课程名称：微积分（一）

2017-2018 学年第（1）学期期中　　　　本试卷共 **5** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）按定义证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2017}}{1.102^n}=0$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；（3）写出不一致连续的定义，并证明 $f(x)=x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续。

2. （30 分）求下列各式的值（若不存在，简要说明理由）：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+6}{x^3+1}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots}}}}}_{n}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan(2x-4)}{\sin(x-2)}$.

3. （15 分）函数 $f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x>0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 的不连续点有哪些？各属于哪种类型？证明你的结论。

4. （15 分）若 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{3n}\}$ 都收敛：（1）试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}$；（2）$\{x_n\}$ 是否一定收敛？若是：证明之；若否：举出反例。

5. （10 分）（1）证明方程 $\sin x=x$ 和 $\sin(\sin x)=x$ 都只有一个解 $x^*=0$；（2）若函数 $f(x)\in C(\mathbb{R})$，且 $f(f(x))=x$ 仅有一个解 x^*，试证明 $f(x)=x$ 也仅有一个解，并且就是 x^*。

2017-2018学年第（1）学期微积分（一）期中答案

1.按照定义证明

(1)证明：设$a = 1.102^{\frac{1}{2017}} - 1, \forall n > 1$，$(1.102)^{\frac{n}{2017}} = (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a^2$(5分)

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = [\frac{2}{a^2 \varepsilon^{\frac{1}{2017}}}] + 2$，$\forall n > N$，$|\frac{n^{2017}}{1.102^n}| \leq \left(\frac{2}{(n-1)a^2}\right)^{2017} < \varepsilon$

此即$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2017}}{1.102^n} = 0$(5分)。

(2)证明：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$，$\forall |x| > M$，$|\frac{\sin x}{x}| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon$

此即$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$。(10分)

(3)不一致连续：设E是$\mathbb{R}$上的一个子集，函数f在E上有定义，$\exists \varepsilon > 0$，$\forall \delta > 0$，都存在$x_1, x_2 \in E$，$|x_1 - x_2| < \delta$，使得$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$。(4分)

下面证明$f(x) = x\sin x$在$\mathbb{R}$上不一致连续：

取$\varepsilon = 1$，$\forall \delta > 0$，取$x_1 = 2n\pi + \Delta$，$x_2 = 2n\pi$，其中$\Delta = \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{6}), n \in \mathbb{N}$。

显然有$|x_1 - x_2| = \Delta < \delta$，并且

$|f(x_1) - f(x_2)| = |(2n\pi + \Delta)\sin\Delta)| > 2n\pi|\sin\Delta|$。

因此$\forall \delta > 0$，$\exists N = [\frac{1}{2\pi|\sin\Delta|}] + 1$，使得存在$x_1 = 2N\pi + \Delta$，$x_2 = 2N\pi$，$|x_1 - x_2| < \delta$，并且$|f(x_1) - f(x_2)|\ > 2N\pi|\sin\Delta| > 1 = \varepsilon$，证毕。(6分)

2.(1)$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-5x+6}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{2-0+0}{1+0} = 2$。(10分)

(2)易知$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}}_{n+1} > \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3+0}}}}_{n} = a_n$

已知$a_1 = \sqrt{3} \leq 3$,假设$a_k \leq 3$成立，则$a_{k+1} = \sqrt{a_k+3} \leq \sqrt{3+3} \leq 3$，由归纳法可知$a_n \leq 3$恒成立。

因此数列$\{a_n\}$是一个有上界的单调递增序列，所以$\{a_n\}$收敛。(5分)

设$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，对$a_{n+1} = \sqrt{a_n+3}$两边同取极限有$a = \sqrt{a+3}$，解得$a = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$。

由$a_n > 0$可知$a \geq 0$，因此取$a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$，即$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$。(5分)

(3)设y=x-2

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\tan(2x-4)}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\tan 2y}{\sin y} = \lim\limits_{y\to 0} 2 * \frac{\sin 2y}{2y} * \frac{y}{\sin y} * \frac{1}{cos2y} = 2*1*1*1 = 2$。(10分)

3.函数$f(x)$的不连续点有$\{0, \frac{1}{n}\}$，其中$n \in \mathbb{N}$，都是第一类间断点。

下面证明这个结论：

①在$x = 0$处，$\forall x > 0$，$\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$，所以$1 - x < f(x) \leq 1$。因为$\lim\limits_{x\to 0+} 1 - x = 1$，由夹挤原理可知，$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 \neq f(0)$，所以$x = 0$是不连续点。(5分)

②在$x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$处，易知

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}-} x \cdot [\frac{1}{x}] = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}x\cdot[\frac{1}{x}]=\frac{1}{n}\cdot(n-1)=1-\frac{1}{n}\neq 1$，因此在$x=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}$处是不连续点。(5分)

注：易知在其他地方没有不连续点，当$x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$时，$f(x)=nx$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)=0$。

4.(1)证明：因为子列$\{x_{6n}\}$是$\{x_{2n}\}$的子列，也是$\{x_{3n}\}$的子列，由收敛序列子列的性质，$\{x_{6n}\}$收敛，并且有$\lim\limits_{n\to n}x_{6n}=\lim\limits_{n\to n}x_{2n},\lim\limits_{n\to n}x_{6n}=\lim\limits_{n\to n}x_{3n}$。因为收敛序列的极限是唯一的，所以$\lim\limits_{n\to n}x_{2n}=\lim\limits_{n\to n}x_{3n}$。(8分)

(2)$\{x_n\}$不一定收敛。(2分)

下面证明这个结论：

构造序列$x_n=\begin{cases}1,n=6k-1,k\in\mathbb{N}\\0,others\end{cases}$，可知这是满足题设的序列。$a_{2n}=0$，$a_{3n}=0$，都是收敛子列，并且收敛到0。但是$\{x_n\}$存在子列$a_{6n-1}=1$收敛到1，因此$\{x_n\}$是发散的。(5分)

5.(1)证明：因为$\sin x$和x都是奇函数，所以只需要讨论正半轴的情况即可。

①显然$x^*=0$是$\sin x=x$的一个解。

$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，可知此时有$x>\sin x$，因此$\sin x=x$在$(0,\frac{\pi}{2})$上没有解。

$\forall x\in[\frac{\pi}{2},+\infty)$，$x\geq\frac{\pi}{2}>1\geq\sin x$，因此$\sin x=x$在$[\frac{\pi}{2},+\infty)$上没有解。

综上所述，$\sin x=x$只有一个解$x^*=0$。(2分)

②显然$x^*=0$是$\sin(\sin x)=x$的一个解。

$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，可知此时有$x>\sin x>\sin(\sin x)$，因此$\sin(\sin x)=x$在$(0,\frac{\pi}{2})$上没有解。

$\forall x\in[\frac{\pi}{2},+\infty)$，$x\geq\frac{\pi}{2}>1\geq\sin(\sin x)$，因此$\sin(\sin x)=x$在$[\frac{\pi}{2},+\infty)$上没有解。

综上所述，$\sin(\sin x)=x$只有一个解$x^*=0$。(3分)

(2)证明：

法1：设$g(x)=f(x)-x$，可知$g(x)\in C(\mathbb{R})$。

先证明解的存在性：假设$f(x)=x$没有解，那么$g(x)=0$没有解，我们可以断言$g(x)$在$\mathbb{R}$上都是同号的。

若不然，则$\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$，并且$g(x_1)g(x_2)<0$，则$\exists\hat{x}\in\mathbb{R},g(\hat{x})=0$，矛盾，即证$g(x)$在$\mathbb{R}$上都是同号的。

不妨设$g(x)>0$，即$f(x^*)>x^*$，取$x=f(x^*)$,则$f(x^*)<f(f(x^*))=x^*$，矛盾。因此$f(x)=x$有解。(3分)

再证明解的唯一性：设若不然，$f(x)=x$有两个不相等的解x_1和x_2，且$\begin{cases}f(x_1)=x_1 f(x_2)=x_2\end{cases}$，即$\begin{cases}f(f(x_1))=f(x_1)=x_1 f(f(x_2))=f(x_2)=x_2\end{cases}$。这说明$x_1$和$x_2$也是$f(f(x))=x$的两个不相等的解，与题设矛盾。即证$f(x)=x$的解唯一。

最后证明x^*就是$f(x)=x$的唯一解：设$f(x)=x$的唯一解是x_0，由$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$可知，x_0是$f(f(x))=x$的一个解。因为$f(f(x))=x$有唯一解x^*，所以$x_0=x^*$，证毕。(2分)

法2：因为x^*是$f(f(x))=x$的唯一解，取$x=f(x^*)$，$f(f(f(x^*)))=f(x^*)$。这说明$f(x^*)$也是$f(f(x))=x$的一个解，又由于其解的唯一性可知，$f(x^*)=x^*$，即x^*是$f(x)=x$的一个解。唯一性的证明同法1，证毕。