

北京大学数学学院期中考试试题

2016 - 2017 学年 第一学期

考试科目: 数学分析

考试时间: 16 年 11 月 10 日

姓 名: _____

学 号: _____

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (14') 设 E 和 F 为 R^n 内的两个不交的紧集. (1) 证明: 存在 $x_0 \in E$ 与 $y_0 \in F$, 使得 $|x_0 - y_0| = d(E, F)$; (2) 如果 E 与 F 为闭集, 上述结论是否成立? (说明理由)
2. (10') 设函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 且沿方向 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 的方向导数为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 而沿方向 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 的方向导数为 $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 求函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的梯度.
3. (10') 证明方程 $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的解具有 $f(x^2 + y^2)$ 的形式, 其中 f 是可微函数.
4. (10') 构造一个定义在全平面上的函数 $f(x, y)$ 使得它处处存在偏导数, 但在 $(0, 0)$ 与 $(1, 0)$ 附近无界.
5. (10') 设 $y = \tan(x + y)$ 确定 y 为 x 的隐函数. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
6. (10') 求 $f(x, y) = y\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的所有五阶偏导数.
7. (10') 设曲面 S 的方程为 $x^2 - y^2 - 3z = 0$, 求经过点 $(0, 0, -1)$ 且与直线 $x = 2t, y = t, z = 2t$ 平行的切平面方程.
8. (10') 证明不存在 R^3 到 R^2 的 C^1 同胚映射.
9. (16')(1) 设 $f(x, y)$ 半平面 $x > 0$ 连续, 对固定的 $y \in \mathcal{R}, \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在. 问 $\varphi(y)$ 在 \mathcal{R} 是否连续? (说明理由); (2) 在 (1) 中如果设 $f(x, y)$ 半平面 $x > 0$ 一致连续, 证明: 对固定的 $y \in \mathcal{R}, \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在, 并且补充定义 $f(0, y) = \varphi(y)$ 后, $f(x, y)$ 在 $x \geq 0$ 连续.