《高等微积分》期中试题

2016 年 11 月 14 日

1. （20 分，每题 5 分）判断下面级数收敛性，并写出推导过程。

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\ln n\right)^{\ln n}}\quad (2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\ln n)^{n}}\quad (3)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}\quad (4)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{\ln n}$$

Sin

2. （10 分，每题 5 分）研究下列函数序列（级数）在给定区间的是否一致收敛，并写出推导过程。

$$(1)\ f_n(x)=\sin\frac{x}{n},\ x\in(-\infty,\infty)\quad (2)\ f_n(x)=\frac{2x\ln n}{1+n^2x^2},\ x\in[0,1]$$

3. （10 分.每题 5 分）求下列幂级数的收敛半径，写出推导过程。 $(a>0)$

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}x^{n}\ \ (0<a<0),\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^{n}$$

4. （10 分，每题 5 分）求下面函数的幂级数展开式，并求收敛半径。

$$(1)\ f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x},\quad (2)\ f(x)=\arcsin x$$

5. （10 分）求函数 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 的 Fourier 级数。

$\int_{-\pi}^{\pi}\underline{\ln|2\sin\frac{x}{2}|} = 2\pi\ln 2 = 0$

6. （14 分）计算积分：（1） $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$ （2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}dx\quad (|\alpha|<1)$

7. （10 分）设 $a\notin\mathbb{Z}$，求函数 $f(x)=\frac{\pi}{\sin\pi a}e^{ja(\pi-x)}$ 的 Fourier 级数，并证明等式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin\pi a}\right)^2$

8. （16 分）假设 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$，满足 Lipschitz 条件 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|,\ \forall x,y\in[-\pi,\pi]$，其中 K 是常数。设 $C_n(n\in\mathbb{Z})$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

（1） $\forall h\in\mathbb{R}$，定义 $g_h(x)\triangleq f(x+h)-f(x-h)$。证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_h(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}4|C_n\sin nh|^2\le 4K^2h^2$$

（2）设 $p\in\mathbb{N}$，令 $h=\pi/2^{p+1}$，证明： $\sum_{2^{p-1}<|n|\le 2^p}|C_n|^2\le\frac{\pi^2K^2}{2^{2p+1}}$，并由此证明 $f(x)$ 的 Fourier 级数绝对收敛，且一致收敛。

（3）如果 $f(x)$ 满足 Hölder 条件 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|^{\alpha},\ \forall x,y\in[-\pi,\pi]$。证明：当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛（Bernstein 定理）。