Xiao Yuan

不(线性)相关

# 第四章: 随机变量的数字特征1

### Xiao Yuan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Center on Frontiers of Computing Studies, Peking University, Beijing 100871, China xiaoyuan@pku.edu.cn

March 22, 2024

<sup>1</sup>讲义内容基于三本参考教材以及网络素材。□ > <圖 > < 臺 > < 臺 > ■ ● ● ●

# 目录



### 概率统计

### Xiao Yuan

1 数学期望

- 离散随机变量的期望
- 连续随机变量的期望
- 期望和分布函数
- 随机变量函数的期望
- 随机向量函数的期望
- ■期望的性质
- 2 方差
  - 定义
  - 方差的性质
- 3 协方差和相关系数
  - ■定义
  - 性质
  - 不(线性)相关
- 4 其它数字特征
- 5 多元随机变量的数字特征
  - 二元正杰分布
  - 多元正态分布

# 数学期望



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期望

不 (线性) 相关

在一些实际问题中, 我们需要了解随机变量的分布函数外, 更关心的是随机变量的某些特征

# 数学期望



### 概率统计

Xiao Yuan

### 教学期望

在一些实际问题中, 我们需要了解随机变量的分布函数外, 更关心的是随机变量的某些特征

- 在评定某地区粮食产量的水平时, 最关心的是平均产量;
- 在检查一批棉花的质量时, 既需要注意纤维的平均长度, 又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度:
- 考察杭州市区居民的家庭收入情况,我们既知家庭的年 平均收入, 又要研究贫富之间的差异程度。

# 离散型随机变量的数学期望



### 概率统计

Xiao Yuan

### **蛮粉随机旁带的期望**

### 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i = P(X = x_i)$ , 若  $x_i$  取值 有限或  $\sum_{i} x_{i}p_{i}$  绝对收敛 (满足  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{i}p_{i}| < \infty$ ),则随机变 量 X 的数学期望或均值为  $E(X) = \sum_i x_i p_i$ 

# 离散型随机变量的数学期望



### 概率统计

Xiao Yuan

#### 教学期3

### **家粉随机变量的期望**

连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

随机向量函数的期望期望的性质

万 左 定义 方差的性质

协方差和相关 系数

性质 不 (线性) 相 э

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

### 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i = P(X = x_i)$ ,若  $x_i$  取值有限或  $\sum_i x_i p_i$  绝对收敛(满足  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p_i| < \infty$ ),则随机变量 X 的数学期望或均值为  $E(X) = \sum_i x_i p_i$ 

# 离散型随机变量的数学期望



#### 概率统计

Xiao Yuan

### **蛮粉随机旁带的期望**

## 离散型随机变量的数学期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i = P(X = x_i)$ , 若  $x_i$  取值 有限或  $\sum_{i} x_i p_i$  绝对收敛 (满足  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p_i| < \infty$ ), 则随机变 量 X 的数学期望或均值为  $E(X) = \sum_{i} x_{i} p_{i}$ 

- 例: 考虑  $p_i = P(X = x_i = 3^i/i) = 2/3^i, i = 1, 2, ..., 则$  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i p_i| = \sum_{i=1}^{\infty} 2/i$  发散,因此不存在期望
- 已知 X ~ B(n, p), 则  $E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i} = np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$  $(p)^{n-i} = np \sum_{i=0}^{n-1} {n-1 \choose i} p^{i} (1-p)^{n-1-i} = np$ (这里用到了  $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ )

# 例子



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期望

### 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望

期望和分布函数随机变量函数的期

期望的性质

÷¥

定义

方差的性质

协万差和相系数

77. 30人

性质

不(线性)相关 甘 心 粉 空 味 勿

共七级于行任

的数字特征

二元正态分布

・ 己知  $X \sim \pi(\lambda)$ ,则  $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \lambda^i / i! = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{i-1} / (i-1)! = \lambda$ 



Xiao Yuan

### 数学期望

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

期望的性质

力左 定义

方差的性质

协方差和相关

不 (线性) 相 ;

其它数字特征

多元随机变量

二元正态分布

**■** 己知  $X \sim \pi(\lambda)$ ,则  $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \lambda^i / i! = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{i-1} / (i-1)! = \lambda$ 

■ 已知 X ~ NB(r, p),则

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{k+r-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{k}$$

$$= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) \binom{k+r-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{k} \right] - r$$

$$= r \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} p^{r} (1-p)^{k} \right] - r$$

$$= r/p \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r}{r} p^{r+1} (1-p)^{k} \right] - r$$

$$= r(1-p)/p$$



Xiao Yuan

离散随机变量的期望

不 (线性) 相关

■ 已知 X 是取值非负的离散型随机变量、则

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \ge n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$



Xiao Yuan

### 粉学曲切

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

六美

定义

方差的性质

#### 协万差和相天 系数

任原 不 (移移) 相

其它数字特征

7 0 20 11 11

的数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布 ■ 已知 X 是取值非负的离散型随机变量,则

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \ge n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

设  $P(X = k) = p_k$ , 由定义:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} p_k$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \ge n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$



Xiao Yuan

高散随机变量的期望

■ 已知 X 是取值非负的离散型随机变量、则

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \ge n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

设  $P(X=k)=p_k$ , 由定义:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} p_k$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \ge n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

■ 期望和概率的关系: 设 A 是一个事件, 称随机变量 1△ 为事件 A 的示性函数、它在 A 发生时取 1、否则取 0、 则  $E(1_A) = P(A)$ .



### 概率统计

Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

### 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 



### 概率统计

Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

### 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 

■ 例: 已知 X ~ U(a,b), 则  $E(X) = \int_{a}^{b} x/(b-a) dx = (a+b)/2$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

### 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 

- 例: 已知 X ~ U(a, b), 则  $E(X) = \int_{a}^{b} x/(b-a) dx = (a+b)/2$
- 已知  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 则  $E(X) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = 1/\lambda$



### 概率统计

### Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

### 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 

- 例: 已知 X ~ U(a, b), 则  $E(X) = \int_{a}^{b} x/(b-a) dx = (a+b)/2$
- 已知  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 则  $E(X) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = 1/\lambda$
- **•** 已知  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ ,则  $E(X) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \alpha/\lambda$



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数

随机发重函数的期望随机向量函数的期望期望的性质

定义 方差的性质

协方差和相关 系数

定义 性质 不(线性)相关

其它数字特征

的 数字特征 二元正态分布 多元正态分布 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x),若  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$  绝对收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$ ),则随机变量 X 的数学期望或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 

- 例: 已知  $X \sim U(a,b)$ ,则  $E(X) = \int_a^b x/(b-a)dx = (a+b)/2$
- 己知  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,则  $E(X) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = 1/\lambda$
- 己知  $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ , 则  $E(X) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \alpha/\lambda$
- 己知  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,则  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$



### 概率统计

Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

### 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 

若  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$  不绝对收敛, 则称 X 的期望不存在.



#### 概率统计

### Xiao Yuan

海经随机旁带的期望

## 连续型随机变量的数学期望

连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x), 若  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  绝对 收敛 (满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ), 则随机变量 X 的数学期望 或均值为  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 

若  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$  不绝对收敛,则称 X 的期望不存在.

■ 例:已知 X 的密度  $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$  (柯西分布),则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi(x^2 + 1)} dx = +\infty.$$

X 的期望不存在.



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期至

期望和分布函数

随机变量函数的期 随机向量函数的期

期望的性质

定义

方差的性质

协方差和相关系数

系数 定义

其它数字特征

时 数 子 行 在 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

## 期望和分布函数的关系

已知随机变量 X 的分布函数为 F(x),则有  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx$ . 当 X 取值非负时,有  $E(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

期望和分布函数

### 期望和分布函数的关系

已知随机变量 X 的分布函数为 F(x),则有  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx.$ 当 X 取值非负时,有  $E(X) = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx$ 

$$\int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^x dy = \int_0^\infty dy \int_y^\infty f(x) dx = \int_0^\infty (1 - F(y)) dy$$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期

高散随机变量的期 3 连续随机变量的期 3

期望和分布函数 随机变量函数的期

随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 知识的此后

方差

定义 方差的性质

协方差和相关 系数

在及 性质 工(此址) 和 4

其它数字特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 期望和分布函数的关系

已知随机变量 X 的分布函数为 F(x),则有  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx$ . 当 X 取值非负时,有  $E(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx$ 

- $\int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^x dy = \int_0^\infty dy \int_y^\infty f(x) dx = \int_0^\infty (1 F(y)) dy$
- 例: 已知  $X \sim U(-1,2)$ ,  $Y = \max\{X,0\}$ , 求 E(Y)



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 **期望和分布函数** 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差定义

定义
方差的性质

协方差和相关 系数 定义

性质 不(线性)相关

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布

### 期望和分布函数的关系

已知随机变量 X 的分布函数为 F(x),则有  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^{0} F(x) dx$ . 当 X 取值非负时,有  $E(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(x)) dx$ 

- $\int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^x dy = \int_0^\infty dy \int_y^\infty f(x) dx = \int_0^\infty (1 F(y)) dy$
- 例: 已知  $X \sim U(-1,2)$ ,  $Y = \max\{X,0\}$ , 求 E(Y)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0\\ (y+1)/3 & 0 < y < 2\\ 1 & y \ge 2 \end{cases}$$

首先 Y 非离散型也非连续型。则

$$E(Y) = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \int_0^1 [1 - (y+1)/3] dx = 2/3$$

# 离散型随机变量函数的期望



### 概率统计

### Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期至 连续随机变量的期至

期望和分布函

随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

期望的性质

### 方差

元人 方差的性质

### 协方差和相关

系数

性质 工 (所) 和

### 其它数字特征

二元正态分布

二九正态分布 多元正态分布

### 离散型随机变量函数的期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i = P(X = x_i)$ ,g 为实单指函数,若  $x_i$  有限或  $\sum_i |g(x_i)|p_i < \infty$ ,则随机变量 Y = g(X)的数学期望或均值为  $E(Y) = E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i$ 

# 离散型随机变量函数的期望



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期:

或 丁 30 主 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望

期望和分布函数 随机变量函数的期望

随机向量函数的期望

方差

定义 方差的性质

协方差和相关系数

系 数 定义

甘户数中县公

其它数字特征

的 数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

## 离散型随机变量函数的期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i=P(X=x_i)$ ,g 为实单指函数,若  $x_i$  有限或  $\sum_i |g(x_i)|p_i<\infty$ ,则随机变量 Y=g(X)的数学期望或均值为  $E(Y)=E(g(X))=\sum_i g(x_i)p_i$ 

■ 定理的意义在于不用先求 Y 的分布再算均值

# 离散型随机变量函数的期望



### 概率统计

#### Xiao Yuan

随机变量函数的期望

## 离散型随机变量函数的期望

离散型随机变量 X 的概率分布为  $p_i = P(X = x_i)$ , g 为实单指 函数, 若  $x_i$  有限或  $\sum_i |g(x_i)|p_i < \infty$ , 则随机变量 Y = g(X)的数学期望或均值为  $E(Y) = E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i$ 

■ 定理的意义在干不用先求 Y 的分布再算均值

证明: 
$$P(Y=y_j) = \sum_{g(x_i)=y_j} p_i$$
,则

$$E(Y) = \sum_{j} P(Y = y_j) y_j = \sum_{j} \sum_{g(x_i) = y_j} p_i g(x_i)$$

$$= \sum_{i} g(x_i) p_i$$
(1)

# 连续型随机变量函数的期望



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期?

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望

加生和分中四数 随机变量函数的期望

随机向量函数的期至

期望的性质

方差

定义方差的性质

协方差和相关

系数

性质 不(线性)相

其它数字特征

其它数字特征

的数字特征 二元正為分布

二元正态分布 多元正态分布

## 连续型随机变量函数的期望

连续型随机变量 X 的概率密度为  $f_X(x)$ ,g 为实单指函数,若  $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f_X(x)dx<\infty$ ,则随机变量 Y=g(X) 的数学期望或均值为  $E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$ 

# 连续型随机变量函数的期望



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望

随机变量函数的期望

随机向量函数的期望 期望的性质

期望的性质

定义

方差的性质

协万差和相关 系数

定义

\* - 4. - 4.

其它数子特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 连续型随机变量函数的期望

连续型随机变量 X 的概率密度为  $f_X(x)$ ,g 为实单指函数,若  $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f_X(x)dx<\infty$ ,则随机变量 Y=g(X) 的数学期望或 均值为  $E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$ 

■ 定理的意义在于不用先求 Y 的分布再算均值

# 连续型随机变量函数的期望



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

### 新学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望

随机变量函数的期望

随机向量函数的期望期望的性质

期望的性质

力左

方差的性质

协方差和相关系数

系 数 定义

作原 不(线性)相关

其它数字特征

多元随机变量的数字特征

连续型随机变量函数的期望

连续型随机变量 X 的概率密度为  $f_X(x)$ ,g 为实单指函数,若  $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f_X(x)dx<\infty$ ,则随机变量 Y=g(X) 的数学期望或均值为  $E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx$ 

■ 定理的意义在于不用先求 Y 的分布再算均值

证明:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_Y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$
(2)

# 随机向量函数的期望



#### 概率统计

### Xiao Yuan

随机向量函数的期望

## 离散随机向量函数的期望

随机变量 Z = g(X, Y) 是离散型随机变量 X, Y 的函数。X, Y的概率分布为  $p_{ii} = P(X = x_i, Y = y_i)$ , g 为实单指函数, 若  $x_i, y_i$  有限或  $\sum_{i,j} |g(x_i, y_j)| p_{i,j} < \infty$ , 则随机变量 Z = g(X, Y)的数学期望或均值为  $E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}$ 

# 随机向量函数的期望



### 概率统计

Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机容量函数的期望

随机向量函数的期望 期望的性质

力 左 定义

方差的性质协方差和标

系数定义

不(线性)相关 並它粉字特征

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布 8元正态分布 离散随机向量函数的期望

随机变量 Z = g(X, Y) 是离散型随机变量 X, Y 的函数。X, Y 的概率分布为  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ ,g 为实单指函数,若  $x_i, y_j$  有限或  $\sum_{i,j} |g(x_i, y_j)| p_{i,j} < \infty$ ,则随机变量 Z = g(X, Y) 的数学期望或均值为  $E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}$ 

### 连续随机向量函数的期望

随机变量 Z=g(X,Y) 是连续型随机变量 X,Y 的函数。X,Y 的概率密度为 f(x,y), g 为实单指函数,若  $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy<\infty, 则随机变量 <math>Z=g(X,Y)$  的数学期望或均值为  $E(Z)=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 



### Xiao Yuan

数学期望 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机加量函数的期望

期望的性质

定义 方差的性质

方差的性质

系数

定义

A (10(12) 41 50

其它数子特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布 ■ 已知随机变量 X, Y 的概率分布为

求 
$$E(X)$$
,  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ , 其中  $Z = \sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$ 



### Xiao Yuan

数学期望 高數链机变量的期望 连续链机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 期望向性质 方差 定义 大文之 大文之 大工之之。

协方差和相关 系数

定义性质

其它数字特征

多元随机变 的数字特征

二元正态分布

■ 已知随机变量 X, Y 的概率分布为

求 
$$E(X)$$
,  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ , 其中  $Z = \sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$   
 $E(X) = 0.5$ ,  $E(Y) = 0.45 + 2 * 0.3 = 1.05$ ,  
 $E(Z) = \sin \frac{\pi(0+0)}{2} * 0.1 + \sin \frac{\pi(1+0)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(0+1)}{2} * 0.25 + \sin \frac{\pi(1+1)}{2} * 0.2 + \sin \frac{\pi(0+2)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(1+2)}{2} * 0.15 = 0.25$ 



### Xiao Yuan

随机向量高新的期望

■ 已知随机变量 X, Y 的概率分布为

求 
$$E(X)$$
,  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ , 其中  $Z = \sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$   
 $E(X) = 0.5$ ,  $E(Y) = 0.45 + 2 * 0.3 = 1.05$ ,  
 $E(Z) = \sin \frac{\pi(0+0)}{2} * 0.1 + \sin \frac{\pi(1+0)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(0+1)}{2} * 0.25 + \sin \frac{\pi(1+1)}{2} * 0.2 + \sin \frac{\pi(0+2)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(1+2)}{2} * 0.15 = 0.25$ 

■ 已知随机变量 X, Y 的概率密度为 

$$(x,y) = \begin{cases} 2X \\ 0 \end{cases}$$
 else



### Xiao Yuan

随机向量高新的期望

■ 已知随机变量 X, Y 的概率分布为

求 
$$E(X)$$
,  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ , 其中  $Z = \sin \frac{\pi(X+Y)}{2}$   
 $E(X) = 0.5$ ,  $E(Y) = 0.45 + 2 * 0.3 = 1.05$ ,  
 $E(Z) = \sin \frac{\pi(0+0)}{2} * 0.1 + \sin \frac{\pi(1+0)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(0+1)}{2} * 0.25 + \sin \frac{\pi(1+1)}{2} * 0.2 + \sin \frac{\pi(0+2)}{2} * 0.15 + \sin \frac{\pi(1+2)}{2} * 0.15 = 0.25$ 

■ 已知随机变量 X, Y 的概率密度为 

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dxdy = 3/4$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{YY} f(x, y) dxdy = 3/5$$

# 期望的性质



### 概率统计

### Xiao Yuan

#### 粉坐曲切

**双于** 班 至

**家格所和亦否** 

连续随机变量的期

期望和分布函数 随机变量函数的期

随机变量函数的期望随机向量函数的期望

#### 期望的性质

初至时在项

14 15

**人**人

方差的性质

协方差和相关

系数

た人 お ほ

. . . . . . . .

共七级十行但

二元正态分布

二元正态分布

## 期望的性质

■ 对于常数 C, 有 E(C) = C



### 概率统计

### Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

- 对于常数 C, 有 E(C) = C
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 E(CX) = CE(X)



### 概率统计

#### Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

- 对于常数 C, 有 E(C) = C
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 E(CX) = CE(X)
- 对于两个随机变量 *X*, *Y*, 有 *E*(*X* + *Y*) = *E*(*X*) + *E*(*Y*)



### 概率统计

#### Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

- 对于常数 C, 有 E(C) = C
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 E(CX) = CE(X)
- 对于两个随机变量 *X*, *Y*, 有 *E*(*X* + *Y*) = *E*(*X*) + *E*(*Y*)
- 对于常数 C, 对于随机变量 {X<sub>i</sub>}, 有  $E(C + \sum_i X_i) = C + \sum_i E(X_i)$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

期望的经后

不(线性)相关

- 对于常数 C, 有 E(C) = C
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 E(CX) = CE(X)
- 对于两个随机变量 *X*, *Y*, 有 *E*(*X* + *Y*) = *E*(*X*) + *E*(*Y*)
- 对于常数 C, 对于随机变量 {X;}, 有  $E(C + \sum_i X_i) = C + \sum_i E(X_i)$
- 假设随机变量  $\{X_i\}$  相互独立, 有  $E(\prod_i X_i) = \prod_i E(X_i)$



Xiao Yuan

#### 新学期望

為散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

### 期望的性质

定义

方差的性质

## 协万 差和相系数

尔·汉 定义

不(线性)相关

其它数字特征

#### 共匕级丁行征

二元正态分布

二元正态分布

■ X<sub>i</sub> 为 1,2,...,5 的独立均匀分布 (*i* = 1,2,...,*n*), 将 X<sub>i</sub> 依次排列, 得到十进制数 Y, 求 E(Y)



#### Xiao Yuan

数学期望

為故随机災重的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

期望的性质

...

定义

方差的性质

**砂**力 左 和 相 大

が 秋

但項

4 2 2 2 2 2 14 1

其它数子特征

多 元 随 机 变 的 数 字 特 征

二九正态分布 多元正态分布 ■  $X_i$  为 1,2,...,5 的独立均匀分布(i=1,2,...,n),将  $X_i$  依次排列,得到十进制数 Y,求 E(Y)  $Y = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} X_i$ , $E(X_i) = 3$ ,因此  $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} 3 = \frac{10^{n-1}-1}{2}$ 



#### Xiao Yuan

数学期望 高数随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

## 期望的性质

定义

方差的性质

#### 协方差和相关 系数

定义

#### 其它数于特征

多元随机变 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布 ■  $X_i$  为 1,2,...,5 的独立均匀分布 (i=1,2,...,n),将  $X_i$  依次排列,得到十进制数 Y,求 E(Y)  $Y = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} X_i$ , $E(X_i) = 3$ ,因此  $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} 3 = \frac{10^{n-1} - 1}{2}$ 

$$lackbreak X_i \sim U(0,2i)$$
 且相互独立、求  $E(Y)$ 、其中  $Y = \det(M)$  和  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ 



#### Xiao Yuan

期望的经后

■  $X_i$  为  $1, 2, \ldots, 5$  的独立均匀分布  $(i = 1, 2, \ldots, n)$ , 将  $X_i$ 依次排列,得到十进制数 Y,求 E(Y) $Y = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} X_i$ ,  $E(X_i) = 3$ , 因此  $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 10^{i-1} 3 = \frac{10^{n-1} - 1}{2}$ 

■ 
$$X_i \sim U(0,2i)$$
 且相互独立、求  $E(Y)$ 、其中  $Y = \det(M)$  和  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$   $Y = X_1X_4 - X_2X_3$ ,  $E(Y) = E(X_1)E(X_4) - E(X_2)E(X_3) = 1 * 4 - 2 * 3 = -2$ 

# 例子



### 概率统计

Xiao Yuan

期望的性质

■ 已知  $X \sim N(0,1)$ , 求  $E(X^2)$ 



Xiao Yuan

#### 期望的经后

■ 已知  $X \sim N(0,1)$ , 求  $E(X^2)$ 

考虑另一个独立随机变量  $Y \sim N(0,1)$ ,则有  $E(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2} dxdy =$  $\frac{1}{2\pi}\int r^3e^{-r^2/2}drd\theta=2$ . 因此  $E(X^2)=E(X^2+Y^2)/2=1$ 



#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 进续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 知智的性格

## 刑室的性质

定义 方差的性质

#### 协方差和相关 系数 定义

不(线性)相关

#### 其它数字特征

二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

- 已知  $X \sim N(0,1)$ ,求  $E(X^2)$ 考虑另一个独立随机变量  $Y \sim N(0,1)$ ,则有  $E(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int r^3 e^{-r^2/2} dr d\theta = 2$ . 因此  $E(X^2) = E(X^2 + Y^2)/2 = 1$
- 某建筑商销售一吨水泥获利 a 元,每库存一吨水泥损失b 元,设水泥的销量 Y 服从 Exp(λ),库存多少水泥的平均利益最大



#### Xiao Yuan

数学期望 高数随机变量的期望 迷蛛随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

## 期望的性质

力左 定义 方差的性质

协方差和相关 系数 定义

不(线性)相关

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布 8元正本公布 ■ 已知  $X \sim N(0,1)$ , 求  $E(X^2)$  考虑另一个独立随机变量  $Y \sim N(0,1)$ , 则有  $E(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)/2} dxdy = \frac{1}{2\pi} \int r^3 e^{-r^2/2} drd\theta = 2$ . 因此  $E(X^2) = E(X^2 + Y^2)/2 = 1$ 

某建筑商销售一吨水泥获利 a 元,每库存一吨水泥损失b元,设水泥的销量 Y 服从 Exp(λ),库存多少水泥的平均利益最大

设库存 x, 则利润为  $Q(x,Y) = \begin{cases} aY - b(x-Y) & Y < x \\ ax & Y \ge x \end{cases}$  则  $E(Q(x)) = \int_0^x [ay - b(x-y)] \lambda e^{-\lambda y} dy + ax \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy.$  因此  $dE(Q(x))/dx = (a+b)e^{-\lambda x} - b$ ,也即是  $x = \lambda^{-1} \ln[(a+b)/b]$  取极值



Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

■ 设袋子里有大小、质地相同的 r 个红球, b 个黑球, 不放 回地随机抽取 n 个球 (n < r + b), 设抽出的球中有 X个红球, 求 E(X).



Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

■ 设袋子里有大小、质地相同的 r 个红球, b 个黑球, 不放 回地随机抽取 n 个球 (n < r + b), 设抽出的球中有 X个红球, 求 E(X). 方法一: 写出 X 的分布列, 用公式计算期望.



Xiao Yuan

期望的经后

不 (线性) 相关

■ 设袋子里有大小、质地相同的 r 个红球, b 个黑球, 不放 回地随机抽取 n 个球 (n < r + b), 设抽出的球中有 X个红球, 求 E(X).

方法一: 写出 X 的分布列, 用公式计算期望.

方法二: 运用期望的性质.



#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望 概要的性质

### 刑室的任从

定义

方差的性质

#### 协方差和相关 系数

定义

. . . . . . . . . . . . .

其它数字特征

的 数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布 ■ 设袋子里有大小、质地相同的 r 个红球,b 个黑球,不放回地随机抽取 n 个球 (n < r + b),设抽出的球中有 X 个红球,求 E(X).

方法一:写出 X 的分布列,用公式计算期望.

方法二:运用期望的性质.

定义事件  $A_i = \{ \hat{\mathbf{x}} i \chi \mathbf{h} \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{x} \}$ ,则

$$X=1_{A_1}+\cdots+1_{A_n}.$$

第一章中我们曾计算过  $P(A_i) = \frac{r}{r+b}$ ,所以  $E(1_{A_i}) = \frac{r}{r+b}$ ,

所以 
$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(1_{A_i}) = \frac{nr}{r+b}$$
.



#### Xiao Yuan

数学期望 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

#### 期望的性质

定义

方差的性儿

### 协方差和相关

## 系数

定义

不 (线性) 相关

#### 其它数子特征

二元正态分布

二元正态分布

有 n 个信封,每个信封里面分别有一封信.现在将信取出,随机打乱,放回信封,设有 X 个信封中装有原来的信,求 E(X).



### Xiao Yuan

数字期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

## No. 34

定义 方差的性质

协方差和相关系数

**定义** 

不 (线性) 相关

其它数字特征

**时 数 子** 符 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布 ■  $n \wedge c$  有  $n \wedge c$  每  $n \wedge c$  每  $n \wedge c$  每  $n \wedge c$  每  $n \wedge c$  4  $n \wedge c$  6  $n \wedge c$  7  $n \wedge c$  8  $n \wedge c$  9  $n \wedge c$  9

定义事件  $A_i = \{\hat{\mathbf{x}}i \wedge \hat{\mathbf{t}}\}$  中装有原来的信 $\{\hat{\mathbf{x}}\}$  ,则  $X = 1_{\Delta_1} + \cdots + 1_{\Delta_n}$  .

 $X = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}.$ 

因为装回信封时信是随机打乱的,所以  $P(A_i) = \frac{1}{n}$ ,所以  $E(1_{A_i}) = \frac{1}{n}$ ,所以  $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = 1$ .



### Xiao Yuan

## 期望的经后

■ 有 n 个信封,每个信封里面分别有一封信.现在将信取 出,随机打乱,放回信封,设有 X 个信封中装有原来的 信、求 E(X).

定义事件  $A_i = \{\hat{x} \mid \hat{x} \mid \hat$  $X = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$ 

因为装回信封时信是随机打乱的, 所以  $P(A_i) = \frac{1}{4}$ , 所以  $E(1_{A_i}) = \frac{1}{n}$ , 所以  $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = 1$ .

■ 一民航送客车载有 20 位旅客自机场出发、旅客有 10 个 车站可以下车, 如到达一个车站没有旅客下车就不停车, 以X表示停车的次数,求E(X)(设每位旅客在各个车站 下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)



#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机の量函数的期望

## 期望的性质

定义方差的性质

协方差和相关 系数 定义 性质

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征 二元正态分布 8元正态分布 ■ 有n 个信封,每个信封里面分别有一封信. 现在将信取出,随机打乱,放回信封,设有X 个信封中装有原来的信,求E(X).

定义事件  $A_i = \{\hat{\mathbf{x}}i \wedge \hat{\mathbf{x}}\}$  有原来的信 $\{\hat{\mathbf{x}}\}$  ,则  $X = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$ .

因为装回信封时信是随机打乱的, 所以  $P(A_i) = \frac{1}{n}$ , 所以  $E(1_{A_i}) = \frac{1}{n}$ , 所以  $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}) = 1$ .

■ 一民航送客车载有 20 位旅客自机场出发,旅客有 10 个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车的次数,求 E(X)(设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立)记事件  $A_i$  为第 i 站停车,则有  $X = \sum_i 1_{A_i}$ ,  $P(A_i) = 1 - (9/10)^{20}$  因此  $E(\sum_i X_i) = \sum_i E(1_{A_i}) = 10P(A_i) \approx 8.8$ 



Xiao Yuan

### 期望的经后

不(线性)相关

■ 给定随机变量 X, 若希望寻找  $x \in \mathbb{R}$  来对 X 的值进行预 测,使得"误差" $f(x) = E[(X-x)^2]$ 最小,求x和 $f(x)_{\min}$ .



#### Xiao Yuan

#### 期望的经后

■ 给定随机变量 X,若希望寻找  $x \in \mathbb{R}$  来对 X 的值进行预 测, 使得"误差" $f(x) = E[(X-x)^2]$  最小, 求 x 和  $f(x)_{min}$ . 不妨设  $E(X) = \mu$ , 则

$$f(x) = E[((X - \mu) + (\mu - x))^{2}] = E[(X - \mu)^{2}] + (\mu - x)^{2}.$$

其中用到  $E[(X - \mu)(\mu - x)] = (\mu - x)E(X - \mu) = 0.$ 所以当 x = E(X) 时 f(x) 最小,且  $f(x)_{\min} = E[(X - E(X))^2].$ 

可以看出, x = E(X) 在某种意义上是我们对 X 能给出的 最佳预测. 这里  $f(x) = E[(X - x)^2]$  称为均方误差.



Xiao Yuan

定义

## 方差和标准差

考虑随机变量 X, 已知  $E[(X - E(X))^2]$  存在,则  $D(X) = Var(X) = E[(X - E(X))^2]$  为 X 的方差,  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$  为标准差

# 定义



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期间 连续随机变量的期间

随机变量函数的期望随机向量函数的期望期望的转盾

方差 定义

方差的性质

协方差和相关 系数

性质 不(线性)相关

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布 8元正态分布 方差和标准差

考虑随机变量 X, 已知  $E[(X - E(X))^2]$  存在,则  $D(X) = \mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$  为 X 的方差,  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$  为标准差

- 方差 D(X) 刻画了随机变量的分散程度
- 离散型随机变量  $D(X) = \sum_i p_i(x_i E(X))^2$
- 连续型随机变量  $D(X) = \int f(x)(x E(X))^2 dx$

## 方差公式

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

# 定义



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

方差的性质

协方差和相关系数定义

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征 二元正态分布 方差和标准差

考虑随机变量 X, 已知  $E[(X-E(X))^2]$  存在,则  $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E[(X-E(X))^2]$  为 X 的方差,  $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$  为标准差

- 方差 D(X) 刻画了随机变量的分散程度
- 离散型随机变量  $D(X) = \sum_i p_i(x_i E(X))^2$
- 连续型随机变量  $D(X) = \int f(x)(x E(X))^2 dx$

## 方差公式

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$D(X) = E[(X - E(X)^2)] = E[X^2 + (E(X))^2 - 2E(X)X] = E(X^2) - E(X)^2$$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

定义

不 (线性) 相关

$$X \sim B(n, p), E(X) = np, E(X^2) = n(n-1)p^2 + np, D(X) = npq$$



### 概率统计

### Xiao Yuan

#### 数学期:

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

## 方差

定义 方差的性用

协方差和相关

## 系数

性质

不(线性)相关

#### 其它数子特征

二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

- $X \sim B(n, p), E(X) = np, E(X^2) = n(n-1)p^2 + np, D(X) = npq$
- $X \sim \pi(\lambda)$ ,  $E(X) = \lambda$ ,  $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

#### 数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义

方差的性质

## 协万 差和相关

不 (线性) 相关

### 其它数字特征

的 数 子 特 在 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

- $X \sim B(n, p)$ , E(X) = np,  $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$ , D(X) = npq
- $X \sim \pi(\lambda)$ ,  $E(X) = \lambda$ ,  $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$
- **•**  $X \sim NB(r, p)$ ,  $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ ,  $D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

定义

- $X \sim B(n, p), E(X) = np, E(X^2) = n(n-1)p^2 + np.$ D(X) = npq
- $X \sim \pi(\lambda)$ ,  $E(X) = \lambda$ ,  $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$
- **1**  $X \sim NB(r, p), E(X) = \frac{r(1-p)}{p}, D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

考虑 
$$X \sim \pi(\lambda)$$
, 我们有

$$E(X^{2}) = E(X(X - 1)) + E(X)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i(i - 1)e^{-\lambda}\lambda^{i}/i! + \lambda$$



Xiao Yuan

定义

考虑  $X \sim NB(r, p)$ , 我们有

$$\begin{split} E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k + \frac{r(1-p)}{p} \ (q=1-p) \\ &= p^r q^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} q^k \right]^n + \frac{r(1-p)}{p} \\ &= p^r q^2 \left[ \frac{1}{(1-q)^r} \right]^n + \frac{r(1-p)}{p} \\ &= r(r+1) \frac{q^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p} \end{split}$$

思考如何推导二项分布



### 概率统计

#### Xiao Yuan

定义

■ 
$$X \sim U(a, b)$$
,  $E(X) = (a + b)/2$ ,  $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

#### 数学期?

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义 方差的性质

协方差和相关 系数

定义

at in 21, in 12, i

其它数子特征

的 数 子 符 位 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

■ 
$$X \sim U(a, b)$$
,  $E(X) = (a + b)/2$ ,  $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 

■ 
$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$
,  $E(X) = \alpha/\lambda$ ,  $E(X^2) = (\alpha^2 + \alpha)/\lambda^2$ ,  $D(X) = \alpha/\lambda^2$ 



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

#### 数学期?

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机の量函数的期望

万差定义

方差的性质

# 协方差和相关 系数

性质 不 (线性) 相

### 其它数字特征

的 数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

■ 
$$X \sim U(a,b)$$
,  $E(X) = (a+b)/2$ ,  $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 

■ 
$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$
,  $E(X) = \alpha/\lambda$ ,  $E(X^2) = (\alpha^2 + \alpha)/\lambda^2$ ,  $D(X) = \alpha/\lambda^2$ 

$$\blacksquare$$
  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $E(X) = \mu^2$ ,  $D(X) = \sigma^2$ 



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

四机阿里四级的 期望的性质 方 差

定义方差的性质

协方差和相关 系数 定义

其它数字特征

多元随机变量

的数字特征 二元正态分布

**a** 
$$X \sim U(a,b)$$
,  $E(X) = (a+b)/2$ ,  $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 

- $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ ,  $E(X) = \alpha/\lambda$ ,  $E(X^2) = (\alpha^2 + \alpha)/\lambda^2$ ,  $D(X) = \alpha/\lambda^2$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $E(X) = \mu^2$ ,  $D(X) = \sigma^2$

考虑 
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
,令  $Y = (X - \mu)/\sigma$ ,有  $E(Y^2) = 1$ ,因此

$$E(X^2) = E((\sigma Y + \mu)^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

因此 
$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$$

# 方差的性质



### 概率统计

### Xiao Yuan

#### 方差的性质

不(线性)相关

## 方差的性质

■ 对于常数 C, 有 D(C) = 0

# 方差的性质



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

不 (线性) 相关

## 方差的性质

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

不 (线性) 相关

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B+CX) = C<sup>2</sup>D(X)



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B + CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于两个随机变量 X, Y, 有 D(X + Y) = D(X) + D(Y) + E[(X - E(X)(Y - E(Y)))]



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

不(线性)相关

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B + CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于两个随机变量 X, Y, 有 D(X + Y) = D(X) + D(Y) + E[(X - E(X)(Y - E(Y)))]
- 假设随机变量  $\{X_i\}$  相互独立,有  $D(\sum_i X_i) = \sum_i D(X_i)$



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B + CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于两个随机变量 X, Y, 有 D(X + Y) = D(X) + D(Y) + E[(X - E(X)(Y - E(Y)))]
- 假设随机变量  $\{X_i\}$  相互独立,有  $D(\sum_i X_i) = \sum_i D(X_i)$
- $D(X) < E[(X-c)^2]$



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的链盾

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B+CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于两个随机变量 X, Y, 有 D(X + Y) = D(X) + D(Y) + E[(X - E(X)(Y - E(Y)))]
- 假设随机变量  $\{X_i\}$  相互独立,有  $D(\sum_i X_i) = \sum_i D(X_i)$
- $D(X) \leq E[(X-c)^2]$
- $D(X) = 0 \equiv P(X = C) = 1$
- 已知 X ~ B(n, p), 求 D(X)



### 概率统计

### Xiao Yuan

方差的排盾

- 对于常数 C, 有 D(C) = 0
- 对于常数 C, 随机变量 X, 有 D(CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于常数 B, C, 随机变量 X, 有 D(B+CX) = C<sup>2</sup>D(X)
- 对于两个随机变量 X, Y, 有 D(X + Y) = D(X) + D(Y) + E[(X - E(X)(Y - E(Y)))]
- 假设随机变量  $\{X_i\}$  相互独立,有  $D(\sum_i X_i) = \sum_i D(X_i)$
- $D(X) < E[(X-c)^2]$
- $D(X) = 0 \equiv P(X = C) = 1$
- 已知 X ~ B(n, p), 求 D(X) 考虑独立 0-1 分布  $X_i \sim B(1, p)$ , 则  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , 且  $D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = npq$

# 随机变量标准化



### 概率统计

Xiao Yuan

方差的排盾

不 (线性) 相关

# 随机变量标准化

已知随机变量 X 的期望 E(X) 和方差 D(X),  $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 

X的标准化

# 随机变量标准化



### 概率统计

Xiao Yuan

数学期:

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

随机向量函数的期望 期望的性质

定义

方差的性质

协方差和相关 系数

性质 不(线性)相关

其它数字特征

共它数子特征

二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

# 随机变量标准化

已知随机变量 X 的期望 E(X) 和方差 D(X),  $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$  为

X的标准化

■ 对于标准化的随机变量我们有 E(Y) = 0, D(Y) = 1

# 随机变量标准化



### 概率统计

Xiao Yuan

方差的排盾

## 随机变量标准化

已知随机变量 X 的期望 E(X) 和方差 D(X),  $Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 

X的标准化

- 对于标准化的随机变量我们有 E(Y) = 0, D(Y) = 1
- 例如,对于  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,有  $Y = (X \mu)/\sigma$ ,且 E(Y) = 0, D(Y) = 1



### 概率统计

### Xiao Yuan

24

## 协方差和相关系数

随机变量 X, Y 的协方差和相关系数为  $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \not =$  $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) / \sqrt{D(X)D(Y)}$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

24

## 协方差和相关系数

随机变量 X, Y 的协方差和相关系数为  $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \approx$  $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) / \sqrt{D(X)D(Y)}$ 

$$E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)$$



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期望

為散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

方差 定义

协方差和相乡

系数

不(线性)相关

其它数字特征

口 级 士 行 但 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

## 协方差和相关系数

随机变量 X, Y 的协方差和相关系数为  $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$  和  $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) / \sqrt{D(X)D(Y)}$ 

- E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)
- D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)



### 概率统计

### Xiao Yuan

数字期空 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

方差

协方差和相关系数

定义 性质 不(线性)相关

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征

## 协方差和相关系数

随机变量 X, Y 的协方差和相关系数为  $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$  和  $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) / \sqrt{D(X)D(Y)}$ 

- E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)  $D(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 =$  $E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X)E(Y)$
- $D(\sum_i X_i) = \sum_i D(X_i) + 2 \sum_{i,j} Cov(X_i, X_j)$



### 概率统计

### Xiao Yuan

数字期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

方差

协方差和相争

系 数 定义

其它数字特征

二元正态分布

## 协方差和相关系数

随机变量 X, Y 的协方差和相关系数为  $\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$  和  $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y)/\sqrt{D(X)D(Y)}$ 

- E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)  $D(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 =$  $E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 - 2E(X)E(Y)$
- $D(\sum_{i}X_{i}) = \sum_{i}D(X_{i}) + 2\sum_{i,j}\operatorname{Cov}(X_{i},X_{j})$   $D(\sum_{i=1}^{n}X_{i}) = D(\sum_{i=1}^{n-1}X_{i}) + D(X_{n}) + 2\operatorname{Cov}(\sum_{i=1}^{n-1}X_{i},X_{n}).$ 注意到  $\operatorname{Cov}(\sum_{i=1}^{n-1}X_{i},X_{n}) = \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(X_{i},X_{n})$



### 概率统计

### Xiao Yuan

经盾

- $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\mathbf{Cov}(X,X) = D(X)$
- $\blacksquare$  Cov(aX, bY) =  $ab \cdot \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$



### 概率统计

### Xiao Yuan

经盾

# 协方差的性质

- $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\mathbf{Cov}(X,X) = D(X)$
- $\blacksquare$  Cov(aX, bY) =  $ab \cdot \text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

我们注意到协方差的大小与随机变量的大小相关、考虑标准化的随机变量  $\tilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \ \tilde{Y} = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}, \ \text{我们有}$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义 方差的性质

协方差和相关 系数 定义

性质 不 (线性) 相关

其它数字特征

内 致 子 行 住 二元正态分布 多元正态分布 协方差的性质

- $\square$  Cov(X, X) = D(X)
- $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

我们注意到协方差的大小与随机变量的大小相关,考虑标准化的随机变量  $\tilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \ \tilde{Y} = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}},$ 我们有

# 相关系数—归一化的协方差

$$\operatorname{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \rho_{XY}$$



### 概率统计

### Xiao Yuan

经盾

# 协方差的性质

- $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- $\mathbf{Cov}(X,X) = D(X)$
- $\blacksquare$  Cov(aX, bY) = ab · Cov(X, Y)
- $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$

我们注意到协方差的大小与随机变量的大小相关、考虑标准化的随机变量  $\tilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ , $\tilde{Y} = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ ,我们有

## 相关系数——归一化的协方差

 $Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \rho_{XY}$ 

$$\operatorname{Cov}(\tilde{X},\tilde{Y}) = E[(\tilde{X} - E(\tilde{X}))(\tilde{Y} - E(\tilde{Y}))] = E[\tilde{X}\tilde{Y}] = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right] = \rho_{XY}$$



Xiao Yuan

排盾

■ 某条蚕的产卵数 X 服从泊松分布  $X \sim \pi(\lambda)$ , 每个卵变为 成虫的概率为 p, 各卵是否变为成虫彼此独立. 设成虫数 为 Y, 求 cov(X, Y).



### Xiao Yuan

经盾

■ 某条蚕的产卵数 X 服从泊松分布  $X \sim \pi(\lambda)$ , 每个卵变为 成虫的概率为 D, 各卵是否变为成虫彼此独立. 设成虫数 为 Y, 求 cov(X, Y).

直接计算: cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).

由已知条件得  $X \sim \pi(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda$ .

经过计算可知  $Y \sim \pi(\lambda p) \Rightarrow E(Y) = \lambda p$ .

由离散型随机变量函数的期望公式:

$$E(XY) = \sum_{n=k}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} nkP(X = n, Y = k) = \dots = \lambda p + \lambda^2 p$$
  

$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = \lambda p.$$

## 是否有更简单的做法?



Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机の量函数的期望

力在 定义 方差的性质 协方差和

协万差和相关 系数 定义 性质

其它数字特征

的数字特征

■ 某条蚕的产卵数 X 服从泊松分布  $X \sim \pi(\lambda)$ ,每个卵变为成虫的概率为 p,各卵是否变为成虫彼此独立. 设成虫数为 Y,求 cov(X,Y).



### Xiao Yuan

数学期望 高数随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机负量函数的期望

方差 定义 方差的性质

协方差和相关 系数

定义性质

其它数字特征

名云脑却亦畏

的数字特征 二元正态分布 多元正态分布 • 某条蚕的产卵数 X 服从泊松分布  $X \sim \pi(\lambda)$ ,每个卵变为成虫的概率为 p,各卵是否变为成虫彼此独立. 设成虫数为 Y,求 cov(X,Y). 设 Z = X - Y(死卵数). 则

$$P(Y = k, Z = l) = P(Y = k, X = k + l)$$

$$= P(X = k + l)P(Y = k \mid X = k + l)$$

$$= \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(k+l)!}{k! \, l!} p^k (1-p)^l$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda (1-p))^l}{l!} e^{-\lambda (1-p)}$$

这表明  $Y \sim \pi(\lambda p), Z \sim \pi(\lambda(1-p)),$  两者相互独立.  $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, Y) + \text{cov}(Z, Y) = D(Y) + 0 = \lambda p.$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

排盾

不 (线性) 相关

### 相关系数与线性相关

- $|\rho_{XY}| < 1$
- $|\rho_{XY}| = 1$  等价于存在 a, b 使得 P(Y = aX + b) = 1(考虑  $\rho_{XY}$  的正负 号与相关性的关系)



### 概率统计

### Xiao Yuan

排盾

### 相关系数与线性相关

- $|\rho_{XY}| < 1$
- $|\rho_{XY}| = 1$  等价于存在 a, b 使得 P(Y = aX + b) = 1(考虑  $\rho_{XY}$  的正负 号与相关性的关系)

定义 
$$\tilde{X} = X - E(X)$$
,  $\tilde{Y} = Y - E(Y)$ , 我们有(柯西不等式)

$$\rho_{XY}^2 = \frac{E(\tilde{X}\tilde{Y}')^2}{E(\tilde{X}^2)E(\tilde{Y}^2)} \le 1$$



### 概率统计

### Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义方差的性质

协方差和相关 系数

系数 定义 性质

生心粉宝特征

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

### 相关系数与线性相关

- $|\rho_{XY}| \leq 1$
- $|\rho_{XY}| = 1$  等价于存在 a, b 使得 P(Y = aX + b) = 1(考虑  $\rho_{XY}$  的正负号与相关性的关系)

定义  $\tilde{X} = X - E(X)$ ,  $\tilde{Y} = Y - E(Y)$ , 我们有(柯西不等式)

$$\rho_{\mathsf{XY}}^2 = \frac{\mathit{E}(\tilde{\mathsf{X}}\tilde{\mathsf{Y}}')^2}{\mathit{E}(\tilde{\mathsf{X}}^2)\mathit{E}(\tilde{\mathsf{Y}}^2)} \leq 1$$

这里主要证明  $|\rho_{XY}| = 1 \Rightarrow P(Y = aX + b) = 1$ .

$$E[(\tilde{Y} - a\tilde{X})^2] = a^2 E(\tilde{X}^2) - 2aE(\tilde{X}\tilde{Y}) + E(\tilde{Y}^2)$$



### 概率统计

### Xiao Yuan

经盾

### 相关系数与线性相关

- $|\rho_{XY}| < 1$
- $|\rho_{XY}| = 1$  等价于存在 a, b 使得 P(Y = aX + b) = 1 (考虑  $\rho_{XY}$  的正负 号与相关性的关系)

定义  $\tilde{X} = X - E(X), \tilde{Y} = Y - E(Y),$  我们有(柯西不等式)

$$\rho_{XY}^2 = \frac{E(\tilde{X}\tilde{Y}')^2}{E(\tilde{X}^2)E(\tilde{Y}^2)} \le 1$$

这里主要证明  $|\rho_{XY}| = 1 \Rightarrow P(Y = aX + b) = 1$ .

$$E[(\tilde{\mathbf{Y}} - a\tilde{\mathbf{X}})^2] = a^2 E(\tilde{\mathbf{X}}^2) - 2aE(\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}) + E(\tilde{\mathbf{Y}}^2)$$

因为  $|\rho_{XY}| = 1$ , 我们有  $E(\tilde{X}\tilde{Y})^2 = E(\tilde{X}^2)E(\tilde{Y}^2)$ , 因此存在 a 使得  $E[(\tilde{Y} - a\tilde{X})^2] = 0$ . 因为  $E(\tilde{Y} - a\tilde{X}) = 0$ , 因此  $D(\tilde{Y} - a\tilde{X}) = 0$ , 也即是  $P(\tilde{Y} - a\tilde{X} = b') = 1$   $\not \propto P(Y = aX + b) = 1$ 



### 概率统计

### Xiao Yuan

### 数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

### 方差

定义

方差的性质

### 协方差和相关 系数

定义

不 (线性) 相关

其它数字特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不 (线性) 相关, 则有

$$\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\blacksquare E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$



概率统计

Xiao Yuan

不 (线性) 相关

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不(线性)相关,则有

- $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$
- E(XY) = E(X)E(Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y)

且以上三个条件等价

■ 独立可以推出不相关、反之不然



概率统计

Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义

方差的性质

协方差和相关 系数

定义性质

不 (线性) 相关

其它数字特征

的 数子特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不 (线性) 相关, 则有

- $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$
- E(XY) = E(X)E(Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y)

- 独立可以推出不相关, 反之不然
- *X* ~ *N*(0,1), *Y* = |*X*|, *X*, *Y* 是否独立、相关?



概率统计

Xiao Yuan

### 数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义

方差的性质

协方差和相关 系数

性质 不(銭性) 相关

其它粉字特征

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不 (线性) 相关, 则有

- $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$
- E(XY) = E(X)E(Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y)

- 独立可以推出不相关, 反之不然
- $X \sim N(0,1), Y = |X|, X, Y$  是否独立、相关? E(X) = 0, E(XY) = 0, 因此 X, Y 不相关;



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

定义

方差的性质

协方差和相关 系数 定义

不 (线性) 相关

其它数字特征

的数字特征

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不 (线性) 相关, 则有

- $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$
- E(XY) = E(X)E(Y)
- D(X + Y) = D(X) + D(Y)

- 独立可以推出不相关, 反之不然
- $X \sim N(0,1), Y = |X|, X, Y$  是否独立、相关? E(X) = 0, E(XY) = 0, 因此 X, Y 不相关;  $P(X \le c, Y \le c) = P(Y \le c)$  与  $P(X \le c)P(Y \le c)$  可能不同,因此不独立



概率统计

Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

万左 定义

协方差和相

於数 定义 性质

不(线性)相关 其它数字特征

多元随机变量 的数字特征 二元正态分布

## 不(线性)相关

随机变量 X, Y 不 (线性) 相关, 则有

- $\rho_{XY} = \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$
- $\bullet E(XY) = E(X)E(Y)$
- D(X + Y) = D(X) + D(Y)

- 独立可以推出不相关, 反之不然
- $X \sim N(0,1), Y = |X|, X, Y$  是否独立、相关? E(X) = 0, E(XY) = 0, 因此 X, Y 不相关;  $P(X \le c, Y \le c) = P(Y \le c)$  与  $P(X \le c)P(Y \le c)$  可能不同,因此不独立
- 因此这里的不相关更多指的是不线性相关,但是仍可能 存在其它关联



### Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期望 連续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

万左 定义

方差的性质

协方差和相关系数

定义

不 (线性) 相关

### 其它数字特征

多元随机变 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布 ■ 设随机变量  $U \sim U(0, 2\pi), X = \cos U, Y = \cos(U + a)$ . 求  $\rho_{XY}$ .

$$E(X) = E(Y) = 0, E(X^{2}) = E(Y^{2}).$$

$$E(X^{2}) = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos^{2} u du = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} u du = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos u \cos(u + \mathbf{a}) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos \mathbf{a} + \cos(2u + \mathbf{a})}{2} du = \frac{\cos \mathbf{a}}{2}.$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \cos a$$
.

- 当 a=0 时,  $\rho_{XY}=1$ , X=Y (线性相关、正相关)
- 当  $a = \pi$  时, $\rho_{XY} = -1$ ,X = -Y(线性相关、负相关)
- 当  $a = \pi/2$  或  $3\pi/2$  时, $\rho_{XY} = 0$ ,X, Y 不线性相关,但也不相互独立(如何证明?).

# 二元正态分布



### 概率统计

### Xiao Yuan

数学期望 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

方差

方差的性人

协方差和相关

系数

不 (线性) 相关

其它数字特征

开口双丁们在

二元正态分布

二元正态分布 多元正态分布 ■ 考虑二元正态分布 (X, Y), 其中概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{\frac{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]},$$

$$(X,Y) 独立等价于(X,Y) 不相关$$

# 二元正态分布



### 概率统计

### Xiao Yuan

不 (线性) 相关

■ 考虑二元正态分布 (X, Y), 其中概率密度为  $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\sigma^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ (X, Y) 独立等价于 (X, Y) 不相关  $Cov(X, Y) = E\{(X - \mu_1)(Y - \mu_2)\}\$  $= \int_{-\sqrt{2\pi}\sigma_1}^{+\infty} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx \int_{-\sqrt{2\pi}\sigma_2}^{+\infty} \frac{(y-\mu_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} dx$  $\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left[ y - \left( \mu_2 + \frac{\rho \sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1) \right) \right]^2 \right\} dy$  $= \int_{-\sqrt{2\pi}\sigma_1}^{+\infty} \frac{(x-\mu_1)}{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}} \cdot \left[\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) - \mu_2\right] dx$  $= \frac{\rho \sigma_2}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu_1)^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx$  $=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\sigma_1^2=\rho\sigma_1\sigma_2$ 

# 二元正态分布



### 概率统计

### Xiao Yuan

不 (线性) 相关

■ 考虑二元正态分布 (X, Y), 其中概率密度为 f(x, y) =  $\frac{1}{2\pi\sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1-\rho^{2}}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^{2})}\left[\frac{(x-\mu_{1})^{2}}{\sigma_{1}^{2}}-2\rho\frac{(x-\mu_{1})(y-\mu_{2})}{\sigma_{1}\sigma_{2}}+\frac{(y-\mu_{2})^{2}}{\sigma_{2}^{2}}\right]},$ (X, Y) 独立等价于(X, Y) 不相关.



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

不 (线性) 相关

■ 考虑二元正态分布 (X, Y), 其中概率密度为 f(x, y) =  $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ (X,Y) 独立等价于(X,Y) 不相关. 计算得  $Cov(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$ . 第三章中已经证明 X, Y 独立  $\Leftrightarrow \rho = 0$ , 故命题得证.



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

不 (线性) 相关

■ 考虑二元正态分布 (X, Y), 其中概率密度为 f(x, y) =  $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$ (X,Y) 独立等价于(X,Y) 不相关. 计算得  $Cov(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$ . 第三章中已经证明 X, Y 独立  $\Leftrightarrow \rho = 0$ ,故命题得证.

- 二元正态分布  $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  由 5 个参数决定, 这 些参数的含义是:
  - μ<sub>1</sub>, μ<sub>2</sub> 分别为两个边缘的期望(均值)
  - $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  分别为两个边缘的方差
  - 0 为两个边缘的相关系数.

Xiao Yuan

#### 数学期至

為散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

. .,

44

方差的性质

协方差和相:

定义

不(线性)相关

#### 其它数字特征

多元随机变量

二元正去公右

一九止心分布 多元正杰公布

## 高阶矩

随机变量 X,Y 的 k+1 混合矩和中心混合矩为  $E(X^kY^l)$  和  $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$ 

Xiao Yuan

不 (线性) 相关

#### 其它数字特征

### 高阶矩

随机变量 X, Y 的 k+1 混合矩和中心混合矩为  $E(X^kY^l)$  和  $E[(X - E(X))^{k}(Y - E(Y))^{l}]$ 

■ 三阶矩-偏度: E[(X - E(X))<sup>3</sup>] 描述了峰往左或右偏

Xiao Yuan

#### 数学期望

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机の量函数的期望

-大 ×

定义

方差的性质

协方差和相关 系数

定义 性质

不 (线性) 相关

### 其它数字特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 高阶矩

随机变量 X, Y 的 k+1 混合矩和中心混合矩为  $E(X^kY^l)$  和  $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$ 

- 三阶矩-偏度: E[(X E(X))<sup>3</sup>] 描述了峰往左或右偏
- 四阶矩-峰度:E[(X E(X))4] 描述了峰尖的大小

Xiao Yuan

#### 数学期望

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方美

定义

方差的性质

协方差和相关 系数 \*×

性质 不 (线性) 相关

#### 其它数字特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 高阶矩

随机变量 X, Y 的 k+1 混合矩和中心混合矩为  $E(X^kY^l)$  和  $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$ 

- 三阶矩-偏度: E[(X E(X))<sup>3</sup>] 描述了峰往左或右偏
- 四阶矩-峰度: E[(X E(X))4] 描述了峰尖的大小
- $X \sim N(0,1), Y = |X|, E(X^2Y^2)$  是否等于  $E(X^2)E(Y^2)$

Xiao Yuan

#### 数学期望

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

### カエロ

定义 方差的性质

方差的性质

# 协方差和相关系数

性质 不 (线性) 相关

#### 其它数字特征

多元随机灾重 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 高阶矩

随机变量 X, Y 的 k+1 混合矩和中心混合矩为  $E(X^kY^l)$  和  $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$ 

- 三阶矩-偏度: E[(X E(X))<sup>3</sup>] 描述了峰往左或右偏
- 四阶矩-峰度: E[(X E(X))4] 描述了峰尖的大小
- $X \sim N(0,1), Y = |X|, E(X^2Y^2)$  是否等于  $E(X^2)E(Y^2)$  注意  $X^2 = Y^2$ , 同时  $D(X^2) \neq 0$ , 因此  $E(X^2Y^2) \neq E(X^2)E(Y^2)$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数

随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

方差

定义 方差的性质

协方差和相关系数

於 <u>数</u> 定义

不 (线性) 相关

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 协方差矩阵

考虑随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,则协方差矩阵为  $B = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T].$ 



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

刑室的()

定义

协方差和相

系数

不 (线性) 相关

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 协方差矩阵

考虑随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,则协方差矩阵为  $B = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T].$ 

$$\blacksquare B = B^T$$



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

随机交重函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

方差

定义 方差的性质

协方差和相关

系数定义

the trade of the

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 协方差矩阵

考虑随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,则协方差矩阵为  $B = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T].$ 

- $\blacksquare B = B^T$
- $B \ge 0$ , 也即是对于任意向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ , 我们 有  $\alpha^T B \alpha > 0$



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

高教随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差定义

协方差和相关 系数

定义

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布 协方差矩阵

考虑随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ ,则协方差矩阵为  $B = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T].$ 

- $\blacksquare B = B^T$
- $B \ge 0$ , 也即是对于任意向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ , 我们有  $\alpha^T B \alpha \ge 0$  $\alpha^T B \alpha = \alpha^T E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T] \alpha = E[Y^2]$ , 其中  $Y = \alpha^T \cdot \mathbf{X}$
- 例如, n 元协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} D(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & D(X_2) & \dots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \dots & D(X_n) \end{pmatrix}$$



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

二元正态分布

考虑二元正态分布  $(X_1, X_2)$ , 其中概率密度为

方差矩阵为 
$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望

方差定义

方差的性质

於力左和相大 系数 定义 同时

不 (线性) 相关

其它数字特征

的数字特征

二元正态分布 多元正态分布 考虑二元正态分布  $(X_1, X_2)$ , 其中概率密度为  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$ 协 方差矩阵为  $B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  行列式为  $|B| = \sigma_1^2\sigma_2^2 \left(1-\rho^2\right)$  B 的逆矩阵为  $B^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$ 

 $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}} B^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{1 - \rho^2} \left[ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma^2} \right]$ 



#### 概率统计

Xiao Yuan

二元正态分布

考虑二元正态分布  $(X_1, X_2)$ , 其中概率密度为

同时

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}} \mathcal{B}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{1 - \rho^2} \left[ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]$$

## 二元正态分布

二元正态分布的概率密度可写成  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T B^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$ 



#### 概率统计

Xiao Yuan

二元正态分布

考虑二元正态分布  $(X_1, X_2)$ , 其中概率密度为

同时

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}} \mathcal{B}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{1 - \rho^2} \left[ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]$$

## 二元正态分布

二元正态分布的概率密度可写成  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T B^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$ 



### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 建续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的始居

力 左 定义

协方美和

**孙**力左和伯大系数

性质 不 (移材) 和

其它数字特征

多元随机变量

二元正态分布 多元正态分布

### 多元正态分布



概率统计

Xiao Yuan

数学期望 离散随机变量的期至 连续随机变量的期至 期望和分布函数

随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

万差 定义 主义的2000年

协方差和相争

系数 定义

不 (政任) 相犬 + 山 北 中 社 /

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布

二元正恋分布 多元正态分布

### 多元正态分布

n 元正态分布由一个 n 维向量 a 和一个对称正定矩阵 B 决定,记作 N(a,B). 与二维情形类似:

- a 为分布的期望(均值).
- B 为分布的协方差矩阵.



概率统计

Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

刀左 定义 方差的性质

协方差和相关 系数

定义 性质 工 (此址) 如果

其它数字特征

的数字特征 二元正态分布 8元正态分布 多元正态分布

多元正态分布的概率密度为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T B^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right\}, \ \$$
其中  $B$  为协
方差矩阵

n 元正态分布由一个 n 维向量 a 和一个对称正定矩阵 B 决定,记作 N(a,B). 与二维情形类似:

- a 为分布的期望(均值).
- B 为分布的协方差矩阵.

称满足  $a=0, B=I_d$  的正态分布为 n 维标准正态分布,此时

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right)$$



### 概率统计

Xiao Yuan

### 数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

万左 定义 上 \* 4.4.4.0

协方差和相关

系数

不 (线性) 相关

其它数字特征

多元随机变: 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

## 多元正态分布



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望 期望的性质

方差 定义 方差的性质

协方差和相关

系数 定义

the tender of the

其它数字特征

**多九随机变** 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 多元正态分布

■ 多元正态分布的边缘分布也为多元正态分布



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变

為取經机交更的期空 連禁随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

万差 定义 方差的性质

协方差和相关系数

定义 性质

其它数字特征

多兀随机变3 的数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 多元正态分布

多元正态分布的概率密度为  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^TB^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}, \ \ \, \text{其中 } B \ \, \text{为协 } \, \, \text{方差矩阵}$ 

- 多元正态分布的边缘分布也为多元正态分布
- 多元正态分布相互独立等价于随机变量 X<sub>i</sub>, X<sub>j</sub> 两两不相 关,也等价于所有协方差为 0



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

高散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机变量函数的期望

方差定义

定义方差的性质

协方差和相关 系数 定义

不(改性)相天 廿 宀 虬 宀 赴 ſ

其它数字特征

多元随机变重 的数字特征 ------

二元正态分布 **多元正态分布** 

### 多元正态分布

多元正态分布的概率密度为  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T B^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}, \ \ \, \text{其中 } B \ \, \text{为协 } \, \, \text{方差矩阵}$ 

- 多元正态分布的边缘分布也为多元正态分布
- 多元正态分布相互独立等价于随机变量 X<sub>i</sub>, X<sub>j</sub> 两两不相 关,也等价于所有协方差为 0
- 多元正态分布的线性变换也为多元正态分布



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期

离散随机变量的期望 连续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的经历

定义

方差的性质

协方差和相关 系数 定义

其它数字特征

二元正态分布 多元正态分布

### 多元正态分布

- 多元正态分布的边缘分布也为多元正态分布
- 多元正态分布相互独立等价于随机变量 X<sub>i</sub>, X<sub>j</sub> 两两不相 关,也等价于所有协方差为 0
- 多元正态分布的线性变换也为多元正态分布
- 对于  $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{a}, B)$ , 有  $A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim N(A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, ABA^T)$



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

数学期望 高散随机变量

為放極机交至的物至 連续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望 期望的性质

刀 左 定义 方差的性质

协方差和相关 系数 定义 性质

其它数字特征

多元随机变量 的数字特征 二元正态分布 多元正态分布

### 多元正态分布

- 多元正态分布的边缘分布也为多元正态分布
- 多元正态分布相互独立等价于随机变量 X<sub>i</sub>, X<sub>j</sub> 两两不相 关,也等价于所有协方差为 0
- 多元正态分布的线性变换也为多元正态分布
- 对于  $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{a}, B)$ , 有  $A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim N(A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, ABA^T)$
- 对于  $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{a}, B)$ , 有  $B = AA^T$ , 且  $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{a}$ , 这里  $\boldsymbol{Z} \sim N(0, I)$

# 多元正杰分布



#### 概率统计

#### Xiao Yuan

多元正态分布

## 多元正杰分布线性变换

对于  $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{a}, B)$ , 有  $A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim N(A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, ABA^T)$ 

记 Y = AX + b、根据密度变换公式、我们有

$$f_{Y}(y) = f_{X}(A^{-1}(y - b))|\partial y/\partial x|^{-1} \quad (\partial y/\partial x = A)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|A||B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(A^{-1}(y - b) - a\right)^{T} B^{-1} \left(A^{-1}(y - b) - a\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|A||B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(y - b - Aa\right)^{T} (A^{T})^{-1} B^{-1} \left(A^{-1}(y - b - Aa)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\tilde{\mathbf{B}}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{a}} \right)^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \left( \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{a}} \right) \right\}$$

其中 
$$\tilde{B} = ABA^T$$
,  $\tilde{a} = Aa + b$ .



Xiao Yuan

数学期

為散随机变量的期望 連续随机变量的期望 期望和分布函数 随机变量函数的期望 随机向量函数的期望

方差

方差的性质

协方差和相关

不 (线性) 相关

其它数字特征

的数字特征

一. 元止恋分布 多元正态分布 • 设  $(X_1, X_2) \sim N(0, 0, 1, 1, 1/2)$ , 即  $(X_1, X_2)$  是期望皆为 0, 方差皆为 1, 相关系数为 1/2 的二元正态分布(二维正态向量). (1) 是否存在实数 a, 使得  $X_1 - aX_2$  与  $X_2$  相互独立?若存在,求出 a 的值;若不存在,请证明. (2) 求  $E(X_1^2X_2^2)$ .



Xiao Yuan

多元正态分布

■ 设  $(X_1, X_2)$  ~ N(0, 0, 1, 1, 1/2), 即  $(X_1, X_2)$  是期望皆为 0, 方差皆 为 1, 相关系数为 1/2 的二元正态分布 (二维正态向量). (1) 是否 存在实数 a、使得  $X_1 - aX_2$  与  $X_2$  相互独立? 若存在、求出 a 的值; 若不存在、请证明. (2) 求  $E(X_1^2X_2^2)$ .

由正态向量的性质、 $X_1 - aX_2$  与  $X_2$  相互独立等价于二者不相关、即

$$0 = Cov(X_1 - aX_2, X_2) = Cov(X_1, X_2) - a \cdot Cov(X_2, X_2) = \frac{1}{2} - a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$



Xiao Yuan

多元正态分布

■ 设  $(X_1, X_2) \sim N(0, 0, 1, 1, 1/2)$ , 即  $(X_1, X_2)$  是期望皆为 0, 方差皆 为 1, 相关系数为 1/2 的二元正态分布 (二维正态向量). (1) 是否 存在实数 a, 使得  $X_1 - aX_2$  与  $X_2$  相互独立? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在,请证明. (2) 求  $E(X_1^2X_2^2)$ .

由正态向量的性质,  $X_1 - aX_2$  与  $X_2$  相互独立等价于二者不相关, 即

$$0 = \mathit{Cov}(X_1 - \mathit{aX}_2, X_2) = \mathit{Cov}(X_1, X_2) - \mathit{a} \cdot \mathit{Cov}(X_2, X_2) = \frac{1}{2} - \mathit{a} \Rightarrow \mathit{a} = \frac{1}{2}.$$

 $? Z = X_1 - X_2/2, \quad \emptyset \quad D(Z) = D(X_1) + D(X_2)/4 - Cov(X_1, X_2) = 3/4,$  $Z \sim N(0, 3/4)$  且与  $X_2 \sim N(0, 1)$  相互独立. 计算如下:

$$E(X_1^2 X_2^2) = E\left(\left(Z + \frac{X_2}{2}\right)^2 X_2^2\right) = E\left(Z^2 X_2^2 + Z X_2^3 + \frac{1}{4} X_2^4\right)$$

$$= E(Z^2) E(X_2^2) + E(Z) E(X_2^3) + \frac{1}{4} E(X_2^4) = \frac{3}{4} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 3$$

$$= \frac{3}{2}.$$