数院 18 秋数学分析 3 期中考 甘少波

数学分析III期中试题

本试题共 **8** 道大题，满分 100 分

1. （20 分，每题2分）判断下列命题的真假（在答题纸上按顺序写清楚题号，并指明真假，无需给出理由）

   (a) $\mathbb{R}^2$中非空开集的闭包一定不是开集。

   (b) 设$E \subset \mathbb{R}^2$, 则有$\partial(\partial E) = \partial E$.

   (c) 可数多个紧集的交为紧集。

   (d) 若$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$连续且为满射，则$\mathbb{R}^2$中的任一开集在$f$下的像为$\mathbb{R}^2$中的开集。

   (e) 若$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$连续可微并且在任一点处的Jacobi行列式都非零，则$\mathbb{R}^2$中的任一开集在f下的像为$\mathbb{R}^2$ 中的开集。

   (f) 若$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在$(0,0)$处所有方向导数都存在，则$f$在$(0,0)$处连续。

   (g) 若$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在$(0,0)$处可微，则$f$在$(0,0)$处连续。

   (h) 若$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$在$(0,0)$处可微，$f'(0,0) = (3,4)$, 则$f$在$(0,0)$处的任一方向导数都位于闭区间$[-5,5]$中。

   (i) 若映射$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$连续可微，则对任意的$x, y \in \mathbb{R}^2$, 存在$\xi \in \mathbb{R}^2$, 使得 $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)^T$.

   (j) 若映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$连续可微，则对任意的$s, t \in \mathbb{R}$, 存在$\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $f(t) - f(s) = f'(\xi)(t - s)$.

2. （10 分）设函数$f(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ a, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$. 令$E = \{(x,y) : y > f(x)\}$. 当$a$取哪些值时，$E$为$\mathbb{R}^2$中的开集？

3. （15 分）设$D \subset \mathbb{R}^2$为一区域，二元函数$z = f(x,y) : D \to \mathbb{R}$ 具有两个连续的一阶偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. 若曲面$z = f(x,y)$在任一点处的切平面都平行于平面$x + y + z = 0$, 证明存在常数$c \in \mathbb{R}$, 使得$f(x,y) = c - x - y$.

4. （10 分）求点$(1,0,0)$到曲线$\begin{cases} x^2+2y^2+2z^2=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$的最小距离与最大距离（须简要说明计算依据）。

5. （10 分）设二元函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & 当\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & 当\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$ $\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$

证明$f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续但不可微。

6. （10 分）计算累次积分

$$\int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2z-y^2-z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x.$$

7. （10 分）设$D\subset\mathbb{R}^2$由$x=0,y=0$以及$x+y=1$围成。计算瑕积分

$$\iint\limits_D \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（须简要说明瑕积分收敛的理由）

8. （15 分）设三元函数$F(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某个邻域$U(P_0,\delta_0)$ 上有定义（这里$\delta_0>0$为一给定常数），并且F在该邻域上为C^2的，$\dfrac{\partial F}{\partial z}(P_0)\neq 0$. 设$z=f(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数，满足$f(x_0,y_0)=z_0$.

(a) 若(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极值点，则$\dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0)=0$ 且$\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0)=0$.

(b) 若$\dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0)=0$ 且$\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0)=0$, 并且矩阵

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为正定矩阵，则(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极值点。