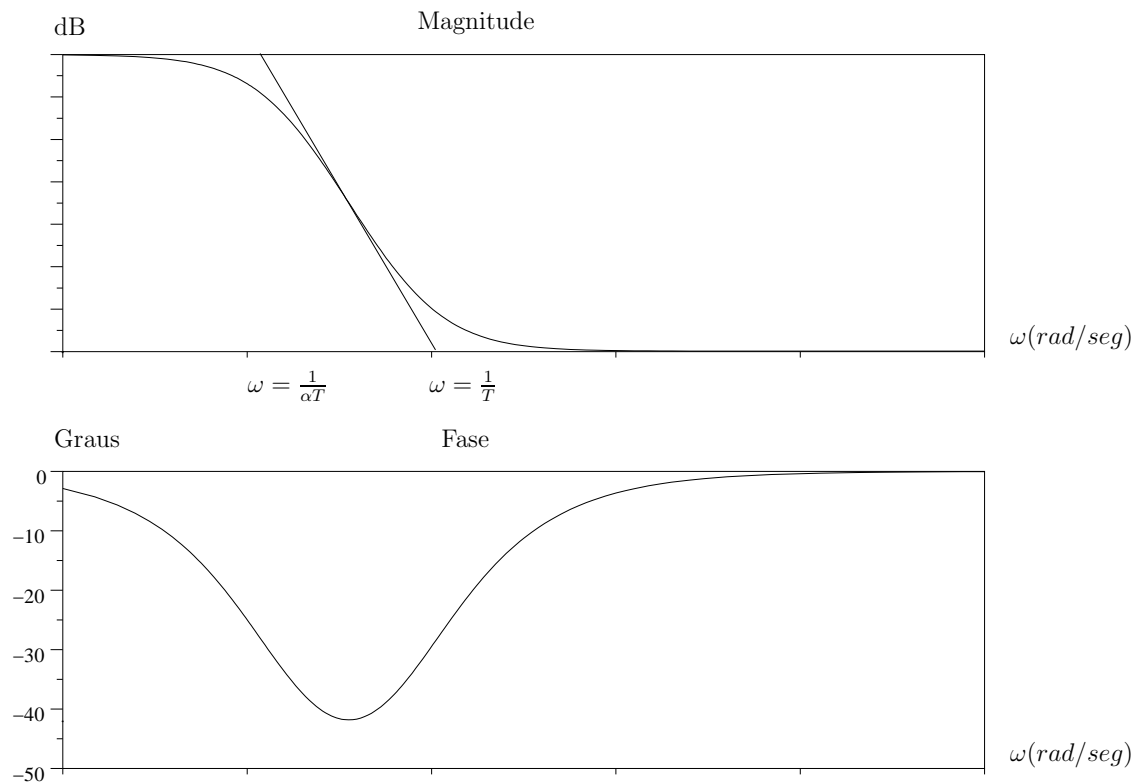


Figura 5.12: Diagrama de Bode do controlador de atraso de fase

O máximo atraso de fase ocorre, analogamente ao caso do compensador de avanço de fase, na

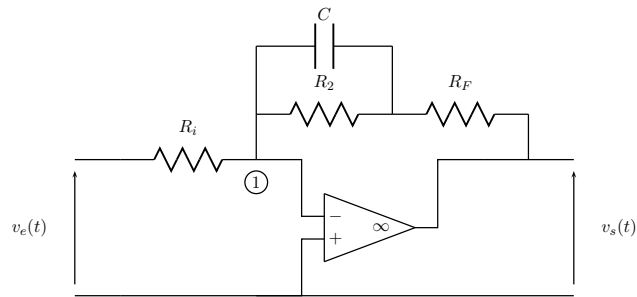


Figura 5.13: Realização do compensador de atraso de fase

frequência

$$\omega_{min} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

e é igual a

$$\varphi_{min} = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

No entanto, neste caso não há interesse nestes valores.

Do diagrama de Bode da amplitude pode-se constatar que o compensador de atraso de fase é um filtro passa-baixas: passam as baixas frequências enquanto que as altas são atenuadas.

5.4.6.3 Realização de uma Função de Transferência de Atraso de Fase

A função de transferência do compensador de atraso de fase pode ser obtida com o circuito mostrado na figura 5.13.

A função de transferência deste circuito é obtida somando-se a corrente no nó 1.

$$\frac{v_e - v_1}{R_i} + \frac{v_s - v_1}{R_2 + \frac{R_1}{1+sR_1C}}$$

Para altos valores do ganho do amplitude tem-se $v_1 \rightarrow 0$ e portanto

$$\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_1 + R_2}{R_i} \frac{1 + s\frac{R_1R_2}{R_1R_2}C}{1 + sR_1C}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{R_1 + R_2}{R_i} \\ T &= \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C \\ \alpha &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} \end{aligned}$$

obtem-se

$$C(s) = \frac{(1 + sT)}{(1 + s\alpha T)}, \quad \alpha > 1$$

Exercícios

1. A partir dos requisitos usuais para um sistema de controle de malha, em termos de desempenho em regime permanente, analise e comente a adequação de um controlador proporcional-integral para atender àqueles requisitos. Use o lugar das raízes e a resposta em frequência de alguns exemplos e as características do controlador, para fazer aquela análise.
2. Repita o Exercício 1 para o caso de um controlador proporcional-derivativo, mas considerando o desempenho transitório.

CAPÍTULO 6

Métodos diretos de projeto

6.1 Introdução

Neste capítulo serão introduzidos métodos diretos que permitem o projeto de controladores sem a necessidade de métodos mais sofisticados, a serem vistos nos capítulos seguintes. Para sistemas com dominância de primeira e segunda ordem o projeto pode ser feito de forma direta, como será mostrado neste capítulo. O método de Ziegler-Nichols também é um método direto para o projeto de controladores e será apresentado na parte final do capítulo.

6.2 Controle de Processos de 1ª ou 2ª Ordem

Nesta seção são considerados o projeto de controladores para sistemas de primeira e segunda ordem. Como a ordem da planta é baixa, o projeto pode ser realizado usando uma abordagem simples. O processo pode realmente ser de primeira ou segunda ordem ou uma aproximação de primeira ou segunda ordem de um processo de ordem mais elevada.

6.2.1 Controle de Processos de 1ª Ordem

Seja o processo mostrado na figura 6.1.

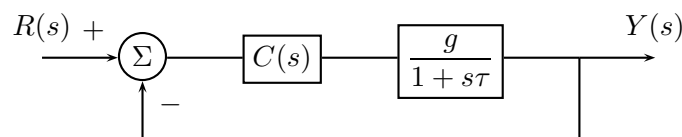


Figura 6.1: Processo de 1ª ordem

Neste caso, consideramos processos para os quais o ganho g e a constante de tempo τ podem ser determinados experimentalmente (pela resposta ao degrau, por exemplo) ou teoricamente, tendo eventualmente sido desprezada uma segunda constante de tempo, muito pequena com relação a τ . É necessário notar que a realidade é representada pelo modelo $g/(1 + s\tau)$, mas pode acontecer que esta seja apenas uma representação aproximada relativa a uma certa escala de amplitude e de tempo. Será necessário, por conseguinte, ao fixar um tempo de resposta desejado para o sistema em malha fechada (MF), lembrar

que este tempo de resposta (controlado) deve ser comparado com aquele do sistema não-controlado, e que suas escalas de tempo devem ser compatíveis com a precisão das medidas do modelo dinâmico em malha aberta. Por exemplo, se um processo fosse modelado por um ganho e uma constante de tempo de 2 seg, e se as condições experimentais para a determinação do modelo foram tais que uma segunda constante de tempo, 50 vezes menor que a primeira, tivesse sido desprezada, seria irreal pretender calcular a partir do modelo aproximado ($\tau = 2 \text{ seg}$) um sistema de malha fechada, cujo tempo de resposta fosse da ordem da constante de tempo desprezada; é claro que o modelo seria utilizado aqui, fora da escala de tempo com a qual ele foi estabelecido.

6.2.1.1 Controle Proporcional

Usaremos inicialmente o controlador $C(s) = K$. Mostraremos que este controlador, mesmo sendo teoricamente satisfatório para um processo de 1ª ordem, apresenta riscos de instabilidade na presença de pequenas constantes de tempo desprezadas. Isto acontecerá particularmente quando se deseja erros pequenos em regime permanente. Além disso, o seu uso implicará em controles transitórios muito maiores do que o controle em regime permanente, provocando assim um funcionamento em regime saturado que poderá ser extremamente incômodo.

Considere o processo da figura 6.2.

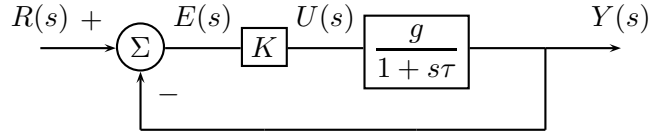


Figura 6.2: Processo de 1ª ordem com $C(s) = K$

A função de transferência de malha fechada é:

$$FTMF(s) = \frac{Kg}{(1 + Kg) + s\tau}$$

Comportamento em regime permanente Vamos determinar inicialmente o comportamento em regime permanente.

Para uma entrada do tipo degrau unitário, tem-se:

$$e(s) = \frac{1}{s} - \frac{Kg}{(1 + Kg) + s\tau} \frac{1}{s}$$

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} e(s)s = \frac{1}{1 + Kg}$$

que é regulável pelo ganho K .

Exemplo 6.2.1 Para um sistema tal que $Kg = 100$ então o erro em regime é dado por $e_{rp} \approx 0,01$.

Resposta Transitória Vamos calcular analiticamente a resposta a um degrau unitário.

$$Y(s) = \frac{Kg}{(1 + Kg) + s\tau} R(s)$$

$$Y(s) = \left[\frac{Kg}{(1 + Kg)} \frac{1}{1 + [\tau/(1 + Kg)]s} \right] \frac{1}{s}$$

e segue que

$$y(t) = \frac{Kg}{(1 + Kg)} (1 - e^{-(t/\tau_a)}), \quad \tau_{MF} = \frac{\tau}{1 + Kg}$$

Portanto o sistema em malha fechada apresenta um ganho aparente $Kg/(1 + Kg)$ e uma constante de tempo aparente $\frac{\tau}{1 + Kg}$. Observe que existe uma relação fixa entre o ganho estático, dado por $Kg/(1 + Kg)$ e a constante de tempo. Pode-se observar que, se um erro de 1% em regime permanente é desejado, o tempo de resposta do sistema controlado será 100 vezes menor que aquele da MA: existe portanto um risco certo de introdução no domínio das constantes de tempo eventualmente desprezadas.

A forma da resposta é dada na Figura 6.3.

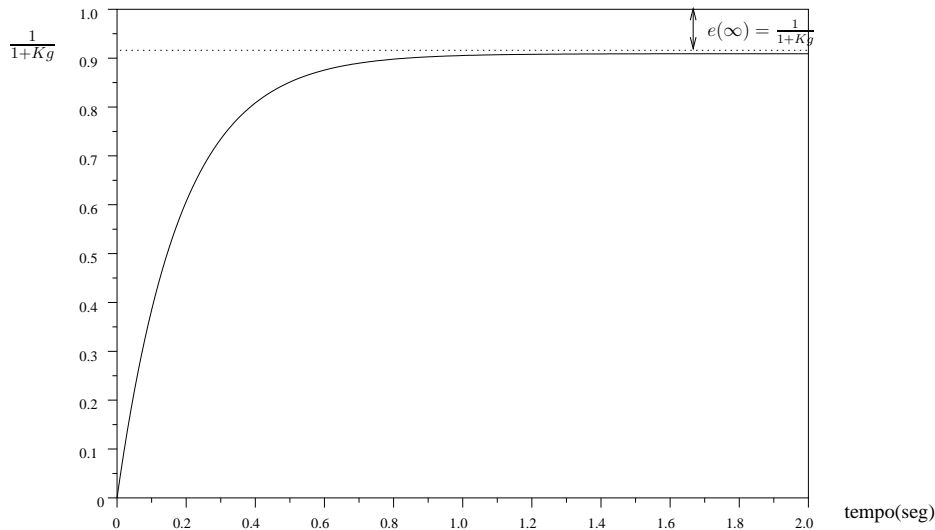


Figura 6.3: Forma de resposta do processo de 1ª ordem com $C(s) = K$

Esforço de controle $u(t)$ Calculando-se a saída do controlador:

$$u(t) = K e(t) = K [1 - P(t)] = K \left[1 - \frac{Kg}{1 + Kg} (1 - e^{-(t/\tau_a)}) \right]$$

$$u(t) = K \left[\frac{1}{1 + Kg} + \frac{Kg}{1 + Kg} e^{-(t/\tau_{MF})} \right]$$

Os valores do esforço de controle são

$$\begin{aligned} t = 0,0 & \quad u(0) = K \\ t \rightarrow \infty & \quad u(\infty) = \frac{K}{1+Kg} \end{aligned}$$

O esforço de controle é mostrados no gráfico da Figura 6.4

O controle em $t = 0$ é igual a $(1 + Kg)$ vezes o controle em regime. Para um erro de 0,01 isto corresponde a um fator de 100 e para $e_{rp} = 0,001$ a uma relação de 1000. Em geral os acionadores são limitados em amplitude (saturação), e portanto, à medida em que degraus muito elevados forem aplicados, haverá uma parte de controle que saturará. Este fenômeno de saturação pode ser muito incômodo, já que com muita frequência os acionadores preservam um retardo a dessaturação. Por isso, exceção feita a sistemas de dessaturação rápida (puramente eletrônicos) deve-se evitar atingir regimes de saturação.

Conclusão: O controle $C(s) = K$, teoricamente satisfatório no caso de um sistema de 1ª ordem, apresenta o inconveniente de produzir controles muito fortes em transitórios quando se deseja obter alta precisão (1 % a 0,1 %) e também a escalas de tempo de resposta onde o modelo usado deixará, em geral, de ser suficientemente preciso (quando o tempo de resposta obtido teoricamente a partir do modelo é da ordem de grandeza das constantes de tempo desprezadas para chegar ao referido modelo).

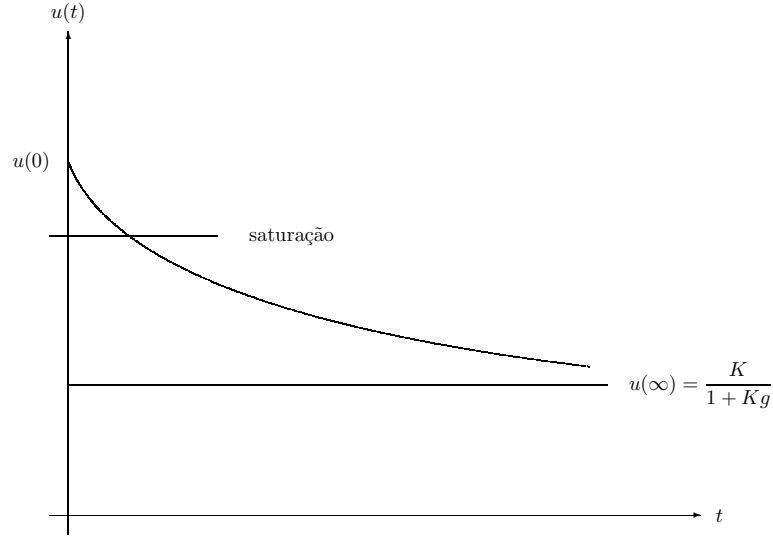
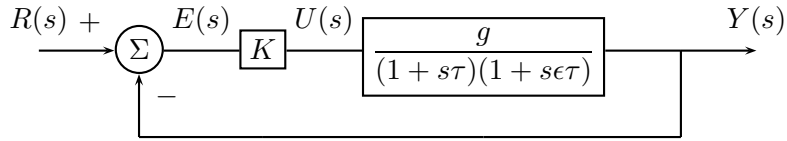


Figura 6.4: Forma do sinal de controle

Efeito de uma pequena constante de tempo desprezada Considere que o estudo teórico é baseado no modelo $g/(1 + s\tau)$ no sistema mostrado na Figura 6.2, para o qual a forma de resposta é mostrada na Figura 6.3. Considere também o sistema de segunda ordem mostrado na Figura 6.5.

Figura 6.5: Processo de 2ª ordem com $C(s) = K$

O objetivo aqui é determinar o efeito de uma pequena constante de tempo $\epsilon\tau$, supondo que foi calculado "a priori" um ganho K trabalhando-se com um modelo de 1ª ordem, quando na realidade o modelo é de 2ª ordem $g/(1 + s\tau)(1 + s\epsilon\tau)$.

Para o sistema real, a função de transferência em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kg/(1 + s\tau)(1 + s\epsilon\tau)}{1 + Kg/(1 + s\tau)(1 + s\epsilon\tau)}$$

ou, em forma mais compacta,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kg}{1 + Kg} \frac{1}{[\epsilon\tau^2/(1 + Kg)]s^2 + [(1 + \epsilon)\tau/(1 + Kg)]s + 1}$$

Se Kg for elevado, o sistema de 2ª ordem pode ser oscilatório. Adota-se, portanto, a forma normalizada dos sistemas de 2ª ordem.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kg}{1 + Kg} \times \frac{1}{(1/\omega_n^2)s^2 + (2\zeta/\omega_n)s + 1}$$

onde,

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\epsilon\tau^2}{(1 + Kg)} = \epsilon e_\infty \tau^2$$

desde que $e_\infty = \frac{1}{1 + Kg}$, e

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{(1 + \epsilon)\tau}{1 + Kg} = (1 + \epsilon)e_\infty \tau$$

e portanto,

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\sqrt{\epsilon e_\infty}} \text{ e } \zeta = \frac{1}{2} \times \frac{1+\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{e_\infty}$$

A expressão de ζ mostra que quando esperava-se uma resposta de 1ª ordem obteve-se na realidade uma resposta de 2ª ordem cujo amortecimento é tanto menor quanto menor for o erro desejado em regime permanente (e_∞); além disso, este amortecimento é função da relação ϵ entre as constantes de tempo.

Considerando que qualitativamente a resposta de um sistema de 2ª ordem assemelha-se a de 1ª ordem quando $\zeta \geq 1,0$, podemos considerar que o modelo de 1ª ordem é qualitativamente bom se a resposta obtida é próxima daquela prevista no estudo teórico.

$$\zeta \geq 1,0 : \frac{1}{2} \times \frac{1+\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \times \sqrt{e_\infty} \geq 1,0$$

onde, admitindo-se $(1+\epsilon) \approx 1,0$ obtém-se

$$\sqrt{e_\infty} \geq 2\sqrt{\epsilon} : e_\infty \geq 4\epsilon, \text{ ou também } \epsilon \leq \frac{e_\infty}{4}$$

A relação precedente mostra que quando se deseja usar um modelo de 1ª ordem para se calcular um controle proporcional, tal que o erro e_∞ seja fixado e que a resposta do sistema controlado seja semelhante àquela prevista a partir do modelo, é necessário que as constantes de tempo desprezadas sejam suficientemente pequenas. Por exemplo, para $e_\infty = 10\% = 0,1$ a constante de tempo que pode ser desprezada deve ser tal que $\epsilon \leq (0,1/4) = (1/40)$; isto é, ela deve ser pelo menos 40 vezes menor do que a constante de tempo retida.

Para facilitar a regulação para um controle de um processo de 1ª ordem é desejável poder regular separadamente o erro e o tempo de resposta do sistema controlado. Conforme o que foi visto anteriormente, um controlador proporcional isolado (ação $u(t) = Ke(t)$) impõe uma relação entre o tempo de resposta e o erro. É necessário, portanto, usar um esquema de controle mais elaborado para obter a regulação separada de ambas variáveis. Dois tipos de controladores simples permitem obter esse resultado : o controlador de atraso de fase e o controlador *proporcional – integral* (PI).

6.2.1.2 Controlador de atraso de fase

Considere o sistema mostrado na Figura 6.6 com o controlador dado por

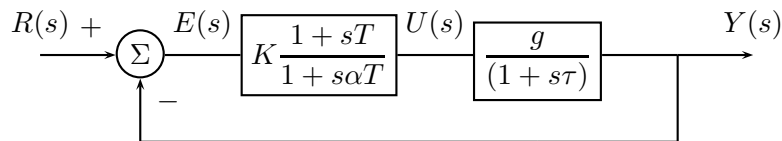


Figura 6.6: Sistema com controlador de atraso de fase

$$C(s) = K \frac{(1 + s\tau_1)}{(1 + s\alpha\tau_1)}$$

onde, K é um ganho regulável, T é uma constante de tempo regulável, e α é um ganho regulável com $\alpha > 1$.

Podemos realizar um estudo por lugar das raízes para escolher o projeto mais simples. A regulação mais simples consiste em se fazer $T = \tau$, o que permite simplificar o zero do controlador com o pólo da planta. Obtém-se, portanto,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kg/(1 + s\alpha T)}{1 + Kg(1 + s\alpha T)} = \frac{Kg}{1 + Kg} \frac{1}{1 + s[\alpha\tau/(1 + Kg)]}$$

que é do tipo 1ª ordem

$$\frac{P(s)}{R(s)} = \frac{Kg}{1 + Kg} \times \frac{1}{1 + s\tau_a}, \quad \tau_a = \frac{\alpha\tau}{1 + Kg}$$

O erro estático e_{rp} é igual ao do caso precedente, ou seja

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + Kg}, \text{ regulável por } K.$$

A resposta ao degrau de referência será do tipo 1ª ordem, com uma constante de tempo aparente τ_a , tal que

$$\tau_a = \frac{\alpha\tau}{1 + Kg} = \alpha e_{rp} \tau$$

regulável por K , para um e_{rp} especificado.

O tempo de resposta será

$$t_{r5\%}^{MF} = 3\tau_a = 3\alpha\tau e_{rp} = \alpha e_{rp} t_{r5\%}^{MA}$$

onde $t_{r5\%}^{MF}$ e $t_{r5\%}^{MA}$ denotam os tempos de resposta a 5% em malha fechada e malha aberta, respectivamente.

Este esquema permite obter uma boa precisão e_{rp} e um tempo de resposta regulável. Em particular poder-se-á ter sistemas cuja gama de tempo de resposta sob controle seja compatível com aquela do tempo de resposta em malha aberta.

Exemplo 6.2.2 Para um erro $e_{rp} = 1$ tem-se um tempo de resposta a 5% $t_r^{MF} = 0,1 t_r^{MA}$ com $\alpha = 10,0$

Na prática, o controlador é ajustado com um ganho K que assegura a precisão requerida; posteriormente, o ganho é ajustado para fornecer o tempo de resposta desejado. Isso com $\tau_1 = \tau$.

Quando α diminui muito, a resposta do sistema em MF deixa de se assemelhar a aquela de um de 1ª ordem (o tempo de resposta desejado é da ordem da constante de tempo ($\epsilon\tau$) eventualmente desprezada).

A resposta será semelhante a de um de 2ª ordem quando α for muito pequeno, no caso em que se tenham desprezado constantes de tempo. Este ensaio pode ser usado para deduzir a constante de tempo desprezada $\epsilon\tau$. A medida de ζ ou de ω_n permite obter $\epsilon\tau$.

6.2.1.3 Controlador Proporcional-Integral (PI)

Este controlador permite obter um erro nulo à entrada degrau ($e_{rp} = 0$), devido a uma integração, assim como um tempo de resposta regulável dando à resposta a forma de uma evolução exponencial.

A função de transferência do controlador é

$$C(s) = K \left[1 + \frac{1}{sT_I} \right]$$

com o ganho K e a constante de tempo T_I reguláveis.

Regulagem dos Parâmetros do Controlador O sistema de 1ª ordem com um controlador PI é mostrado na figura 6.7.

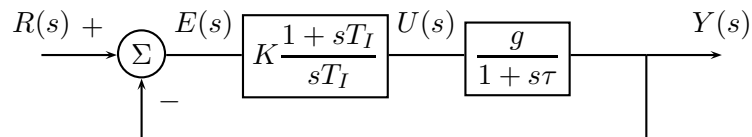


Figura 6.7: Sistema de 1ª ordem - Controlador PI

Deve-se determinar a posição do zero e o ganho do controlador. Novamente pode-se fazer uma análise pelo lugar das raízes para determinar a escolha mais simples para o projeto. Esta escolha é $\tau = T_I$.

A função de transferência em malha fechada é dada por,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + s(\tau/Kg)}$$

Constata-se que o sistema em malha fechada comporta-se como um sistema de primeira ordem, cuja constante de tempo aparente é $\tau_a = \tau/Kg$, regulável por K .

Portanto este controlador permite obter um erro nulo ($e_\infty = 0$) para referências constantes, já que se tem um integrador na função de transferência em malha aberta. A forma de resposta é do tipo exponencial quando se seleciona $T_I = \tau$ e o tempo de resposta a 5% é

$$t_{r5\%} = 3\tau_a = \frac{3\tau}{Kg}, \text{ regulável por } K$$

Efeito de uma constante de tempo desprezada ($\epsilon\tau$) Na prática $T_I = \tau$ é selecionado, e após isto o sistema a ser controlado é testado variando-se o ganho K para assim obter o tempo de resposta desejado.

Quando o tempo de resposta desejado é muito pequeno, existe o risco de que ele seja da ordem da constante de tempo eventualmente desprezada. O sistema é então de 2ª ordem, já que a função de transferência real do sistema é

$$G(s) = \frac{g}{(1 + s\tau)(1 + s\epsilon\tau)}$$

Considerando que $T_I = \tau$, obtém-se a seguinte função de transferência em malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kg/s\tau(1 + s\epsilon\tau)}{1 + [Kg/s\tau(1 + \epsilon\tau s)]}$$

ou, em forma mais concisa,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + (\tau/Kg)s + (\epsilon\tau^2/Kg)s^2}$$

O sistema real em malha fechada se comportará como um de 2ª ordem que pode ser pouco amortecido quando Kg for grande. A identificação dos coeficientes da equação acima com a forma normalizada de 2ª ordem fornece,

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{\tau}{Kg} \text{ e } \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\epsilon\tau^2}{Kg}$$

Se for possível realizar o ensaio do controlador sobre o processo, escolhendo $T_I = \tau$, a determinação experimental de ζ e ω_n sobre a resposta obtida quando do aumento de K , é também possível determinar ϵ pelas equações anteriores. Dispõem-se assim de um modelo mais aprimorado, que permite, se necessário, obter um melhor controle usando técnicas próprias aos sistemas de 2ª ordem.

Entrada degrau:

$$1^a \text{ ultrapassagem } \begin{cases} 1 + e^{-\epsilon\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} : \text{determina-se } \zeta \\ \text{abscissa} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} : \text{determina-se } \omega_n \end{cases}$$

6.2.2 Controle de Processos de 2ª Ordem

6.2.2.1 Controlador Proporcional-Integral (PI) Para um Sistema de 2ª ordem

Seja o diagrama de blocos mostrado na figura 6.8 cuja função de transferência em malha aberta é dada por

$$C(s)G(s) = K \frac{(1 + sT_I)}{sT_I} \frac{g}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

com $\tau_2 > \tau_1$.

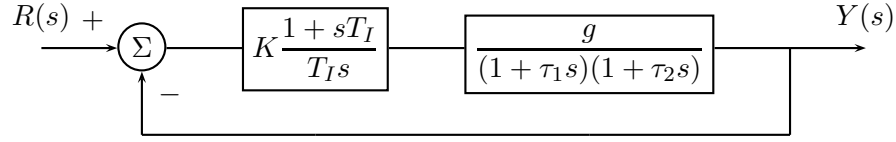


Figura 6.8: Controle PI para um sistema de 2ª ordem

Regulagem dos Parâmetros do Controlador Pode-se novamente fazer uma análise pelo lugar das raízes para determinar uma solução de projeto que seja simples e atenda aos requisitos. Esta análise indica a melhor solução selecionando-se T_I igual a maior das constantes de tempo (τ_2), tal que a função de transferência em malha aberta é dada por

$$C(s)G(s) = \frac{Kg}{s\tau_2(1 + s\tau_1)}$$

A função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(\tau_1\tau_2/Kg)s^2 + (\tau_2/Kg)s + 1,0}$$

O sistema em malha fechada é de 2ª ordem, para o qual dispõe-se apenas do parâmetro K para a regulagem. Um sistema de 2ª ordem caracteriza-se por seu amortecimento e sua pulsação natural ω_n ; não podendo fixar-se os dois, utiliza-se K para obter um amortecimento satisfatório, $= 0,43$, por exemplo, ou ainda $= 0,70$. Comparando a última equação com a forma normalizada para um sistema de 2ª ordem, obtém-se

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{\tau_2}{Kg} \text{ e } \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{\tau_1\tau_2}{Kg}$$

ou, em outra forma,

$$\omega_n = \sqrt{(Kg/\tau_1\tau_2)} \text{ e } \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{(\tau_2/\tau_1)(1/Kg)}$$

Para um valor de ζ especificado, o ganho K que assegura “boa” regulagem é,

$$K = \frac{1}{(2\zeta_{esp})^2} \frac{\tau_2}{\tau_1 g} \quad (6.2.1)$$

tal que a frequência natural de oscilação é dada por,

$$\omega_n = \frac{1}{2\zeta_{esp}\tau_1}$$

Para $\zeta = 0,43$, sabe-se que a resposta do sistema de 2ª ordem apresenta ultrapassagens iniciais de aproximadamente 20% e -5%, com $t_r = 2\pi/\omega_p$ e $\omega_p = 0,9\omega_n$, com forma de resposta conforme a Figura 6.9.

Conclusão: Um controlador PI regulado para um sistema de 2ª ordem conduz a escolher $T_I = \tau_2$; o valor do ganho K que fornece ζ_{esp} é calculado com o auxílio da Equação (6.2.1) e o tempo de resposta a 5% é $2\pi\tau_1$. Isto explica porque a seleção $T_I = \tau_2$, já que se τ_1 é eliminada pela seleção, o tempo de resposta teria sido $2\pi\tau_2$, maior do que $2\pi\tau_1$. Além disso, tem-se $e_{rp} = 0$ para referências constantes. Esta regulagem é simples e para melhorá-la será necessário trabalhar com métodos freqüenciais.

6.2.2.2 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

O controlador *PID* é dado por:

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) (1 + sT_d)$$

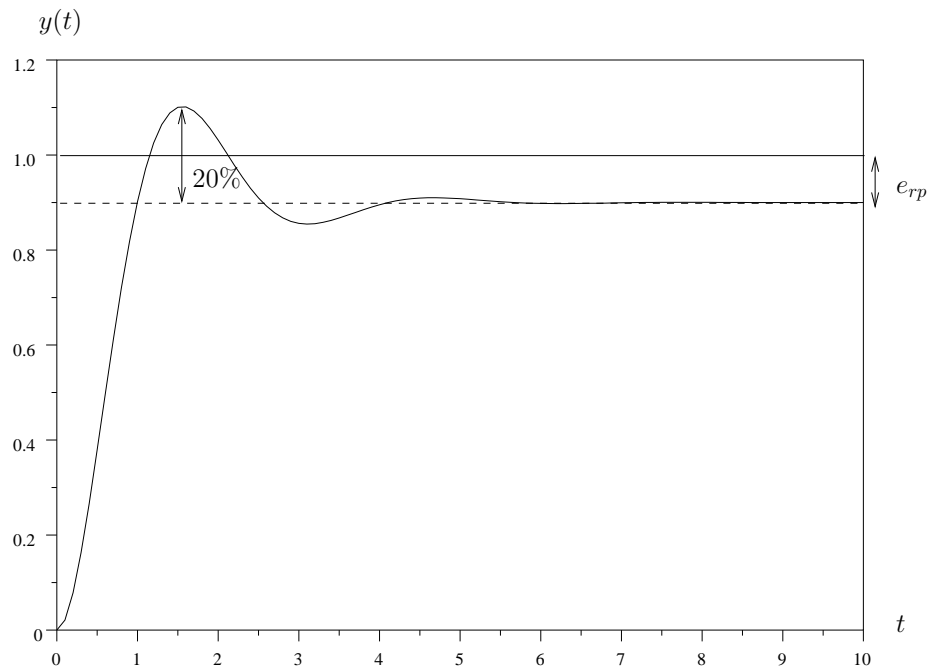


Figura 6.9: Resposta de um sistema de 2^a ordem

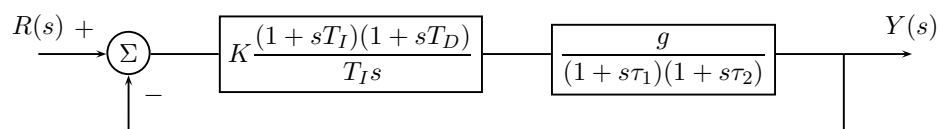


Figura 6.10: Controle PID num sistema de 2^a ordem

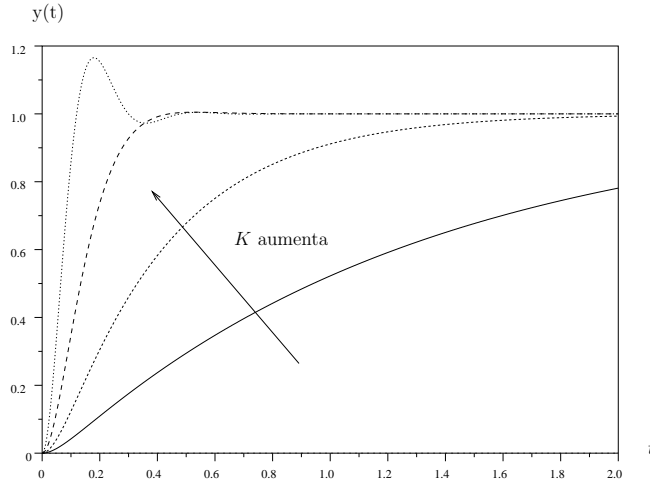


Figura 6.11: Curva $y(t) \times t$ parametrizadas por K

Regulagem de um Controle PID Para um Processo de 2ª Ordem Considere o sistema mostrado na Figura 6.10

A função de transferência em malha aberta é:

$$C(s)G(s) = K \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_d)}{sT_I} \frac{g}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

Selecionando $T_d = \tau_1$ e $T_I = \tau_2$, $C(s)G(s)$ reduz-se à

$$C(s)G(s) = \frac{Kg}{s\tau_2}$$

de forma que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(Kg/s\tau_2)}{1 + (Kg/s\tau_2)} = \frac{1}{1 + s\tau_a}$$

onde $\tau_a = (\tau_2/Kg)$.

O sistema em malha fechada se comportará como um sistema de 1ª ordem, apresentando uma evolução do tipo exponencial, com uma constante de tempo aparente τ_a , regulável por K . O tempo de resposta a 5% será,

$$t_{r5\%}^{MF} = 3\tau_a = \frac{3\tau_2}{Kg} = \frac{t_{r5\%}^{MA}}{Kg}$$

Se o tempo de resposta é demais reduzido, pode aparecer uma oscilação na resposta, devido a uma terceira constante de tempo desprezada (a resposta será de 2ª ordem). Esta resposta oscilatória, obtida desta forma permite, se necessário, calcular a terceira constante de tempo. (Ver figura 6.11).

Regulagem de um Controlador PID Para um Sistema de 3ª Ordem Seja o sistema,

$$G(s) = \frac{g}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\epsilon\tau_1)}$$

com $\tau_2 \geq \tau_1 \geq \epsilon\tau_1$ e $\epsilon \leq 1, 0$.

O controle mais simples é obtido selecionando-se $T_I = \tau_2$ e $T_d = \tau_1$; o que resulta em

$$\frac{P(s)}{R(s)} = \frac{1}{(\epsilon\tau_1\tau_2/Kg)s^2 + (\tau^2/Kg)s + 1}$$

O sistema em malha fechada se comportará então como um sistema de 2ª ordem, para o qual pode-se regular o ganho K para atender a especificação do amortecimento.

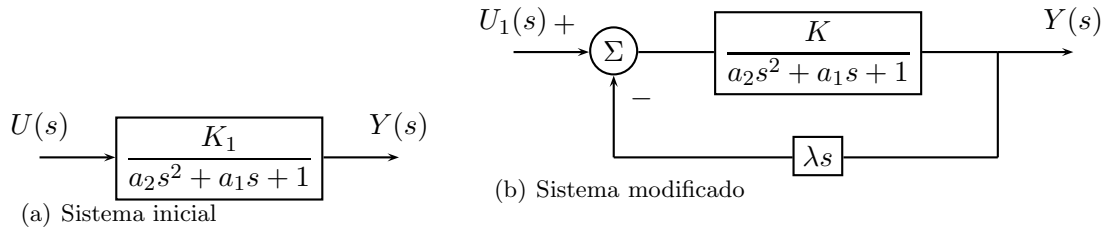


Figura 6.12: Realimentação derivativa

6.2.2.3 Amortecimento Por Realimentação Derivada do Sinal de Saída

O objetivo desta seção é mostrar que um processo de segunda ordem cujo amortecimento não seja adequado pode ser transformado num sistema a amortecimento regulável por realimentação da derivada da saída. Assim, considere os sistemas mostrados na figura 6.12.

Para o sistema original,

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K_1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

onde K_1 representa o ganho estático, $a_2 = 1/\omega_{n1}^2$ e $a_1 = 2\zeta_1/\omega_{n1}$.

Para o sistema com realimentação,

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K}{a_2 s^2 + (a_1 + \lambda K)s + 1}$$

onde K é o ganho estático, $a_2 = 1/\omega_n^2$, $\omega_n = \omega_{n1}$ e $(a_1 + \lambda K) = 2\zeta/\omega_n$.

O sistema modificado por realimentação da derivada possui o mesmo ganho estático e a mesma frequência natural que o sistema original; somente o amortecimento foi modificado para ser regulável por λ . Das equações anteriores,

$$\zeta = \zeta_1 + \lambda \times \frac{K}{2} \times \frac{1}{\sqrt{a_2}}$$

Portanto, se um sistema de segunda ordem não é amortecido convenientemente, ele pode ser transformado num sistema de amortecimento regulável através do estabelecimento de uma malha de realimentação usando a derivada do sinal de saída. Esse sinal derivado, quando disponível no sistema, deve ser usado. Se ele não estiver disponível, pode ser elaborado usando um derivador instalado sobre o sinal de saída. Este tipo de realimentação pode ser usada para estabilizar um sistema de controle e para amortecer um instrumento de medida.

Realimentação Derivativa: Interpretação pelo Lugar das Raízes Do diagrama do sistema modificado mostrado na figura 6.12, com $a_2 = a$ e $a_1 = b$, a equação característica $1 + GH(s) = 0$ é dada por

$$1 + \lambda \times \frac{Ks}{as^2 + bs + 1} = 0$$

com raízes

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{j\sqrt{4a - b^2}}{2a}$$

O ponto de chegada ao eixo real é obtido tomando-se

$$\lambda(s) = -\frac{1}{K} \left(\frac{as^2 + bs + 1}{s} \right)$$

cujas 1ª derivada é

$$\lambda' = -\frac{1}{K} \left(a - \frac{1}{s^2} \right)$$

tal que $\lambda' = 0$ fornece

$$s_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Portanto, o LGR fora do eixo real é um arco de círculo de raio $1/\sqrt{a}$, conforme mostrado na figura 6.13.

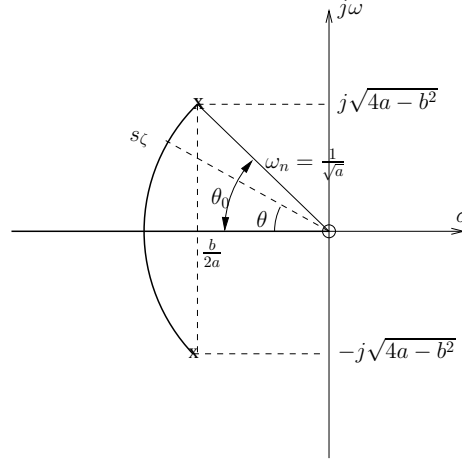


Figura 6.13: Realimentação derivativa - LGR

Ajuste de λ para um ζ especificado Para o sistema em malha aberta:

$$\zeta_0 = \cos\theta_0 \text{ e } b = 2\sqrt{a}\zeta_0$$

Para ζ_{esp} , as raízes (pólos) em MF estão em

$$s_\zeta = \frac{1}{\sqrt{a}}\angle\beta$$

onde $\beta = \pi - \theta$ e $\cos\theta = \zeta_{esp}$.

Da equação de $\lambda(s)$ mostrada anteriormente,

$$\lambda_\zeta = \lambda_{s_\zeta} = -\frac{1}{K} \left(\frac{a}{\sqrt{a}}\angle\beta + \sqrt{a}\angle -\beta + b \right)$$

Usando a equação de s_ζ e simplificando

$$\lambda_\zeta = -\frac{2\sqrt{a}}{K}(\cos\beta + \zeta_0)$$

Porém, $\cos\beta = -\zeta_{esp}$; logo

$$\lambda_\zeta = \frac{2\sqrt{a}}{K}(\zeta_{esp} - \zeta_0)$$

Exemplo 6.2.3 Seja um sistema de segunda ordem com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{0.6s^2 + 0.4s + 1}$$

A resposta desta função de transferência é mostrada pela linha cheia na Figura 6.14. A resposta é oscilatória, com baixo amortecimento. Para aumentar o amortecimento, vamos usar uma realimentação derivativa, com $\lambda = 0.5$. A resposta do sistema, com esta realimentação, é mostrada pela linha pontilhada na Figura 6.14. Observa-se que o sistema é agora bem amortecido. Se aumentarmos mais ainda λ , o amortecimento pode aumentar ainda mais, mas a resposta tenderá a ficar mais lenta.

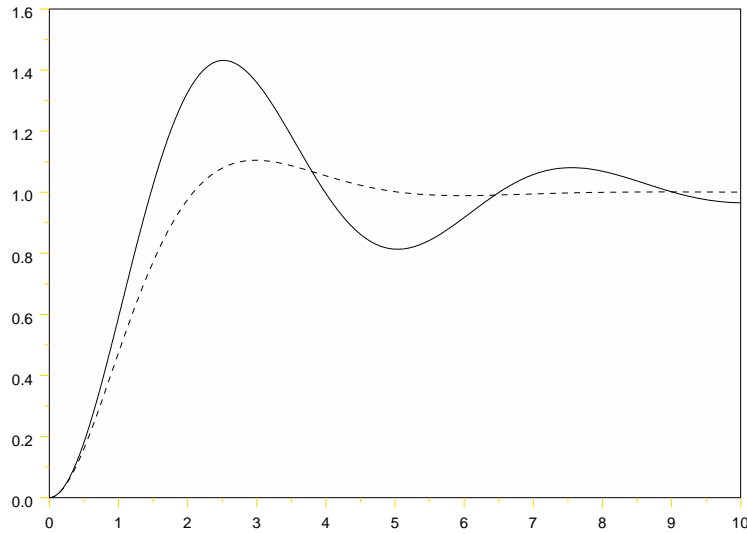


Figura 6.14: Efeito da realimentação derivativa no amortecimento

6.3 Método de Ziegler Nichols

O método de Ziegler-Nichols foi desenvolvido a partir de simulação de resposta de processos típicos, e ajustando os parâmetros para obter respostas adequadas. Desenvolvido em torno de 1943, o método ainda é muito usado e permite o projeto rápido de controladores.

Dois métodos podem ser usados dependendo da resposta da planta.

6.3.1 Projeto baseado na resposta da planta

Este método supõe que a resposta da planta a uma entrada do tipo degrau unitário tem a forma dada na Figura 6.15

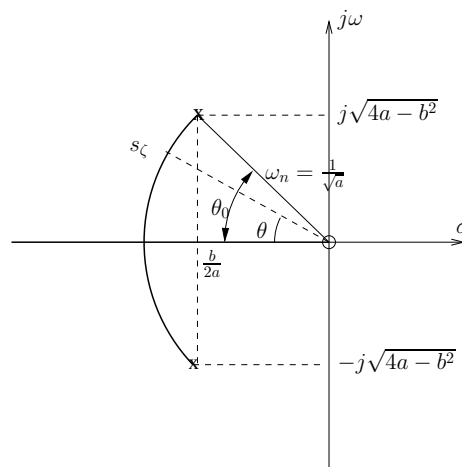


Figura 6.15: Realimentação derivativa - LGR

O modelo é $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}$ Define-se $R = \frac{k}{\tau}$ e $L = t_d$.

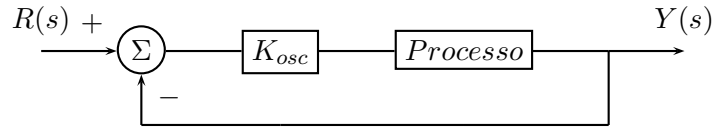


Figura 6.16: Compensação pelo método de Ziegler-Nichols

Os parâmetros do controlador são ajustados para obter-se uma razão de decaimento de 0.25. A razão de um quarto corresponde a $\zeta = 0.21$. Ou seja, o transitório dominante decai um quarto do seu valor após um período de oscilação. Os valores propostos são dados na Tabela 6.1

Tabela 6.1: Ajustes para o método de Ziegler-Nichols

Tipo de Controle	Ganhos ótimos
Proporcional	$K = \frac{1}{RL}$
PI	$K = \frac{0.9}{RL}$ $T_I = \frac{L}{0.3}$
PID	$K = \frac{1.2}{RL}$ $T_I = 2L$ $T_D = 0.5L$

6.3.2 Projeto baseado na resposta em malha fechada

As regras de ajuste de parâmetros de controladores descritas nesta seção foram desenvolvidas à partir das experiências de Ziegler realizadas em diversos processos e também dos métodos de análise de Nichols. Os ajustes propostos são dados em termos do ganho de um controlador proporcional que leva o sistema ao limite de estabilidade, K_{osc} , e do período de oscilação P_{osc} . Assim, considere o processo mostrado na figura 6.16.

Neste processo,

$$P_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}} = \frac{2\pi}{\omega_{\pi}}$$

Os ajustes propostos para a compensação por este método são mostrados na Tabela 6.2.

Os ajustes de Ziegler-Nichols fornecem em geral uma maneira de se conseguir uma resposta rápida com um nível adequado de estabilidade. Contudo, eles são baseados em experiências com processos típicos e devem ser considerados como primeiras alternativas.

Exemplo 6.3.1 Considere o sistema mostrado na Figura 6.17.

Calcule os ajustes de um controlador PID para este sistema.

- Cálculo de K_{osc} e P_{osc} .

A função de transferência em malha fechada para o sistema da figura 6.17 é dada por

$$G(s) = \frac{\bar{K}}{s^3 + 3,5s^2 + 3,5s + (\bar{K} + 1)}$$

Tabela 6.2: Compensação por Ziegler-Nichols - ajustes propostos

<i>Tipo</i>	$C(s)$	K_c	T_I	T_d
<i>P</i>	K_c	$0,50K_{osc}$		
<i>PI</i>	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$	$0,45K_{osc}$	$0,83P_{osc}$	
<i>PID</i>	$K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s\right)$	$0,60K_{osc}$	$0,50P_{osc}$	$0,125P_{osc}$
<i>PD</i>	$K_c (1 + T_d s)$	$0,60K_{osc}$		$0,125P_{osc}$

$C(s)$: FT do compensador

K_c : ganho estático

T_I : cte de tempo do termo integrador

T_d : cte de tempo do termo derivador

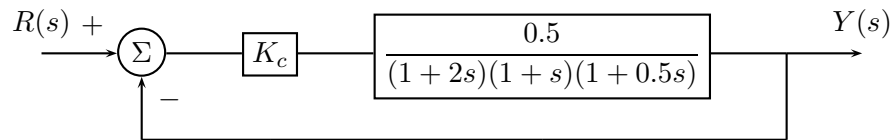


Figura 6.17: Compensação pelo método de Ziegler-Nichols - exemplo

onde $\bar{K} = 0,5K_c$.

A aplicação do critério de Routh-Hurwitz fornece

$$\begin{cases} \bar{K} \leq 11,25 \\ \bar{K} \geq -1,0 \end{cases}$$

tal que $\bar{K}_{osc} = 11,25$ e $K_{osc} = 22,5$.

Da equação auxiliar, $s_{1,2} = \pm j1,87$, de forma que $\omega_{osc} = 1,87$, e portanto $P_{osc} = 3,36$ seg.

- Cálculo do controlador

$$\begin{cases} K_c = 0,60 \times K_{osc} = 13,5 \\ T_I = 0,50 \times P_{osc} = 1,68 \\ T_d = 0,125 \times P_{osc} = 0,42 \end{cases}$$

Portanto, a função de transferência do controlador é dada por

$$C(s) = 13,5 \left(1 + \frac{1}{1,68s} + 0,42s\right)$$

Os parâmetros \bar{K}_{osc} e P_{osc} podem também ser determinados dos diagramas de Bode. Isto é mais conveniente se estes diagramas estiverem disponíveis.

Exercícios

1. Dado o processo

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)}$$

projete um controlador que assegure:

- Erro ao degrau nulo em regime permanente.
- Resposta tipo primeira ordem, com $T_{r_{5\%}} = 1 \text{ seg.}$

2. Dado o processo $G(s) = \frac{20}{(s+2)(s+4)}$ projete um controlador que assegure, em malha fechada:

- Erro ao degrau nulo em regime permanente.
- Resposta tipo segunda ordem, com amortecimento $\zeta = 0.7$.

3. Seja a função de transferência de um processo, a ser controlado em malha fechada, dada por

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)} \quad (6.3.1)$$

Deseja-se projetar um controlador a estrutura

$$G_c(s) = K \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad (6.3.2)$$

para o projeto dado, de modo que, em malha fechada, o sistema resultante apresente as seguintes características:

- Erro em regime nulo para entrada em degrau
- Resposta tipo segunda ordem, com razão de amortecimento $\zeta \approx 0.5$
- $tr_{5\%} \approx 0.3 \text{ s}$

4. Para o processo com função de transferência $G(s) = \frac{5}{1+0.5s}$ projete um controlador que assegure em malha fechada:

- resposta tipo 1ª ordem
- erro ao degrau em regime permanente de 1%
- tempo de resposta a 5% de 0.1 seg.

5. Supondo que o processo do Exercício 4 possua uma dinâmica não modelada, consistindo de um pólo em $s = -20$, ou seja, $G(s) = \frac{5}{(1+0.5s)(1+0.05s)}$:

- determine o tempo de resposta do sistema em malha fechada, com o compensador projetado (sistema compensado)
- determine o erro em regime permanente do sistema compensado para uma entrada em degrau
- determine o amortecimento e a frequência natural do sistema compensado
- esboce a resposta em malha fechada a uma entrada em degrau

6. Dado o processo com função de transferência

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

projete um controlador que assegure erro zero ao degrau e uma resposta de segunda ordem, com tempo de resposta $t_{5\%} = 1.0 \text{ seg}$ e amortecimento $\zeta = 0.7$.

7. Para o sistema do Exercício 6, usando o método de Ziegler-Nichols, projete um controlador PI . A estrutura do controlador é: $G_c = K_c(1 + \frac{1}{T_I s})$ onde $K_c = 0.45 K_{osc}$ e $T_I = 0.83 P_{osc}$.
8. A função de transferência em malha aberta de um processo, levantada experimentalmente, é $\frac{1}{1+0.5s}$. Um controlador proporcional é usado para o sistema em malha fechada. O operador especifica um erro estático ao degrau e seleciona o ganho correspondente. Observa-se então uma resposta oscilatória a uma entrada em degrau, com primeira ultrapassagem de 20% e frequência de oscilação de 1.91 Hz, em desacordo com o modelo. Determine:

- o modelo real do processo
- o erro ao degrau esperado e o erro ao degrau observado
- o $t_{r5\%}$ esperado e o $t_{r5\%}$ observado

9. Um sistema de controle com realimentação negativa unitária tem um processo com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{400}{s(s+40)}$$

e deseja-se usar um controlador em cascata do tipo proporcional-integral

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$$

Determine valores adequados de K_1 de tal maneira que a primeira ultrapassagem seja de aproximadamente 20% e o tempo de resposta a 2% seja de 1.5 segundos. Use as condições de pertinência ao lugar das raízes.

10. Dado o processo cuja função de transferência é $G(s) = \frac{3}{(5s+1)(6s+1)}$
- Escolher o controlador e determinar seus parâmetros para que o sistema em MF cumpra as especificações:
 - $e(\infty) = 0$
 - resposta tipo segunda ordem com $\zeta = 0.43$
 - Calcular os tempos de resposta em malha aberta e malha fechada.
11. Para o processo do Exercício 10, escolher um controlador e determinar os seus parâmetros para obter $e(\infty) = 0$ e resposta tipo primeira ordem com $t_{r5\%} - MF = 1,0 \text{ seg}$.
12. Se a função de transferência do processo do Exercício 10, for $G(s) = \frac{3}{(5s+1)(6s+1)(0.5s+1)}$, e se aplicar o controlador calculado no Exercício 11,
- Qual será o comportamento do sistema em MF? (Esboçar a resposta temporal ao degrau unitário).
 - Qual o máximo valor do ganho do controlador compatível com uma resposta sem oscilações?
13. Seja o processo cuja função de transferência é $G(s) = \frac{3}{(1+10s)(1+0.5s)}$
- Desprezando a constante de tempo igual a 0,5seg, determine o controlador para o qual a resposta em MF é caracterizada por $e(\infty) = 0$ e $t^{MF}_{r5\%} = 1 \text{ seg}$.
 - Considere agora as duas constantes de tempo e o controlador obtido anteriormente. Determine ζ e ω_n da resposta em MF, o $t^{MF}_{r5\%}$ e o maior valor do ganho do controlador para que a resposta não seja oscilatória.

14. Usando os critérios de Ziegler-Nichols, determine os parâmetros de controladores P, PI e PID para os sistemas cujas funções de transferência são dadas abaixo:

a. $G(s) = \frac{10(1 + 5s)}{s(1 + 0,5s)^3}$

b. $G(s) = \frac{1}{(1 + 2s)(1 + 2s + 3s^2)}$

c. $G(s) = \frac{(1 + s)}{(s^2 + 5 + 1)(1 + 2s)^2}$

15. Seja o processo cuja FT em malha aberta é $G(s)H(s) = \frac{K}{s(1 + 0,2s)^2}$

- suponha $K=1$, calcule as margens de ganho e fase do sistema.
- Qual o valor de K que produzirá uma margem de ganho de 6 dB?
- A partir dos resultados dos itens anteriores e dos ajustes de Ziegler-Nichols, determine os parâmetros de um controlador para o processo considerado.

16. Para o sistema

$$G(s) = \frac{10}{(s + 2)(s + 5)(s + 1)}$$

deve-se projetar um controlador. Para o projeto pode-se desprezar a menor constante de tempo

- a. Projete para o sistema aproximado um controlador que garanta, simultaneamente:

- Resposta do tipo primeira ordem para o sistema aproximado;
- Tempo de resposta a 5% de 0.1 seg;
- Erro nulo ao degrau.

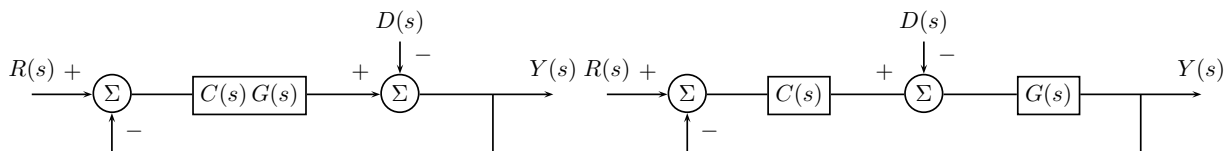
- b. Com o controlador projetado e usando o lugar das raízes, estude o efeito da constante de tempo desprezada.

17. Para o sistema da Figura 6.18(a), onde $G(s) = \frac{4}{(s + 2)(s + 4)}$

- a. Projete um controlador que assegure:

- Erro zero a uma perturbação do tipo degrau.
- Resposta a uma referência do tipo degrau de primeira ordem com tempo de resposta a 5% de 0.1 seg.

- b. Suponha agora que a perturbação atue no sistema de acordo com a Figura 6.18(b). O controlador ainda rejeita a perturbação em degrau? Porque? Explique em que condições gerais isto não acontece.



(a) Figura para o item 17a.

(b) Figura para o item 17b.

Figura 6.18: Problema 17

18. Uma planta de segunda ordem é dada por $G(s) = \frac{4}{(s + 2)(s + 4)}$

- a. Projete um controlador que assegure erro nulo a uma referência em degrau e resposta de primeira ordem com tempo de resposta a 5% de 0.3 *seg*.
- b. Determine os erros ao degrau, à rampa e à parábola de referência do sistema compensado. Comente as propriedades do controlador com relação ao erro aos diferentes sinais de referência.

CAPÍTULO 7

Projeto usando o Lugar Geométrico das Raízes

7.1 Introdução

Os objetivos do projeto de sistemas de controle foram discutidos no Capítulo 5. No Capítulo 6 foram apresentados métodos rápidos de projeto, aplicáveis a sistemas com características particulares. Neste capítulo abordaremos um método mais geral de projeto baseado no lugar geométrico das raízes. Este método baseia-se na especificação da dinâmica dominante do sistema através do posicionamento de um par de pólos complexos conjugados que dominarão a resposta em malha fechada. Os parâmetros do controlador deverão ser tais que assegurem que o lugar das raízes passe pelos pólos especificados. A vantagem do uso do lugar geométrico das raízes é a possibilidade de especificar a resposta transitória dominante, já que se posicionam as raízes dominantes. Por outro lado o uso do lugar geométrico das raízes apresenta a desvantagem de não se poder especificar diretamente as constantes de erro e portanto a precisão. Se esta no final não for satisfatória, a posição das raízes dominantes e do pólo e zero do compensador deve ser alterada.

Compensadores de avanço de fase e de atraso de fase podem ser projetados usando o lugar geométrico das raízes. Como visto anteriormente, o compensador de avanço de fase permite melhorar o desempenho transitório. O compensador de atraso de fase permite reduzir o erro em regime permanente.

7.2 Projeto do compensador de Avanço de Fase

O controlador de avanço de fase é dado por

$$C(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad \text{com} \quad |z| < |p|$$

As posições do pólo e do zero devem ser escolhidas de modo a produzir um lugar geométrico das raízes satisfatório para o sistema compensado.

O procedimento para compensação por avanço de fase via lugar geométrico das raízes segue os passos seguintes:

1. Listar as especificações do sistema e traduzi-las em posições desejadas para as raízes dominantes.
2. Esboçar o lugar geométrico das raízes do sistema não compensado e verificar se as raízes desejadas podem ser obtidas com o sistema não compensado, ou seja, apenas variando o ganho (controlador proporcional).

3. Se o compensador dinâmico for necessário, posiciona-se o zero do controlador. Para isto pode-se seguir pelo menos dois procedimentos

- localizar o zero do compensador de avanço de fase diretamente abaixo da posição desejada para as raízes, ou seja, o zero corresponde a parte real dos pólos dominantes, ou à esquerda desta posição. Esta escolha tende a fazer com que o zero não altere a dominância das raízes desejadas. Se o zero for posicionado mais a direita, há o risco de que haja um pólo dominante mais a direita do que os pólos dominantes especificados, no ramo do lugar das raízes que termina no zero.
- o zero é usado para cancelar um dos pólos da planta. O pólo cancelado depende do tipo do sistema. Para um sistema Tipo 1 ou mais elevado, o maior pólo real (excluindo-se pólos na origem), deve ser cancelado. Para um sistema Tipo 0, o segundo maior pólo deve ser cancelado.

Estas diretrizes visam assegurar que os pólos especificados sejam os dominantes. Para clarificar este ponto, seja o sistema com três pólos reais de malha aberta como mostrado na Figura 7.1(a), com o lugar geométrico das raízes associado. Na mesma figura é mostrado o pólo de malha fechado desejado, s_d . Este pólo especificado foi obtido a partir das especificações em termos do par ζ, ω_n , obtidos por sua vez de especificações de amortecimento e tempo de resposta do sistema em malha fechada, conforme mostrado na Figura 7.1(b)

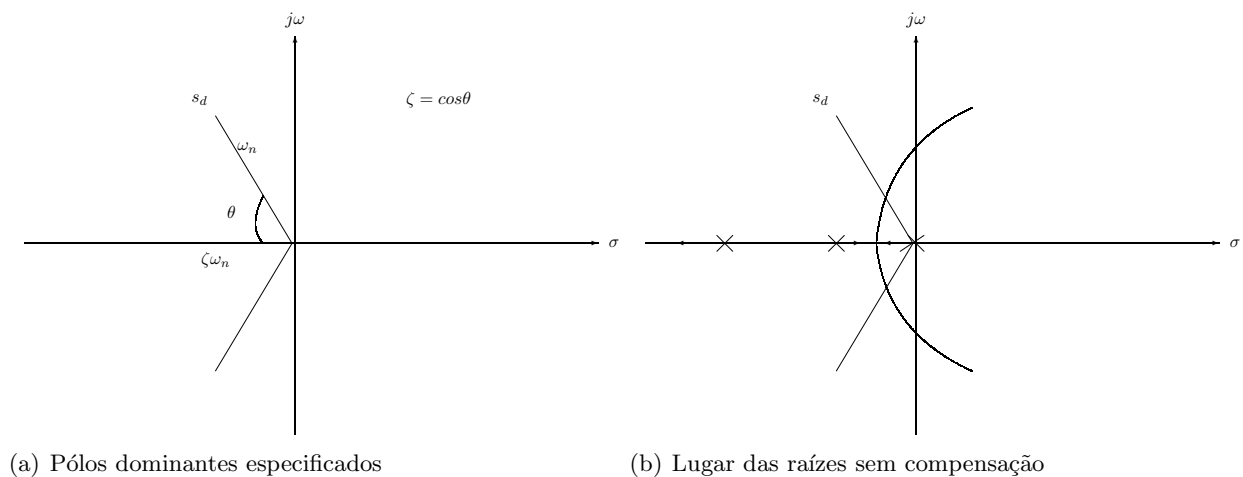


Figura 7.1: Compensação via lugar geométrico das raízes

Para o lugar geométrico das raízes do sistema não compensado mostrado na Figura 7.1(b), o zero é acrescentado de modo a fornecer um avanço de fase de 90 *graus*. Para tanto, ele é colocado diretamente abaixo da posição desejada dos pólos. Mas ele não deve alterar a dominância das raízes desejadas, e por isso não deve ser colocado mais próximo da origem do que o segundo pólo sobre o eixo real, pois isso originaria uma raiz real próxima à origem que dominaria a resposta do sistema.

No caso, por exemplo, o segundo pólo está diretamente abaixo da posição desejada para as raízes; logo, o zero deve ser posicionado um pouco a esquerda do segundo pólo (outra possibilidade seria usar o zero para cancelar este pólo), conforme mostra a Figura 7.2(a).

Com o zero posicionado como acima, o efeito da raiz real resultante será praticamente desprezível, pois o coeficiente deste termo na expansão em frações parciais será muito pequeno. Para tornar as posições desejadas para as raízes pontos do LGR, o pólo do compensador é posicionado de tal modo que o seu ângulo θ_p fará com que a contribuição angular líquida nas posições desejadas seja -180 *graus*. (Ver figura 7.2(b)).

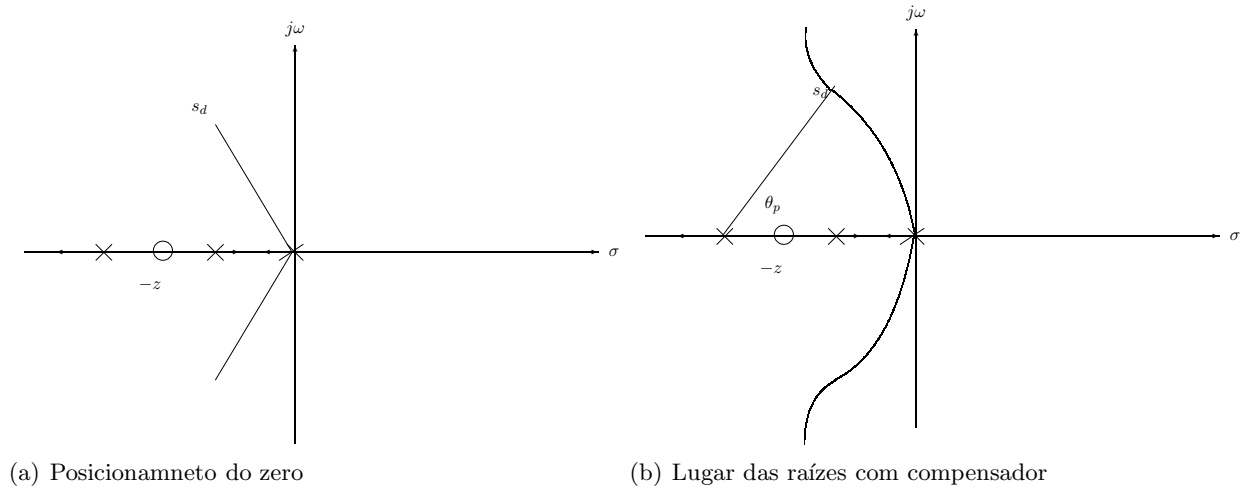


Figura 7.2: Compensação via lugar geométrico das raízes

É importante ressaltar que as diretrizes dadas acima geralmente conduzem a bons resultados, mas não asseguram que o desempenho do sistema vai ser aquele dado pelos polos de malha fechada especificados. Outros polos e zeros do sistema de malha fechada podem afetar consideravelmente o desempenho. A simulação do controlador projetado é importante para assegurar que os requisitos de desempenho transitório foram realmente satisfeitos.

4. Determinar a posição do pólo para que o ângulo total na posição desejada das raízes seja 180° e portanto estes pontos estejam sobre o LGR. Este passo é portanto o uso da condição de pertinência angular.
5. Calcular o ganho total do sistema na posição desejada das raízes e calcular o erro estático.
6. Repetir o processo se o erro estático não for satisfatório. Isto significa modificar a posição especificada dos polos desejados, movendo-os na direção onde o ganho tende a aumentar. Eventualmente o desempenho transitório pode ser um pouco modificado no processo. Este passo só é realizado se o aumento de ganho desejado for pequeno. Caso contrário tem-se que projetar, além do compensador de avanço de fase, um compensador de atraso de fase para atingir o ganho desejado.

Exemplo 7.2.1 Considere o processo com função de transferência em malha aberta dada por $G(s)H(s) = K_1/s^2$. Deseja-se obter em malha fechada as seguintes características:

- ultrapassagem ao degrau $\leq 20\%$
- $t_{r_{5\%}} \leq 3.0 \text{ seg.}$

Uma ultrapassagem $\leq 20\%$ implica em $\zeta \geq 0.45$. o tempo de resposta pode ser dado aproximadamente por

$$\frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Escolhendo-se o valor de 3 seg para o tempo de resposta,

$$\frac{3}{\zeta\omega_n} = 3$$

segue que $\zeta\omega_n = 1$. Tomando-se o amortecimento $\zeta = 0.45$, o que atende a condição do projeto, tem-se que as raízes desejadas são $-1 \pm j2$. Deve-se verificar se os polos desejados não estão sobre o lugar das raízes. Se estiverem, apenas um controlador proporcional (ou seja, ajuste do ganho) resolveria o problema. O lugar das raízes do sistema não-compensado é mostrado na Figura 7.3.

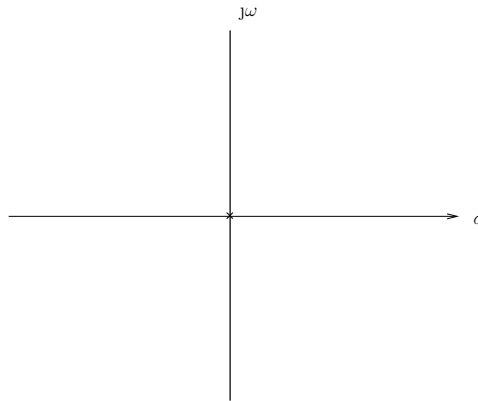


Figura 7.3: Lugar das raízes do sistema não compensado

O lugar das raízes não passa pelos desejados. Portanto é necessária a compensação.

O zero do compensador será posicionado em -1 . Deve-se agora calcular o pólo do compensador. Para isto usa-se a condição de pertinência angular.

$$\angle \left. \frac{K}{s^2} \frac{s+1}{s+p} \right|_{s_d=-1+j2} = -180^\circ$$

Resolvendo-se esta equação obtém-se $p = 3.67$.

Deve-se ainda calcular o ganho para que as raízes especificadas sejam as os pólos dominantes do sistema em malha fechada. Para isto usamos a condição de perinência angular.

$$\left| \frac{K}{s^2} \frac{s+1}{s+3.67} \right|_{s_d=-1+j2} = 1$$

Obtem-se então $K = 8.35$.

Embora nenhum requisito de desempenho em regime permanente tenha sido especificado (0 erro é zero a uma referência tipo degrau e tipo rampa), pode-se calcular o ganho de aceleração, que permite determinar o erro à parábola. Tem-se então:

$$K_a = \frac{8.35}{3.67} = 2.27$$

O sistema com o controlador é mostrado na Figura 7.4

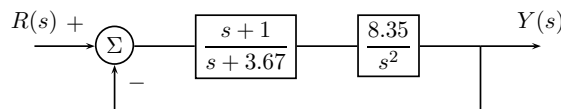


Figura 7.4: Sistema compensado

Neste exemplo, nenhum critério de regime permanente foi especificado, o que, no caso de erro ao degrau e rampa, não é necessário devido à presença do duplo integrador. No exemplo seguinte, vamos considerar além de requisitos de desempenho transitório, um requisito de precisão.

Exemplo 7.2.2 Para o processo com função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

projete um controlador que assegure os seguintes requisitos:

- um amortecimento $\zeta = 0.45$
- um tempo de resposta a 5% de 0.75 seg
- um erro à rampa de 0.05.

Da condição de tempo de resposta tem-se $\frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.75$ e segue que $\zeta\omega_n = 4$. Usando-se a condição sobre o amortecimento, segue que as raízes desejadas são $-4 \pm j8$.

O zero do controlador é posicionado em $z = -4$. Usando-se a condição de ângulo, tem-se que

$$\angle \frac{K(s+4)}{s(s+2)(s+p)} \bigg|_{s_d=-4+j8} = -180^\circ$$

A solução é $p = 10.84$.

O ganho correspondente aos pólos dominantes é calculado por

$$\left| \frac{K(s+4)}{s(s+2)(s+p)} \right|_{s_d=-4+j8} = 1$$

que leva à $K = 97.36$.

O ganho de velocidade é calculado por $K_v = \frac{97.36 \times 4}{2 \times 10.9}$ e portanto $K_v = 17.86$.

Observa-se que o erro à rampa exige $K_v = 20$. Portanto o requisito sobre o ganho não foi atendido e o projeto precisa ser modificado. Escolhe-se então os pólos dominantes como $s_d = -4.5 \pm j9$, o que modifica pouco o desempenho transitório, mas desloca os pólos na direção do lugar das raízes onde o ganho aumenta.

O zero do compensador é posicionado em -4.5 . Usando-se a condição de pertinência angular obtém-se $p = 12.68$. Com a condição de pertinência de módulo obtém-se $K = 126.95$. O ganho de velocidade é calculado por

$$K_v = \frac{126.95 \times 4.5}{2 \times 12.68}$$

e portanto $K_v = 22.53$, o que atende à condição de erro (o erro será até menor do que o especificado).

O sistema compensado é mostrado na Figura 7.5

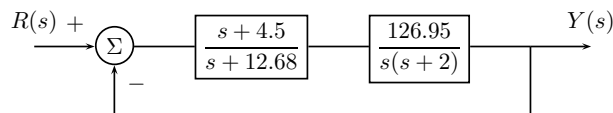


Figura 7.5: Sistema compensado

Neste exemplo o zero do controlador foi posicionado de modo a corresponder à parte real dos pólos desejados. Uma outra possibilidade seria cancelar um dos pólos do processo.

Exemplo 7.2.3 Para o sistema anterior faça o projeto posicionando o zero de modo a cancelar o pólo do processo em -2 .

7.3 Projeto do Compensador de Atraso de Fase

O objetivo do uso do compensador de atraso de fase é aumentar o ganho do sistema não compensado, e portanto melhorar a precisão sem afetar sensivelmente o comportamento dinâmico. Isto é necessário porque em certos casos, só se consegue ajustar o comportamento dinâmico reduzindo-se o ganho do sistema. O uso do compensador permite que o ganho possa ser aumentado e assim, que a precisão necessária possa ser obtida.

O compensador de atraso de fase pode ser escrito como

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad \text{com} \quad |z| > |p|$$

O objetivo do compensador é aumentar o ganho nos pólos correspondentes ao desempenho transitório desejado. Isto implica que o compensador deve introduzir um aumento de ganho nos pólos dominantes s_d . O aumento de ganho é dado por $D(0)$, pois é esta a contribuição do compensador quando se calcula as constantes de erro do sistema. Portanto o aumento de ganho introduzido pelo compensador é $D(0) = \frac{z}{p}$. Por outro lado o compensador não deve modificar a posição dos pólos na proximidade dos pólos dominantes, já que o desempenho transitório é suposto satisfatório. Tem-se assim dois requisitos, a princípio conflitantes:

- deve-se ter que $\frac{z}{p}$ igual ao aumento de ganho desejado.
- deve-se ter que $\frac{s_d+z}{s_d+p} \approx 1$

A solução para satisfazer simultaneamente os dois requisitos é fazer o pólo e o zero muito pequenos, mas mantendo a relação entre eles igual ao aumento de ganho desejado. Sendo α o aumento desejado do ganho, escolhe-se $\frac{z}{p} = \alpha$, mas com z e p pequenos tal que $\frac{s_d+z}{s_d+p} \approx 1$.

Para que os efeitos do pólo e do zero do compensador sobre as raízes desejadas não seja marcante, é importante que eles apareçam relativamente próximos à origem. Obviamente α tem um limite superior (tipicamente 100).

O procedimento para a compensação via LGR utilizando um compensador de atraso de fase é sumariizado nos passos descritos a seguir.

1. Obter o LGR do sistema não compensado.
2. À partir das especificações para o desempenho transitório, posicionar as raízes dominantes no LGR não compensado.
3. Calcular o ganho em malha aberta na posição desejada das raízes.
4. Se o ganho não fornecer a precisão desejada, calcular o fator pelo qual ele deve ser aumentado, o qual é o parâmetro do compensador.
5. Conhecida a relação entre o pólo e o zero do compensador, determinar a posição conveniente do pólo e do zero de modo que o LGR compensado passe na posição desejada para as raízes. (Isto implica em que as magnitudes do pólo e do zero sejam menores do que 1,0 e que suas contribuições angulares para as raízes desejadas sejam essencialmente as mesmas).

Exemplo 7.3.1 Para a planta com função de transferência

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)} = \frac{K_v}{s(0,5s+1)}$$

projetar um controlador que assegure os seguintes requisitos de projeto

- amortecimento $\zeta = 0,45$.
- erro a uma rampa unitária ≤ 0.05 .

Observa-se que apenas um requisito, o de amortecimento, é colocado para desempenho transitório do sistema. Se examinarmos o lugar das raízes do sistema não compensado, mostrado na Figura 7.6, observamos que a reta correspondente ao amortecimento 0.45 corta o lugar das raízes e portanto o requisito de desempenho transitório é satisfeito para pólos dominantes correspondentes a esta interseção.

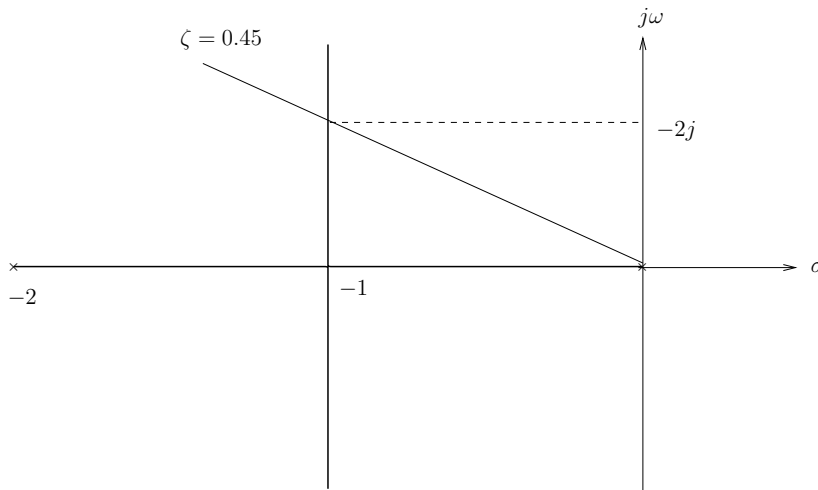


Figura 7.6: Lugar das raízes do sistema não compensado

Os pólos são $-1 \pm j2$. Deve-se calcular o ganho correspondente a estes pólos. Para isto usa-se a condição de pertinência de módulo.

$$\left| \frac{K}{s(s+2)} \right|_{s=-1+j2} = 1$$

e obtém-se $K = 5$.

Para satisfazer a condição de erro à rampa deve-se ter um ganho de velocidade de $K_v = 20$. Com $K = 5$, o ganho de velocidade é 2.5 e portanto não satisfaz aquela condição. O aumento de ganho α deve ser

$$\alpha = \frac{20}{2.5}$$

que é a relação entre o zero e o pólo do compensador.

Localizando o zero em -0.1 , e portanto próximo à origem o pólo do compensador é

$$-p = -\frac{0.1}{8} = -0.0125$$

O compensador é então dado por

$$C(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.0125}$$

Deve-se verificar se realmente o compensador não afasta muito o lugar das raízes dos pólos dominantes. Para isto verifica-se qual o ângulo adicionado pelo compensador nos pólos dominantes.

$$\angle \frac{s + 0.1}{s + 0.0125} \bigg|_{-1+j2} \approx -2^\circ$$

Considera-se que o desvio do lugar das raízes é pequeno se o ângulo do compensador nos pólos dominantes tiver módulo menor do que 5° .

O sistema compensado é mostrado na Figura 7.7

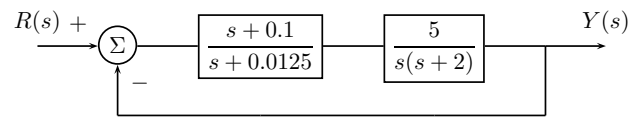


Figura 7.7: Sistema compensado

Exercícios

1. Considere o processo

$$G(s) = \frac{K}{(1 + 0.1s)(1 + 2s)}$$

com realimentação unitária. Projete um controlador de modo que o erro ao degrau seja igual a 5%, e o amortecimento seja de $\zeta = 0.45$.

2. Seja a função de transferência de um processo, a ser controlado em malha fechada, dada por

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)} \quad (7.3.1)$$

Deseja-se projetar um controlador com estrutura

$$G_c(s) = K \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

para o projeto dado, de modo que, em malha fechada, o sistema resultante apresente as seguintes características:

- Erro em regime nulo para entrada em degrau
 - Resposta tipo segunda ordem, com razão de amortecimento $\zeta \approx 0.5$
 - $tr_{5\%} \approx 0.3 \text{ s}$
- a. Realize o projeto acima usando o método do Lugar das Raízes, de modo tal que $\tau_1 = 0.077 \text{ s}$. Para isso:
- Determine a posição desejada para os polos dominantes do sistema compensado
 - Determine τ_2 para que a condição do item anterior seja verificada
 - Determine o ganho K do compensador
 - Qual o tipo de compensador obtido?
- a. Refaça o projeto acima a partir do cancelamento do polo do processo que não está localizado na origem com o zero do compensador, de modo que as mesmas especificações sejam cumpridas. Forneça como resultados os parâmetros K , τ_1 e τ_2 do compensador.
3. Um projeto de um sistema de controle de posição em uma linha de produção exige o posicionamento de um braço de robot com precisão de pelo menos 1%, um tempo de resposta de 2 seg e um amortecimento de 0.7. A função de transferência do servomecanismo é

$$\frac{K}{(s + 1)(s + 4)}$$

Projete um controlador que atenda aos requisitos de projeto.

4. Dado o processo com função de transferência

$$G(s) = \frac{8}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

projete um controlador que assegure para o sistema em malha fechada

- um erro em regime permanente nulo ao degrau
- resposta tipo segunda ordem com primeira ultrapassagem de 20%

É desejável que a escolha de parâmetros do controlador seja feita assegurando um baixo tempo de resposta. Calcule este tempo de resposta a 5% do sistema em malha fechada.

5. Dado o processo com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$

projete um controlador, usando o lugar das raízes, que assegure um erro à rampa de 5% e um amortecimento $\zeta = 0.5$.

6. Dado o processo com função de transferência

$$G(s) = \frac{8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

projete um controlador, usando o lugar das raízes, que assegure para o sistema em malha fechada

- um erro em regime permanente **nulo** ao degrau
- resposta de **segunda ordem** com primeira ultrapassagem de 20% ($\zeta = 0.43$)
- um tempo de resposta de 2.0 seg.

Sugestão: use um zero do controlador para cancelar a constante de tempo mais lenta do processo.

7. Dado o sistema de controle com função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

projete um controlador, usando o lugar das raízes, de modo a se reduzir em dez vezes o erro a rampa. O comportamento transitório inicial do sistema, com amortecimento $\zeta = 0.43$, correspondente às raízes $-0.637 \pm j1.323$, é satisfatório.

8. Para o sistema dado na Figura 7.8, deseja-se um amortecimento $\zeta = 0.45$ e um erro à parábola de 1%. Projete um controlador que atenda aos requisitos de projeto usando o **lugar das raízes**.

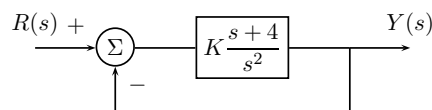


Figura 7.8: Problema 8

CAPÍTULO 8

Projeto no Domínio da Frequência

8.1 Introdução

Neste capítulo é abordado o projeto de controladores usando o domínio da frequência. As características de resposta em frequência dos diversos controladores, como apresentados no Capítulo 5, são usadas para atingir os objetivos do controle, como discutidos naquele mesmo capítulo. A abordagem no domínio da frequência usa os diagramas de Bode do processo e do controlador. Uma característica deste método de projeto é que o ganho é fixado a priori, para atender a especificação do erro do projeto.

8.1.1 Compensação via Compensador de Avanço de Fase

No projeto por avanço de fase usa-se a característica do compensador de produzir um avanço de fase, o que permite aumentar a margem de fase do sistema. Além disso, devido aos altos ganhos em altas frequências, a frequência de cruzamento de ganho do sistema compensado é deslocada para a direita, o que aumenta a faixa de passagem e portanto a rapidez de resposta. Este comportamento, de melhorar o desempenho transitório, é o esperado do compensador de avanço de fase.

Deve-se, no entanto, considerar que o uso de avanço de fase é limitado, desde que uma faixa de passagem mais larga não somente aumenta a rapidez de resposta, mas também reduz a filtragem do ruído. Sistema que exigem uma adição de fase muito grande, exigem vários estágios de avanço de fase, o que significa ganhos elevados em altas frequências e portanto, amplificação de ruídos. Alguns sistemas tem acentuada queda de fase com a frequência, limitando o uso de compensadores por avanço de fase, que não conseguem compensar a queda de fase a medida que a frequência de cruzamento se desloca para a direita. Neste caso, um compensador de atraso de fase deve ser considerado. As etapas para a compensação através dos diagramas de Bode usando o compensador de avanço de fase são descritas a seguir.

1. Traçar os diagramas de Bode do sistema não compensado, com o valor do ganho que forneça um erro estático aceitável.
2. Se a margem de fase MF não for suficiente, adicionar avanço de fase ajustando $C(j\omega)$ convenientemente. O avanço de fase a ser adicionado ϕ_{max} é dado por $\phi_{max} = MF^{desejada} - MF^{atual} + folga$. A folga deve ser deixada para levar em conta que a nova frequência de cruzamento se desloca para a direita, sendo a margem de fase geralmente menor do que a margem de fase inicial. Os valores para

a folga variam entre 5° e 15° . Para obter máximo avanço de fase, a frequência ω_{max} do compensador deve ser igual a frequência de cruzamento de ganho do sistema compensado.

3. Determinar α , à partir do valor de fase a ser adicionada, usando a fórmula $\phi_{max} = \sin^{-1} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.
4. Calcular o ganho em $\omega = \omega_{max}$ (igual a $10 \log \frac{1}{\alpha}$) e determinar a frequência na qual a curva de magnitude não compensada é igual a $-10 \log \frac{1}{\alpha} \text{ dB}$. Esta será a nova frequência de corte de ganho do sistema compensado e também ω_{max} .

Determina-se a frequência em que $|C(j\omega)|_{dB} = -10 \log \frac{1}{\alpha}$, porque ao se adicionar $|D(j\omega)|_{dB}$, esta frequência será aquela em que o diagrama de amplitude do sistema compensado cortará o eixo de 0 dB .

5. Através da expressão $\omega_{max} = 1/(\tau\sqrt{\alpha})$, determinar τ e, assim, as posições do pólo e do zero do compensador.
6. Traçar a resposta em frequência do sistema compensado e verificar a margem de fase. Se necessário, retornar ao passo 2. Se MF for satisfatória, encerrar o projeto

Observação 2 Na implementação prática do compensador, o circuito que realiza a função de transferência do compensador tem uma redução de ganho α . Para não degradar o erro em regime permanente, deve-se aumentar o ganho do compensador para contrabalançar a atenuação do compensador.

Observação 3 Como o aumento máximo de fase do compensador satura em torno de 60° , em alguns casos onde um considerável avanço de fase é necessário, tem-se que usar dois ou mais estágios de avanço de fase, ou seja $C(s) = \left(\frac{1+s\tau}{1+s\alpha\tau} \right)^n$, onde n é o número de estágios usados. O projeto segue os mesmos passos anteriores, mas para se determinar a frequência de cruzamento de ganho deve-se considerar que o ganho do compensador nesta frequência será de $\frac{n}{\alpha\tau}$.

Exemplo: Dada a função de transferência em malha aberta $F(s) = K_1/s^2$, projetar um compensador tal que o sistema compensado apresente: (a) tempo de resposta a $5\% < 3,0 \text{ seg}$ e (b) ultrapassagem ao degrau $< 20\%$.

(*) Especificações alternativas: $K_1 = 10$ e ultrapassagem do sistema compensado $< 20\%$.

Exemplo 8.1.1 Seja o sistema cuja FTMA é $G(s) = K/s(s+2) = K_v/s[(s/2)+1]$. Deseja-se determinar um compensador de avanço de fase tal que (a) e_∞ à rampa $\leq 5\%$ da magnitude da rampa, e (b) $\zeta = 0,45$.

8.1.2 Compensação via Compensador de Atraso de Fase

O compensador de atraso de fase é usado para permitir um aumento considerável do ganho sem degradar o desempenho transitório.

A função de transferência do compensador de atraso de fase é,

$$C(j\omega) = \frac{(1+j\omega\tau)}{(1+j\alpha\omega\tau)} \quad \text{com} \quad \alpha > 1, 0$$

O compensador apresenta um atraso de fase para qualquer frequência. Assim, o atraso de fase não é o efeito útil do compensador, e sim a atenuação de $-20 \log \alpha$ em altas frequências. O compensador é usado para fornecer atenuação é, portanto, deslocar para baixo a frequência de cruzamento de ganho do sistema. O pólo e o zero do compensador de atraso de fase, neste caso devem ter magnitudes muito menores do

que o menor pólo do sistema não compensado. À frequências de cruzamento de ganho mais baixas, a margem de fase MF é geralmente maior e assim é possível se atender às especificações. Verifica-se assim que se pode aumentar condideravelmente o ganho do sistema em baixas frequências, reduzindo o erro em regime, mas mantendo o desempenho transitório do sistema. Deve-se observar que nem sempre é possível usar o compensador de atraso de fase. Por exemplo, no caso de um processo com função de transferência $G(s) = \frac{1}{s^2}$, a fase do processo é constante e igual a -180° . Não é, portanto, possível usar a própria característica de fase do compensador para obter a margem de fase desejada. Neste caso um compensador de avanço de fase deve ser usado.

O procedimento para compensação utilizando um filtro “passa- baixas” pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Traçar os diagramas de Bode do sistema não compensado, com o ganho para fornecer o $e(\infty)$ especificado.
2. Determinar a MF do sistema não compensado. Se esta for insuficiente, prosseguir ao próximo passo.
3. Determinar a frequência no qual a especificação em termos de MF seria satisfeita se a curva de amplitude cortasse o eixo de $0,0\text{ dB}$ a esta frequência, ω_c . (Deixar uma folga de 5° para o atraso de fase provocado pelo compensador ao determinar esta nova frequência ω_c).
4. Posicionar o zero do compensador uma década abaixo de ω_c , assegurando assim apenas 5° de atraso de fase em ω_c . Ou seja, uma década acima da frequência do zero, o controlador tem um atraso de fase de aproximadamente -5° , o que explica a folga de 5° deixada no projeto.
5. Medir a atenuação necessária em ω_c para assegurar que a curva de magnitude cruze 0 dB nesta frequência.
6. Calcular α , usando o fato de que a atenuação é igual a $-20 \log \alpha$.
7. Calcular o pólo como $\omega_p = 1/\alpha\tau = \omega_z/\alpha$.

Observação 4 Alternativamente, pode-se deixar uma folga de valor diferente de 5° , por exemplo, ϕ , o que exige resolver a equação $C(j\omega_c) = -\phi$, para determinar a frequência do zero. O procedimento dado acima permite a determinação direta do zero do compensador.

Exemplo: Considere a função de transferência complexa

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{K_v}{j\omega(j0,5\omega + 1)}; \quad K_v = \frac{K}{2}$$

Determinar um compensador de atraso de fase tal que o sistema compensado atenda às especificações. (Ver exemplo de compensação via diagramas de Bode usando compensador de avanço de fase). Neste exemplo, verificou-se que K deve ser igual a 20, e que necessita-se de uma margem de fase $M_\phi = 45\text{ graus}$. A margem de fase do sistema não compensado é $M_\phi \approx 20\text{ graus}$ (18 graus).

Exercícios

1. Um processo tem função de transferência em malha aberta dada por $G(s)H(s) = \frac{K}{s(1 + 0.15)^2}$ e deve ser projetado de modo que, quando a entrada for uma rampa com inclinação igual a $2\pi \text{ rad/seg}$ o erro estático de posição deve ser igual a $2\pi/10 \text{ rad}$; a margem de fase deve ser de aproximadamente igual 50° .
 - a. Calcule o ganho K para que a especificação de precisão seja satisfeita.
 - b. Verifique analiticamente que a frequência de cruzamento de ganho do sistema não-compensado é igual a 10 rad/seg .
 - c. Calcule a margem de fase do sistema não compensado e verifique que sem compensação o sistema não atende às especificações.
 - d. Projete um compensador de atraso de fase para o sistema de modo a atender as especificações. Permita um atraso de 5° para o compensador na nova frequência de cruzamento de ganho.
 - e. Calcule a margem de fase do sistema compensado.
2. A função de transferência em malha aberta de um processo é $G(s) = \frac{80}{s(1 + 0.02s)(1 + 0.05s)}$
 - a. Se $\omega^1 = 33,8 \text{ rad/seg}$ e $\omega - \pi = 31,62 \text{ rad/seg}$, determine as margens de ganho e fase do sistema. O sistema não compensado é estável?
 - b. Projete um compensador de atraso de fase tal que o sistema compensado apresenta uma margem de fase de 30° para o ganho de velocidade dado.
 - c. Projete um controlador PI usando os ajustes de Ziegler-Nichols.
3. A função de transferência de um sistema é dada por $G(s) = K/s^2$, onde o ganho K é feito igual a 8 para que a resposta apresente a rapidez desejada. Projete um compensador de avanço de fase tal que o sistema compensado apresente uma ultrapassagem ao degrau $\leq 20\%$.
4. Um sistema de controle em malha fechada tem uma planta com a função de transferência $\frac{1}{s^3}$.
 - a. Determine a margem de fase do sistema.
 - b. Projete um controlador contínuo, no domínio da frequência, que assegure que o sistema tenha um amortecimento $\zeta = 0.3$.
 - c. Justifique a escolha do controlador
5. A resposta em frequência de uma planta é dada na Figura 12.25. Para o ganho K usado para obter esta resposta, o erro é muito elevado, exigindo que este ganho seja $4K$ para atender à condição de erro. Como o desempenho transitório é satisfatório, deseja-se manter a mesma margem de fase e uma frequência de cruzamento de ganho que não seja superior ao do caso antes do aumento de ganho do sistema. Projete um compensador que atenda a estes requisitos.
 Obs: A **frequência está em Hz**.
6. Uma planta com função de transferência $G(s) = \frac{1}{(1 + 2s)(1 + 0.25s)}$ deve ser controlada por um controlador contínuo em cascata, com realimentação unitária. O sistema em malha fechada deve ter um erro ao degrau de 0.99% e um amortecimento $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O único controlador disponível tem uma função de transferência $C(s) = K \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2}$.

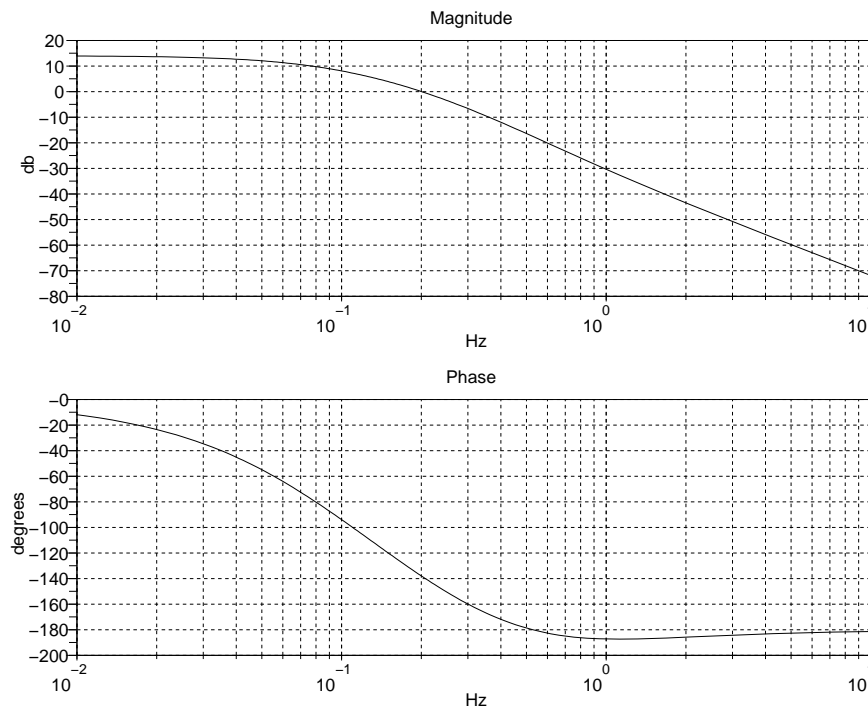


Figura 8.1: Diagrama de Bode para o Problema 5

- a. Determine os valores de K , T_1 e T_2 , usando o domínio da frequência, para atender aos requisitos de projeto.
- b. Qual o tipo de controlador usado (avanço ou atraso)? Justifique.

$$\text{Fórmula auxiliar: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

7. Para o sistema da Figura 8.2, projete um controlador contínuo que assegure um amortecimento aproximado $\zeta = 0.4$. O atraso do processo é $T_a = 0.2 \text{ seg}$.

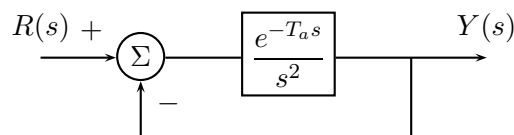


Figura 8.2: Sistema para o Problema 7

8. Uma planta tem uma função de transferência $G(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$

- a. Determine o valor do ganho para que a margem de fase do sistema seja 60° .
- b. Projete um compensador que aumente a constante de erro estático por um fator de 5, mantendo a mesma margem de fase do sistema.
- c. Comente sobre as características do sistema em malha fechada (amortecimento, tempo de resposta, ruído).

Parte II

Controle Discreto

CAPÍTULO 9

Introdução ao Controle Discreto

9.1 Introdução

Os sistemas de controle estudados até este ponto envolvem controladores analógicos, que produzem sinais de controle contínuos no tempo a partir de sinais da entrada também contínuos no tempo, como mostrado na Figura 9.1 Estes controladores apresentam pouca flexibilidade e modificações na lei de controle implicam na modificação do "hardware". Além disto, é difícil implementar leis de controle mais complexas.

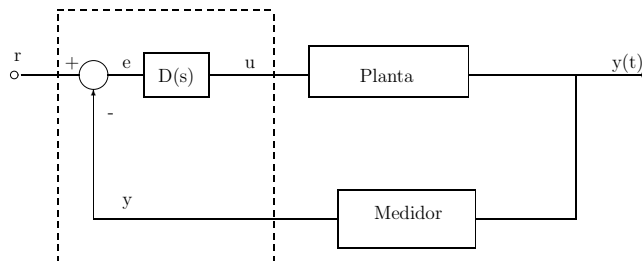


Figura 9.1: Controlador Analógico

Com o desenvolvimento e redução de custos do hardware, o controle digital passou a ser uma solução cada vez mais usada. O controle digital caracteriza-se pelo uso de um computador específico ou geral, que gera a lei de controle e exerce a função de controlador. Controladores digitais são flexíveis e as funções de controle podem ser facilmente modificadas. Leis de controle mais complexas também podem ser implementadas sem dificuldade. O esquema do sistema de controle é mostrado na Figura 9.2 abaixo:

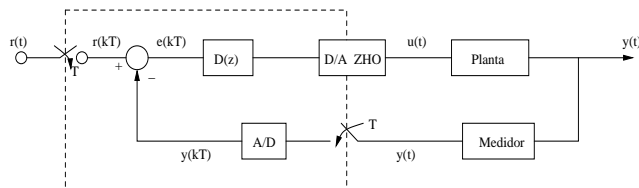


Figura 9.2: Controlador Digital

Neste esquema o erro é amostrado e convertido em uma sequência de pulsos expressos em um código numérico (código binário, por exemplo). A função de transferência do controlador é convertida em uma equação diferença implementada como um programa no computador. A saída do computador por sua vez, que é expressa também no mesmo código binário, é convertida para um sinal contínuo. Esta saída é a ação de controle.

Sistemas de controle amostrados são usados quando um elevado grau de precisão é requerido. Também no caso onde transmissão de dados à longa distância é necessário, o uso de modulação de amplitude de pulso permite que um único meio de transmissão seja usado para vários canais de informação sem estar sujeito a distorções encontradas em transmissão analógica. Para alguns sistemas a amostragem é inerente aos mesmos. Por exemplo, no caso de um sistema de rastreamento por radar, tanto o sinal enviado quanto o sinal recebido são na forma de trem de pulsos. Resumidamente, o uso de sistemas de controle amostrados ocorre:

1. Quando um computador digital (ou microprocessador) é parte do laço de controle.
2. Para compartilhamento no tempo de componentes de controle.
3. Quando canais de transmissão formam parte do laço de controle.
4. Quando a saída de um componente de controle é essencialmente na forma discreta.

As vantagens com relação ao controle analógico são:

1. Implementação simples de controles complexos.
2. Flexibilidade no caso de mudança de leis de controle.
3. Superioridade com relação a controladores analógicos do ponto de vista de ruídos internos e efeitos de "drift".

Por outro lado algumas desvantagens também se apresentam:

1. Erros são introduzidos pelos processos de amostragem e quantização, e podem degradar o desempenho do sistema.
2. O projeto pode se tornar mais complexo para compensar esta degradação.

9.2 Definições básicas

Vários termos usados com relação a sinais usados em controle discreto são definidos a seguir.

9.2.1 Tipos de sinais

Definição 12 *Sinal analógico* é um sinal que toma um conjunto contínuo de valores em uma faixa contínua de tempo.

Definição 13 *Sinal discreto no tempo* é o sinal definido apenas em instantes discretos do tempo (apenas a variável independente t é quantizada).

Definição 14 *Sinal amostrado* se o sinal discreto no tempo tem amplitude que pode assumir uma faixa de valores contínuos então o sinal é chamado amostrado.

Definição 15 *Sinal digital* se o sinal discreto no tempo tem amplitude quantizada (ou seja, pode ser representado por uma sequência de números) então o sinal é chamado digital.

9.3 Amostragem e reconstrução do sinal

O controle digital envolve a medição do sinal de saída da planta, que em geral é contínuo. Como este sinal deve ser processado pelo computador, ele deve ser discretizado. Este é o chamado processo de amostragem. Por outro lado o sinal de controle gerado pelo computador deve ser aplicado na planta. Como este sinal é discreto, ele deve então ser transformado em um sinal contínuo. Este é o processo de reconstrução do sinal. Estes dois processos são analisados a seguir.

9.3.1 Amostragem

O processo de amostragem transforma um sinal contínuo em um sinal discreto. Vários tipos de operações de amostragem podem ser usados:

Amostragem periódica na qual os instantes de amostragem são igualmente espaçados e dados por $t_k = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Amostragem de ordem múltipla neste caso $t_{k+r} - t_k$ é constante para todo t_k . Ou seja, um certo padrão de amostragem é repetido periodicamente.

Amostragem com múltiplas taxas em casos onde o sistema de controle possui vários laços envolvendo diferentes constantes de tempo é conveniente à amostragem em alta frequência para os laços com pequenas constantes de tempo e amostragem em baixa frequência para laços que envolvem constantes de tempo lentas.

Amostragem aleatória os instantes de amostragem são aleatórios.

Na grande maioria das aplicações consideram-se apenas amostragem periódica.

Do ponto de vista do controle é interessante analisar o efeito que a amostragem tem sobre o sinal a ser amostrado e as conseqüências para o desempenho do sistema. O desenvolvimento a seguir apresenta os fatos básicos.

Seja o processo de amostragem mostrado na Figura 9.3.

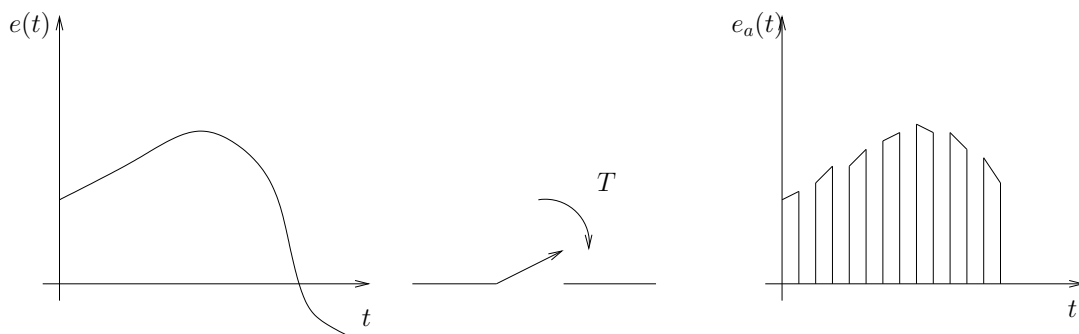


Figura 9.3: Processo de amostragem

O amostrador converte o sinal contínuo em um trem de pulsos que ocorrem nos instantes $t = 0, T, 2T, \dots$ onde T é o período de amostragem.

O processo de amostragem é equivalente a multiplicar o sinal $e(t)$ por um trem de pulsos periódicos, ou seja:

$$e_a(t) = e(t) * p_\Delta \quad (9.3.1)$$

onde $p_\Delta(t)$ é o trem de pulsos periódicos dado na Figura 9.4(a).

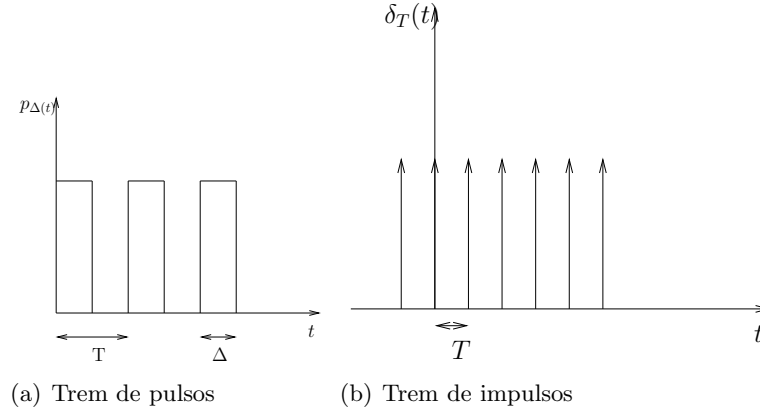


Figura 9.4: Trem de pulsos

O trem de pulsos pode ser aproximado por um trem de impulsos com o valor de impulso igual a $1 \times \Delta = \Delta$, ou seja, a área do pulso. Então:

$$e_a = e(t)\Delta\delta_T(t) \quad (9.3.2)$$

onde $\delta_T(t)$ é um trem de impulsos unitários representado na Figura 9.4(b). A modelagem do processo de amostragem por um trem de impulsos é conveniente do ponto de vista de derivação de vários resultados, como mostrado a seguir.

O trem de impulsos pode ser representado por

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (9.3.3)$$

e portanto o sinal amostrado pode ser representado por

$$e_a(t) = \Delta e(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (9.3.4)$$

Esta expressão pode ser usada para calcular a transformada de Fourier da função $e_a(t)$. Para isto pode-se usar a propriedade da convolução na frequência da transformada de Fourier, dada a seguir.

Propriedade 1 Se $f_1(t)$ tem uma transformada de Fourier $F_1(\omega)$ e $f_2(t)$ tem uma transformada de Fourier $F_2(\omega)$, então $f_1(t) f_2(t)$ tem uma transformada $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega$.

Usando-se esta propriedade tem-se

$$\mathcal{F}[e_a(t)] = \frac{\Delta}{2\pi} \mathcal{F}[e(t)] * \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right]$$

Mas

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

onde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência de amostragem.

Este último resultado é derivado da transformada de Fourier de um sinal periódico. Se $f(t)$ é periódico, então

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jkn\omega_a}$$

e

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_a)$$

Aplicando-se este resultado à função

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

tem-se

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right]$$

O k -ésimo coeficiente é calculado por

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_a t} dt$$

Usando-se a propriedade da função impulso tem-se

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_a t} dt = \frac{1}{T}$$

segue que

$$\mathcal{F}[\delta_T] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_a) = \omega_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_a)$$

Tem-se então

$$\mathcal{F}[e_s(t)] = \frac{\Delta}{2\pi} \mathcal{F}[e(t)] * \omega_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_a) = \frac{\Delta}{T} E(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_a)$$

onde $E(\omega) = \mathcal{F}[e(t)]$ denota a transformada de Fourier de $e(t)$.

No entanto,

$$E(\omega) * \delta(\omega - k\omega_a) = E(\omega - k\omega_a)$$

Então

$$E_a(\omega) = \mathcal{F}[e_a(t)] \frac{\Delta}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(\omega - k\omega_a)$$

$E_a(\omega)$ é o espectro de frequências do sinal amostrado, o qual, pela expressão anterior, é calculado em termos do espectro de frequências do sinal de entrada.

Seja $E(\omega)$ o espectro de frequências do sinal a ser amostrado, com uma faixa de frequências limitada, com valor máximo ω_m , mostrado na Figura 9.5.

O espectro do sinal amostrado, calculado pela expressão anterior é, para $\omega_a > 2\omega_m$, dado pela Figura 9.6.

No entanto, se $\omega_a < 2\omega_m$, o espectro do sinal amostrado é aquele mostrado na Figura 9.7.

Desta análise fica claro que a taxa de amostragem deve ser suficientemente alta para garantir que as componentes de espectro centradas nas frequências múltiplas da frequência de amostragem não serão superpostos, o que impediria a recuperação do sinal não-amostrado. Esta condição de superposição é chamada de "aliasing". O teorema de Shannon formaliza esta discussão.

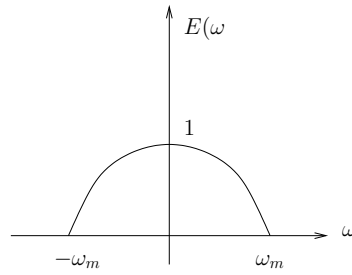


Figura 9.5: Espectro do sinal contínuo

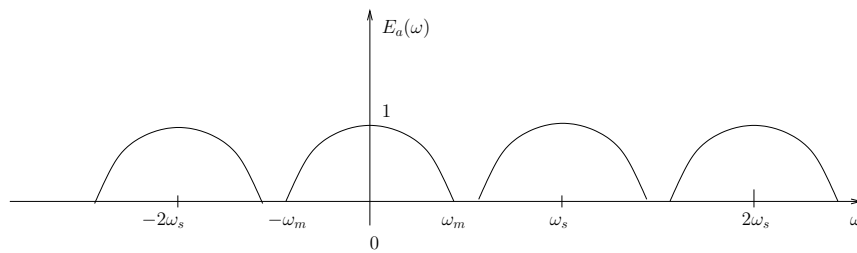


Figura 9.6: Espectro do sinal contínuo

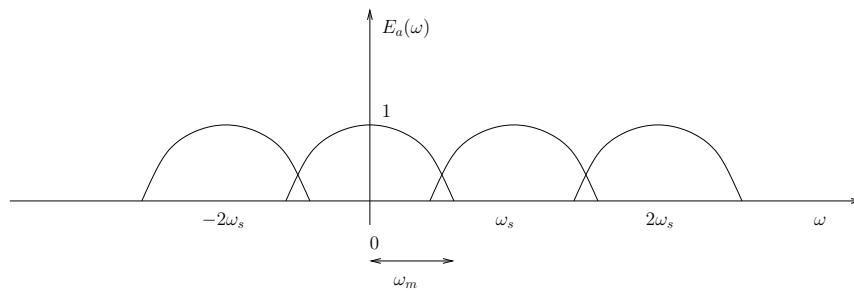


Figura 9.7: Espectro do sinal amostrado

Teorema 4 *Um sinal contínuo no tempo com uma transformada de Fourier que é zero fora do intervalo $(-\omega_m, \omega_m)$ é dado de forma unívoca pelos seus valores em pontos equidistantes de a frequência de amostragem é maior que $2\omega_m$. O sinal contínuo pode ser calculado do sinal amostrado pela forma de interpolação*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\text{sen} \left[\frac{\omega_a(t-kT)}{2} \right]}{\frac{\omega_a(t-kT)}{2}}$$

onde ω_a é a frequência angular de amostragem em rad/seg.

Como sinais reais sempre tem componentes com frequência elevada e como não seria econômico ou viável usar frequências de amostragem muito elevadas, usa-se em geral um filtro, chamado filtro anti-aliasing, para tratar o sinal antes da amostragem, reduzindo as componentes de alta frequência, fora da faixa de interesse. A frequência $\frac{\omega_a}{2}$ é chamada frequência de Nyquist e determina a faixa de frequências onde deve estar contido o espectro do sinal para que o "aliasing" seja evitado.

9.3.2 Reconstrução de sinais

Teoricamente seria possível recuperar o sinal original a partir do sinal amostrado. Para isto seria necessário um filtro que deixasse passar o espectro no intervalo $(-\omega_m, \omega_m)$, e cortasse completamente o espectro fora deste intervalo. No entanto, este filtro é realizável fisicamente, o que limita a possibilidade de reconstruir exatamente o sinal contínuo a partir do sinal amostrado. Isto fica claro a partir do teorema de Shannon, onde, embora seja teoricamente possível reconstruir o sinal a partir de uma série, amostras do sinal seriam necessárias no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$, ou seja, o valor de $f(t)$ depende de valores passados e futuros e portanto o sistema seria não causal.

Pode-se então usar vários métodos para reconstruir o sinal. O método usual em controle digital consiste no uso de um sustentador de ordem zero.

9.3.2.1 Sustentador de ordem zero (SOZ)

Esta é a forma mais simples de reconstrução do sinal, onde $f(t) = f(t_k)$, para $t_k \leq t < t_{k+1}$, como mostrado na Figura 9.8

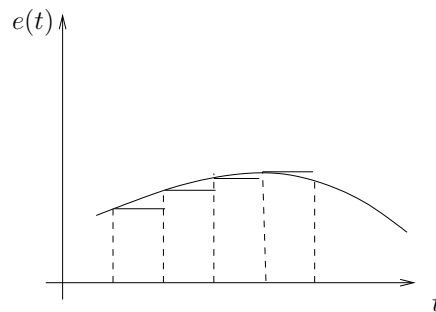


Figura 9.8: Reconstrução com sustentador de ordem zero

Esta forma de amostragem é simples e pode ser usada para amostragem não periódica. No entanto, uma inversa exata da operação de amostragem só é dada para sinais que são contínuos à direita e constantes por partes nos intervalos de amostragem. Para todos os outros sinais esta forma de amostragem produz um erro. Uma estimativa do erro é dada por

$$e_{SOZ} = \max_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq h \max_k |f'(t)|$$

9.3.2.2 Sustentadores de ordem mais elevada

Um sustentador de ordem zero pode ser considerado como uma extrapolação usando um polinômio de ordem zero. Polinômios de ordem mais elevada podem ser usados para diminuir o erro de reconstrução.

Se um polinômio de primeira ordem for usado tem-se, por exemplo, um sustentador de primeira ordem, dado por:

$$f(t) = f(t_k) + \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} [f(t_k) - f(t_{k-1})], \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

Sustentadores de ordem mais elevada podem ser construídos mas são mais difíceis de implementar e portanto pouco usados.

CAPÍTULO 10

Modelagem e resposta de sistemas discretos

10.1 Introdução

Os sistemas discretos podem ser representados, do mesmo modo que os sistemas contínuos, no domínio do tempo ou através de uma transformação, neste caso a transformada Z . No caso do domínio no tempo, a representação é feita por equações diferença, também chamadas de equações recursivas. No caso da representação por uma transformação, usam-se funções de transferência discretas, obtidas pela aplicação da transformada Z . Este assunto é abordado na teoria de sistemas lineares e nas seções iniciais deste capítulo faremos uma breve revisão daqueles conceitos antes de estudarmos a álgebra de diagramas de blocos.

10.2 Equações diferença

Seja um sistema discreto com uma entrada $u(k)$ e uma saída $y(k)$, onde $k = 0, \dots, \infty$, e kT representa o tempo no k -ésimo instante de amostragem. A relação entre a entrada e a saída, no domínio do tempo, é dada por uma equação a diferenças

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (10.2.1)$$

A solução desta equação pode ser feita no domínio do tempo, através de recursividade, ou usando a transformada Z .

10.3 Função de transferência discreta

Seja o sistema descrito pela Equação 10.2.1. A função de transferência discreta ou função de transferência pulsada $G(z)$ é definida como a relação entre a transformada Z da saída, $Y(z)$, e a transformada Z da entrada, $U(z)$. Portanto

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

A função de transferência amostrada pode ser calculada, tomando-se a transformada Z nos dois lados da Equação 10.2.1. Tem-se então

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_n z^{-n} U(z)$$

ou

$$(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}) U(z)$$

Portanto

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Usaremos a função de transferência discreta para representar tanto a planta quanto o controlador na maior parte do estudo neste e nos capítulos seguintes.

A partir da função de transferência pode-se determinar a equação recursiva correspondente. Formalmente, deve-se primeiro escrever a função de transferência na forma de potências negativas de z . Pode-se então substituir z^i por q^{-i} , onde q^{-1} representa o operador de atraso, no domínio do tempo, ou seja, $q^{-1}y(k) = y(k-1)$ e $q^{-i}y(k) = y(k-i)$. O operador q corresponde ao operador $p = \frac{d}{dt}$ no caso contínuo. É usual, no entanto, passar diretamente da função de transferência discreta para o domínio do tempo, usando o operador z^{-1} como o operador produzindo o atraso no tempo.

10.3.1 Obtenção da função de transferência discreta

Para a obtenção da função de transferência discreta em sistemas de controle, deve-se levar em conta que muitas vezes sinais discretos e contínuos estão simultaneamente presentes nestes sistemas. Além disto, um sustentador de ordem zero está presente.

Antes de estudarmos cada um destes casos, vamos lembrar alguns fatos básicos sobre a transformada Z .

10.3.1.1 Relação entre a transformada Z e a transformada de Laplace

A transformada de Laplace de um sinal discreto $y(k)$ também pode ser determinada. Seja $Y^*(s)$ esta transformada, que alguns autores chamam de transformada estrela. Se a relação entre a variável complexa z e a transformada complexa s for $z = e^{sT}$, onde T é o período de amostragem, tem-se que

$$Y(z) = Y^*(s)|_{s=\frac{\ln z}{T}}$$

ou seja, a transformada Z coincide com a transformada estrela se a relação $s = \frac{\ln z}{T}$ for usada.

10.3.1.2 Combinação de sinais discretos e contínuos

A função de transferência discreta relaciona uma sequência de amostras da entrada com uma sequência de amostras na saída. Esta função muda dependendo da existência ou não de um amostrador antes de cada bloco que compõe o diagrama de blocos do sistema. Se o amostrador existe, a entrada do sistema é amostrada e a resposta é diferente do caso onde o amostrador não existe e a entrada é o próprio sinal contínuo. Por outro lado, a existência de um amostrador na saída de um bloco é irrelevante em termos da determinação da função de transferência discreta, pois ela relaciona as amostras da entrada e da saída. Se o amostrador não existe, podemos supor a existência de um amostrador fictício. Se a saída desta função de transferência é a entrada de uma outra função de transferência, a existência ou não do amostrador terá importância na determinação da função de transferência seguinte.

A presença ou não do amostrador na entrada de um bloco pode ser considerada de forma automática através de uma propriedade da transformada estrela. Quando toma-se a transformada estrela de um produto de funções na forma de transformada de Laplace, termos que já forem transformada estrela podem ser fatorados.

Para a Figura 10.1(a), a saída do sistema pode ser escrita como

$$Y(s) = G(s)E^*(s)$$

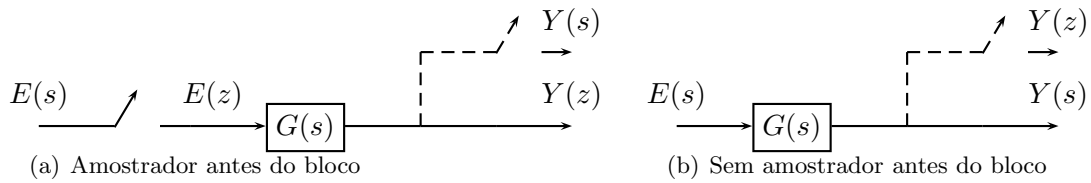


Figura 10.1: Efeito do amostrador na entrada do bloco

Tomando-se a transformada Z nos dois lados da equação tem-se

$$Y^*(s) = [G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$$

pois a transformada estrela $E^*(s)$ pode ser fatorada do produto. Usando-se a relação entre a transformada Z e a transformada estrela obtém-se

$$Y(z) = G(z)E(z)$$

No caso da Figura 10.1(b), onde o amostrador não existe na entrada do bloco, o sinal de entrada é contínuo. Pode-se então escrever

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

e tomando-se a transformada estrela nos dois lados da equação tem-se

$$Y^*(s) = [G(s)E(s)]^*$$

e não é possível obter-se um produto de transformadas Z , como no caso anterior. Neste caso pode-se escrever

$$Y(z) = \underline{G}\underline{E}(z)$$

que significa que deve-se obter a transformada Z correspondente ao resultado do produto das transformadas de Laplace.

10.3.1.3 Sustentador de ordem zero

A função de transferência do sustentador de ordem zero é dada por

$$SOZ(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)$$



Figura 10.2: Sustentador de ordem zero em cascata com a planta

Na Figura 10.2, onde tem-se um sustentador de ordem zero em cascata com uma função de transferência $G_p(s)$, tem-se

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)$$

Pode-se provar que

$$G(z) = (1 - e^{-Ts}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_p}{s} \right]$$

É importante ressaltar que $G(z)$ não é o produto do equivalente no domínio Z do sustentador de ordem zero por $G_p(z)$, pois não existe um amostrador entre o sustentador de ordem zero e a função de transferência $G_p(s)$.

10.4 Álgebra de blocos

A álgebra de diagramas de bloco para o caso discreto deve levar em conta a existência de amostradores antes de um bloco, como discutido na seção anterior. Dependendo se um sinal que entra em bloco é contínuo ou amostrado, as funções de transferência serão diferentes, pois a resposta será diferente para cada sinal. No entanto, as regras de manipulação são semelhantes ao caso contínuo. A seguir são apresentadas as principais regras de manipulação de diagramas de bloco.

10.4.1 Associação em cascata

Seja o sistema mostrado na Figura 10.3(a).

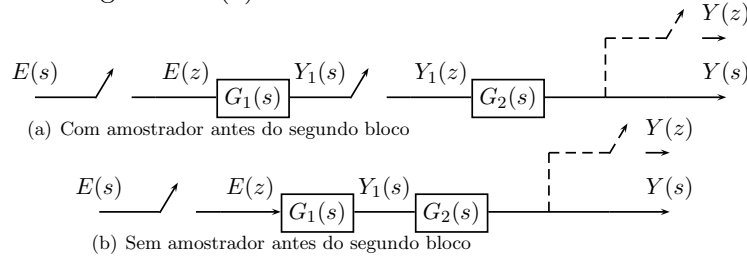


Figura 10.3: Associação em cascata

Os amostradores são supostos sincronizados e com o mesmo período de amostragem. Do diagrama em 10.3(a) segue que:

$$Y_1(s) = G_1(s) E^*(s)$$

ou tomando-se a transformada "estrela" nos dois lados da equação

$$Y_1^*(s) = G_1^*(s) E^*(s)$$

Do mesmo modo, calculando-se a saída

$$Y(s) = G_2(s) Y_1^*(s)$$

ou

$$Y^*(s) = G_2^*(s) Y_1^*(s)$$

Então

$$Y^*(s) = G_2^*(s) Y_1^*(s) = G_2^*(s) G_1^*(s) E^*(s)$$

ou

$$\frac{Y^*(s)}{E^*(s)} = G_1^*(s) G_2^*(s)$$

Usando-se a relação entre a transformada estrela e a transformada Z tem-se

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = G_1(z) G_2(z)$$

Quando não existe o amostrador intermediário, como mostrado na Figura 10.3(b), tem-se:

$$\mathcal{Z} [G_1(s)G_2(s)] = \underline{G_1 G_2}(z) = \underline{G_2 G_1}(z)$$

ou seja, a transformada Z deve ser a transformada do produto das funções de transferência e:

$$\frac{Y^*(s)}{E^*(s)} = \underline{G_1 G_2^*}(s)$$

ou

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = \underline{G_1 G_2}(z)$$

10.4.2 Associação em paralelo

Seja o sistema dado na Figura 10.4(a). O amostrador existe antes dos dois blocos.

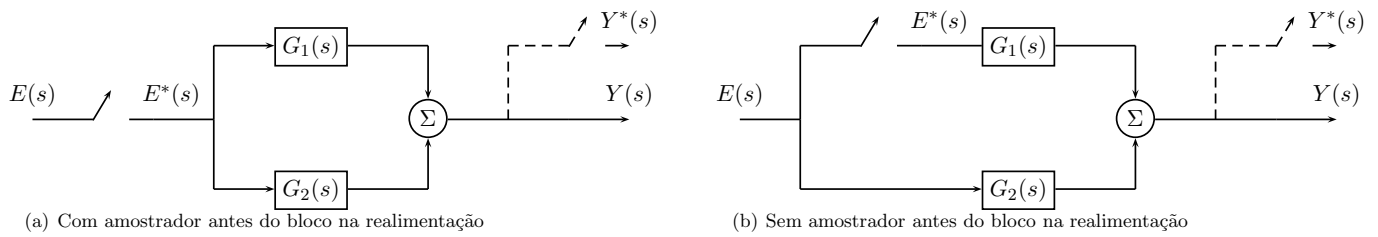


Figura 10.4: Associação em paralelo

Neste caso tem-se :

$$Y^*(s) = G_1^*(s)E^*(s) + G_2^*(s)E^*(s) = [G_1^*(s) + G_2^*(s)]E^*(s)$$

Logo

$$\frac{Y^*(s)}{E^*(s)} = G_1^*(s) + G_2^*(s)$$

ou

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = G_1(z) + G_2(z)$$

Seja agora o sistema mostrado na Figura 10.4(b), onde o amostrador existe somente antes de um dos blocos.

Neste caso tem-se

$$Y^*(s) = G_1^*(s) E^*(s) + G_2 E^*(s)$$

ou

$$Y(z) = G_1(z) E(z) + \underline{G_2 E}(z)$$

10.4.3 Malha fechada

Seja o sistema apresentado na Figura 10.5(a). Neste caso existem amostradores antes dos blocos correspondentes a $G(s)$ e $H(s)$.

Tem-se então:

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \quad (10.4.1)$$

$$E(s) = R(s) + H(s)Y^*(s) \quad (10.4.2)$$

Das Equações 10.4.1 e 10.4.2 obtém-se

$$Y(z) = G(z)E(z) \quad (10.4.3)$$

$$E(z) = R(z) + H(z)Y(z) \quad (10.4.4)$$

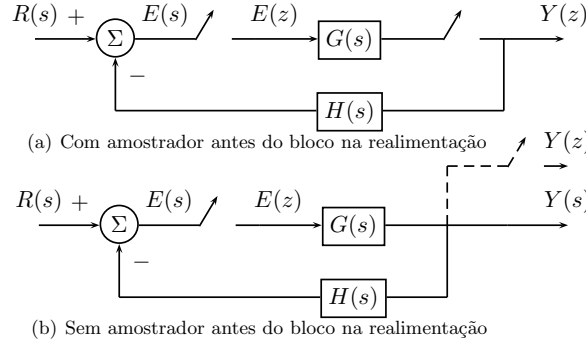


Figura 10.5: Malha fechada

Usando-se 10.4.4 em 10.4.3 obtem-se

$$Y(z) = G(z)R(z) + G(z)H(z)Y(z)$$

ou

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Seja agora o sistema mostrado na Figura 10.5(b). Na malha de realimentação, não existe amostrador antes do bloco correspondente a $H(s)$. Ou seja, a saída contínua e não a amostrada, é que é realimentada.

As equações correspondentes a este diagrama são dadas por:

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \quad (10.4.5)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \quad (10.4.6)$$

Da Equação 10.4.5 segue que

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s) \quad (10.4.7)$$

Substituindo-se $Y(s)$, da Equação 10.4.5 em 10.4.6 obtem-se

$$E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \quad (10.4.8)$$

ou, tomando-se a transformada estrela nos dois lados da equação,

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + \underline{GH}^*(s)} R^*(s) \quad (10.4.9)$$

Substituindo-se 10.4.9 em 10.4.7 segue que

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + \underline{GH}^*(s)} R^*(s) \quad (10.4.10)$$

ou ainda, usando-se a relação entre a transformada estrela e a transformada Z :

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + \underline{GH}(z)} R(z) \quad (10.4.11)$$

Do desenvolvimento anterior verifica-se que para a determinação da função de transferência amostrada é importante o conhecimento da posição dos amostradores na malha. Devido ao uso da transformada Z e de um amostrador fictício na saída, os resultados da anti-transformada dão os valores da saída nos instantes da amostragem, nada podendo-se afirmar quanto ao comportamento entre as amostragens.

10.5 Mapeamento entre o plano s e o plano z

As variáveis complexas z e s relacionam-se por

$$z = e^{Ts} \quad (10.5.1)$$

onde T é o período de amostragem.

Através desta relação, pólos e zeros no plano z , que são os pólos e zeros da função de transferência pulsada, podem ser relacionados a posições no plano s .

Do mesmo modo que em um sistema de controle contínuo a estabilidade é determinada pela localização dos pólos da função de transferência de malha fechada no plano s , a estabilidade do sistema discreto pode ser determinada pela localização dos pólos em z .

É importante observar que a localização de zeros e pólos no plano z depende do período de amostragem.

A seguir consideraremos o mapeamento de cada região do plano s no plano Z . Além disto, alguns lugares geométricos importantes para a análise de sistemas e síntese de controladores serão também mapeados no plano Z .

10.5.1 Mapeamento do semi-plano esquerdo

Desde que $z = e^{sT}$ e $s = \sigma + j\omega$ segue que,

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi)n}$$

onde n é inteiro

Seja ω_a a frequência de amostragem.

Então $z = e^{\sigma T} e^{jT(\omega + \frac{2\pi}{T}n)} = e^{jT(\omega + \omega_a n)}$ e conclui-se que os pólos e zeros no plano S , cujas frequências diferem um número inteiro de vezes da frequência de amostragem são mapeados na mesma localização no plano Z .

Exemplo 10.5.1 $s = \sigma + j\omega$, $\sigma + j(\omega + \omega_a)$ e $s = \sigma + j(\omega + 2\omega_a)$ são mapeados no mesmo ponto do plano Z .

No semi-plano esquerdo (aberto) do plano s tem-se $\sigma > 0$. Então $|z| = e^{\sigma T} < 1$. Sobre o eixo $j\omega$ tem-se $\sigma = 0$. Então $|z| = e^{\sigma T} = 1$.

Conclui-se portanto que o eixo imaginário no plano s é mapeado sobre o círculo unitário e o semi-plano esquerdo (aberto) é mapeado no interior deste círculo unitário.

Como um sistema contínuo é estável se todos os pólos estão no semi-plano esquerdo do plano complexo, então no plano Z o sistema é estável se todos os pólos da função de transferência amostrada estiverem no interior do círculo unitário centrado na origem.

10.5.2 Faixa primária e faixas complementares

Seja $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$. Então $\angle z = \omega T$. Seja um ponto sobre o eixo $j\omega$ no plano s que se move de $-j\frac{\omega_a}{2}$ a $+j\frac{\omega_a}{2}$.

No plano Z tem-se:

$$\text{Para } s = -j\frac{\omega_a}{2}, z = e^{-j\frac{\omega_a}{2}T} = e^{-j\frac{\omega_a}{2} \frac{2\pi}{\omega_a}} = e^{-j\pi}.$$

$$\text{Para } s = j\frac{\omega_a}{2}, z = e^{j\frac{\omega_a}{2} \frac{2\pi}{\omega_a}} = e^{j\pi}.$$

Observa-se que $|z| = 1$ e $\angle z$ varia de $-\pi$ a π , no sentido anti-horário. Isto corresponde a uma volta completa sobre o círculo unitário no plano Z .

Seja agora a variação sobre $j\omega$ no plano s de $j\omega_a/2$ a $j3\omega_a/2$.

No plano Z tem-se :

$$\text{Para } s = j\frac{\omega_a}{2}, z = e^{j\pi}$$

Para $s = j\frac{3}{2}\omega_a$, $z = e^{j\frac{3\omega_a}{2}\frac{2\pi}{\omega_a}} = e^{j3\pi}$.

Portanto, novamente $|z| = 1$ e $\angle z$ varia de π a 3π , o que corresponde a uma volta completa sobre a circunferência de raio unitário do plano Z .

A análise acima mostra que um ponto que se move de $-\infty$ a $+\infty$ no plano s sobre o eixo jw , é mapeado um infinito número de vezes sobre o círculo unitário. Pode-se ainda concluir que cada faixa correspondente a uma variação de frequência ω_a é mapeada no interior do círculo unitário. O número de faixas é infinito e define-se a faixa primária como a faixa com jw variando de $-j\frac{\omega_a}{2}$ a $j\frac{\omega_a}{2}$.

As faixas complementares se estendem de $j\frac{\omega_a}{2}$ a $j\frac{3}{2}\omega_a$, e assim por diante para valores positivos e de $-j\frac{\omega_a}{2}$ a $-j\frac{3}{2}\omega_a$ e assim por diante para valores negativos.

Desde que cada faixa complementar é mapeada no mesmo círculo unitário no plano Z , segue que a correspondência entre o plano s e o plano Z não é única. Um ponto no plano Z corresponde a infinitos pontos no plano s . Por outro lado um ponto no plano s corresponde a um único ponto no plano Z .

Desde que a faixa primária é limitada por $\pm j\frac{\omega_a}{2}$, segue que se todas as frequências correspondentes do sistema são tais que $\omega_{max} \leq \frac{\omega_a}{2}$ ou $\omega_a \geq 2\omega_{max}$, onde ω_{max} é o maior frequência presente, então os pontos no círculo unitário representam apenas pontos na faixa primária. Este seria o um caso ideal onde a faixa de frequências do sinal estaria totalmente contida entre 0 e $\frac{\omega_a}{2}$. O filtro anti-aliasing concentra o espectro do sinal nesta faixa, mas sempre existirão componentes com frequências superiores a $\frac{\omega_a}{2}$.

A seguir alguns contornos usados no plano s serão mapeados no plano Z . Estes contornos são:

1. Atenuação constante, ou seja, σ constante.
2. Frequência própria constante, ou seja, ω constante.
3. Relação de amortecimento constante, ou seja, ζ constante.

10.5.2.1 Atenuação constante

Para atenuação constante no plano s tem-se σ constante. Então $z = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$, ou seja $|z|$ é constante. Portanto a reta com σ constante é mapeada num círculo de raio $|z| = e^{\sigma T}$.

10.5.2.2 Frequência própria constante

Se $s = \sigma + j\omega_1$ com ω_1 constante, então $z = e^{(\sigma + j\omega_1)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega_1 T}$, que corresponde a uma linha radial no plano Z com inclinação $\omega_1 T$.

Para $s = \sigma + j\frac{\omega_a}{2}$ tem-se $z = e^{\sigma T}e^{j\frac{\omega_a}{2}T} = e^{\sigma T}e^{j\pi}$.

Para $s = \sigma - j\frac{\omega_a}{2}$ tem-se $z = e^{\sigma T}e^{-j\frac{\omega_a}{2}T} = e^{\sigma T}e^{-j\pi}$.

Portanto, para $j\omega = \pm\frac{\omega_a}{2}$, o mapeamento corresponde ao eixo real negativo no plano Z . Se $\sigma > 0$, o mapeamento corresponde ao eixo real no plano Z entre -1 e $+\infty$.

Se $\sigma < 0$ então o mapeamento leva ao eixo real do plano Z entre 0 e -1 .

O eixo real do plano s é dado por $s = \sigma$. Então $z = e^{\sigma T}$ e $\angle z = 0^\circ$.

Para $\sigma > 0$ (semi-eixo real positivo no plano s) o mapeamento correspondente no plano Z é o eixo real positivo entre $+1$ e $+\infty$.

Para $\sigma < 0$ (semi-plano real negativo no plano s) tem-se no plano Z o eixo real positivo entre 0 e 1 .

Deve-se observar ainda que qualquer reta com frequência constante $\omega = \pm n\omega_a$, $n = 0, 1, \dots$, no lado direito do plano complexo ($\sigma > 0$) é mapeado em $z = e^{\sigma T}e^{\pm jn\omega_a T} = e^{\sigma T}e^{\pm jn2\pi}$, portanto no eixo real positivo no plano Z entre 1 e ∞ . Para as mesmas frequências, mas com $\sigma < 0$ a imagem no plano Z é o eixo real positivo entre 0 e 1 .

10.5.2.3 Lugar geométrico com amortecimento constante

O lugar geométrico no plano s das raízes com mesmo amortecimento é uma reta que passa na origem, como vimos no Capítulo 2. Um ponto desta reta é dado por

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\frac{\zeta\omega_p}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pm j\omega_p$$

É conveniente expressar este lugar geométrico em termos da frequência própria, já que esta frequência deve estar limitada à faixa primária. Consideraremos esta frequência variando de 0 à $\frac{\omega_a}{2}$.

Logo, à medida que a frequência própria ω_p aumenta, $|z|$ diminui e o ângulo aumenta. Portanto uma reta com amortecimento constante (radial) no plano s é mapeada em uma espiral no plano Z . A Figura 10.6 ilustra este mapeamento.

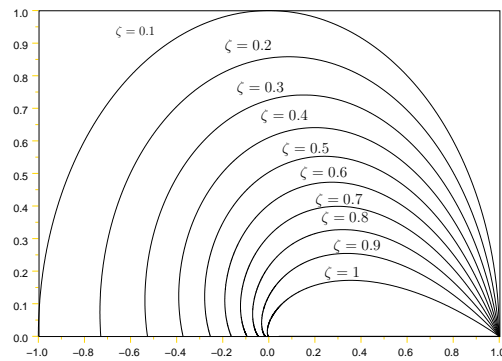


Figura 10.6: Lugar geométrico dos amortecimentos constantes no plano z

Exercícios

1. Seja o sistema da Figura 10.7. Obtenha a função de transferência $\frac{Y(z)}{R(z)}$. Também obtenha a expressão para $Y(s)$.

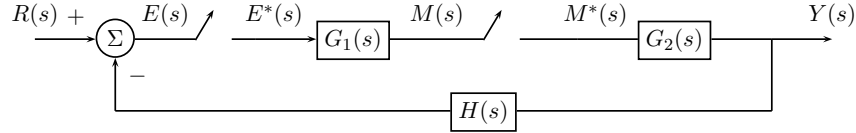


Figura 10.7: Exercício 1

2. Seja o sistema da Figura 10.8. Obtenha a sequência de saída $y(kT)$ quando a entrada do sistema for um degrau unitário. O período de amostragem é $T = 1 \text{ seg}$. Obtenha também a saída contínua $y(t)$.

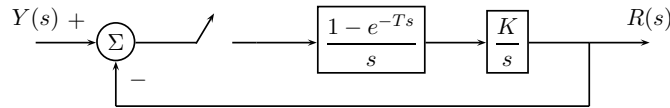


Figura 10.8: Exercício 2

3. Seja o sistema da Figura 10.9. Se $T = 0.2 \text{ seg}$ e $K = 1$, determine $y(kT)$ para $k = 0, 1, 2, 3$ e 4 quando $r(t)$ for um degrau unitário. Determine também o valor final y_{rp} .

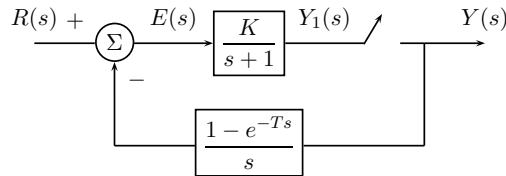


Figura 10.9: Exercício 3

4. Para o sistema da Figura 10.10, obtenha $y(kT)$ (em forma fechada) se $r(k)$ for um impulso unitário. Considere $T = 1 \text{ seg}$.

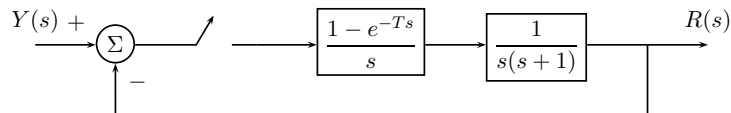


Figura 10.10: Exercício 4

CAPÍTULO 11

Precisão e estabilidade

11.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades básicas de sistemas de controle discreto. Os conceitos apresentados no no Capítulo 4 podem ser aplicados ao caso de sistemas de controle discreto, com algumas adaptações. Estudaremos duas propriedades importantes, a precisão e a estabilidade.

11.2 Precisão de sistemas discretos

Vamos considerar o sistema de controle discreto apresentado na Figura 11.1.

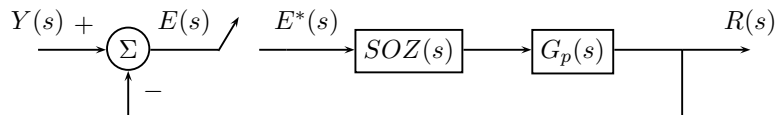


Figura 11.1: Sistema para cálculo de erro

O erro é dado por:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

O erro amostrado é dado por

$$e(kT) = r(kt) - y(kT)$$

No limite tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)]$$

A função de transferência considerando o sustentador de ordem zero e a planta é dada por

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

podendo-se então determinar o erro por

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1 + G(z)}R(z)$$

ou ainda

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)}R(z)$$

O valor do erro em regime permanente pode ser determinado usando-se o teorema do valor final:

$$e_{rp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right]$$

É importante notar que o regime permanente existe se o teorema do valor final for aplicável. Se o sistema for instável, este valor não existe.

Esta fórmula é genérica e aplicável a qualquer sinal de entrada. Como vimos no caso contínuo, o erro para alguns sinais padrão já é um indicador do desempenho em regime permanente para outros sinais. Na sequência estudaremos o erro para os sinais do tipo degrau, rampa e parábola.

11.3 Erro aos sinais padrão e tipos de sistema

Nesta seção, a fórmula geral do erro será usada para determinar os erros ao degrau, rampa e parábola. Do mesmo modo que no caso contínuo, pode-se definir um tipo de sistema baseado no erro a um destes sinais. Assim, para um sistema cujo erro ao degrau, rampa ou parábola, é constante e diferente de zero, o tipo do sistema será 1, 2 e 3, respectivamente.

11.3.1 Erro ao degrau

Para uma entrada do tipo degrau unitário $r(t) = u(t)$ tem-se que a transformada do degrau é dada por

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Logo

$$e_{rp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right]$$

Definindo-se o ganho estático ou a constante de erro de posição como

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

tem-se

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p}$$

O erro ao degrau é nulo se $K_p = \infty$ o que requer que $G(z)$ tenha pelo menos um pólo em $z = 1$, ou seja, pelo menos um integrador. Um sistema do tipo 0, e portanto sem integradores, tem um erro diferente de zero ao degrau e erro infinito à rampa e à parábola.

11.3.2 Erro à rampa

Se a entrada for uma rampa $r(t) = tu(t)$ então

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Logo

$$e_{rp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right]$$

O ganho de velocidade ou constante de erro de velocidade é definida como

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T}$$

O erro à rampa é então dado por

$$e_{rp} = \frac{1}{K_v}$$

Se $K_v = \infty$ então o erro em regime permanente é zero para a rampa unitária. Isto requer um duplo pólo de $G(z)$ em $z = 1$, ou seja, a planta deve ter pelo menos dois integradores. Um sistema do tipo 1, e portanto com um integrador, tem erro nulo ao degrau, erro constante e diferente de zero à rampa e erro infinito à parábola.

11.3.3 Erro à parábola

Para uma entrada $r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$, a transformada Z é dada por

$$R(z) = \frac{T^2(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3}$$

Usando a fórmula geral do erro tem-se:

$$e_{rp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{T^2(1 + z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 G(z)}$$

Definindo-se o ganho de aceleração ou constante de erro de aceleração como

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2}$$

o erro à parábola unitária é dado por

$$e_{rp} = \frac{1}{K_a}$$

O erro à parábola é zero se $K_a = \infty$, ou seja, se $G(z)$ tem um pólo com multiplicidade pelo menos de 3 em $z = 1$, o que corresponde a três integradores. Um sistema do tipo 2, tem erro zero ao degrau e à rampa e um erro constante e diferente de zero à parábola.

Finalmente, é importante notar que as constantes de erro para o caso analógico e o equivalente digital devem ser as mesmas.

11.4 Estabilidade

Seja a função de transferência em malha fechada dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

A estabilidade depende da localização dos pólos de malha fechada no plano Z , que são dados pela raiz da equação característica

$$1 + G(z)H(z) = 0$$

Se todas as raízes da equação característica estão dentro do círculo unitário, então o sistema é estável. Qualquer pólo fora ou em cima do círculo unitário torna o sistema instável. Em sistemas de tempo contínuo a estabilidade depende dos pólos possuírem parte real negativa. Já em sistemas discretos, a estabilidade é garantida se os pólos possuem módulo menor que a unidade. Isto vem da relação seguinte:

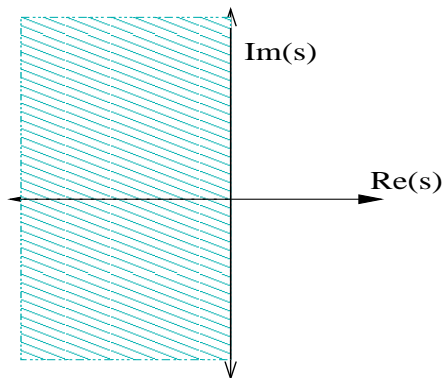
$$f(t) = e^{-at}, t \geq 0 \xrightarrow{\mathcal{L}[f(t)]} F(s) = \frac{1}{s + a} \quad \text{Pólo: } s = -a$$

↓ Discretização $t = kT$

$$f(kT) = e^{-akT}, k \geq 0 \xrightarrow{\mathcal{Z}[f(kT)]} F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad \text{Pólo: } z = e^{-aT}$$

relação entre z e s : $z = e^{sT}$.

Assim vemos que se os pólos de $F(s)$ são negativos, então o número $z = e^{sT}$ terá módulo inferior à unidade.

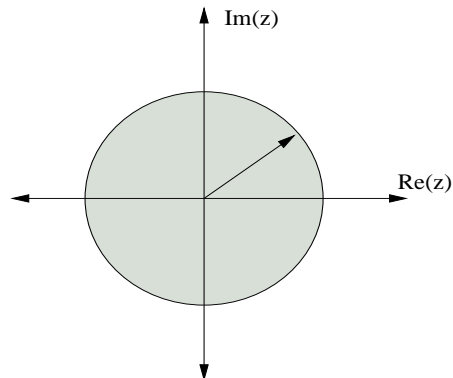


Região de estabilidade
 $\text{Re}[\text{Pólo}] < 0$, semi-plano esquerdo estrito.

Dinâmicas rápidas

pólos com parte real negativa muito à esquerda

$$\text{pólo} \approx -\infty$$



Região de estabilidade
 $|\text{Pólo}| < 1$
 Círculo unitário estrito

Dinâmicas rápidas

pólos com módulo muito pequeno

$$\text{pólo} = 0$$

Observação 5 Pólos sobre o círculo unitário caracterizam, segundo alguns autores, a estabilidade crítica. No entanto, neste caso, embora a saída seja limitada para uma entrada em degrau, existem sinais limitados para os quais a saída será ilimitada e o sistema é instável.

A seguir apresentaremos vários métodos para estudar a estabilidade de sistemas discretos.

11.4.1 Critério de Jury

É um critério algébrico baseado nos coeficientes de um polinômio

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

que indica se as raízes de $D(z) = 0$ estão no círculo unitário ou não.

Para determinar se as raízes de $D(z) = 0$ estejam no círculo unitário usa-se o seguinte procedimento.

Constrói-se a tabela

Tabela $n + 1$ colunas e $2n - 3$ linhas.

	z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	0
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	\dots	b_1	b_0	0
5	c_0	c_1	c_2	c_3	\dots	c_{n-2}	0	0
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	\dots	c_0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3	0	0	\dots	0
2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0	0	0	\dots	0
2n-3	q_0	q_1	q_2	0	0	0	\dots	0

A primeira linha consiste dos coeficientes do polinômio em ordem crescente das potências. A segunda linha é a anterior em ordem reversa. De maneira geral as linhas pares correspondem às linhas anteriores em ordem reversa. As demais linhas ímpares são calculadas pelos determinantes como indicado a seguir.

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Tem-se um total de $2n - 3$ linhas e $n + 1$ colunas.

O critério de Jury diz que o sistema é estável, isto é, as raízes possuem módulo inferior à unidade, se e somente se:

$$1. \quad D(1) > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} D(-1) > 0 & \text{se } n \text{ par} \\ D(-1) < 0 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$2. \quad \text{As } n - 1 \text{ desigualdades} \begin{cases} |a_0| < |a_n| \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ |d_0| > |d_{n-3}| \\ \vdots \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$$

são satisfeitas.

11.4.2 Critério de Routh-Hurwitz

Para aplicar o critério de Routh-Hurwitz vamos considerar inicialmente a transformação bilinear, mostrada na Figura 11.2.

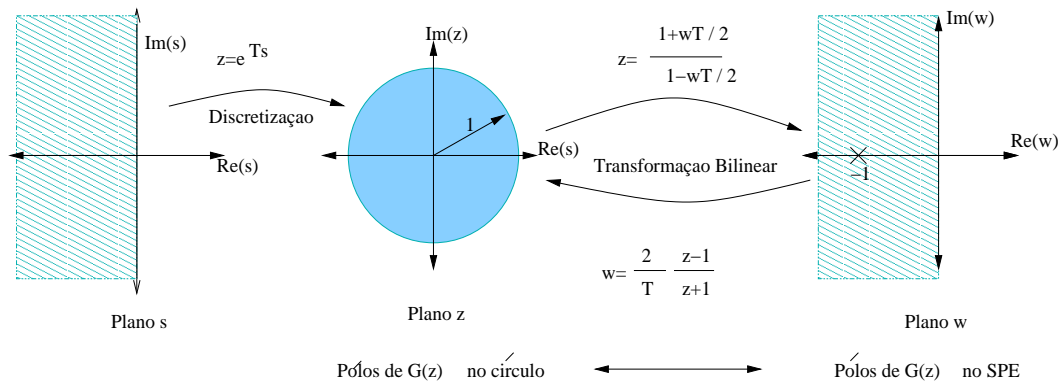


Figura 11.2: Transformação bilinear

A transformação bilinear consiste em mapear o plano Z no plano w , através de

$$z = \frac{1 + w\frac{T}{2}}{1 - w\frac{T}{2}}$$

Com esta transformação, a circunferência do círculo unitário no plano Z é mapeado no eixo imaginário do plano w , o interior e o exterior do círculo unitário no plano Z são mapeados no semi-plano esquerdo e no semi-plano direito de w , respectivamente.

Exemplo 11.4.1 Dada a função de transferência de malha fechada

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

determine a estabilidade do sistema usando o critério de Routh-Hurwitz.

Aplicando-se a transformação bilinear obtém-se: $G(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1} \xleftrightarrow{T=2} G(w) = \frac{1}{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1}$

$$= \frac{(1-w)^2}{3+w^2}$$

A condição de estabilidade pode ser expressa por $|Pólos\ G(z)| < 1 \iff Re[pólos\ G(w)] < 0$

Podemos aplicar o Critério de Routh-Hurwitz, mas a simples inspeção dos pólos do polinômio no

plano w permite a seguinte comparação $Pólos\ z = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \xleftrightarrow{z=\frac{1+w}{1-w}} Pólos\ w = \pm j\sqrt{3}$ e $Re[Pólos] = 0$
 $=: |pólos| = 1$.

que mostra que os pólos em cima do eixo imaginário no plano w correspondem a pólos em cima da circunferência do círculo unitário, no plano z .

11.4.3 Lugar das raízes

A construção do lugar das raízes para sistemas discretos segue as mesmas regras usadas para o caso contínuo.

Para ilustrar a aplicação do lugar das raízes para a análise de sistemas discretos vamos considerar um primeiro exemplo.

Exemplo 11.4.2 O diagrama de blocos da Figura 11.3 representa um sistema de controle com um controlador discreto do tipo integral dado por

$$C(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}}$$

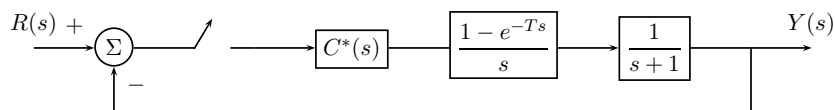


Figura 11.3: Sistema para o Exemplo 11.4.2

Deseja-se analisar o comportamento do sistema para o ganho K variável do controlador e para três diferentes valores do tempo de amostragem T ; 0.5 seg, 1 seg e 2 seg.

Inicialmente vamos obter a função de transferência amostrada correspondente ao sustentador de ordem zero e a planta. Esta função pode ser obtida usando uma tabela ou simplesmente um programa como o **Scilab**.

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(z) = \frac{Kz}{z-1} \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \quad (11.4.1)$$

A seguir vamos considerar cada um dos valores do período de amostragem, como mostrado em aula.

O exemplo seguinte também ilustra o efeito da amostragem na estabilidade de um sistema de controle discreto.

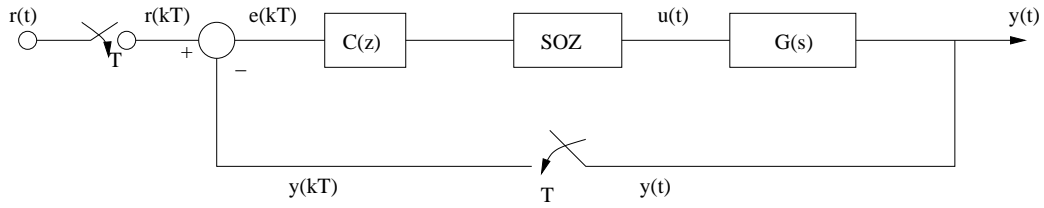


Figura 11.4: $C(z) = k$ $G(s) = \frac{a}{s+a}$

Exemplo 11.4.3 Com o auxílio do lugar das raízes, verifique a estabilidade do sistema da Figura 11.4.

Solução: Afim de estabelecer uma comparação vamos primeiro relembrar o caso contínuo (sem amostragem)

Para construir o lugar das raízes para o sistema discreto, usamos o sistema dado na Figura 11.5

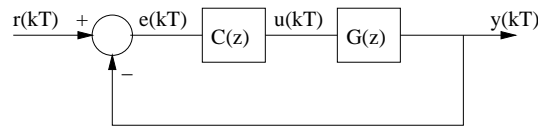
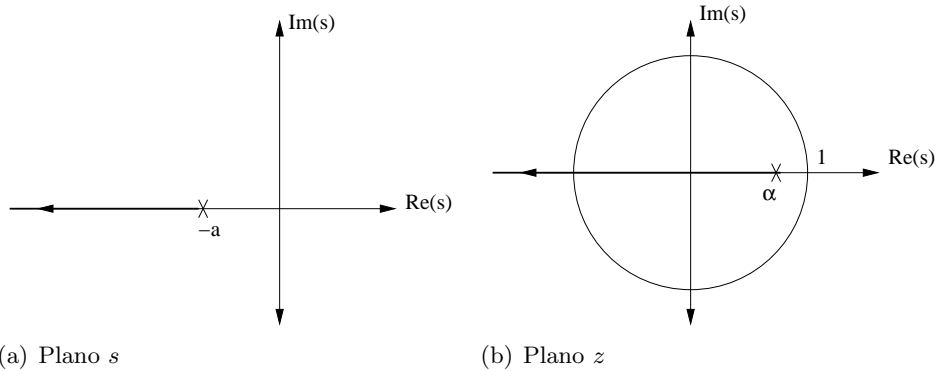


Figura 11.5: Sistema Discreto com $C(z) = k$

A função de transferência de malha aberta é dada por

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{a}{s(s+a)} \right] \\ &= \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \quad \alpha = e^{-aT} \end{aligned}$$

O lugar das raízes para o caso contínuo é apresentado na Figura 11.6(a) e para o caso discreto na Figura 11.6(b)



Para $a > 0$ o sistema contínuo será estável para todo $k > 0$. Já no caso discreto o sistema será instável se k for suficientemente grande. Os pólos de M.F. do sistema discreto são dados pela equação característica:

$$1 + kG(z) = 0 \Rightarrow z - \alpha + k(1 - \alpha) = 0$$

Pólo: $z = \alpha + k\alpha - k$, $\alpha = e^{-aT}$.

Logo se $|\alpha + (\alpha - 1)k| \geq 1$ o sistema será instável. Note que quando menor for o período de amostragem T maiores valores de k podem ser utilizados sem instabilidade. A instabilidade é provada neste exemplo pelo atraso introduzido pelo ZOH.

Exercícios

1. Determine a estabilidade do sistema com função de transferência

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-3}}{1 + 0.5z^{-1} - 1.34z^{-2} + 0.24z^{-3}}$$

- usando o critério de Jury.
- usando a transformação bilinear e o método de Routh-Hurwitz.

2. Seja o sistema descrito por

$$y(k) - 0.6 y(k-1) - 0.81 y(k-2) + 0.67 y(k-3) - 0.12 y(k-4) = x(k)$$

onde $x(k)$ é a entrada e $y(k)$ é a saída do sistema. Determine se o sistema é estável usando o critério de Jury.

3. Dado o sistema da Figura 11.6, determine os valores de K para os quais o sistema é estável, usando o critério de Jury.

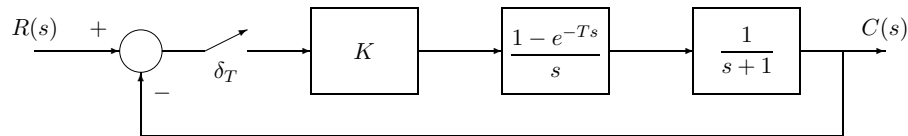


Figura 11.6: Exercício 3

4. Trace o lugar das raízes no plano Z para o sistema da Figura 11.7, para três períodos de amostragem: $T = 1 \text{ seg}$, $T = 2 \text{ seg}$ e $T = 4 \text{ seg}$. Discuta a influência do período de amostragem na estabilidade do sistema.

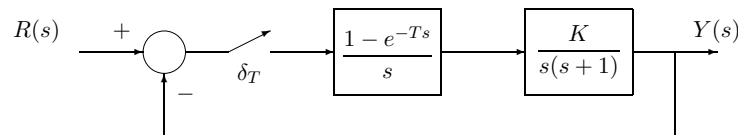


Figura 11.7: Exercício 4

5. Dado o sistema da Figura 12.18, onde

$$G(z) = \frac{K(z + 0.8)}{(z - 1)(z - 0.6)}$$

determine a faixa de ganho de K para a estabilidade do sistema, **usando o critério de Jury**.

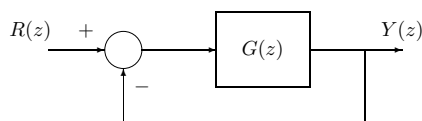


Figura 11.8: Exercício 5

6. Considere o sistema descrito pela equação:

$$y(k) - 0.6 y(k-1) - 0.81 y(k-2) + 0.67 y(k-3) - 0.12 y(k-4) = u(k)$$

onde $u(k)$ é a entrada e $y(k)$ é a saída. Determine a estabilidade deste sistema, usando o critério de Jury. Teste todas as $n + 1$ condições de estabilidade.

CAPÍTULO 12

Projeto de controladores discretos

12.1 Introdução

O projeto de controladores discretos pode ser realizado por emulação, onde um controlador contínuo é projetado, usando as mesmas técnicas vistas nos capítulos 6 e 7, e então discretizados, ou diretamente no plano Z . A primeira abordagem apresenta a vantagem de utilizar os resultados de projeto para controladores analógicos e dispensar a necessidade de um estudo mais detalhado de técnicas discretas. A desvantagem desta abordagem é o fato de que o sustentador de ordem zero não é considerado no projeto e portanto, deve-se esperar uma degradação do desempenho. As técnicas baseadas no projeto do controlador usando diretamente o plano Z são mais precisas, mas ao custo de uma maior complexidade.

Na sequência apresentaremos as estruturas básicas dos controladores discretos e então algumas técnicas de projeto. Duas abordagens para o projeto serão consideradas: o projeto por emulação e o projeto diretamente do controlador discreto.

12.2 Estruturas de controladores

As estruturas dos controladores discretos são os equivalentes discretos das estruturas de controladores analógicos apresentados no Capítulo 5. Assim, podemos ter controladores do tipo proporcional, proporcional-integral, proporcional-derivativo, proporcional-integral-derivativo e de avanço e atraso de fase. A Tabela abaixo resume as estruturas dos controladores. Tanto a equação diferença quanto a função de transferência discreta de cada controlador são apresentadas.

Tipos de Controladores

$$\xrightarrow{e(k)} \boxed{C(z)} \xrightarrow{u(k)}$$

Proporcional	$u(k) = Ke(k), \quad C(z) = K$
Derivativo	$u(k) = K_P T_D (e(k) - e(k-1))$ $C(z) = K_P T_D (1 - z^{-1}) = K_P T_D \frac{z-1}{z}$
Integral	$u(k) = u(k-1) + \frac{K_P}{T_I} e(k)$ $C(z) = \frac{K_P}{T_I} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{K_P}{T_I} \frac{z}{z-1}$
Avanço/Atraso	$u(k+1) = \beta u(k) + k(e(k-1) - \alpha e(k))$ $C(z) = K \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}$

12.3 Controle Digital por Emulação

Esta abordagem considera que o projeto de um controlador analógico já tenha sido realizado. Este projeto segue exatamente o procedimento estudado em outros capítulos e todo o processo de amostragem e reconstrução do sinal não é, portanto, considerado. O controlador analógico é então discretizado usando-se algum método de discretização. Vários métodos de discretização podem ser usados e aqui abordaremos o método de Euler, o método de Tustin, o método da transformação casada de pólos-zeros e o método da transformação casada de pólos-zeros modificado.

12.3.1 Controle por emulação via Euler

Esta técnica consiste em fazer o projeto do controlador analógico, como vimos nos capítulos precedentes, e em seguida aproximar o sinal de controle obtido com $C(s)$ através do método de Euler, usando

$$\dot{X} \cong \frac{X(kT+1) - X(kT)}{T} \quad (12.3.1)$$

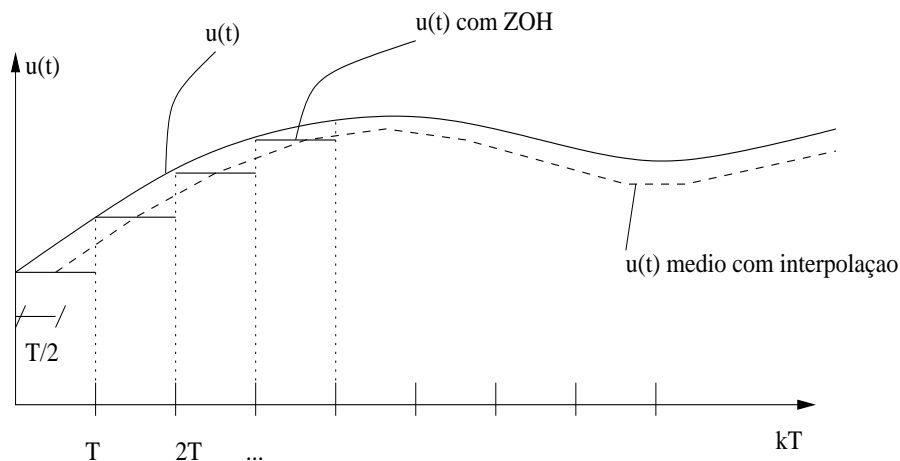


Figura 12.1: Aproximação de Euler

Exemplo 12.3.1 Encontre a equação recursiva correspondente à digitalização do controlador analógico $C(s) = \frac{K_0(s+a)}{s+b}$.

Solução: Seja $e(t)$ o sinal de entrada do controlador e $u(t)$ o sinal de saída. Logo

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K_0(s+a)}{s+b} & : & (s+b)U = K_0(s+a)E \\ & & : & \dot{u} + bu = K_0(\dot{e} + ae) \end{aligned}$$

Aplicando-se o método de Euler temos

$$\dot{u} \cong \frac{u(k+1) - u(k)}{T} \quad e \quad \dot{e} \cong \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

Logo obteremos a seguinte aproximação

$$\frac{u(k+1) - u(k)}{T} + bu(k) = K_0\left(\frac{e(k+1) - e(k)}{T} + ae(k)\right)$$

que resulta na seguinte equação recursiva

$$\begin{aligned} u(k+1) &= u(k) + T(-bu(k) + K_0 \frac{e(k+1) - e(k)}{T} + K_0 a e(k)) \\ &= (1 - Tb)u(k) + K_0 e(k+1) + (TK_0 a - K_0)e(k) \end{aligned}$$

Note que $u(k+1)$ é obtido em função de $u(k)$, $e(k+1)$ e $e(k)$ de forma recursiva. A representação dessa equação recursiva em termos da função de transferência discreta pode ser obtida com o auxílio da transformada \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}[u(k+1)] = zU(z) - zu(0)$$

$$\mathcal{Z}[e(k+1)] = zE(z) - ze(0)$$

Logo para condições iniciais nulas temos

$$zU(z) = (1 - Tb)U(z) + K_0 z E(z) + (TK_0 a - K_0)E(z)$$

$$\xrightarrow{E(z)} \boxed{C'(z)} \xrightarrow{U(z)} \quad C(z) = \frac{K_0 z + TK_0 a - K_0}{z - 1 + Tb} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

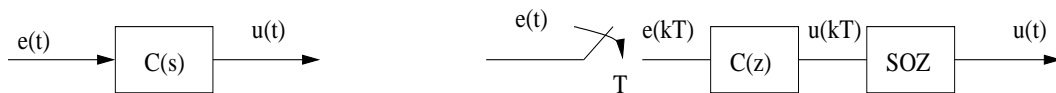


Figura 12.2: Control Analógico

Control Digital

12.3.2 Método de Tustin

A discretização obtida com o método de Euler pode ser interpretada como a substituição da tangente (derivada) pela secante (variação da função no intervalo de amostragem T).

$$\dot{X} \cong \frac{X(kT+1) - X(kT)}{T}$$

Outra forma de discretização consiste em aproximar a integral pela regra trapezoidal, como ilustrado na Figura 12.3. Desta figura

$$\int_0^{kT} e(t)dt = \int_0^{kT-T} e(t)dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t)dt$$

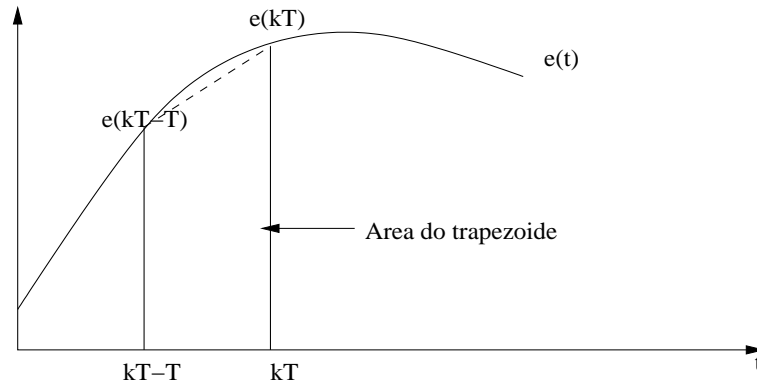


Figura 12.3: Integral Trapezoidal (Área= $\frac{e(kT-T) + e(kT)}{2} \cdot T$)

Aproximando-se $\int_{kT-T}^{kT} e(t)dt$ pela área do trapézio no intervalo T e definindo-se $u(kT)$ como a área acumulada dos sucessivos trapézios até o instante kT , temos a seguinte relação recursiva

$$u(kT) = u(kT - T) + \frac{e(kT - T) + e(kT)}{2} T \quad (12.3.2)$$

Podemos representar a integração pelo bloco

$$\xrightarrow{E(s)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{U(s)} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$$

onde $e(t)$ é o sinal cuja área queremos calcular e $u(t)$ é a área desejada.

Tomando-se a transformada \mathcal{Z} da equação recursiva temos

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{z^{-1}E(z) + E(z)}{2} T$$

$$\xrightarrow{E(z)} \boxed{F(z)} \xrightarrow{U(z)} \quad \frac{U(z)}{E(z)} = F(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Para o sistema abaixo teríamos a relação

$$\xrightarrow{e(t)} \boxed{\frac{a}{s + a}} \xrightarrow{u(t)} \quad \xrightarrow{e(k)} \boxed{\frac{a}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a}} \xrightarrow{u(k)}$$

$C(s)$

$C(z)$

Nota-se então, dos dois exemplos acima que a relação entre $C(s)$ e $C(z)$ com a aproximação bilinear é dada por $C(s) = C(z)$ com

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{Tustin})$$

que expressa uma transformação bilinear de s para z .

Exemplo 12.3.2 Obtenha um controle digital para que o sistema abaixo tenha em malha fechada uma frequência natural $\omega_n = 0,3$ rad/seg e um amortecimento $\xi = 0,7$

Solução: Primeiro determinaremos um controlador analógico $C(s)$ que atende as especificações. Em seguida escolhemos um método de emulação para implementar digitalmente o sinal de controle.

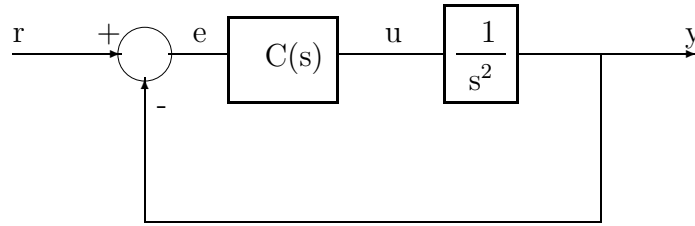


Figura 12.4: Sistema dp exemplo

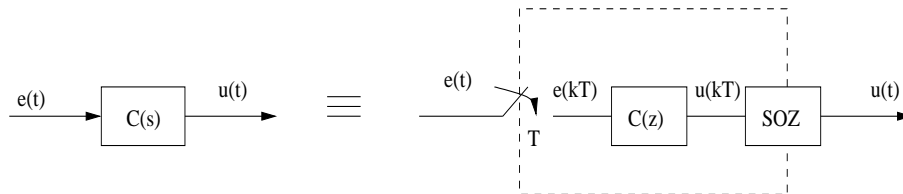
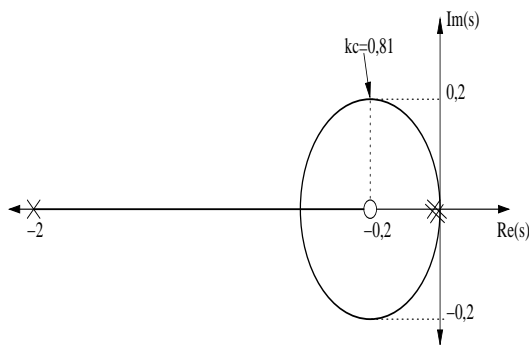


Figura 12.5: Implementação Analógica Implementação Digital

Com os métodos de projeto de controladores de avanço encontramos

$$C(s) = K_c \frac{s+a}{s+b} \quad a = 0,2, \quad b = 2, \quad e \quad K_c = 0,81$$



Pólos: $s = 0, 2 \pm j0,2$

Equação característica: $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

$\therefore \xi = 0,7 \quad \omega_n = 0,2\sqrt{2}$
 $= 0,282$

Para a implementação digital precisamos da frequência de amostragem. Em sistemas de controle a frequência de amostragem é geralmente escolhida em torno de 20 vezes a frequência de banda passante do sistema de malha fechada, que corresponde aproximadamente a ω_n . Para o exemplo, adotaremos este fator de 20 vezes. Logo a frequência de amostragem é $\omega_a = (0,3).20 = 6 \text{ rad/seg} \cong 1 \text{ Hz}$, e o período de amostragem é $T = 1 \text{ seg}$. Com a aproximação bilinear temos

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} = C(z) &= K_c \frac{s+a}{s+b} \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= K_c \frac{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a}{2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + b} \\ &= K_c \frac{2 - 2z^{-1} + a(1+z^{-1})}{2 - 2z^{-1} + b(1+z^{-1})} \\ &= K_c \frac{2 + a + (a-2)z^{-1}}{2 + b + (b-2)z^{-1}} \end{aligned}$$

Portanto

$$U(z)[2 + b + (b-2)z^{-1}] = k_c[(2+a) + (a-2)z^{-1}]E(z)$$

que por sua vez conduz à seguinte equação recursiva

$$u(k) = \frac{2-b}{2+b}u(k-1) + \frac{2+a}{2+b}e(k) + K_c \frac{a-2}{2+b}e(k-1)$$

Note que $e(k) = r(k) - y(k)$ e portanto podemos implementar o controlador $C(s)$ através do esquema digital apresentado na Figura 12.6.

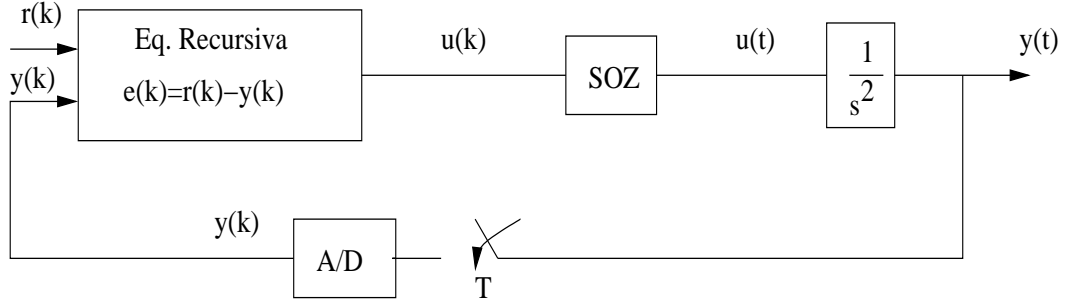


Figura 12.6: Sistema Discreto

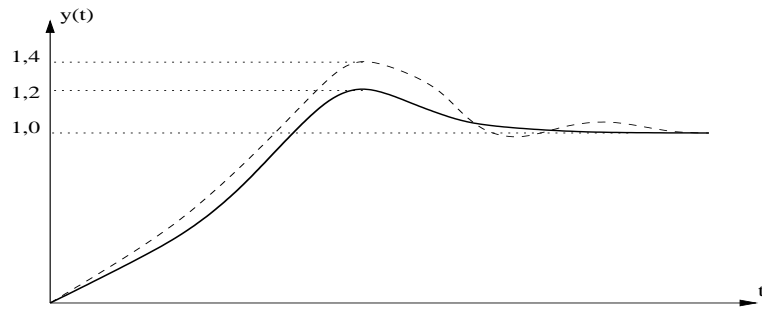


Figura 12.7: Resposta ao Degrau

Poderíamos ter resolvido o mesmo problema usando um outro método de discretização.

Exemplo 12.3.3 Refazer o exemplo usando Euler.

12.3.3 Método da transformação casada de pólos-zeros

Neste caso usa-se a relação $z = e^{sT}$ para mapear pólos e zeros do controlador contínuo no plano complexo.

No caso de funções de transferência com maior número de pólos que zeros, adicionam-se zeros em $z = -1$, de modo a igualar o número de zeros e pólos do controlador discreto. Seja uma função de transferência $C(s)$ com um número de pólos maior do que de zeros. Usando-se o mapeamento $z = e^{Ts}$, obtem-se $C(z)$. Quando a frequência ω varia de $j\omega = 0$ para $j\omega_a/2$, que é a máxima frequência possível no plano Z , tem-se z variando de $z = e^0 = 1$ a $z = e^{\frac{j\omega_a}{2}T} = e^{j\pi} = -1$. Como $C(s)$ tem zeros no infinito, que correspondem a $\omega \rightarrow \infty$, segue que $C(s)$ tende para zero quando ω cresce. Para que o mesmo ocorra com $H(z)$, deve-se ter zeros em $z = -1$.

Exemplo 12.3.4 Seja um controlador analógico dado por

$$C(s) = 10 \frac{s+1}{s+2}$$

e seja $T = 0.1$ seg o período de amostragem.

Usando-se o mapeamento $z = e^{sT}$, o zero em -1 e o pólo em -2 são mapeados em $e^{-1 \times 0.1} = 0.905$ e $e^{-2 \times 0.1} = 0.819$, respectivamente.

A função de transferência amostrada é então

$$C(z) = K_d \frac{z + 0.905}{z + 0.819}$$

onde K_d é o valor do ganho a ser determinado. Para que os ganhos em baixa frequência sejam iguais, deve-se ter $C(s = 0) = C(z = 1)$ e portanto

$$K_d \frac{1 - 0.905}{1 - 0.819} = \frac{10}{2}$$

e segue que $K_d = 14.05$.

A função de transferência amostrada é portanto

$$C(z) = 14.05 \frac{z - 0.905}{z - 0.819}$$

No exemplo anterior a função de transferência do controlador contínuo tinha o mesmo número de pólos e zeros. No exemplo seguinte o controlador contínuo apresenta dois pólos e um zero.

Exemplo 12.3.5 Seja a função de transferência

$$C(s) = 10 \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$

Neste caso tem-se dois pólos e um zero e deve-se então acrescentar um zero em $z = -1$. A função de transferência discreta é então

$$C(z) = K_d$$

Calculando-se o ganho da função de transferência discreta da mesma forma como anteriormente, tem-se $K_d = 7.025$ e a função de transferência discreta é

$$C(z) = 7.025 \frac{(z + 1)(z - 0.905)}{s(z - 0.819)}$$

12.3.3.1 Método de transformação casada de pólos-zeros modificada

Quando a função de transformação discreta tem o mesmo número de pólos e zeros, a equação diferença correspondente é tal que a saída em um instante de amostragem depende da entrada no mesmo instante. Seja, por exemplo, um controlador dado por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = K \frac{z + a}{z + b}$$

A equação diferença correspondente é dada por

$$y(k) = -by(k - 1) + Ku(k) + au(k - 1)$$

e a saída $y(k)$ depende de $u(k)$. Se o tempo de cálculo for tal que a entrada atual não possa ser usada para gerar a saída atual, deve-se manter o número de pólos maior do que o de zeros, modificando-se o método da transformação casada, o qual consiste em introduzir zeros em -1 , de tal modo que se tenha pelo menos um pólo a mais do que um zero. No caso da função de transferência

$$C(s) = 10 \frac{s + 1}{s(s + 2)}$$

por exemplo, não seria acrescentado nenhum zero em $z = -1$.

12.4 Projeto por métodos discretos

Nos métodos de emulação as operações de derivada e/ou integral executadas pelo controlador são aproximadas por operações algébricas com as amostras dos sinais de entrada/saída do controlador analógico projetado a partir do modelo analógico da planta. Nesta seção veremos como projetar um controlador discreto a partir do modelo discreto da planta. Este modelo inclui o sustentador de ordem zero, e antes da aplicação do método de projeto, deve-se obter a função de transferência da planta.

A Figura 12.8 mostra o modelo discreto e a Figura 12.9 mostra o modelo discreto equivalente.

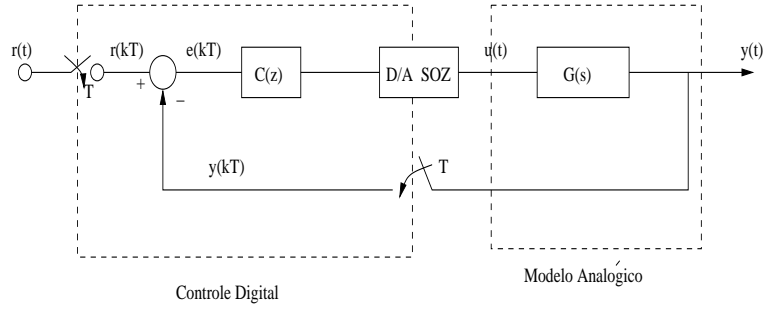


Figura 12.8: Modelo Discreto

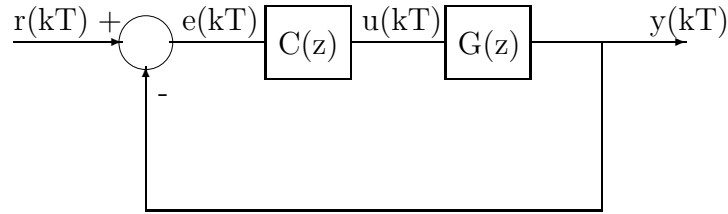
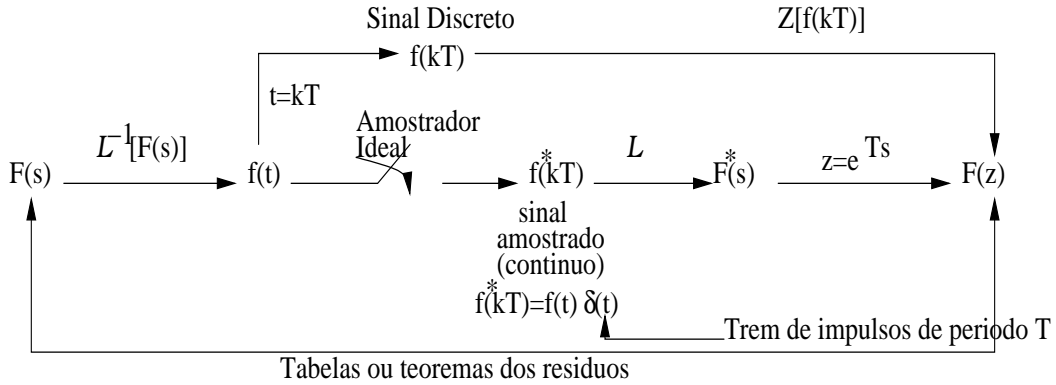


Figura 12.9: Modelo Discreto Equivalente



A função de transferência do controlador é $C(z)$ e a função de transferência da planta e do sustentador de ordem zero é calculada por

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

Pode-se usar o teorema dos resíduos, para obter esta função, como ilustrado na Tabela 12.4, usando-se as seguintes fórmulas: $F(z) = \sum_{i=1}^n R(P_i)$, P_i pólos distintos de $F(s)$.

$$\diamond \quad R(P_i) = \left[(s - P_i) F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=P_i} \quad (\text{Multiplicidade } 1)$$

$$\diamond \quad R(P_i) = \frac{1}{(m_1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s - P_i)^m F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=P_i} \quad (\text{Multiplicidade } m).$$

Dois métodos de projeto serão estudados nesta seção, o projeto por lugar das raízes e o projeto no domínio da frequência. Os dois métodos seguem basicamente os mesmos princípios já apresentados para o caso contínuo.

12.4.1 Projeto pelo lugar das raízes

O método de projeto pelo lugar das raízes segue os mesmos princípios usados no caso contínuo. O projeto visa melhorar o desempenho em regime permanente ou o desempenho em regime transitório ou ambos.

12.4.1.1 Projeto por avanço de fase

Para melhorar o desempenho em regime transitório usa-se um compensador de avanço de fase, dado por

$$C(z) = \frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

As etapas principais do projeto são:

1. A posição dos pólos dominantes **no plano s** é determinada a partir dos requisitos de desempenho transitório. Estes pólos são então mapeados no plano Z , usando o mapeamento $z = e^{sT}$.
2. O zero do controlador é fixado, e o pólo é calculado pela condição de pertinência angular.
3. O ganho do controlador é calculado pela condição de pertinência de módulo.
4. As constantes de erro são calculadas e em caso em que a condição de erro for insatisfatória, o projeto é refeito ou um compensador de atraso de fase é acrescentado.

12.4.1.2 Projeto por atraso de fase

No caso em que o erro em regime permanente for muito elevado, deve-se acrescentar um compensador de atraso de fase, dado por

$$C(z) = \frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

As etapas principais do projeto são:

1. Determinam-se a constante de erro desejada $K_{erro}^{desejado}$, a partir do erro especificado, e a constante atual de erro K_{erro} , onde K_{erro} pode ser o ganho estático, de velocidade ou aceleração.
2. O pólo do compensador é fixado. Usualmente fixa-se este pólo próximo de $z = 1$, que corresponde a $s = 0$ no plano s .
3. Determina-se o zero do compensador fazendo-se

$$\frac{K_{erro}^{desejado}}{K_{erro}^{atual}} = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$$

Do mesmo modo que no caso contínuo, o aumento de ganho é dado pelo ganho do controlador nas baixas frequências ($s \rightarrow 0$ no caso contínuo e $z \rightarrow 1$ para o caso discreto).

A seguir apresentaremos alguns exemplos do projeto pelo lugar das raízes.

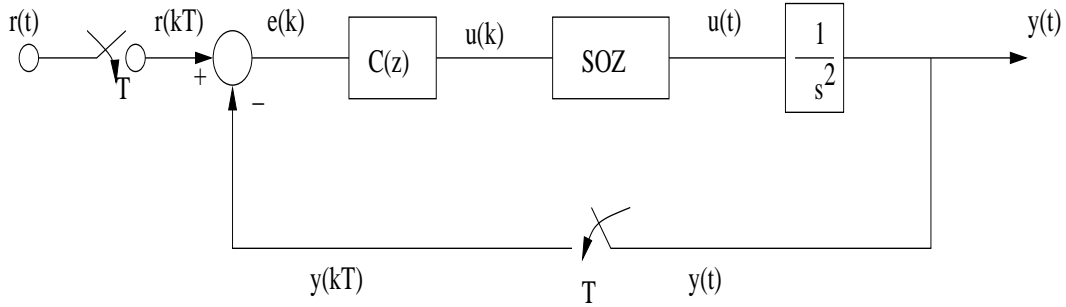


Figura 12.10: Figura para o exemplo

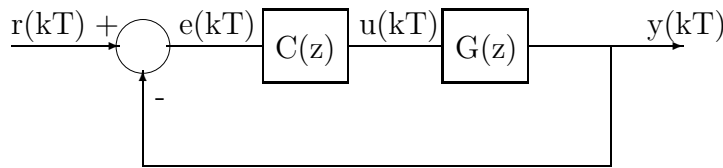


Figura 12.11: Diagrama equivalente

Exemplo 12.4.1 Projete um controlador para que o sistema da Figura 12.10 em malha fechada apresente um comportamento similar a um sistema analógico com $\omega_n \cong 0,3 \text{ rad/seg.}$ e $\xi \cong 0,7$.

Solução: O diagrama discreto equivalente é apresentado na Figura 12.11 onde $G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \frac{T^2}{2} \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$.

Escolhendo-se a frequência de amostragem como sendo 20 vezes a frequência da banda passante do sistema de malha fechada temos $\omega_s = (20)(0,3) = 6 \text{ rad/seg} \cong 1 \text{ Hz}$. Logo $T = 1 \text{ seg}$.

Assim temos

$$G(z) = \frac{z + 1}{2(z - 1)^2}$$

O lugar das raízes obtido com o controlador proporcional é mostrado na Figura 12.12.

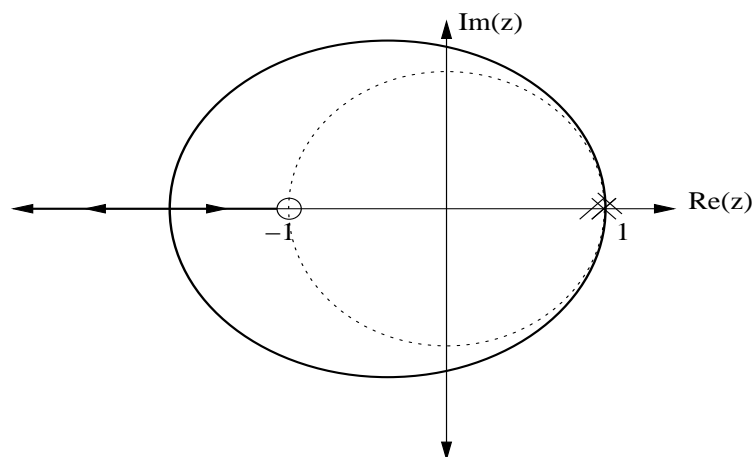


Figura 12.12: Lugar das raízes com controlador proporcional

Note que um controlador proporcional não consegue estabilizar o sistema. Com um controlador PD podemos diminuir as oscilações. A função de transferência de um controlador PD é

$$D(z) = K_p + K_p T_D (1 - z^{-1}) = K \frac{z - \alpha}{z}$$

onde $\alpha = \frac{T_D}{1+T_D}$ e $K = K_P(1+T_D)$.

No plano s os pólos desejados são dados por

$$\begin{aligned} s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 & : & \quad s^2 + 2.0,7.0,3 + (0,3)^2 = 0 \\ & & : & \quad s_d = -0,21 \pm 0,21j \end{aligned}$$

No plano z os pólos desejados são dados por $z = e^{sT}$ com s sendo os pólos no plano s o que resulta em:

$$\begin{aligned} z_d &= e^{-0,21 \pm 0,21j} = e^{-0,21(\cos 1 \pm \text{sen } 1j)} \\ &= 0,79 \pm 0,17j \end{aligned}$$

Com as condições de módulo e fase do lugar das raízes temos $\angle C(z_0d) + \angle G(z_d) = \pm\pi =: \frac{0,17}{0,79 - \alpha} = -3,03; \alpha = 0,85$

$$1 = |C(z_d)||G(z_d)| =: K = \frac{1}{2,77} = 0,36.$$

Com isso temos

$$C(z) = 0,36 \frac{z - 0,85}{z} = 0,36(1 - 0,85z^{-1})$$

que resulta em la lei de controle

$$u(k) = 0,36e(k) - 0,348e(k-1)$$

que é similar à encontrada num exemplo anterior de projeto via emulação.

Normalmente não é necessário que os pólos desejados de malha fechada sejam exatamente aqueles especificados, mas sim estejam dentro de uma região do plano z associada a um fator de amortecimento maior que o especificado (menor oscilações).

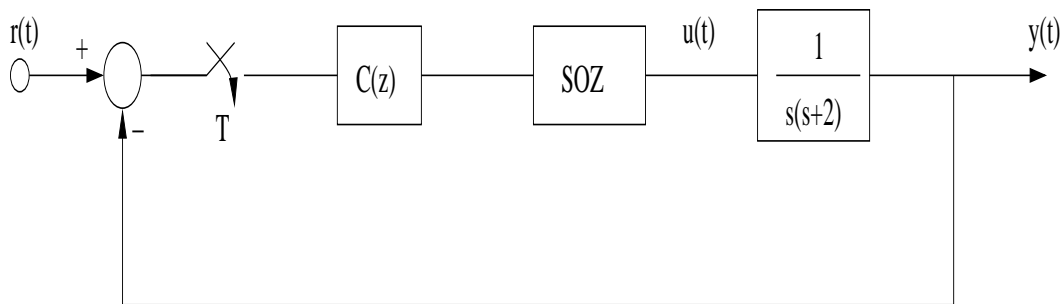


Figura 12.13: Sistema do Exemplo 12.4.2

Exemplo 12.4.2 (Ogata, Discrete-time Control Systems, p. 384) Para o sistema mostrado na Figura 12.13 projetar um controlador discreto para atender aos seguintes requisitos de projeto: amortecimento $\xi = 0,5$ e tempo de resposta $t_{r2\%} = 2$ seg. O período de amostragem é $T = 0,2$ seg. Pede-se ainda o cálculo da resposta ao degrau e o erro à rampa.

Solução: $t_{r2\%} = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 =: \omega_n = 4$

Os pólos desejados são $s_d = 2 \pm 3,464j$. Tipicamente o período de amostragem é escolhido de tal forma que existam pelo menos 9 amostras por ciclo de oscilação amortecida. Conferindo no caso acima temos,

Freq. amostragem $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 31,42$

Freq. oscilações amortecidas $\omega_d = 3,464$.

Portanto a escolha do período de amostragem é satisfatória.

Os pólos dominantes no plano z são $z_d = e^{T s_d} = 0,5158 \pm 0,4281j = 0,67 \angle 39,69$.

O modelo discreto do sistema acima é

$$\begin{aligned} G(z) = \mathcal{Z}[SOZG(s)] &= \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] \\ &= \frac{0,01758(z + 0,876)}{(z - 1)(z - 0,6703)} \end{aligned}$$

Como o ponto z_d deve pertencer ao lugar das raízes, temos

$$\frac{-1}{K} = G(z_d)C(z_d): \pm 180^\circ = \angle G(z_d) + \angle C(z_d)$$

então $\angle C(z_d) = 51,26^\circ$.

Um controlador que atende a condição de fase acima é um avanço de fase.

$$C(z) = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

Cancelando o pólo em 0,6703 com a escolha $\alpha = 0,6703$ temos

$$\angle z_d - \alpha - \angle z_d - \beta = 51,26^\circ: \beta = 0,2543.$$

O ganho K é determinado com a condição de módulo

$$|G(z_d)C(z_d)| = 1 =: K = 12,67$$

Em malha fechada temos então

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)} = \frac{0,2227z + 0,1951}{z^2 - 1,0316z + 0,4494} = F(z)$$

e a resposta ao degrau unitário

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad e \quad Y(z) = F(z) \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

A sequência $y(kT)$ pode ser obtida pela inversa da transformada \mathcal{Z} , tabelas ou mesmo por simulação.

O erro de velocidade é dado por

$$e_{rp} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \frac{1}{K_v}$$

onde

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{T} G(z)C(z) = 2,801.$$

Como no caso de sistemas analógicos podemos aumentar o ganho K_v , e portanto diminuir o erro de regime, introduzindo um compensador de atraso em cascata como o controlador já projetado. Por exemplo, com

$$C_a(z) = \frac{z - \alpha_a}{z - \beta_a}$$

e $\alpha_a = 0,94, \beta_a = 0,98$ temos o novo ganho de velocidade K_v dado por

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{T} G(z) C(z) C_a(z) = (3) \cdot (2,801) \quad (C_a(1) = 3)$$

que representa um aumento de 3 vezes no ganho K_v sem o controlador de atraso. A escolha do zero do controlador de atraso (α_a) é tipicamente próximo da unidade e deve satisfazer

$$1 > \alpha_a \geq 1 - 0,1|z_d| \quad (\text{próximo de } 1)$$

e o valor de β_a é escolhido tal que

$$C_a(1) = \frac{1 - \alpha_a}{1 - \beta_a} = \text{acrécimo desejado}$$

controlador final; $C_a(z)C(z) = k \frac{z - \alpha}{z - \beta} \frac{z - \alpha_a}{z - \beta_a}$.

12.4.2 Projeto no domínio da frequência

12.4.2.1 Resposta de um sistema discreto a uma entrada senoidal

Vamos considerar um sistema linear, discreto, invariante no tempo, com função de transferência $G(z)$. O sistema é por hipótese, estável, ou seja, todos os pólos de $G(z)$ estão no interior do círculo unitário. A entrada do sistema é um sinal senoidal $u(t) = \text{sen } \omega t$, amostrado por um amostrador ideal, resultando em $u(k) = \text{sen } k\omega T$.

Então

$$U(z) = \mathcal{Z} [\text{sen } k\omega T] = \frac{z \text{sen } \omega T}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

A resposta do sistema é

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z) \frac{z \text{sen } \omega T}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})}$$

Fazendo-se a expansão em frações parciais, obtem-se

$$Y(z) = \frac{Az}{z - e^{j\omega T}} + \frac{\bar{A}z}{z - e^{-j\omega T}} + \text{termos devidos aos pólos de } G(z)$$

onde \bar{A} indica o conjugado de A .

Calculando-se A , usando o procedimento de multiplicar $Y(z)$ por $\frac{z - e^{j\omega T}}{z}$ e fazer $z \rightarrow e^{j\omega T}$, obtem-se

$$A = \frac{G(e^{j\omega T})}{2j}$$

Portanto

$$\bar{A} = -\frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$$

Denotando

$$G(e^{j\omega T}) = Me^{j\theta} \quad \text{segue que} \quad G(e^{-j\omega T}) = Me^{-j\theta}$$

A resposta do sistema é então dada por

$$Y(z) = \frac{M}{2j} \left(\frac{e^{j\theta} z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j\theta} z}{z - e^{-j\omega T}} \right) + \text{termos devidos aos outros pólos de } G(z)$$

No regime permanente, a contribuição dos pólos do sistema para a resposta desaparece, pois por hipótese o sistema é estável. Os dois primeiros termos da expansão se combinam para fornecer a resposta em regime permanente no domínio do tempo

$$y_{rp} = M \operatorname{sen}(k\omega T + \theta)$$

onde $M = |G(e^{j\omega T})|$ e $\theta = \angle G(e^{j\omega T})$.

Esta resposta é também senoidal, com a amplitude multiplicada por $|G(e^{j\omega T})|$ e com um deslocamento de fase dado por $\theta = \angle G(e^{j\omega T})$, e portanto, é análoga ao caso contínuo.

Vimos no caso contínuo que a resposta em frequência nos permite obter informações sobre o comportamento do sistema, úteis tanto para a análise quanto para a síntese de controladores através de métodos frequenciais. No caso discreto pode-se usar o mapeamento $z = e^{sT}$, com $s = j\omega$, o que permitiria traçar a resposta em frequência (diagrama de Bode, etc). No entanto tem-se uma dificuldade. No caso discreto, as frequências estão idealmente limitadas a $\frac{\omega_a}{2}$, onde ω_a é a frequência de amostragem, para que o "aliasing" seja evitado. Assim, teríamos um diagrama de Bode limitado em frequência, e a analogia com o caso contínuo seria difícil.

Para se manter as vantagens de trabalhar no domínio da frequência para o caso discreto, tem-se que usar a transformação bilinear. Esta transformação bilinear é dada por

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$$

onde T é o período de amostragem. Desta equação obtém-se a transformação inversa

$$w = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Uma função de transferência pode então se escrita como uma função racional de z e os métodos de resposta em frequência usados.

Com esta transformação, a faixa primária é mapeada no círculo unitário no plano z e por sua vez este é mapeado no lado esquerdo do plano w .

No plano w pode-se definir uma frequência fictícia η , ou seja $w = j\eta$. Esta frequência pode ser relacionada com a frequência ω do plano s , usando-se os mapeamentos $w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ e $z = e^{sT}$.

$$w = j\eta = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \bigg|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

ou

$$\eta = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

Desde que $\omega_a = \frac{2\pi}{T}$ tem-se que

$$\eta = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_a} \pi$$

Desta última equação é fácil de ver que quando ω varia de $-\frac{\omega_a}{2}$ a 0 então η varia de $-\infty$ a 0, e quando ω varia de 0 a $\frac{\omega_a}{2}$, então η varia de 0 a ∞ . Observa-se então, que com a transformação bilinear tem-se uma frequência fictícia que varia até ∞ , o que retira a restrição para a construção do diagrama de Bode de forma análoga ao caso contínuo.

A última equação pode ser escrita como

$$\frac{T}{2} = tg \frac{\omega}{\omega_a} \pi$$

Para valores pequenos de frequência, pode-se substituir a tangente pelo arco:

$$\eta \approx \omega$$

e portanto a frequência no plano s e a frequência fictícia η são aproximadamente iguais.

12.4.2.2 Diagrama de Bode

O procedimento para o traçado do diagrama de Bode para $G(j\eta)$ segue o procedimento para $G(j\omega)$. Existem no entanto algumas diferenças com relação ao valor da magnitude em altas frequências. Para uma função da transferência no plano s com maior número de pólos que zeros, a assíntota para altas frequências tende para $-\infty$, pois $\lim_{s \rightarrow \infty} = 0$. No entanto, quando a frequência fictícia $\eta \rightarrow \infty$, no plano w , a frequência no plano s tende para $\frac{\omega_a}{2}$. No entanto, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} |G(j\eta)|$ geralmente é diferente de $\lim_{\omega \rightarrow \frac{\omega_a}{2}} |G(j\omega)|$, e o comportamento nas altas frequências é diferente nos dois casos.

12.4.2.3 Procedimento de projeto

O procedimento de projeto consiste nos seguintes passos:

1. Obter $G(z)$ e então $G(w)$ usando a transformação bilinear

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$$

O período de amostragem deve ser escolhido adequadamente.

2. Faz-se $w = j\eta$ em $G(w)$ e traça-se o diagrama de Bode de $G(j\eta)$.
3. Usa-se o diagrama de Bode para fazer o projeto seguindo o mesmo procedimento usado para fazer o projeto no domínio da frequência para o caso contínuo.
4. Uma vez obtida a função de transferência $C(w)$ do controlador no plano w , transforma-se esta função em $C(z)$, usando-se a transformação bilinear

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

ou seja,

$$C(z) = C(w)|_{w=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

Exemplo 12.4.3 Para o sistema representado na Figura 12.14, projete um controlador, no domínio da frequência, que assegure os seguintes objetivos:

- margem de fase de 60° ;
- margem de ganho de pelo menos 10db;
- constante de erro de velocidade $k_v = 2 \text{ seg}^{-1}$;
- período de amostragem $T = 0,2 \text{ seg}$.

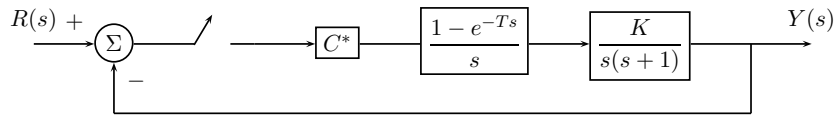


Figura 12.14: Sistema para o Exemplo 12.4.3

O período de amostragem é $T = 0,2$ seg.

O modelo discreto equivalente é:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{k}{s(s+1)} \right] = 0,01873 \frac{K(z + 0,9356)}{(z - 1)(z - 0,8187)}$$

com a transformação bilinear

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}\omega}{1 - \frac{T}{2}\omega} \Leftarrow \omega = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

temos

$$\begin{aligned} G(w) &= G(z) \Big|_{z = \frac{1 + 0,1w}{1 - 0,1w}} \\ &= \frac{K \left(\frac{w}{300,6} + 1 \right) \left(1 - \frac{w}{10} \right)}{w \left(\frac{w}{0,997} + 1 \right)} \end{aligned}$$

O controlador $C(z) = C(w) \Big|_{w = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}}$ deve ser determinado para se atingir os requisitos de projeto.

Como $G(w)$ já possui um ganho a ser determinado, vamos assumir o controlador $C(w)$ com ganho unitário)

$$D(w) = \frac{1 + w/\alpha}{1 + w/\beta} \quad (\text{controlador de avanço})$$

O ganho K é determinado para se atingir o requisito $K_v = 2$ de onde tiramos

$$K_v = \lim_{w \rightarrow 0} w C(w) G(w) = 2:K = 2.$$

Usando as técnicas de projeto para controlador de avanço no domínio da frequência encontramos

$$C(w) = \frac{1 + w/0,997}{1 + w/3,27} \quad \begin{cases} MF = \dots 0^\circ \\ MG = 14 \text{ db} \end{cases}$$

Assim encontramos

$$C(z) = C(w) \Big|_{w = 10 \frac{z - 1}{z + 1}} = 2,718 \frac{z - 0,8187}{z - 0,5071}$$

Em malha fechada ficamos com

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{0,1018(z + 0,9356)}{(z - P_1)(z - P_2)}$$

onde os pólos são dados por $P_1, P_2 = 0,7026 \pm 0,3296j$.

12.5 Questões de Implementação

Esta seção discute alguns aspectos da implementação do controle digital.

12.5.0.4 Escolha do período de amostragem

Segundo o teorema da amostragem, a frequência de amostragem deve ser pelo menos 2 vezes a maior frequência do sinal amostrado. Pode-se então escolher $\omega_a = 2\omega_m$, onde ω_m indica a maior frequência do sinal. No entanto, nas aplicações, uma taxa de amostragem bem superior é usada, para atender requisitos de estabilidade em malha fechada ou outros requisitos de projeto, como seguimento da entrada com baixo erro. Assim usa-se ω_a em torno de 8 a 10 vezes ω_m . A escolha do período de amostragem é um compromisso entre requisitos de desempenho do sistema em malha fechada, que exigem uma alta taxa de amostragem, e o custo envolvido, já que maiores taxas de amostragem exigem computadores mais rápidos. Em situações práticas, a frequência de amostragem é selecionada com base na faixa de passagem requerida da resposta e frequência em malha fechada ou do tempo de resposta ou tempo de subida da resposta transitória. Uma regra prática é amostrar de 8 a 10 vezes durante um ciclo de oscilação, se o sistema é superamortecido. A frequência de amostragem pode ainda ser escolhida como 8 a 10 vezes a faixa de passagem em malha fechada da resposta em frequência (algumas vezes 5 é aceitável, outras vezes 20 é necessário).

Exercícios

1. Considere o sistema de controle digital da Figura 4, onde a planta é de primeira ordem e tem um tempo morto de 2 seg. O período de amostragem é $T = 1$ seg. Projete um controlador PI digital, tal que os pólos dominantes de malha fechada tenham um amortecimento $\zeta = 0.5$ e o número de amostras por ciclo de oscilação senoidal amortecida seja 10. Determine o erro a uma entrada tipo rampa unitária. Obtenha a resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau unitário.

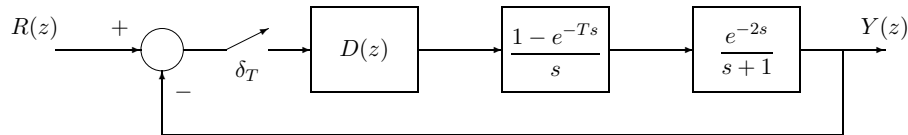


Figura 12.15: Exercício 1

2. Seja o sistema da Figura 5. Projete um controlador digital tal que os pólos dominantes do sistema tenham um amortecimento $\zeta = 0.5$ e o número de amostras por ciclo de oscilação senoidal amortecida seja 8. O período de amostragem é $T = 0.2$ seg. Obtenha a resposta a uma entrada do tipo degrau unitário. Determine a constante de velocidade K_v .

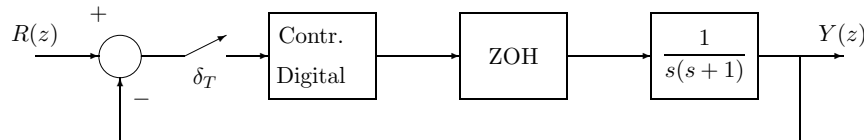


Figura 12.16: Exercício 2

3. Considere o diagrama de blocos de um sistema de controle de uma antena, mostrado na Figura 6. O período é $T = 0.05$ seg.
 - a. Determine a margem de fase com $K = 1$ e $D(z) = 1$.
 - b. Para reduzir o erro em regime permanente, K é aumentado para 5. Projete um controlador de atraso de fase de tal modo que a margem de fase do sistema seja 45° .
 - c. Projete um controlador de avanço de fase, com $K = 5$, para que a margem de fase do sistema seja 45° .
 - d. Use o Scilab para determinar a resposta no tempo do sistema nos itens b. e c. Compare os tempos de subida e a ultrapassagem para os dois sistemas.

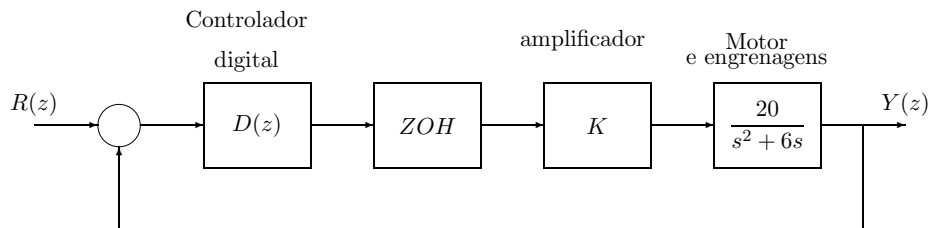


Figura 12.17: Exercício 3

4. A função de transferência seguinte é um compensador de avanço projetado para fornecer cerca de 60° de avanço em $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$

$$C(s) = \frac{s+1}{0.1s+1}$$

Supondo que o período de amostragem seja $T = 0.25 \text{ seg}$, calcule e plote no plano z as localizações do pólo e zero da implementação digital de $C(s)$ obtida:

- usando o método de Tustin
 - método de Euler Para cada caso, calcule o avanço de fase fornecido pelo compensador em $z_1 = e^{j\omega_1 T}$.
5. A função de transferência de uma planta é $G(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+3)}$ que deve ser controlada por um controlador digital, com período de amostragem $T = 0.1 \text{ seg}$, como mostrado na Figura 12.18.

- Projete um compensador digital, no plano z , **usando o lugar das raízes** para que a resposta a um degrau unitário apresente um tempo de subida de 1 seg e um sobressinal de 5% . Sugestão: use o zero do controlador para cancelar o pólo da planta mais próximo da origem.
- Determine o tipo do sistema e o erro correspondente.
- Projete um controlador discreto de atraso de fase, que reduza o erro em regime permanente pela metade.

Dado: $\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+0.1)(s+3)} \right] = \frac{z(0.00452z + 0.004076)}{(z-1)(z^2 - 1.731z + 0.7334)}$

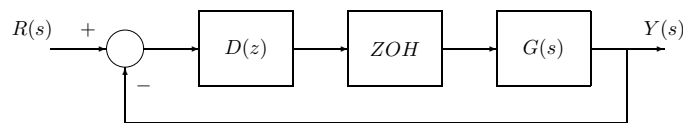


Figura 12.18: Exercício 5

6. O sistema de controle de posicionamento de uma antena é mostrado na Figura 12.19 abaixo. O controle deve ser digital com um tempo de amostragem $T = 0.1 \text{ seg}$.
- Projete um controlador, **usando o lugar das raízes**, que assegure um fator de amortecimento $\zeta = 0.5$. Determine o tempo de resposta a 5% . O lugar das raízes do sistema não compensado, no plano z , assim como o lugar geométrico dos pólos no plano z com amortecimento constante igual a 0.5 são dados na Figura 12.20.
 - Supondo agora que o tempo de resposta a 5% deve ser 2 seg e deseja-se manter o mesmo amortecimento do item anterior, projete um controlador para atingir este objetivo. Sugestão: Use o zero do controlador para cancelar o pólo em 0.843

Dados: $\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1.71)} \right] = \frac{0.00473 z (z + 0.945)}{(z-1)^2(z-0.843)}$ e $t_{r_{5\%}} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$

7. Para o sistema cujo diagram de Bode **no plano w** é dado na Figura 12.21:

- Projete um controlador **de atraso de fase** no domínio da frequência que garanta uma margem de fase de 50° .
- Determine o controlador discreto e a equação recursiva do controlador, supondo que o período de amostragem é $T = 2 \text{ seg}$.

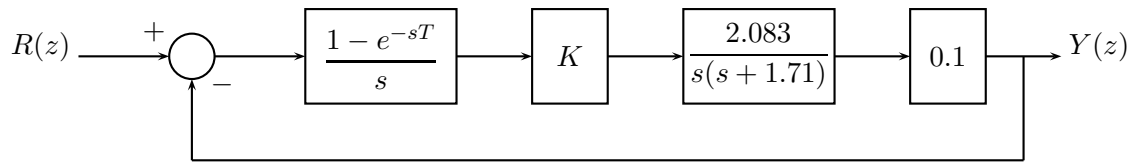


Figura 12.19: Exercício 6

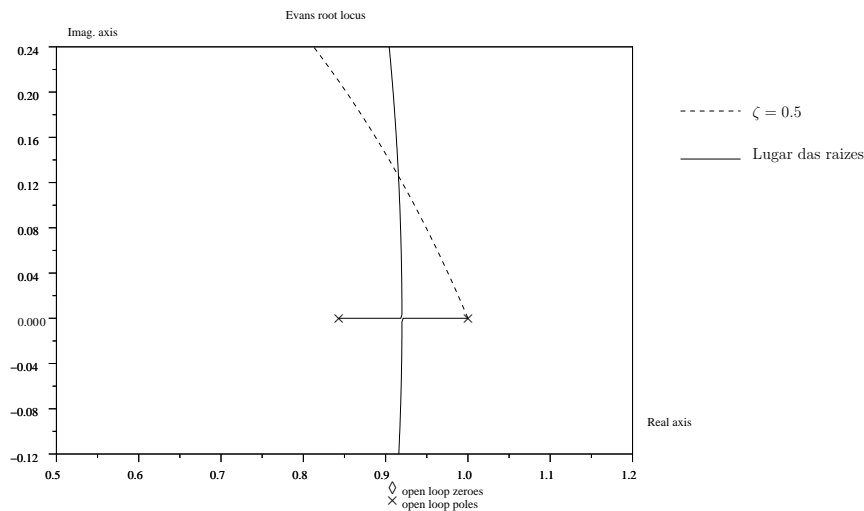


Figura 12.20: Lugar das raízes para o Exercício 6

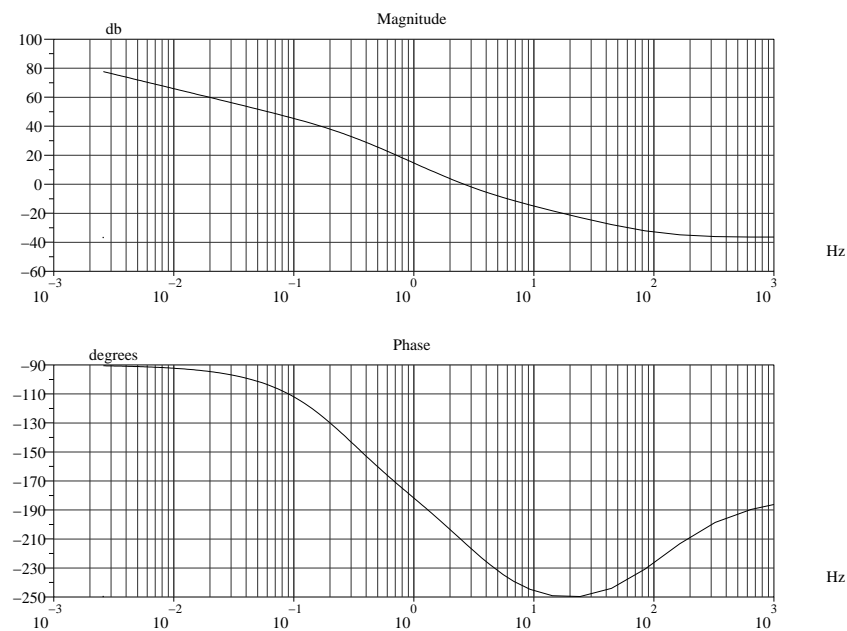


Figura 12.21: Diagrama de Bode para o Exercício 7

Obs: A frequência está em Hz. A transformação bilinear é $w = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$

8. Dado o sistema da Figura 12.22, onde o período de amostragem é $T = 0.1$ seg. e sabendo-se que:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{10}{s(s+1)(s+2)} \right] = \frac{0.04528 z (z + 0.9048)}{(z - 1)(z - 0.8187)(z - 0.9048)}$$

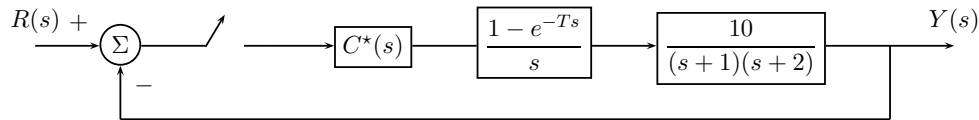


Figura 12.22: Sistema para a Questão 1

- Mostre que a função de transferência discreta da planta e do sustentador de ordem zero é dada por $G(z) = \frac{0.04528(z + 0.9048)}{(z - 0.8187)(z - 0.9048)}$
 - Estude a estabilidade do sistema não compensado, usando o critério de Jury.
 - Projete um controlador digital, usando o **lugar das raízes**, que assegure:
 - tempo de resposta a 5% de 1 seg;
 - amortecimento $\zeta = 0.5$
 - Determine o erro a um degrau unitário para o sistema original (sem o controlador projetado no item anterior). Se o erro máximo admissível ao degrau unitário for 1%, projete um controlador que assegure este erro máximo para o sistema original.
 - Determine as equações recursivas dos controladores projetados nos itens (c) e (d).
9. Uma planta tem uma resposta em frequência, no plano w , dada na Figura 12.25, onde o ganho já foi ajustado para dar o erro especificado:
- Projete um controlador que atenda aos seguintes requisitos:
 - Amortecimento $\zeta = 0.7$;
 - Tempo de resposta inferior ao do sistema não-compensado.
 - Considerando um período de amostragem $T = 1$ seg. determine a equação recursiva do controlador.
10. Para o sistema de controle mostrado na Figura 12.24, onde o período de amostragem é $T = 0.2$ seg:
- Calcule a função de transferência discreta da planta sabendo-se que

$$\mathcal{Z} \left[\frac{10}{s^2(s+2)} \right] = \frac{0.1758 z (z + 0.8753)}{(z - 1)^2 (z - 0.6703)}$$
 - Projete um ou mais controladores discretos, usando o lugar das raízes, tal que os seguintes requisitos sejam atendidos simultaneamente:
 - Amortecimento $\zeta = 0.5$
 - Tempo de resposta a 5% de 1 seg.
 - Erro a uma rampa unitária de 20%.

Sugestão: Pólos da planta podem ser cancelados para facilitar o projeto.

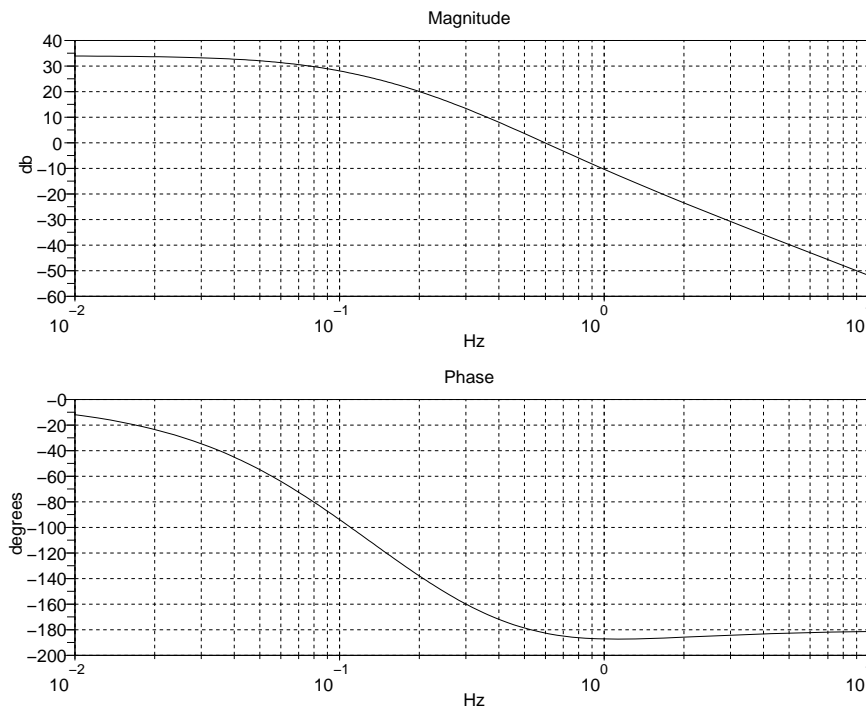


Figura 12.23: Diagrama de Bode para a Questão 2

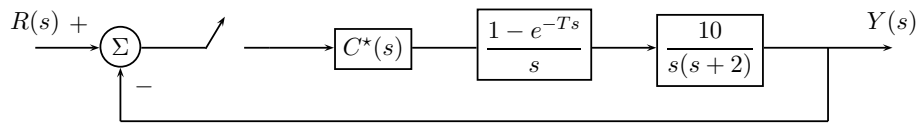


Figura 12.24: Sistema para a Questão 2

11. A resposta em frequência de uma planta no plano w é dada na Figura 12.25 (frequência em Hz). O ganho já foi ajustado para atender à condição de erro. Verificou-se, no entanto, que o sistema é sujeito a ruído e que a margem de fase especificada de 60° não é atendida.
- Projete um controlador discreto que atenda aos objetivos do projeto.
 - Justifique a escolha do controlador.
 - Determine a equação recursiva do controlador.
12. Para a planta $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$ deseja-se implementar um controlador digital em cascata, com um sustentador de ordem zero, que assegure para o sistema em malha fechada, com realimentação unitária, os seguintes requisitos:
- amortecimento $\zeta = 0.45$
 - erro à rampa de 5%
- Projete o controlador, usando o lugar das raízes.
 - Determine a equação recursiva do controlador.

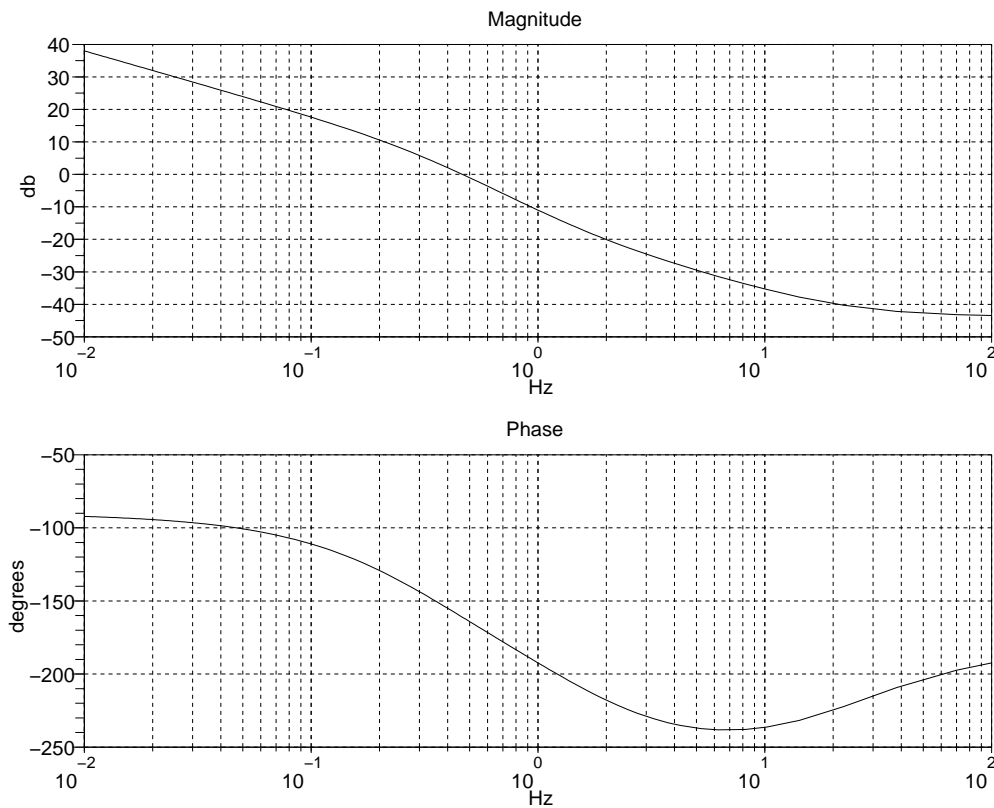


Figura 12.25: Diagrama de Bode para a Questão 3

O período de amostragem é $T = 1$ seg. e sabe-se que

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+2)} \right] = \frac{0.2838 z(z+0.5231)}{(z-1)^2(z-0.1353)}$$

13. Um sistema deve ser controlado por um controlador digital. Deseja-se uma margem de fase de cerca de 80° . O diagrama de Bode deste sistema, **no plano w**, é dado na Figura 12.28:

- Um controlador de atraso de fase poderia ser usado para este projeto? Justifique.
- Faça o projeto usando um compensador de avanço de fase.
- Determine o controlador discreto e a equação recursiva do controlador, supondo que o período de amostragem é $T = 2$ seg.

Obs: A **freqüência está em Hz**.

14. Considere o sistema da Figura 12.27, onde $G(s) = \frac{1}{s(s+0.4)}$ e $SOZ(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$.

- Projete um controlador de avanço de fase para garantir que o sistema em malha fechada tenha um amortecimento $\zeta = 0.4$ com tempo de subida de 0.5 seg. Use o zero do controlador para cancelar um pólo da planta. O período de amostragem é $T = 0.25$ seg. Dado:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+0.4)} \right] = \frac{0.03023 z(z+0.96722)}{(z-1)^2(z-0.90484)}$$

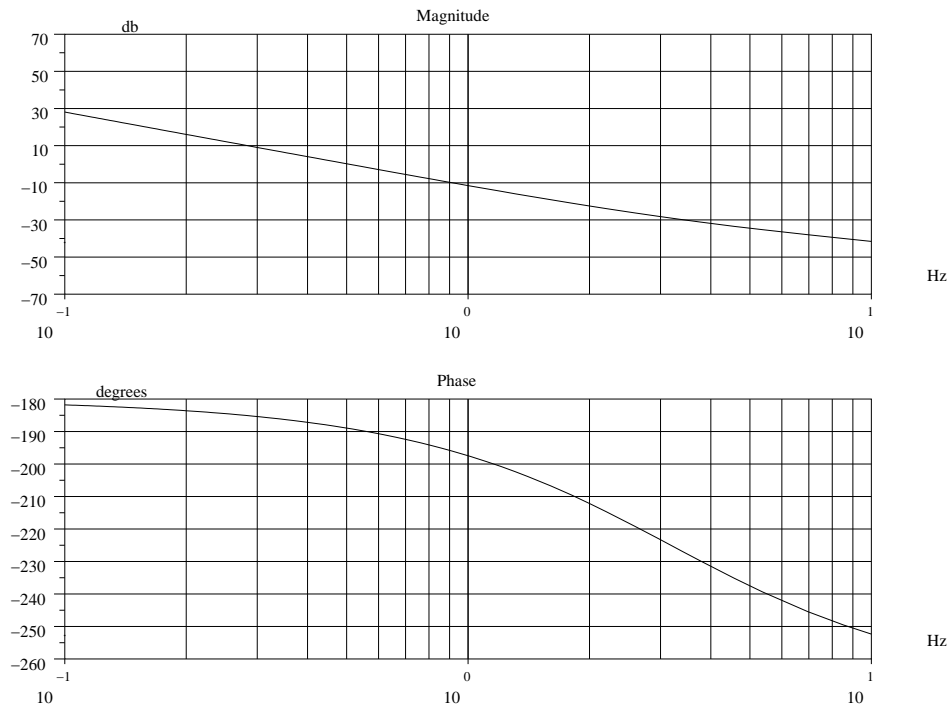


Figura 12.26: Diagrama de Bode para a Questão 3

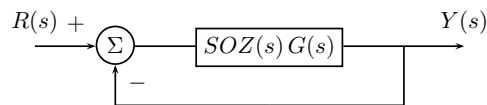


Figura 12.27: Exercício 14

- b. Com o sistema já com o controlador projetado acima verificou-se que o erro em regime permanente a uma rampa é muito elevado. Projete um controlador de atraso de fase que garanta que este erro é reduzido pela metade.
 - c. Calcule o erro à rampa final do sistema com os dois controladores.
15. Um sistema deve ser controlado por um controlador digital. Deseja-se uma margem de fase de cerca de 40° . O diagrama de Bode deste sistema, **no plano w**, é dado na Figura 12.28:
- a. Um controlador de atraso de fase poderia ser usado para este projeto? Justifique.
 - b. Faça o projeto usando um compensador de avanço de fase.
 - c. Determine o controlador discreto e a equação recursiva do controlador, supondo que o período de amostragem é $T = 2$ seg.

Obs: A **freqüência está em Hz**.

16. Para o sistema mostrado na Figura 12.29 deve-se projetar um controlador com a estrutura mais simples possível (ver estrutura de controladores no final da prova) que assegure que o sistema rejeita uma perturbação tipo degrau e apresente um amortecimento $\zeta = 0.4$, com tempo de resposta a 5% dado por $t_{r_{5\%}} = 2.5$ seg.

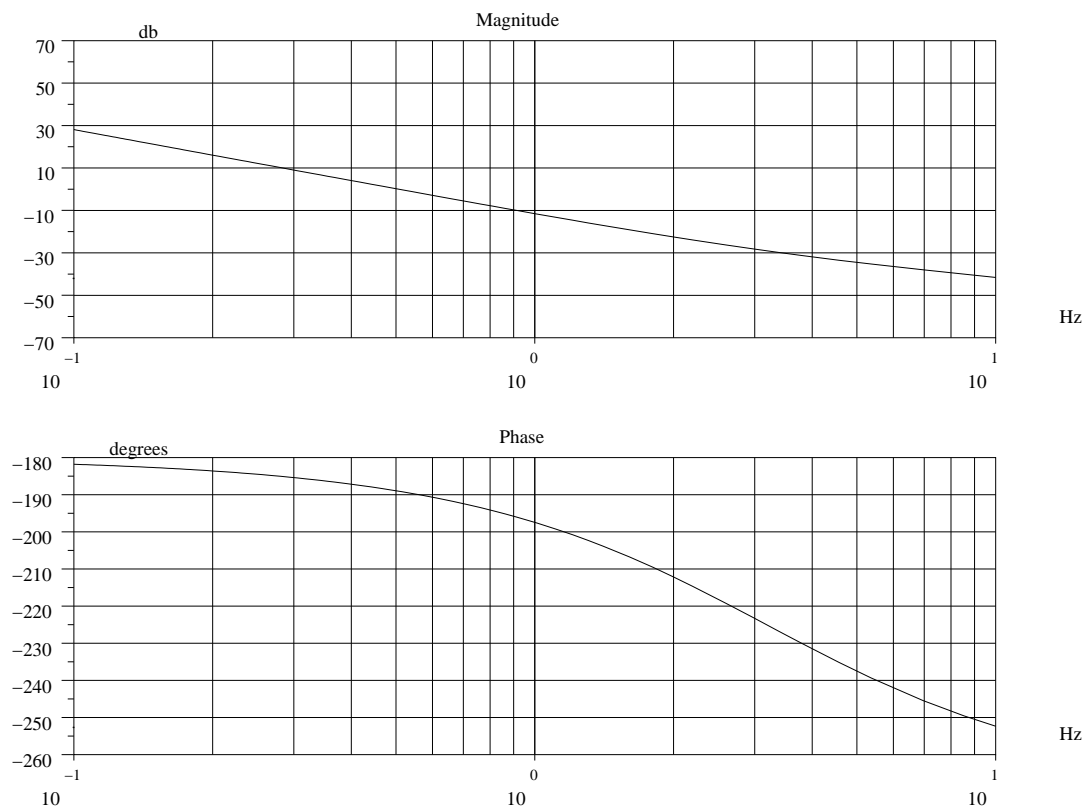


Figura 12.28: Diagrama de Bode para a Questão 3

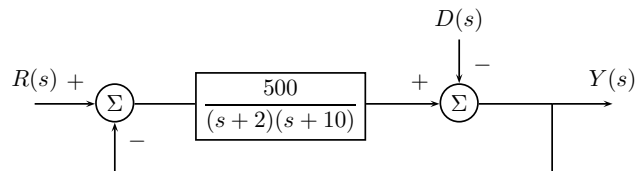


Figura 12.29: Exercício 16

- a. Determine a estrutura e parâmetros do controlador.
 - b. O controlador projetado deve ser implementado digitalmente, com período de amostragem $T = 0.5$ seg. Use o método da transformação casada pólos-zeros para encontrar o controlador. Determine a equação recursiva do controlador.
17. A função de transferência de uma planta é $G(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+3)}$ que deve ser controlada por um controlador digital, com período de amostragem $T = 0.1$ seg, como mostrado na Figura 17.
- a. Projete um compensador digital, no plano z , **usando o lugar das raízes** para que a resposta a um degrau unitário apresente um tempo de subida de 1 seg e um sobressinal de 5%. Sugestão: use o zero do controlador para cancelar o pólo da planta mais próximo da origem.
 - b. Determine o tipo do sistema e o erro correspondente.

- c. Projete um controlador discreto de atraso de fase, que reduza o erro em regime permanente pela metade.

Dado: $\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+0.1)(s+3)} \right] = \frac{z(0.00452z + 0.004076)}{(z-1)(z^2 - 1.731z + 0.7334)}$

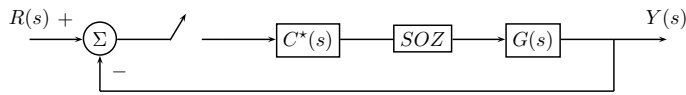


Figura 12.30: Exercício 17

18. Um sistema de controle deve fornecer uma resposta que é aperiódica (criticamente amortecida) com um tempo de resposta a 5% de $t_{r_{5\%}} = 3 \text{ seg}$. O controle discreto tem um tempo de amostragem de 0.2 seg . OBS: Considere que o tempo de resposta a 5% para $\zeta = 1$ pode ser aproximado por $\frac{3}{\zeta \omega_n}$.
- Determine o pólo dominante no plano z que satisfaz a característica de resposta descrita.
 - Se a planta é dada por $G(z) = \frac{0.1}{z - 0.95}$ projete um controlador PI dado por $C(z) = K_P + K_I \frac{1}{z - 1}$ para atender à característica de resposta pedida. Faça o projeto usando o zero do controlador para cancelar o pólo da planta.
 - Escreva a equação do controlador na forma a ser implementada em um computador digital.
19. Uma planta é dada por $G(s) = \frac{1}{s^2}$, e deve ser controlada por um controlador digital, com um sustentador de ordem zero, através de realimentação unitária. O período de amostragem é $T = 0.1 \text{ seg}$.
- Sabendo-se que $\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^3} \right] = \frac{0.005z(z+1)}{(z-1)^3}$ determine a função de transferência amostrada da planta com o sustentador.
 - Considera-se o uso de um controlador derivativo para o sistema. Uma função de transferência para um controle derivativo aproximado é $C(z) = K \frac{z-1}{Tz}$, onde o pólo em $z = 0$ adiciona um efeito desestabilizante devido ao atraso de fase introduzido. Parece portanto mais conveniente retirar este pólo e usar um controlador derivativo da forma $C(z) = K \frac{z-1}{T}$. Isto pode ser feito? Justifique escrevendo a equação diferença do controlador e mostrando o que deveria ocorrer para que ele fosse implementado.
 - Estude a estabilidade do sistema para cada um dos controladores propostos, determinando o maior ganho K possível em cada um dos casos. Use o critério de Jury e/ou lugar das raízes.
20. Considere o sistema dado na Figura 12.31, que representa o sistema de controle de um satélite.

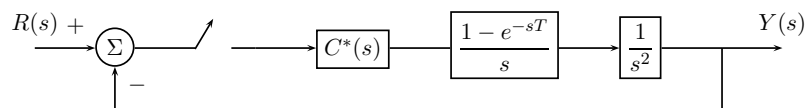


Figura 12.31: Sistema da Questão 3

- a. Mostre que a função de transferência da planta no plano w é dada por $G(w) = \frac{1 - 0.05w}{w^2}$, sabendo-se que $\mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^3} \right] = \frac{0.005z(z+1)}{(z-1)^3}$ e a transformação bilinear é $z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}$. O período de amostragem é $T = 0.1 \text{ seg.}$
- b. Projete um controlador discreto no domínio da frequência que assegure uma margem de fase de 70° . O diagrama de Bode da função de transferência $G(j\nu) = \frac{1 - 0.05j\nu}{(j\nu)^2}$, com $w = j\nu$ é dado na Figura 12.32.
- c. Os erros do sistema controlado a um degrau, a uma rampa e a uma parábola.
- d. Obtenha a equação recursiva do controlador.

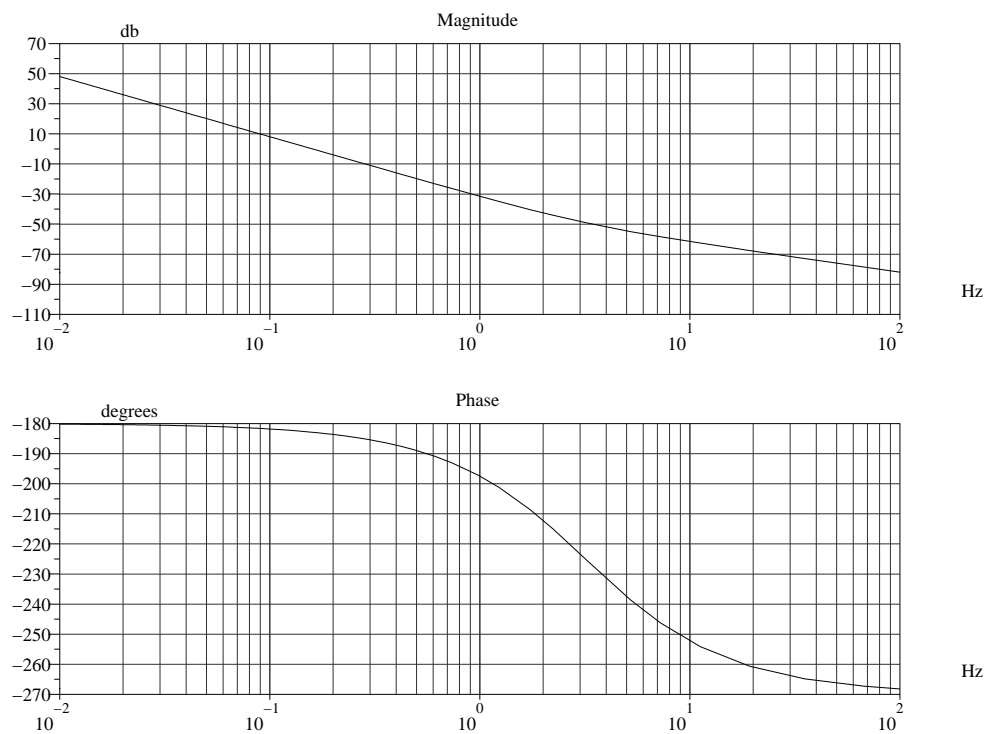


Figura 12.32: DB para a Questão 3

Referências Bibliográficas
