**课程名称：数学分析（一）**

2021-2022 学年第（1）学期期末　　　　　　　　　　本试卷共 **5** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）函数$f(x)=\frac{1}{(x^2-1)(x^2-4)}+1$：a) 求$f'(x),f''(x)$；b) 分析其单调性、极值与$x>2$时的凹凸性；c) 求其渐近线；d) 计算$\int f(x)\,dx$.

2. （40 分）求：

1) $\frac{d}{dx}\left[\int \frac{xe^x}{(1+x^2)^2}dx\right]$；　　2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{2}{x+\sin x}-\cot x\right]$；

3) 螺线$x=\theta\cos\theta, y=\theta\sin\theta$在$\theta_0=\frac{\pi}{2}$处的切线方程；

4) $f'(0)$,其中$f(x)=\begin{vmatrix} x & \sin x & e^x & \ln(1+x) \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

5) $\int_{1/e}^{e}|\ln x|\,dx$；　　6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$；

7) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　8) $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

3. （10 分）求解方程$x''(t)-4x'(t)+3x(t)=0$.

4. （10 分） 证明：实系数三次代数方程$x^3+px+q=0$有三个不等的实根的充要条件是$4p^3+27q^2<0$.并由此推导实系数代数方程$x^3+ax^2+bx+c=0$有三个不等实根的充要条件。

5. （10 分）设单调增函数$f(x),g(x)\in C[0,1]$,由今后将学到的知识知闭区间上连续函数必可积。求证：$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\geq\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$;给出等号成立的充要条件。

1. a）(10 分) $f(x)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)+1$

$$f'(x)=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)$$

$$f''(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x+1)^3}\right)$$

b）(5 分) $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$时取极大值，x=0 时取极小值。

凹

c）(5 分) 其中竖直渐近线$x=\pm1$，$\pm2$, 3 分。另有渐近线$y=1$.

d）(10 分) 由上述 f 表达式可积分得

$$\frac{1}{12}ln\left(\left|\frac{(x-2)}{(x+2)}\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\right|\right)+x+C$$

(未写+C 扣 1 分)

2. （每题 5 分）

1）$\frac{xe^x}{(1+x^2)^2}$;

2）5/12;（正确使用洛必达法则或泰勒展开 3 分，结果 2 分，注意：不能直接把所有的 sinx 都用 x 替换）

3）$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$;

4）0；可计算行列式$f(x)=8(1-e^x)$再求导，也可以直接按行列式第一行求导并在$x=0$处取值后计算行列式；

5）$\int_{1/e}^{e}|\ln x|\,dx=\int_{1/e}^{1}-ln\,x\ dx\ +\ \int_{1}^{e}ln\,x\ dx\ =2-2/e$ ；（不定积分算对，最终计算结果错，扣 1 分)

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\ =\ \int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ (2 分)

$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_0^1$ (2 分)

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ （1 分）

7) 利用对称性$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+cos^2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+cos^2x}\,dx\ =\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt\ =\frac{\pi^2}{4}$;

8) $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int ln\,x\ d\ \frac{1}{1+x^2}\ =-\frac{1}{2}\left[\frac{ln\,x}{1+x^2}-\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx\right]$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{ln\,x}{1+x^2}-\frac{1}{2}ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]+C$

3. 特征多项式$\lambda^2-4\lambda+3=0$的根为 1 和 3，故方程的解为

$x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^t$　　　　　　　　（9 分）

其中$c_1$和$c_2$为任意常数。　　　　　（1 分）

4. 充分性、必要性各 3 分，一般三次多项式情况 4 分。

"⇒":（已知三个根）

记 f 为原多项式，计算出$f'=3x^2+p$。

$p\ \geq 0$时，f 单调从而至多一个根，矛盾。　（1 分）

$p<0$时，由 f'的正负可得出，f 在区间$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$上递增，区间

$\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}},\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$上递减，区间$\left(\sqrt{\frac{-p}{3}},+\infty\right)$上递增。从而每个单调区间恰有一个

根。　　　　　　　　　　　　　　　　（1 分）

此时，$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0>f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$，则$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)<0$，化简后即得$4p^3+27q^2<0$.　　　　　　　　　　　　　　　　（1 分）

"⇐":（已知$4p^3+27q^2<0$）　（解答中明确指出充分、必要两点占 1 分）

由$4p^3+27q^2<0$知$p<0$。计算出$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0$以及$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)<0$。（1 分）

又有$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则对区间$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$、$\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}},\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$、$\left(\sqrt{\frac{-p}{3}},+\infty\right)$用介值定理知 f 有 3 个互异实根。　（1 分）

一般三次多项式$x^3+ax^2+bx+c$：

作变量代换$x+\frac{a}{3}=\mathrm{y}$，（1 分）

代入计算后多项式则化为$\mathrm{y}^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)$，此式有三个互异实根等价于原$\mathrm{x}^3+a\mathrm{x}^2+bx+c$有三个互异实根。（2 分，若无任何文字说明扣 1 分）

由前述，$4\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3+27\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)^2>0$为$\mathrm{x}^3+a\mathrm{x}^2+bx+c$有三个互异实根的充要条件。（1 分）

5. 证明不等式成立 6 分，推导取等条件 1 分，写出正确的取等条件 3 分。

方法一：考虑积分$\int_0^1 \mathrm{h}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$，其中$\mathrm{h}(\mathrm{x})=\int_0^1(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{y}))(\mathrm{g}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{y}))\,\mathrm{dy}$（4 分）

对任意 x 和 y，由单调性$(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{y}))(\mathrm{g}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{y}))$非负，故$h(x)$非负，其积分非负。又

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\int_0^1(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{y}))(\mathrm{g}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{y}))\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}\\
&\qquad=\int_0^1\left(\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}-\int_0^1\left(\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}\\
&\qquad-\int_0^1\left(\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{x})\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}+\int_0^1\left(\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}\\
&\qquad=2\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{dx}-2\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}\int_0^1\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

因此，$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\geq\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$。（2 分）

若需等号成立，则$(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{y}))(\mathrm{g}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{y}))$对任意 x、y 均为 0。特别地，有$(\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0))(\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0))=0$，由对称性不妨设$\mathrm{f}(1)=\mathrm{f}(0)$，则由单调性此时 f 恒为常数。（1 分）

故取等条件为：f 或 g 为常值函数。代入回原不等式后，可验证不等式两边确实相等。 （3 分）（若答为 f 和 g 均为常值函数，扣 2 分）

方法二：

原不等式等价于

$$\int_0^1\left(f(x)-\int_0^1 f(y)\,dy\right)g(x)dx \geq 0$$

记$f(x)-\int_0^1 f(y)\,dy$为 F(x)，则需证明

$$\int_0^1 F(x)g(x)dx \geq 0$$

（此处 F(x)也是[0,1]上的连续单调增函数，且$\int_0^1 F(x)dx = 0$） （4 分）

由 f 的单调性知 $F(0) \leq 0 \leq F(1)$，由连续介值定理，F 在[0,1]上存在零点，记为 $F(a) = 0$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)g(x)dx &= -\int_0^a (-F(x))g(x)dx + \int_a^1 F(x)g(x)dx \\ &\geq -\int_0^a (-F(x))g(a)dx + \int_a^1 F(x)g(a)dx = g(a)\int_0^1 F(x)dx = 0\end{aligned}$$

（2 分）

等号成立时：$\int_0^a (-F(x))(g(x)-g(a))dx = \int_a^1 F(x)(g(x)-g(a))dx = 0$，故 $F(x)(g(x)-g(a))$恒为 0。

1) F(x)恒为 0，此时 f 为常数。

2) F(x)不恒为 0，此时$F(0)$、$F(1)$均不为 0，故$g(1) = g(a) = g(0)$，由 g

的单调性知 g 为常数。（1 分）

故取等条件同方法一。（3 分）

方法三：

利用定积分黎曼和的定义得出

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

（4 分）

由于 f、g 单调性，利用排序不等式可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right) \ge \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

两边取 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 即得证本题所需不等式。（2 分）

等号成立时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)\right) = 0$

（这种方法难以证明 f 或 g 为常值函数）

（指出 f 或 g 为常值函数但未做任何说明的，此部分记 3 分）