北京大学数学科学学院期末试题

2012 - 2013 学年 第一学期

考试科目：数学分析 (III)　　考试时间：13 年 1 月 11 日

姓　　名：＿＿＿＿＿＿　　学　　号：＿＿＿＿＿＿

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (10) 计算：

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} \sin^3(x+y)dxdy.$$

2. (10) 设物质曲面 S 为密度为 1 的球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分 (即 $S=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2=1,z\ge 0\}$), 试求它的质心坐标.

3. (15) 计算积分

$$\iint_S \tan\frac{x^2}{1+|x|+|y|}dydz+z^2\sin xdzdx+z^3dxdy,$$

其中曲面 S 为单位球面的上半部分，即 $\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2=1,z\ge 0\}$, 取上侧.

4. (10) 证明积分 $\int_\Gamma(2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy))dx-x^3\sin(xy)dy$ 在 R^2 中与路线无关并求出 $(2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy))dx-x^3\sin(xy)dy$ 的一个原函数.

5. (15) 设 $D\subset R^2$ 为一个单连通区域， $f(x,y)$ 在 D 内具有二阶连续偏导数，证明： $f(x,y)$ 在 D 内调和 (即 $f(x,y)$ 在 D 内满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$) 的充分必要条件是：对于 D 内的任何光滑 Jordan 曲线 Γ 有 $\int_\Gamma\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}ds=0$, 其中 $\mathbf{n}$ 是 Γ 的外法向.

6. (10) 设 $I(x)=\int_1^x(e^{-xy^2}+\frac{\sin(xy)}{y})dy$. 求 $I'(x)$.

7. (10) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $\int_0^1\frac{f(x)}{x(1-x)}dx$ 收敛，证明 $I(t)=\int_0^1x^t(1-x)^tf(x)dx$ 在 $[-1,+\infty)$ 上连续.

8. (10) 试讨论 $\iint_{R^2}\frac{\sin(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+1}dxdy$ 的敛散性.

9. (10) 设 $D\subset R^2$ 为一个无界闭区域且对于 $\forall r>0, D$ 与 $\{(x,y);x^2+y^2\le r$ 的交是一个可求面积的闭区域，试构造 R^2 内的一个连续函数 $f(x,y)$ 使得 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 收敛而 $\iint_D f^2(x,y)dxdy$ 发散.