期中考试提示和参考答案

2017 年 11 月 22 日

1.
考虑正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,因为$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$,所以级数收敛，所以$a_n \to 0$.

2.
注意到：

$$2 = \overline{\lim}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq \overline{\lim} a_n + \underline{\lim}\frac{1}{a_n} = \overline{\lim} a_n + \frac{1}{\overline{\lim} a_n}$$
$$2 = \overline{\lim}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq \overline{\lim}\frac{1}{a_n} + \underline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n + \frac{1}{\underline{\lim} a_n}$$

所以有$(\overline{\lim} a_n > 0, \underline{\lim} a_n > 0)$：

$$(\overline{\lim} a_n)^2 - 2\overline{\lim} a_n + 1 \leq 0$$
$$(\underline{\lim} a_n)^2 - 2\underline{\lim} a_n + 1 \leq 0$$

所以有：

$$\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = 1$$

所以：

$$\lim a_n = 1$$

3.
(1)
注意到：

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^p = (e^{\frac{\ln n}{n}} - 1)^p \to (\frac{\ln n}{n})^p$$

所以当$p \geq 1$时，发散；当$p < 1$时，收敛。

(2)

利用：

$$\ln n + C_1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + C_2, 0 < C_1, C_2 < +\infty,\text{充分大的n}$$

可知，对于$\forall \alpha > 0$, $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^\alpha}$单调递减(充分大的n)且趋于0所以原级数收敛（交错级数判别法）。

若$\alpha > 1$,则因为级数$\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$和$\sum \frac{C_2}{n^\alpha}$均收敛，所以原级数绝对收敛。

若$\alpha \leq 1$,则因为对充分大的n, $\frac{\ln n + C_1}{n^\alpha} > \frac{B}{n^\alpha}$, B为常数,所以原级数条件收敛。

4.

考虑其前N项和，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{N} a_n)^{\frac{1}{2}}$$

有界，所以级数收敛。

5.

因为a_n单调下降且趋于0，所以$\frac{1}{a_n}$单调上升趋于无穷。

$$\lim \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim \frac{2n-1}{\frac{1}{a_n}} = 2 \lim \ n a_n = 0$$

6.

考虑到:

$$\frac{1}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2})$$

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$,所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}) = \frac{1}{3}(\ln 2 + \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}$$

7.

令$F(x) = \int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2})dt$,则

$$F''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},\text{收敛半径为1}$$

所以

$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n+2)(2n)!!}x^{2n+2}$,收敛半径与$F''$的相同，为1

8.

(1)

令$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^6}{(1+x^6)^n}$,则

$$f(0)=0$$
$$f(x)=1+x^6, 0<x\leq 1$$

f(x)不连续，所以级数不一致收敛。

(2)

由于

$$|\frac{\cos(nx)}{n^2+1}|\leq\frac{1}{n^2+1}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛，所以由优级数判别法，原级数一致收敛。

9.

充分性:

考虑到$|\sin x|\leq|x|$,所以:

$$|\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}|\leq\frac{1}{1+nx^2}\frac{|x|}{n^\alpha}$$

进一步，因为$1+nx^2\geq 2\sqrt{n}|x|$,所以

$$|\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}|\leq\frac{1}{1+nx^2}\frac{|x|}{n^\alpha}\leq\frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

如果$\alpha>\frac{1}{2}$,则由优级数判别法原级数一致收敛。

必要性:

由Cauchy收敛原理，对任意的ϵ,对充分大的N，对任意的x（属于有限区间），有

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}|<\epsilon$$

取$x = N^{\alpha-1}$,则

$$\epsilon > |\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{1+nN^{2\alpha-2}} \sin\left(\frac{1}{N}(\frac{N}{n})^{\alpha}\right)| > \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{1+2N^{2\alpha-1}} \sin\left(\frac{1}{N}(\frac{1}{2})^{\alpha}\right)$$
$$= \frac{N}{1+2N^{2\alpha-1}} \sin\left(\frac{1}{N}(\frac{1}{2})^{\alpha}\right) \approx \frac{1}{2^{\alpha+1}N^{2\alpha-1}}$$

只有当$\alpha > \frac{1}{2}$时，上式才可能成立。证毕。