

附录 A 往年试题及解答

A.1 工学院数学分析—2022 年秋 B 卷

一、求下列极限值：

(1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+2xt) dt}{\sin x - \arcsin x}$$

二、将 $e^{\sin x}$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处 Taylor 展开至 5 阶项，余项以 Peano 余项形式表示。(10 分)

三、设 $t > 0$ ，求证： $\left(\frac{2t+2}{2t+1}\right)^{\sqrt{t+1}} > \left(\frac{2t+1}{2t}\right)^{\sqrt{t}}$ 。(10 分)

(提示：转化为某个初等函数 $f(x)$ 的单调性问题)

四、设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上可导， $f'(x) < 0$ 。请判断：是否一定存在正实数 δ ，使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调下降？如果存在，请给出证明，如果不存在，请举出反例。(10 分)

五、求以下不定积分：(20 分，每小题 10 分)

(1)

$$\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

(2) 已知 $\int \frac{f(x)}{x} dx = \arctan(x^2) + C$ ，求 $\int \frac{1}{f(x)} dx$ 。

六、对于由方程 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ 所确定的函数 $y(x)$ ，求： y', y'' 。(10 分)

七、设 $f(x) \in C[0, 1]$ ，且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $\int_0^1 xf(x) dx = 0$, $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 1$ 。求证： $\exists \xi \in (0, 1)$ ，满足 $f(\xi) \geq 12$ 。(10 分)

(提示：考虑 $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 f(x) dx$)

八、设 $f'(x) \in C[0, 1]$ ， $f(1) = 0$ 。求证：

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} [f'(x)]^2 dx.$$

(10 分)