

北京大学数学学院期中考试试题

2014 - 2015 学年 第一学期

考试科目: 数学分析 考试时间: 14 年 11 月 17 日

姓 名: 学 号:

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (10') 设 D 和 Ω 为 R^n 内的两个不交的闭区域, 且 D 是一个有界集合. 证明: D 与 Ω 的距离 $d(D, \Omega)$ 满足 $d(D, \Omega) = d(\partial D, \partial \Omega) > 0$.

2. (10') 求极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(|x| + y^2)^{\frac{1}{2}} \tan(xy)}{x^2 + y^2}.$$

3. (10') 求 $f(xy, x \sin y, x)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, 其中 f 是一个 C^2 函数.

4. (15') 设 $f(x, y) = \sin(x^2 - 2x)e^{x+y^2-2y}$, 求 $f(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处的所有四阶偏导数.
5. (15') 对 $F(x, y) = 0$ 叙述相应的隐函数存在定理; 假定 $F(x, y)$ 是一个 C^2 函数, 求它确定的隐函数 $y = f(x)$ 的二阶导数.
6. (10') 设 $F(x, y, z)$ 是 R^3 上的一个 k (其中 k 是一个正整数) 次齐次函数, 即对于 $\forall (x, y, z) \in R^3$ 和 $\forall t > 0$ 满足 $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$. 再假定对于 $\forall (x, y, z) \in R^3$, $F'(x, y, z)$ 均为非零向量. 证明: 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在所有点的切平面过一个固定点.
7. (10') 试求由方程 $x^2 + y^2 - 2xy + y^4 = 1$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的极值.
8. (10') 设函数 $\frac{z}{y} = f(x, y)$ 在区域 D 内处处存在两个偏导数且这两个偏导数在 D 有界, 试问 $f(x, y)$ 在 D 内是否一致连续, (说明理由).
9. (10') 试构造一个定义在 R^3 上的函数 $f(x, y, z)$, 使得它同时满足下列条件:
- (1) $f(x, y, z)$ 在 $(0, 0, 0)$ 处具有各个偏导数;
 - (2) $f(x, y, z)$ 在 $R^3 \setminus (0, 0, 0)$ 是 C^1 函数;
 - (3) $f(x, y, z)$ 在 $(0, 0, 0)$ 处不连续.