课程名称：高等微积分 （2016 年 1 月 4 日）

2015-2016 学年第（1）学期期末 a 卷 答案　　　　　本试卷共 **10** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

一．已知：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，$g(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos nx+d_n\sin nx$，$f,g\in R[-\pi,\pi]$，

周期为2π，利用复形式求：$F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$ 的 Fourier 级数（10 分）

解：$F(x)\sim\pi a_0c_0+\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(a_nc_n-b_nd_n)\cos nx+(a_nd_n+c_nb_n)\sin nx\right)$

二．将 $f(x)=x\sin x$ 展开成$[0,\pi]$上的正弦级数，并求此级数逐点收敛极限。(10 分）

解：$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\left((-1)^{n+1}-1\right)n}{\pi(n-1)^2(n+1)^2}\sin nx$,逐点收敛于 $x\sin x$

三．证明$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}$是某个函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数，但 $f(x)\notin R[-\pi,\pi]$。(10 分）

证明：$n^{1/2}$ 单调下降，$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(nx)$ 一致有界，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}$ 一致收敛于 $f(x)$。

同理证明$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}\sin kx$ 一致收敛，所以可以逐项积分，因此

$f(x)$ 的 Fourier 级数为$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}$。

又，如果 $f(x)\in R[-\pi,\pi]$，则 Fourier 级数的系数平方和有限，

而$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $f(x)\notin R[-\pi,\pi]$。

四．求以下积分关于 x 的导数（不需要最终积出解析表达式）：(10 分）。

1． $F(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}e^{x(1-y^2)}dy$　　　　　2． $F(x)=\int_0^x\int_{t^2}^{x^2}e^{-xst}dsdt$

解：1． $F'(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}(1-y^2)e^{x(1-y^2)}dy+\cos xe^{x\sin^2x}+\sin xe^{x\cos^2x}$

2． $F'(x)=\int_0^x\left(2xe^{-x^3t}-\int_{t^2}^{x^2}ste^{-xst}ds\right)dt$

五．判断以下广义积分在指定区域上是否一致收敛（10 分）。

1．$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+x^2}dx,(-\infty<t<+\infty)$ ，

2．$\int_0^{+\infty}x^{\alpha}f(x)dx,\alpha\in[a,b]$，这里 $f(x)\in C(0,+\infty)$，且 $\int_0^{+\infty}x^{a}f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty}x^{b}f(x)dx$ 均收敛。

解：1.利用 Weiestrass 判别法，收敛；

2.利用 Dirichlet 判别法，收敛。

六．(1)计算积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$ 关于 y 的导数；(2)求出 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$ 积分值（10 分）

解：令 $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2xy)dx$

$$I'(y)=-\int_0^{+\infty}2ye^{-x^2}\cos(2xy)dx=-2yI(y)$$

解出

$$I(y)=I(0)e^{-y^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$$

$$I'(y)=I(0)e^{-y^2}=-y\sqrt{\pi}e^{-y^2}$$

七．利用 Euler 积分余元公式计算：（10 分）

1．$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x},(0<\alpha<1)$

2．$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^2 xdx}{1+x},(0<\alpha<1)$

解: 1.
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}=\beta(\alpha,1-\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}$$
$$=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

2.
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln^2 xdx}{1+x}=\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x}\right)$$
$$=\pi^3\frac{1+\cos^2(\alpha\pi)}{\sin^3(\alpha\pi)}$$

八．已知 $A=\begin{pmatrix}2&5&4\\5&1&6\\4&6&3\end{pmatrix}$，

1．求 $\|A\|$，这里 $\|\bullet\|$ 为欧几里德范数；

2．证明 $\|A\|=\max\limits_{i=1,2,3}\{|\lambda_i|\}$，这里 λ_i 是 A 的特征值。（10 分）

答：1. $\|A\|=\sqrt{168}$

2.设特征值 λ_i 对应的特征向量为 r_i，相互正交，不妨设 $|\lambda_1|$ 最大

$\|A\|=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$，取 $x=r_1$，显然 $\|A\|\geq|\lambda_1|$

又 $x=x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3$， $\dfrac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}=\dfrac{c_1^2\lambda_1^2+c_2^2\lambda_2^2+c_3^2\lambda_3^2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\le\lambda_1^2$

所以 $\|A\|=|\lambda_1|$

九．证明：

1.函数 $F(x)$ 的不连续点是零容度集，

2. $F(x)$ 是 $[-2/\pi,2/\pi]$ 上的 Riemann 可积函数，这里

$$F(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right), x\ne 0,\\ 0 \qquad\qquad\qquad x=0\end{cases}$$ （10 分）

证明：1.不连续点为 $x=\dfrac{1}{k\pi}$ 和 $x=0$ 。

0 为不连续点的聚点。因为不连续点有界且仅有一个聚点，所以为零容度集。

2.不连续点为 0 容度集也是零测度集，所以是 Riemann 可积函数。

十．已知 $\omega=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$， $\eta=\sin xdx+\cos ydy+e^z dz$，

1. 计算 $d(\omega\wedge\eta)$,
2. 证明 $\omega+\eta$ 是恰当形式。（10 分）

解：1. $d(\omega\wedge\eta)=0$；

2. $d(\omega+\eta)=0$，为闭形式，无奇点，所以为恰当形式。