作业一讲评

张质源

2024 年 3 月 8 日

概率的公理化定义

定义

在一个随机现象中，用来表示任一个随机事件 A 发生可能性大小的实数 (即比率) 称为该事件的概率，记为 $P(A)$，并规定

(1) 非负性公理：对任一事件 A，必有 $P(A) \geqslant 0$

(2) 正则 (或规范) 性公理：必然事件的概率 $P(S) = 1$

(3) 可列可加性：若有一列两两互不相容事件 (即 $\forall A_i : A_iA_j = \varnothing, \forall i \neq j$)，则有 $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_i P(A_i)$.

例

利用公理化概率论的三条性质，即非负性、规范性和可列可加性，证明下面三条公式：

(1) $P(\varnothing) = 0$.

(2) 对不相交事件 A 和 B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(3) (容斥公式) 对任意事件 A 和 B,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

证明.

设全集为 S.

(1) 令 $A_1 = S$, $A_i = \varnothing$, $i = 2, 3, \ldots$. 由可列可加性,

$$P(S) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(S) + \sum_{k=2}^{n} P(\varnothing).$$

因此 $P(\varnothing) = 0$.

$\square$

证明.

(2) 令 $A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_i = \varnothing,\ i = 3, 4, \ldots$. 由可列可加性,

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$= P(A) + P(B) + \sum_{k=2}^{n} P(\varnothing) = P(A) + P(B).$$

(3) 首先证明 $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$. 在前一问中取 B 为 $\bar{A}B$,

$$P(B) = P(AB \cup \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B).$$

类似地, $A \cup B = A \cup \bar{A}B$, 所以

$$P(A \cup B) = P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$\square$

例

证明: 在公理化概率论的定义中, 可列可加性等价于连续性和有限可加性. 这里有限可加性是指: 对于有限个互不相交的事件 $A_1, \cdots, A_n$, 成立

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n);$$

连续性是指: 对于一列事件 $A_1, A_2, \cdots$, 若

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots,$$

则

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

证明.

连续性 + 有限可加性 $\Rightarrow$ 可列可加性：考虑 $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$，有

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots,$$

因而

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

$\square$

证明.

可列可加性 $\Rightarrow$ 连续性 + 有限可加性: 令 $A_1 = A_2 = \cdots = \varnothing$, 有

$$P(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0.$$

令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$, 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

由于有限可加性成立, 所以对于 $X \supset Y$ 有 $P(X \backslash Y) = P(X) - P(Y)$. 对于 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 令 $C_1 = A_1$, $C_n = A_n \backslash A_{n-1}$, 则 C_n 两两不交, 所以

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = P(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n+1} \backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A$$

$\square$

随机事件和样本空间

例

假设箱子里有三个质地均匀大小相同的小球，一个是红色，一个是绿色的，还有一个是白色的. 从中均匀随机抽出一个小球. 针对下面两种情况，写出概率空间 $(S, \mathscr{F}, P)$ 并计算抽到白球的概率:

(1) 抽球者可以分辨三种颜色.

(2) 抽球者可以分辨白色，但无法分辨红色和绿色.

解. 设摸到红球为 R，摸到白球为 W，摸到绿球为 G. 在两问中都有 $S = \{R, W, G\}$.

(1) $\mathscr{F} = \{T : T \subseteq S\}$，即全体子集的集合. P 可以由 $P(\{k\}) = 1/3$ 并结合公理化的三个条件定义，其中 $k \in S$. $P(\{W\}) = 1/3$.

(2) $\mathscr{F} = \{T \subseteq S : R \in T \Leftrightarrow G \in T\}$，即 R 和 G 要么同时出现要么同时不出现. P 可由 $P(\{W\}) = 1/3$ 和 $P(\{R, G\}) = 2/3$ 并结合公理化的三个条件定义. $P(\{W\}) = 1/3$.

例

为“剪刀-石头-布”游戏造一个样本空间，定义有关事件，并考虑如何给定概率.

解. 样本空间 $S = \{$ (剪刀, 剪刀), (剪刀, 石头), (剪刀, 布), (石头, 剪刀), (石头, 石头), (石头, 布), (布, 剪刀), (布, 石头), (布, 布) $\}$.

以 (A_i, B_j) 表示甲、乙两人玩这游戏时，甲出手形 A_i，乙出手形 B_j，其中 $A_i, B_j, i, j = 1, 2, 3$，分别表示剪刀，石头，布三种手形.

定义事件 $\{$ 甲赢 $\} = \{$ (剪刀，布)，(布，石头)，(石头，剪刀) $\}$，类似可定义事件 $\{$ 乙赢 $\} = \{$ (剪刀, 石头), (石头, 布)，(布，剪刀) $\}$，事件 $\{$ 和局 $\} = \{$ (剪刀, 剪刀), (石头, 石头), (布, 布) $\}$.

我们可以认为样本空间中 9 个样本点是等可能出现的，定义 $P\{(A_i \quad B_j)\} = \frac{1}{9}, i, j = 1, 2, 3.$

于是，$P\{$ 甲赢 $\} = P\{$ 乙赢 $\} = P\{$ 和局 $\} = \frac{1}{3}$.

注

- 对一方而言，以等比例随机出剪刀，石头，布是最优策略. 双方都采用最优策略则出现上述等可能情况.
- 注意我们这里的样本空间包含了平局，也由此定义了三个事件，它们的概率均为 $\frac{1}{3}$. 有不少同学误认为甲乙赢得概率均为一半.

几何概率模型

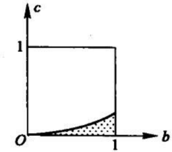
性质

- 样本空间：二维平面或者其它维空间的子集
- 对于事件 A（样本空间中的一个区域），对应的概率为: $P(A)=\frac{m(A)}{m(S)}$, $m(A)$ 表示区域 A 的面积.

例

从 $(0,1)$ 中随机地取二数 b 及 c, 试求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

解. 二次方程有实根的充要条件是判别式 $\Delta = b^2-4ac \geqslant 0$, 此处 $a=1$, 因此有实根的 (b,c) 落在下图所示阴影区域中.



积分可得概率

$$P(\text{方程}x^2+bx+c=0\text{有实根}) = \frac{\int_0^1 \frac{b^2}{4}\mathrm{d}b}{1} = \frac{1}{12}.$$

古典概型 1

例

进行一个**独立**的无穷序列的重复试验，每次试验的成功概率为 p，失败的概率为 $1-p$，试求如下概率：

(1) 前 n 次试验中**至少**成功 1 次.

(2) 前 n 次试验中**恰好**成功 k 次.

(3) 已知前 $m(1 \le m \le k)$ 次成功 $l(1 \le l \le m)$ 次的前提下，前 n 次试验中**恰好**成功 k 次

(4) 前 n 次所有试验结果都成功.

(5) 无穷序列的全部试验结果都成功.

解.

(1) 全失败概率为 $(1-p)^n$, 因此至少成功一次是 $1-(1-p)^n$.

(2) 先从 n 次中选出成功的 k 次有 C_n^k 中方法, 确定了 n 次中每次成功与否后概率均为 $p^k(1-p)^{n-k}$, 故结果为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

(3) 后 $n-m$ 次中需要恰有 $k-l$ 次成功, 转化为上一问可求得结果 $C_{n-m}^{k-l}p^{k-l}(1-p)^{n-m-k+l}$.

(4) 由于每次试验成功概率为 p 且独立, 显然结果为 p^n.

(5) 令 E_i 表示第 i 次成功. 利用概率的连续性, 有:

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 & p<1 \\ 1 & p=1 \end{cases}$$

注

概率的取值范围是 0 到 1, 本题第 (5) 问中有许多同学忽略了 $p=1$ 的情况.

事件的独立性

定义

- 对于事件 A, B, 当 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ 满足, 则事件 A 和 B 相互独立.
- 若事件 $\{A_i\}$ 任意 k 个都独立, 则事件 $\{A_i\}$ 相互独立. 例如 A, B, C 相互独立需满足

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B), \\
P(AC) &= P(A)P(C), \\
P(BC) &= P(B)P(C), \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C),
\end{aligned}
$$

性质

- 事件 A 和 B 独立等价于 $P(A \mid B) = P(A)$ 或 $P(B \mid A) = P(B)$
- 事件 A 和 B 独立 $\Leftrightarrow$ 事件 $\overline{A}$ 和 B 独立 $\Leftrightarrow$ 事件 A 和 $\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow$ 事件 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 独立

例

甲乙两人进行石头剪刀布，设两人独立等可能地选择石头、剪刀、布之一的手势. 定义事件 $A=\{$甲出石头$\}$，$B=\{$乙出剪刀$\}$，$C=\{$甲赢$\}$. 求证：A,C 和 B,C 分别相互独立，但 A,B,C 不相互独立.

解. 定义样本空间为 $S=\{(x,y)\mid x,y\in\{0,2,5\}\}$，其中 x,y 分别对应甲、乙的手势，$0,2,5$ 分别指石头、剪刀、布.

依题意，$A=\{(0,0),(0,2),(0,5)\}$，$B=\{(0,2),(2,2),(5,2)\}$，$C=\{(0,2),(2,5),(5,0)\}$. 所以 $AC=BC=ABC=\{(0,2)\}$. 由等可能假设算得 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(AC)=P(BC)=P(ABC)=\frac{1}{9}$.

因为 $P(A)P(C)=P(AC)$，$P(B)P(C)=P(BC)$，所以 A,C 和 B,C 分别相互独立.

因为 $P(A)P(B)P(C)\neq P(ABC)$，所以 A,B,C 不相互独立.

注

此题表明事件 A,B,C **两两独立**不蕴含事件 A,B,C **相互独立**. 此外本题有不少同学算出 $P(ABC)=0$ 或 1，笨蛋助教没能想出原因.

全概率公式与贝叶斯公式

定义

对于样本空间 S, 事件 $B_1, B_2, \dots$ 为 S 的**划分**, 当且仅当

(1) $B_1 \cup B_2 \cup \dots = S$

(2) $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j.$

性质 (全概率公式)

事件 $B_1, B_2, \dots$ 为 S 的划分, 且 $P(B_i) \neq 0$, 则
$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A \mid B_i)$.

性质 (贝叶斯公式)

事件 $A_1, A_2, \dots$ 满足 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 且 $P(A_i) \neq 0, P(B) \neq 0$, 则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

例

有 4 个信封，每个信封里面分别有一封信. 现在将信取出，随机打乱，放回信封，**求恰有一个**信封中装有原来信的概率.

解. 首先选装回原信封的那封信, 有 4 种选法. 固定这封信为第一封. 我们计算其他信都没装回原来信封的情况数. 因为信封数较少，采用枚举法.

用 ijk 表示第 i, j, k 封信分别装在第二、三、四号信封中. 可能的情况为 $342, 423$ 两种. 因此题目所求的概率为

$$\frac{4 \times 2}{4!} = \frac{1}{3}.$$

注

此模型为**错位排列**模型. 如果不是 4 封信而是 N 封信, 如果不是恰有一个而是恰有 M 个, 那么我们有如下通用解法:

设 A_i 表示事件" 第 i 封信装回自己的信封", 那么

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}, \\
P(A_iA_j) &= \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}, \quad i \neq j, \\
&\ldots, \\
P(A_1A_2\ldots A_N) &= \frac{1}{N!}.
\end{aligned}
$$

注

由容斥公式,

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N) \\
=& \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{1 \le i < j \le N} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_N) \\
=& \binom{N}{1} \frac{1}{N} - \binom{N}{2} \frac{1}{N(N-1)} + \ldots + (-1)^{N-1} \binom{N}{N} \frac{1}{N!} \\
=& 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^{N-1} \frac{1}{N!} \\
=& \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.
\end{aligned}
$$

注

在 N 个信封中选择 M 个有 $\binom{N}{M}$ 种选法，指定的 M 个信封中装有原来信的概率为

$$\frac{1}{N(N-1)\dots(N-M+1)},$$

剩下 $(N-M)$ 个信封都没有装有原来的信的概率是

$$1-\sum_{k=1}^{N-M}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=\sum_{k=0}^{N-M}\frac{(-1)^k}{k!},$$

所以恰好有 M 个信封装有原来信的概率为

$$\binom{N}{M}\frac{1}{N(N-1)\dots(N-M+1)}\sum_{k=0}^{N-M}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{M!}\sum_{k=0}^{N-M}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

例 (Polya 的坛子)

最初有 b 个黑球，r 个红球，每次取出一个，放回并放入 c 个同色球. 令

$$B_n = \{\text{第 } n \text{ 次取出的是黑球}\},$$

求证：$P(B_4) = P(B_1) = b/(b+r)$.

证明.

令

$$R_n = \{\text{第 } n \text{ 次取出的是红球}\},$$

算得

$$P(R_1R_2B_3B_4) = \frac{r(r+c)b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)(b+r+3c)}.$$

注意到这一计算结果并不依赖于具体摸到红黑球的次序，仅仅依赖于摸到红球和黑球的总次数. □

证明.

比如说

$$P(R_1R_2B_3B_4) = P(R_1B_2R_3B_4).$$

B_4 可以拆分为无交并

$$B_4 = \bigcup_{Y_i \in \{B_i, R_i\}} Y_1Y_2Y_3B_4.$$

所以

$$\begin{aligned} P(B_4) &= P\left(\bigcup_{Y_i \in \{B_i, R_i\}} Y_1Y_2Y_3B_4\right) \\ &= \sum_{Y_i \in \{B_i, R_i\}} P(Y_1Y_2Y_3B_4) \\ &= \sum_{Y_i \in \{B_i, R_i\}} P(B_1Y_2Y_3Y_4) \\ &= P(B_1) = \frac{b}{b+r}. \end{aligned}$$

注

- 此模型为**可交换事件**模型，一般地，$P(B_n) = P(B_1)$.
- 此题也可以归纳地求解：首先运用全概率公式写出 $P(B_n) = P(B_1)P(B_n \mid B_1) + P(R_1)P(B_n \mid R_1)$，其次注意 $P(B_n \mid B_1)$ 和初始状态下有 $b + c$ 个黑球、r 个红球时 B_{n-1} 的概率是一样的，这样就可以用归纳法了. 如果这里对 B_{n-1}, R_{n-1} 而不是 B_1, R_1 运用全概率公式，概率空间并不会得到明显的简化.

例

证明: $|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$, 并讨论等号成立的条件.

证明.

由事件的基本运算规则可知

$$\begin{aligned}P(A)P(B)-P(AB) &= P(A)[P(AB)+P(\bar{A}B)]-P(AB)\\ &= P(A)P(\bar{A}B)-P(AB)[1-P(A)]\\ &\leqslant P(A)P(\bar{A}B)\leqslant P(A)[1-P(A)]\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

另一方面 (不妨设 $P(A)\geqslant P(B)$),

$$P(AB)-P(A)P(B)\leqslant P(B)-P(B)P(B)=P(B)[1-P(B)]\leqslant\frac{1}{4}$$

因此

$$|P(AB)-P(A)P(B)|\leqslant\frac{1}{4}$$

$\square$

证明.

从上述证明可看到，要使 $P(A)[1-P(A)] \leqslant \frac{1}{4}$ 中的等号成立当且仅当 $P(A)=\frac{1}{2}$，由对称性知 $P(B)=\frac{1}{2}$. 由此可得出两个取等条件

- $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 且 $P(AB)=0$，即 $B=\bar{A}$
- $P(AB)=\frac{1}{2}$，即 $B=A$.

$\square$

注

本题的证明大部分同学都能完成，但是取等条件往往有所遗漏. 在后面我们讨论不相关性与独立性的等价条件时会再次回到这个不等式，并提供新的见解.

谢谢大家！