表 1: Caption

X/Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.2	b	0.1
1	0	0.1	c

Homework 3

Name: 柯宇斌, ID: 2200013213

Problem 1 (10') . 离散型随机向量 (X, Y) 的分布列如下表. 已知 $P(X \geq 0) = 0.6$，$P(X \neq 0|Y \neq 0) = \frac{5}{8}$.

求

(1)a, b, c 的值.

(2) X, Y 各自的边缘分布列.

(3) $X + Y$ 的分布列. ◀

Answer. (1) 由定义，有

$$\begin{cases} a + 0.2 = 1 - 0.6 \\ \frac{a+0.2+0+c}{a+0.2+0.2+0.1+0+c} = \frac{5}{8} \\ a + 0 + 0.2 + 0.2 + b + 0.1 + 0 + 0.1 \end{cases}$$

所以有 $\begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.1 \\ c = 0.1 \end{cases}$

(2) 如下（表格不会）

$$\begin{cases} P(X = -1) = 0.4 \\ P(X = 0) = 0.4 \\ P(X = 1) = 0.2 \end{cases} \quad \begin{cases} P(Y = -1) = 0.4 \\ P(Y = 0) = 0.2 \\ P(Y = 1) = 0.4 \end{cases}$$

(3) 如下（表格不会）

$$\begin{cases} P(X + Y = -2) = 0.2 \\ P(X + Y = -1) = 0.2 \\ P(X + Y = 0) = 0.3 \\ P(X + Y = 1) = 0.2 \\ P(X + Y = 2) = 0.1 \end{cases}$$ ◁

Problem 2 (10') . 证明如下两个问题

(1) 设随机向量 (X, Y, Z) 的密度函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^3}(1 - \sin x \sin y \sin z, 0 \leq x, y, z \leq 2\pi \\ 0, \end{cases}$$

证明 X, Y, Z 两两独立但不相互独立

(2) 设随机向量 (X, Y, Z) 的密度函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, |x|, |y| \leq 1 \\ 0, \end{cases}$$

证明 X, Y 不独立但 X^2, Y^2 独立 ◀

Answer. (1) 由定义，有 (这里的 m,n 都在 $[0, 2\pi]$ 之间)

$$f_X(m) = f_Y(m) = f_Z(m) = \int_{x,y\in[0,2\pi]} f(x,y,m)dxdy = \frac{1}{2\pi}$$

$$f_{X,Y}(m,n) = \int_{z\in[0,2\pi]} f(m,n,z)dz = \frac{1}{4\pi^2}$$

所以 $f_{X,Y}(m,n) = f_X(m)f_Y(n)$,

但 $f_{X,Y,Z}(m,n,t) \neq f_X(m)f_Y(n)f_Z(t)$

结合对称性，得证

(2) 由定义有 (这里的 m,n 都在 $(-1, 1)$ 之间)

我们只考虑在分布函数的部分，一些边缘情况 (f 恒为 0 的情况) 不考虑

$$F_{X,Y}(m,n) = \int_{x\in(-1,m),y\in(-1,n)} f(x,y)dxdy = \frac{1}{4}(m+1)(n+1) - \frac{1}{8}(m^2-1)(n^2-1)$$

$$F_X(m) = F_Y(m) = F_{X,Y}(m,1) = \begin{cases} 0, m \leq 0 \\ \frac{m+1}{2}, -1 < m < 1 \\ 1, m \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{X^2}(m) = F_{Y^2}(m) = F_X(\sqrt{m}) - F_X(-\sqrt{m}) = \begin{cases} 0, m \leq -1 \\ \sqrt{m}, 0 < m < 1 \\ 1, m \geq 1 \end{cases}$$

$$F_{X^2,Y^2}(m,n) = \int_{x\in(-\sqrt{m},\sqrt{m}),y\in(-\sqrt{n},\sqrt{n})} f(x,y)dxdy = \begin{cases} 0, m \leq -1 \\ \sqrt{mn}, 0 < m < 1 \\ 1, m \geq 1 \end{cases}$$

所以 $F_{X,Y}(x,y) \neq F_X(x)F_Y(y)$ 但 $F_{X^2,Y^2}(m,n) = F_{X^2}(m)F_{Y^2}(n)$ ◁

Problem 3 (10') . 设随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}C(|xy|+\frac{xy}{2}),|x|,|y|<1,\\0,\end{cases}$$

(1)1 求 C 的值；计算 X,Y 各自的边缘密度.

(2) X,Y 是否相互独立?

(3) X^2+Y^2, X^2-Y^2 的概率密度是什么？是否相互独立? ◀

Answer. 本题的分布函数只考虑 $f_{X,Y}(x,y)$ 不恒为 0 的部分

(1)$F_{X,Y}(m,n)=\int_{-1\le x\le m,-1\le y\le n}f_{X,Y}(x,y)dxdy=C(\frac{(1+m|m|)(1+n|n|)}{4}+\frac{(m^2-1)(n^2-1)}{8})$

而由概率的定义，有 $F_{X,Y}(1,1)=1$，故有 $C=1$

而 $F_X(m)=F_{X,Y}(m,1)=\frac{1+m|m|}{2}$, 从而 $f_X(m)=|m|$

结合对称性,$f_X(m)=f_Y(m)=\begin{cases}|m|,|m|<1\\0,others\end{cases}$

(2) 显然 $f_{X,Y}(m,n)\neq f_X(m)f_Y(n)$ ，所以不相互独立

(3) $F_{X^2+Y^2}(m)=\int_0^{\sqrt{m}}\int_0^{2\pi}f_{X,Y}(\sqrt{r}\cos\theta,\sqrt{r}\sin\theta)drd\theta=\begin{cases}2m,0\le m\le 1\end{cases}$ ◁

Problem 4 (10') . 设 Z 是取值为正整数的随机变量, 在集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ Z\}$ 中均匀随机取一个数 X，记 R 是集合 $\{X+1,\ X+2,\ .\ .\ .\ ,\ Z\}$ 的大小，即比 X 大的数的个数. 设随机变量 U 与 Z 独立，且 $U\quad U(0,\ 1)$，问 R 与 $[UZ]$ 是否同分布?（$[x]$ 表示 x 的整数部分） ◀

Answer. 显然取值都是 0 到 $Z-1$ 之间的整数

设取出来的数是 M

$P(R=x)=\sum_z P(Z=z)P(M=z-x|Z=z)=\sum_{z>x}P(Z=z)\frac{1}{z}$

$P([UZ]=x)=P(x\le UZ<x+1)=\sum_z P(Z=z)P(\frac{x}{z}\le U<\frac{x+1}{z})=\sum_{z>x}P(Z=z)\frac{1}{z}$

所以是同分布的 ◁

Problem 5 (10') . 称取值为正整数的离散型随机变量 ξ 服从以 $(n,\ p)$ 为参数的帕斯卡分布，如果它的分布列为 $P(\xi=r)=\begin{cases}\binom{r-1}{n-1}p^nq^{r-n},r=n,n+1,\dots,\\0,others\end{cases}$ 设随机变量 $X,\ Y$ 相互独立，且分别服从参数为 $(1,\ p)$ 和 $(2,\ p)$ 的帕斯卡分布，求证：$X+\ Y$ 服从参数为 $(3,\ p)$ 的帕斯卡分布 ◀

Answer. 显然 $X+Y$ 的取值只能为大于等于 3 的正整数，所以有

当 $r \geq 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} P(X+Y=r) &= \sum_{i=0}^{r-3} P(X=i+1)P(Y=(r-3-i)+2) \\ &= \sum_{i=0}^{r-3} \binom{i}{0} p^1 q^i \binom{r-3-i+1}{1} p^2 q^{r-3-i} \\ &= \sum_{i=0}^{r-3} \binom{i}{0} \binom{r-2-i}{1} p^3 q^{r-3} \\ &= \binom{r-1}{2} p^3 q^{r-3} \end{aligned} \tag{1}$$

得证 ◁

Problem 6 (10') . 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 p 的几何分布. 令 $Z = max\{X, Y\}$. 求

(1)(X, Z) 的联合概率分布

(2)X 关于 Z 的条件概率分布 ◀

Answer. 本题只讨论正整数 (所有的 m, n, k 都是正整数

(1) 不难得知 $P(X=k) = P(Y=k) = (1-p)^{k-1}p$,

$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - (1-p)^k$

当 $m = n$ 时,

$P_{X,Z}(X=m, Z=n) = P(X=m)P(Y \leq m) = p(1-p)^{m-1}(1-(1-p)^m)$

当 $m < n$ 时

$P_{X,Z}(X=m, Z=n) = P(X=m)P(Y=n) = p^2(1-p)^{m+n-2}$

综上

$$P_{X,Z}(m,n) = \begin{cases} p(1-p)^{m-1}(1-(1-p)^m), m=n>0 \\ p^2(1-p)^{m+n-2}, 0<m<n \\ 0, others \end{cases}$$

(2) 注意到 $P(Z=n) = P(X \leq n)P(Y \leq n) - P(X \leq n-1)P(Y \leq n-1)$

所以 $P(Z=n) = p(1-p)^{n-1}(2-(1-p)^{n-1}-(1-p)^n)$ 结合 (1), 有

$$P_{X|Z}(m|n) = \begin{cases} \frac{1-(1-p)^n}{2-(1-p)^n-(1-p)^{n-1}}, m=n>0 \\ \frac{p(1-p)^{m-1}}{(2-(1-p)^{n-1}-(1-p)^n)}, 0<m<n \\ 0, others \end{cases}$$

◁

Problem 7 (10') . 设 $X_1, \ldots, X_n \sim i.i.d. U(0,1)$

(1) 令 $Y_n = min_{1\le i\le n}X_i$, Y_n 的分布函数为 $F_n(x)$. 对一切 $x\in R$, 计算 $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$

(2) 令 $Z = min\{n\in N^*|X_1+\cdots+X_n>1\}$. 求证:$P(Z>3)=\frac{1}{6}$ ◀

Answer. 不难有 $F(X)=A-Ae^{-x}(x>0)$. 由 $F(+\infty)=1$ 有 $A=1$.

(1) 当 $0<x<1$ 时 $F_n(x)=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)=1-(1-x)^n$

从而 $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)=\begin{cases}0, x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$

(2)

$$\begin{aligned}P(Z>3)&=P(X_1+X_2+X_3\le 1)\\&=\int_0^1\int_0^{1-m}\int_0^{1-m-n}P(X_1=m)P(X_2=n)P(X_3=t)dmdndt\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}\tag{2}$$

得证 ◁

Problem 8 (10') . 若 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$, 现在将 (ξ,η) 化为极坐标 (ρ,ϕ), 其中 $\xi=\rho\cos\phi, \eta=\rho\sin\phi(\rho\ge 0,\phi\in[0,2\pi]$. 试证 ρ,ϕ 是相互独立的. ◀

Answer. 当 $0\le r$ 时

$$\begin{aligned}f_{\rho,\phi}(r,\theta)&=f_\xi(r\cos\theta)f_\eta(r\sin\theta)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(r\cos\theta)^2}{2})*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(r\sin\theta)^2}{2})\\&=\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2})\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}f_\rho(r)&=\int_0^{2\pi}f_{\rho,\phi}(r,\theta)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2})d\theta\\&=\exp(-\frac{r^2}{2})\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}f_\phi(\theta)&=\int_0^{+\infty}f_{\rho,\phi}(r,\theta)dr\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2})dr\\&=\frac{1}{2\pi}\end{aligned}\tag{5}$$

从而

$$f_\phi(\theta)f_\rho(r)=f_{\rho,\phi}(r,\theta)$$

◁

Problem 9 (10') . 设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_1^2,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, 已知 (X,Y) 的联合密度为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65))$$

(1) 将 $f_{X,Y}(x,y)$ 写成二元正态分布定义中的密度的形式，指出 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_1^2$

(2) 写出边缘密度 $f_X(x)$

(3) 写出条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$ ◀

Answer. (1) $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))$

由此可见 $\mu_1=4,\mu_2=3,\sigma_1^2=1,\sigma_1^2=2$

(2)

$$\begin{aligned}
f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))dy\\
&=\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{1}{2}(x-4+y-3)^2)dy\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2)
\end{aligned}\tag{6}$$

(3)$f_{Y|X}(y|x)$

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x)&=f_{X,Y}(x,y)/f_X(x)\\
&=\frac{\frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x+y-7)^2)
\end{aligned}\tag{7}$$

◁

Problem 10 (10') . (1) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证几何分布的极限和指数分布的关系. ”.

(2) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证负二项分布的极限和伽马分布的关系（这里负二项分布的参数 r 限制为整数）. ◀

Answer. (1) 将单位时间 n 等分, 每次实验成功的概率为 $\frac{\lambda}{n}$, 耗时 $\frac{1}{n}$. 则第一次试验成功的时间满足几何分布. 我们有, 对任意 $x\in(0,1)$, 不妨记 $x=\frac{i}{n}$,(这在 n 趋于无穷大时是合适的)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}F(x)&=\lim_{n\to+\infty}P(X\le\frac{i}{n})\\
&=\lim_{n\to+\infty}1-(1-\frac{\lambda}{n})^i\\
&=\lim_{n\to+\infty}1-(1-\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{\lambda}*\frac{\lambda}{n}*i}\\
&=1-e^{-\frac{\lambda}{n}*i}\\
&=1-e^{-\lambda x}
\end{aligned}\tag{8}$$

这正是指数分布

(2) 将单位时间 n 等分, 每次实验成功的概率为 $\frac{\lambda}{n}$, 耗时 $\frac{1}{n}$. 则第 r 次试验成功时的时间. 这是一种负二项分布。我们同样记 $x=\frac{i}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leq \frac{i}{n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{i}{s} (\frac{\lambda}{n})^s (1-\frac{\lambda}{n})^{i-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} \lim_{n\to+\infty} \frac{(nx)!}{(nx-s)!} (\frac{1}{n})^s (1-\frac{\lambda}{n})^{i-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} \lim_{n\to+\infty} (x)(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})\ldots(x-\frac{s-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^{nx-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} x^s e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{9}$$

求导有

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} x^s e^{-\lambda x})' \\
&= -(\sum_{s=1}^{r-1} \frac{\lambda^s}{(s-1)!} x^{s-1} e^{-\lambda x} - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^{s+1}}{s!} x^s e^{-\lambda x}) \\
&= \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{10}$$

这就是伽玛分布 $\triangleleft$