一阶逻辑与 ZFC 集合论

请在 9 月 28 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 考虑一阶逻辑，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$，这里，P_{ij} 是有 i 个元的谓词中的第 j 个. 例如 P_{22} 就是二元谓词中的第 2 个. 考虑公式 $\phi = \exists x \forall y P_{22}(x, y)$, $\psi = \forall y \exists x P_{22}(x, y)$.
   (1) 证明：$\phi \to \psi$ 是有效的，即对于任意解释 I，都有 $I \vDash \phi \to \psi$.
   (2) 给一个解释 I，说明 $\psi \to \phi$ 不是有效的.
2. (10 分) 考虑 ZFC 集合论，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$ 以及 $\in, =$.
   (1) "存在且唯一"的符号是 $\exists!$，请用 ZFC 公式给出它的定义. 也就是说，给一个公式 $\phi(x, A)$，使得 $\phi(x, A)$ 表示 $\exists! x A(x)$，读作"存在唯一的 x 使 $A(x)$ 成立".
   (2) 利用第一问的记号，给出二元关系 R 是从集合 X 到集合 Y 的函数关系的 ZFC 公式定义.
   提示：第二问的公式中允许使用集合论的常用符号，例如交 $\cap$、并 $\cup$、包含 $\subseteq$、笛卡尔积 $\times$、序对 (x, y)、子集符号 $\{x \in X : \phi(x)\}$，幂集符号 2^X 等.
3. (5 分) 回忆以下三个概念：
   - 满足 ZF 公理系统无穷公理的集合 S 称为*归纳集*，即 $\varnothing \in S$ 并且如果 $x \in S$ 就一定有 $x \cup \{x\} \in S$.
   - 自然数集 $\mathbb{N}$ 是最小的归纳集，即如果 $Y \subseteq \mathbb{N}$ 是归纳集，那么 $Y = \mathbb{N}$.
   - 集合 T 被称为*传递集*如果由 $x \in T$ 可以推出 $x \subseteq T$.

   (1) 证明：如果 X 是归纳集，那么
   $$Z = \{x \in X : x \subseteq X\}$$
   是归纳集.
   (2) 证明：自然数集是传递集.
4. (4 分) 判断下列关于 Gödel 不完全性定理（incompleteness theorem）的陈述是否正确，并说明理由：
   (1) Gödel 不完全性定理表明，ZF 集合论（不包括选择公理）是不完全的，即存在 ZF 公式 ϕ，$\mathbf{Set} \vDash \phi$ 但是 $\mathbf{ZF} \nvdash \phi$，这里 $\mathbf{Set}$ 是集合论的模型，$\mathbf{ZF}$ 是 ZF 集合论公理.
   (2) NGB 是不同于 ZF 的一种公理化集合论，因为 NGB 集合论并没有包含 $\mathbf{ZF}$ 的所有公理，所以 Gödel 不完全性定理在 NGB 集合论上不一定成立.