朴素集合论与命题逻辑

请在 9 月 21 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 我们用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示集合 A 的势（基数）.
   (1) 证明：$\mathrm{card}(\mathbb{R}) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.
   (2) 假设集合 X 满足 $\mathrm{card}(X) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$，那么对 X 的任意与 $\mathbb{N}$ 等势的子集 S（即可数子集），集合 $X \setminus S = \{x \in X : x \notin S\}$ 满足 $\mathrm{card}(X \setminus S) = \mathrm{card}(X)$.

2. (10 分) 用 2^A 表示 A 的幂集，即 $2^A = \{S : S \subseteq A\}$. 证明：对任意集合 A，$\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(2^A)$.

3. (15 分) 考虑只包含连接词 $\to$ 和 $\wedge$ 的命题逻辑，它的自然证明系统（natural deduction system）包括如下内容：
   - 命题逻辑的公式，包括永假常元 $\perp$.
   - 没有公理.
   - 推导规则如下：

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I \qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to E$$

$$\frac{\perp}{\phi} \perp \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\phi} \mathrm{RAA}$$

   其中，横线上面是前提，下面是推导的结果（结论），横线右边是规则的名字（例如 $\wedge I$）. 省略号表示省略的推导步骤；方括号表示假设该公式已经推出，在此基础上进行推理；除此之外，前提必须是已经推出的公式.

   我们将 $\phi \to \perp$ 缩写为 $\neg\phi$（注意，$\neg$ 不属于字符集）.
   (1) 证明：对任意公式 ψ 和 ϕ，$\psi \vdash \phi$ 当且仅当 $\vdash \psi \to \phi$.
   (2) 利用自然证明系统证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.
   (3) 利用完全性定理（completeness theorem）证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.