北京大学数学科学学院期末试题

2019 - 2020 学年 第一学期

考试科目: 数学分析 III　　考试时间: 2020 年 01 月 08 日

姓　名: ________　　学　号: ________

本试题共 十 道大题满分 100 分

1. (10') 请叙述一个一元函数的定理，但它在二元函数的情形不成立和一个二元函数的定理，但它在一元函数的情形不成立.

2. (10') 试构造一个定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数 $f(x,y)$ 使得它同时满足以下条件： $f(x,y)$ 在 D 可积并且存在一个在 D 内稠密的集合 E, 当 $(x_0,y_0)\in E$ 时 $\lim_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 与 $\lim_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 都不存在. (此题只要写出符合条件的函数即可)

3. (10') 设 $f(x,y)$ 是 R^2 中的连续函数,改变 $\int_0^2 dz\int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}dy\int_{-\sqrt{2z-y^2}}^{\sqrt{2z-y^2}}f(x,y,z)dx$ 的积分顺序为 $\int_*^* dx\int_*^* dy\int_*^* f(x,y,z)dz$.

4. (10') 讨论 $\int\int_{R^2}\frac{e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1}dxdy$ 的敛散性.

5. (10') 求 $\int\int_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$ 的上侧。

6. (10') 计算曲线积分 $\int_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 其中 Γ 是一条光滑曲线，它在极坐标下具有形式 $r=r(\theta)>0, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, 取参数增加的方向.

7. (10') 设 $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. 求证 $u(x,y)=arctan\frac{y}{x}$ 是 D 内的调和函数并求它在 D 内的共轭调和函数. (设 $u(x,y)$ 是 D 内的调和函数，若调和函数 $v(x,y)$ 在区域 D 内处处满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, 则称 $v(x,y)$ 是 D 内 $u(x,y)$ 的共轭调和函数)

8. (10') 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 试求满足 $\mathbf{grad}(rf(r))=\mathbf{0}$ 的 C^1 函数 $f(r)$.

9. (10') 已知 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 计算积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos xdx$.

10. (10') 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}(1+\frac{y^2}{x})^{-x}dy$.