环论

请在 11 月 2 日课前提交纸质作业.

1. (5 分) 给定一个域 $\mathbb{F}$，证明 $M_n(\mathbb{F})$ 是单环（即不存在非平凡理想）.

2. (5 分) 给定一个环 R 以及它的两个理想 $I < J$，满足 $R = I + J$. 证明

$$R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$$

   Remark: 这是中国剩余定理的推广. 当 $R = \mathbb{Z}$，$I = p\mathbb{Z}$，$J = q\mathbb{Z}$ 便转化为中国剩余定理.

3. (10 分) 给定一个环 R 以及它的一个理想 I. R/I 是域可以推出 I 是极大理想. 这里我们证明相反方向.

   (1) 如果额外知道 R 是（含有单位元的）交换环，那么 I 是极大理想可以推出 R/I 是域.

   Remark: 作为推论，如果交换环 R 没有非平凡理想，那么 R 一定是域.

   (2) 一个理想 I 被称作 R 的素理想，当且仅当 $\forall a \in R, \forall b \in R, ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$. 证明（含有单位元的）交换环 R 的任何一个极大理想都是素理想.

4. (6 分) 考虑环的两个性质

   - ACC 指不存在理想的无穷上升列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$
   - DCC 指不存在理想的无穷下降列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq \ldots$

   课上证明 PID 是 UFD 时，实际就是证明 PID 环必满足 ACC.

   (1) 给出一个满足 ACC 但不满足 DCC 的整环的例子。

   (2) 证明满足 DCC 的整环（无零因子含单位元的交换环）一定满足 ACC。

   Remark: 实际上该环一定是域，所以满足 ACC。