# 课程名称：数学分析（二）

2017-2018 学年第（2）学期期末　　　　　　　　　　本试卷共 **4** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （9 分）下列说法中正确的是（　　　　　），错误的是（　　　　　　）

   a) 若当可测集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 的子集必定在 $\mathbb{R}^3$ 中若当可测；

   b) 若 $f(x,y,z)$ 在若当可测集 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上可积，而闭方块 $Q\supset\Omega$，则 $f(x,y,z)\ \chi_\Omega(x,y,z)$ 在 $Q$ 上必定可积；

   c) 闭方块 $Q\subset\mathbb{R}^3$ 上连续函数 $f(x,y,z)$ 的下积分必定与上积分相等。

2. （16 分）两点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ 间距离为 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+3(z_1-z_2)^2}$，用拉格朗日乘子法求点 $(3,4,5)$ 到圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的距离，给出取得该距离的柱面上点的坐标。

3. （45 分）计算下列各式（如不存在简要说明理由）：

   a) $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} 2018x^2+6xy+26y^2\ d(x,y)$；

   b) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x}{x} d(x,y)$，其中 $D$ 为由直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成的区域；

   c) $\displaystyle\oint_\Gamma (x+y)ds$ 其中 $\Gamma$ 为以 $O(0,0),A(2,0),B(0,3)$ 为顶点的三角形（逆时针方向）；

   d) 求 $\displaystyle\oiint_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧；

   e) $\displaystyle\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)d(x,y,z)$；（a,b,c>0）.

4. （30 分）对于旋转抛物面 $f(x,y,z)=z-(x^2+y^2)=0$ 和其上的一点 $P=\left(0,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi^2}{4}\right)$：

   a) 求 $P$ 点处的单位外法线向量和切平面；

   b) 按照定义求 $P$ 点处的 $\nabla f,\nabla\cdot(\nabla f),\nabla\times(\nabla f)$；

   c) 对于该旋转抛物面上的曲线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t^2$，求 $P$ 点处的 $\underline{T},\underline{N},\underline{B},\kappa,\tau$。

1. （9 分）下列说法中正确的是（ bc），错误的是（a）

2. （16 分）两点$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$间距离为$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+3(z_1-z_2)^2}$，用拉格朗日乘子法求点$(3,4,5)$到圆柱面$x^2+y^2=1$的距离，给出取得该距离的柱面上点的坐标。

解：令$F(x,y,z;\lambda)=(x-3)^2+(y-4)^2+3(z-5)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$，（4 分）则临界点满足

$$\begin{aligned}
F_x&=2(x-3)+2\lambda x=0,\\
F_y&=2(y-4)+2\lambda y=0,\\
F_z&=6(z-5)=0,\\
F_\lambda&=x^2+y^2-1=0.
\end{aligned}$$
（6 分）

解得$x=\dfrac{3}{\lambda+1},y=\dfrac{4}{\lambda+1},z=5,$以及$(\lambda+1)^2=25.$

于是，$\lambda=4$或$-6$，相应的$(x,y,z)=(\pm0.6,\pm0.8,5)$，计算可知 $d$ 分别为 4 和 6，因此前者给出了点$(3,4,5)$到圆柱面的距离，且在点$(0.6,0.8,5)$处取到。（6 分：缺根扣 3 分）

3. （45 分）

a)
$$\begin{aligned}
&\iint_{[a,b]\times[c,d]} 2018x^2+6xy+26y^2\; d(x,y)\\
&=\frac{2018}{3}x^3\Big|_a^b\, y\Big|_c^d+\frac{3}{2}x^2\Big|_a^b\, y^2\Big|_c^d+\frac{26}{3}x\Big|_a^b\, y^3\Big|_c^d\\
&=\frac{2018}{3}(b^3-a^3)(d-c)+\frac{3}{2}(b^2-a^2)(d^2-c^2)+\frac{26}{3}(b-a)(d^3-c^3)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
&\iint_D\frac{\sin x}{x}d(x,y)=\int_0^1dx\int_{x^2}^x\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx\\
&=\left(-\cos x+x\cos x-\sin x\right)_0^1=1-\sin1
\end{aligned}$$
；

c) $\oint_\Gamma(x+y)ds=\int_0^2xdx+\int_0^2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}\left(x+3-\frac{3}{2}x\right)dx+\int_0^3ydy=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{13}$；（符号错扣 6 分）

d) $\oiint_S xdy\Lambda dz+ydz\Lambda dx+zdx\Lambda dy=-\iiint_{x^2+y^2+z^2\le1}\nabla\cdot(x,y,z)d(x,y,z)=-4\pi.$（符号错扣 4 分）

e) 作变量变换$x=ar\cos\varphi\cos\theta,y=br\sin\varphi\cos\theta,z=cr\sin\theta$，则 Jacobian 为

$$\begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\theta & -ar\sin\varphi\cos\theta & -ar\cos\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\cos\theta & br\cos\varphi\cos\theta & -br\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = abcr^2\cos\theta$$，（4 分）

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} r^2 abcr^2\cos\theta\, d(r,\varphi,\theta) = \frac{4\pi}{5}abc$$.（5 分）

4. （30 分）

a) $P$ 点处的法向量为 $(-2x,-2y,1)|_P = (0,-\pi,1)$，因此单位外法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{1+\pi^2}}(0,-\pi,1)$，（4 分，符号错扣 1 分）切平面为 $-\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\pi + z - \frac{\pi^2}{4} = 0$，即 $z - \pi y + \frac{\pi^2}{4} = 0$；（4 分）

b) $\nabla f = (0,-\pi,1), \nabla\cdot(\nabla f) = -2-2 = 4, \nabla\times(\nabla f) = (0,0,0)$；（错一个扣 3 分）

c)

$$t = \frac{\pi}{2},$$

$$\underline{r}' = (-t\sin t + \cos t, t\cos t + \sin t, 2t)_P = \left(-\frac{\pi}{2}, 1, \pi\right),$$

$$\underline{r}'' = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 2)_P = \left(-2, -\frac{\pi}{2}, 2\right),$$

$$\underline{r}''' = (t\sin t - 3\cos t, -t\cos t - 3\sin t, 0)_P = \left(\frac{\pi}{2}, -3, 0\right)$$

$$\underline{T} = \frac{\underline{r}'}{\|\underline{r}'\|} = \frac{2}{\sqrt{4+5\pi^2}}\left(-\frac{\pi}{2}, 1, \pi\right),$$

$$\underline{r}'\times\underline{r}'' = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\frac{\pi}{2} & 1 & \pi \\ -2 & -\frac{\pi}{2} & 2 \end{vmatrix} = \left(2+\frac{\pi^2}{2}, -\pi, 2+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{r}'\times\underline{r}''}{\|\underline{r}'\times\underline{r}''\|} = \frac{1}{\sqrt{8+4\pi^2+\frac{5}{16}\pi^4}}\left(2+\frac{\pi^2}{2}, -\pi, 2+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\underline{N}=\underline{B}\times\underline{T}=\frac{2}{\sqrt{4+5\pi^2}\sqrt{8+4\pi^2+\frac{5}{16}\pi^4}}\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 2+\frac{\pi^2}{2} & -\pi & 2+\frac{\pi^2}{4}\\ -\frac{\pi}{2} & 1 & \pi\end{vmatrix}$$ （8 分，未在 P 点给出各扣 1 分）

$$=\frac{2}{\sqrt{\left(4+5\pi^2\right)\left(8+4\pi^2+\frac{5}{16}\pi^4\right)}}\left(-2-\frac{5}{4}\pi^2,-3\pi-\frac{5}{8}\pi^3,2\right)$$

$$\kappa=\frac{\|\underline{r}'\times\underline{r}''\|}{\|\underline{r}'\|^3}=\frac{8\sqrt{8+4\pi^2+\frac{5}{16}\pi^4}}{\sqrt{\left(4+5\pi^2\right)^3}};$$

$$(\underline{r}',\underline{r}'',\underline{r}''')=\begin{vmatrix}-\frac{\pi}{2} & 1 & \pi\\ -2 & -\frac{\pi}{2} & 2\\ \frac{\pi}{2} & -3 & 0\end{vmatrix}=4\pi+\frac{\pi^3}{4}$$ （6 分）

$$\tau=\frac{(\underline{r}',\underline{r}'',\underline{r}''')}{\|\underline{r}'\times\underline{r}''\|^2}=\frac{4\pi+\frac{\pi^3}{4}}{8+4\pi^2+\frac{5}{16}\pi^4}$$