集合论与数理逻辑的进阶内容

请在 10 月 12 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 证明下列命题等价:
   (1) 对任意非空集合的族 $S = \{X\}$，$X \neq \varnothing$，存在一个选择函数 $f : S \to \cup S$，使得 $f(X) \in X$.
   (2) 对任意非空集合 A, B，考虑关系 $R \subseteq A \times B$，如果 $R_A = \{x \in A : \exists y \in B\ (x, y) \in R\}$ 满足 $R_A = A$，那么存在函数关系 $f : A \to B$ 使得 $f \subseteq R$.

2. (9 分) 考虑只有 $\to$ 连接词以及常元 $\perp$ 的直觉主义命题逻辑（即自然演绎系统去掉 RAA），其中的一个命题公式为 $\phi = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.
   (1) 利用 Curry-Howard correspondence，写出 ϕ 对应的类型 T.
   (2) 为你写的类型 T 构造一个对应的项（term），要求只能用匿名函数 $\lambda x : A.t$ 和函数调用 $t(x)$ 进行书写.
   (3) 利用前两问，证明：在直觉主义命题逻辑中，$\vdash \phi$.

3. (4 分) 考虑 ZFC 集合论，但是没有正则公理/良基公理，因而我们允许形如 $A = \{a, A\}$ 这样的集合存在. 然而，此时两个集合相等的判断不再平凡. 例如. 考虑集合 $A = \{a, B\}$，和 $B = \{a, A\}$，尽管 A, B 的元素在形式上是不一样的，但是我们理应觉得 A, B 是同一个集合. 现在，我们将集合之间的属于号 $\in$ 作为一条有向边，用图来表示他们的属于关系. 例如，考虑集合 $A = \{B\}$，$B = \{A\}$，$C = \{C, A\}$，他们之间的关系可以用如下的图表示:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, bend left] & C \arrow[l, "\in"'] \arrow[loop right] \\ B \arrow[u, bend left] & \end{tikzcd}$$

   为此，我们需要定义一种新的“集合相等”的概念. 直观上，如果 X 和 Y 被认为是同一个集合，那么至少要成立以下的性质:

   - 对每个 X 的元素 x，存在 Y 中的元素 y，x 和 y 被认为是同一个集合（相同的属于关系）.
   - 对每个 Y 的元素 y，存在 X 中的元素 x，y 和 x 被认为是同一个集合（相同的属于关系）.

   下面我们从形式上定义这一概念. $X \times Y$ 上的**非空**二元关系 Z 被称为 *bisimulation*，如果对任意 $(x, y) \in Z$，都有

   - 对任意 $x' \in X$，如果 $x' \in x$，那么存在 $y' \in Y$，使得 $y' \in y$ 并且 $(x', y') \in Z$.
   - 对任意 $y' \in Y$，如果 $y' \in y$，那么存在 $x' \in X$，使得 $x' \in x$ 并且 $(x', y') \in Z$.

   由 bisimulation 联系的元素（即 $(x, y) \in Z$ 的 x 和 y），他们的所有属于关系都互相对应，所以我们可以认为是“同一个集合”. 两个集合之间存在的最大 bisimulation 被称为 *bisimilarity*.

   (1) 考虑集合 $A = \{B\}, B = \{A\}, C = \{C, A\}$, 证明: 全关系 $\{A, B, C\} \times \{A, B, C\}$ 是 bisimulation, 因此 A, B, C 互相都可以被视为同一个集合.

(2) 证明：集合 X 与自己的 bisimilarity 是余归纳定义的.

提示：构造一个映射 $f: 2^{X\times X} \to 2^{X\times X}$，说明该映射的最大不动点是 bisimilarity.