

数学分析 (III) 2016 年期末考试 (伍胜健)

January 12, 2017

1. (10 分) 函数 $f(x, y)$ 在可求面积的有界闭区域 D 上有定义, $f(x, y)$ 在 D 上的不连续点集不可求面积, 试问 $f(x, y)$ 是否一定不可积? 说明理由.

2. (10 分) 化下列累次积分为 $dx dy dz$ 的顺序.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_{-\sqrt{2z-z^2}}^{\sqrt{2z-z^2}} dy \int_{-\sqrt{2z-y^2-z^2}}^{\sqrt{2z-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx$$

3. (10 分) 设 $f(x, y, z)$ 在 \mathbb{R}^3 上有二阶连续偏导数, 计算 $\text{rot}(\text{grad} f)$.

4. (10 分) 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 设区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq 1\}$, 试问 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 是否一定收敛? 说明理由.

5. (10 分) 计算第一型曲面积分

$$\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$$

其中曲面 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a > 0, a \neq R$.

6. (10 分) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S (x^4 + y^2 \sin z) dy dz + (y^2 + x \cos z^2) dz dx + (z^3 + x^2 y) dx dy$$

其中曲面 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

7. (20 分) 设 $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. (1) 证明 u 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上的调和函数. (2) 求 u 在第一象限内的共轭调和函数. (3) 找一个极大区域 D 使得 u 在 D 上有共轭调和函数, 但在任意真包含 D 的区域上不存在共轭调和函数.

8. (10 分) 讨论含参积分 $\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} e^{\sin xy} \cos xy dy$ 在 \mathbb{R} 上的一致收敛性.

9. (10 分) 函数 $f(y)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试讨论 $I(x) = \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy$ 在 \mathbb{R} 上的连续性.