1. （1）(10 分) $f(x)=\frac{x^2-4x}{(x-1)^2(x-3)^2}+1=\frac{1}{(x-1)(x-3)}-\frac{3}{(x-1)^2(x-3)^2}+1$,故

$$f'(x)=\left[\frac{-1}{(x-1)^2(x-3)^2}+\frac{6}{(x-1)^3(x-3)^3}\right](2x-4)=\frac{-2(x-2)(x^2-4x-3)}{(x-1)^3(x-3)^3}$$；(5 分)

$$f''(x)=\left[\frac{2}{(x-1)^3(x-3)^3}-\frac{18}{(x-1)^4(x-3)^4}\right](2x-4)^2+2\left[\frac{-1}{(x-1)^2(x-3)^2}+\frac{6}{(x-1)^3(x-3)^3}\right]$$
$$=\frac{2}{(x-1)^4(x-3)^4}\left[3(x^2-4x)^2-8(x^2-4x)-87\right]$$

(5 分)

（2）(5 分) $f'(x)=0$ 的根为 $2-\sqrt{7},2,2+\sqrt{7}$，其奇点为 $1,3$；考察由此分割得到的区间上的符号知：

$(-\infty,2-\sqrt{7}]\cup(1,2]\cup(3,2+\sqrt{7}]$: $f'(x)\geq 0$，函数单调增；

$[2-\sqrt{7},1)\cup[2,3)\cup[2+\sqrt{7},+\infty)$: $f'(x)\leq 0$，函数单调减；(单调性 3 分，未包括 x=1,3 两点的讨论一般扣 2 分)

由上述单调性分析，函数的极大值点为 $2-\sqrt{7},2+\sqrt{7}$，值为 $\frac{13}{12}$；另一极大值点为 2，值为 -3；(未写出极大值扣 1-2 分)

（3）(5 分) 由于函数在奇点 1,3 处趋于 $-\infty$ (未写出这个理由扣 1 分)，因此由上述单调性分析知无最小值，有最大值为 $\frac{13}{12}$，在 $2-\sqrt{7},2+\sqrt{7}$ 处取得；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1;\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-\infty$，故有三条渐近线为 $y=1,x=1,x=3$；(少一条扣 2 分，水平未写扣 3 分，垂直两条未写共扣 3 分)；

（5）
$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-3)}-\frac{3}{(x-1)^2(x-3)^2}+1$$
$$=-\frac{3}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-3)^2}\right]+\frac{5}{4}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right]+1$$
，(分解 3 分)

因此不定积分为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right]+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+x+C$。(写出不定积分 2 分，如分解错，按照错误分解写出的不定积分一般正确得 1 分；少写 x 这一项扣 1 分)

2. （1） $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right)\right]}=\sqrt{e}$；(洛必达法则未验证扣 1 分，仅写出指数形式求极限，极限错了只得 1 分；换元仍用 x 表示 1/x 的酌情扣 0-1 分)

（2） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos(2016e^y)\bullet 2016e^y}$；(化简为以 x 表示的，未明确用到 y 所在区间段来证明之，暂不扣分)

（3） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{xe^x-1}{\sin x}\right)=\dfrac{\sin x(xe^x+e^x)-\cos x(xe^x-1)}{\sin^2 x}$；

（4） $\int\dfrac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x=\tan\dfrac{x}{2}+C$；(本题有几种不同的最终结果，均得分)

（5）
$$\int_0^\pi xe^x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\frac{1}{1+i}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}e^{(1+i)x}=\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1+i}\left(x-\frac{1}{1+i}\right)e^{(1+i)x}\right]_0^\pi$$
$$=\mathrm{Im}\left[\frac{e^\pi+1}{(1+i)^2}-\frac{\pi e^\pi}{1+i}\right]=\frac{(\pi-1)e^\pi-1}{2}$$

(写出正确的不定积分后，代入上下限计算错误扣 2 分，如果只是其中 1 的符号错误，一般扣 1 分)

或 $\int_0^\pi xe^x\sin x\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{xe^x(\sin x-\cos x)+e^x\cos x}{2}\right|_0^\pi=\dfrac{(\pi-1)e^\pi-1}{2}$

（6）令 $y=x+1$，则 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}\mathrm{d}y=\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$；

(用三角函数作变量变换时未考虑到 x<-2 情形的，一般扣 2 分)

（7）
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g'(t)}{f'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{\mathrm{d}f(t)}=\frac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{\left(f'(t)\right)^3},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{\left(f'(t)\right)^3}\right)}{\mathrm{d}f(t)}=\frac{-3f'f''g''+(f')^2g'''+3(f'')^2g'-f'f'''g'}{(f')^5}$$

（8） $L=2\int_0^\pi\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^\pi\dfrac{1.5\times10^8}{1+0.0167\cos\theta}\sqrt{1+\dfrac{0.0167^2\sin^2\theta}{(1+0.0167\cos\theta)^2}}\,\mathrm{d}\theta$ (未计算 r’并将之代

入表达式，扣 3 分；计算了 r'但未给出最终结果扣 1-2 分)

3. 证明：由 $f(t)\in C[0,1],\ f(0)=1$，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\exists\eta_0>0,\forall 0\le t\le\eta_0,\left|f(t)-f(0)\right|<\frac{1}{2}$，即有 $f(t)>\frac{1}{2}$。

由定积分存在的定义知，对于 $\varepsilon=\frac{\eta_0}{4}>0,\exists\delta>0,\forall\left|P\right|<\delta,\forall\xi,\left|\sigma(f,P,\xi)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。

不妨取一个分割 P^*，使得 $\eta_0\in P^*,\left|P^*\right|<\delta$，并取定的标志点组 ξ^* 由各子区间的左端点构成，则由

$\forall t\in[0,1],\ f(t)\ge 0$ 以及 $\forall t\in[0,\eta_0],\ f(t)>\frac{1}{2}$ 知 $\sigma(f,P^*,\xi^*)\ge\frac{1}{2}\eta_0$。

因此 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\ge\sigma(f,P^*,\xi^*)-\varepsilon\ge\frac{\eta_0}{4}>0$。(正确写出定积分的极限定义、并用连续条件写出 0 的邻域上函数值>1/2 的，3 分；证明了积分非负的，不加分；积分直接等于有限和（没写出极限的），以下不得分；通过有限和在第一个小区间上大于 0 从而断言积分大于 0，的以下不得分；用了积分可加性定理证明的以下一般不得分)

4. 证明：对函数 $\ln(1+x)$，由 Lagrange 中值公式，$\exists\xi\in(0,x)$,

$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}=\left[\ln(1+x)\right]'_{x=\xi}=\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}$，两边同乘以 $x>0$，证毕。

5. 证明：考察函数 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\le b,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$，显然 $g(a)\in C[a,b]$，故应在边界或内点取到最大最小值。不仅如此，由 $f(x)\in C^1[a,b]$ 知 $g'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\in C(a,b]$，于是若 $g(x)$ 有临界点为 ξ，必满足 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$。

若 $g(b)<f'(a)$，则 a,b 均不可能为 $g(x)$ 的最小值点，事实上，$g(a)=f'(a)>g(b)$，而

$g'(b)=\frac{f'(b)}{b-a}-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}>\frac{g(b)}{b-a}-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=0$，故最小值点必在 (a,b) 上，为临界点，于是 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$；

若 $g(b)>f'(a)$，同上 a,b 均不可能为 $g(x)$ 的最大值点，于是亦有最大值点必在 (a,b) 上，为临界点，满足 $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$；

若 $g(b) = f'(a) = g(a)$，则除非 $g(x)$ 为常值函数，否则最大最小值中至少有一个必在 (a,b) 上取到，于是上述结论仍成立，而若 $g(x)$ 为常值函数，则 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$，于是在 (a,b) 上任取一点 ξ，均有 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$。

(本题有不同证明方法，视论述是否清晰判定得分；证明正确且叙述清晰，得满分；思路基本正确的，5-7 分；其余 1-3 分)。