

集合论与数理逻辑的进阶内容

请在 10 月 12 日课前提交纸质作业.

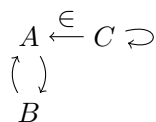
1. (10 分) 证明下列命题等价:

- (1) 对任意非空集合的族 $S = \{X\}$, $X \neq \emptyset$, 存在一个选择函数 $f: S \rightarrow \cup S$, 使得 $f(X) \in X$.
- (2) 对任意非空集合 A, B , 考虑关系 $R \subseteq A \times B$, 如果 $R_A = \{x \in A : \exists y \in B (x, y) \in R\}$ 满足 $R_A = A$, 那么存在函数关系 $f: A \rightarrow B$ 使得 $f \subseteq R$.

2. (9 分) 考虑只有 \rightarrow 连接词以及常元 \perp 的直觉主义命题逻辑 (即自然演绎系统去掉 RAA), 其中的一个命题公式为 $\phi = ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

- (1) 利用 Curry-Howard correspondence, 写出 ϕ 对应的类型 T .
- (2) 为你写的类型 T 构造一个对应的项 (term), 要求只能用匿名函数 $\lambda x: A. t$ 和函数调用 $t(x)$ 进行书写.
- (3) 利用前两问, 证明: 在直觉主义命题逻辑中, $\vdash \phi$.

3. (4 分) 考虑 ZFC 集合论, 但是没有正则公理/良基公理, 因而我们允许形如 $A = \{a, A\}$ 这样的集合存在. 然而, 此时两个集合相等的判断不再平凡. 例如. 考虑集合 $A = \{a, B\}$, 和 $B = \{a, A\}$, 尽管 A, B 的元素在形式上是不一样的, 但是我们理应觉得 A, B 是同一个集合. 现在, 我们将集合之间的属于号 \in 作为一条有向边, 用图来表示他们的属于关系. 例如, 考虑集合 $A = \{B\}$, $B = \{A\}$, $C = \{C, A\}$, 他们之间的关系可以用如下的图表示:



为此, 我们需要定义一种新的“集合相等”的概念. 直观上, 如果 X 和 Y 被认为是同一个集合, 那么至少要成立以下的性质:

- 对每个 X 的元素 x , 存在 Y 中的元素 y , x 和 y 被认为是同一个集合 (相同的属于关系).
- 对每个 Y 的元素 y , 存在 X 中的元素 x , y 和 x 被认为是同一个集合 (相同的属于关系).

下面我们从形式上定义这一概念. $X \times Y$ 上的非空二元关系 Z 被称为 *bisimulation*, 如果对任意 $(x, y) \in Z$, 都有

- 对任意 $x' \in X$, 如果 $x' \in x$, 那么存在 $y' \in Y$, 使得 $y' \in y$ 并且 $(x', y') \in Z$.
- 对任意 $y' \in Y$, 如果 $y' \in y$, 那么存在 $x' \in X$, 使得 $x' \in x$ 并且 $(x', y') \in Z$.

由 *bisimulation* 联系的元素 (即 $(x, y) \in Z$ 的 x 和 y), 他们的所有属于关系都互相对应, 所以我们可以认为是“同一个集合”. 两个集合之间存在的最大 *bisimulation* 被称为 *bisimilarity*.

- (1) 考虑集合 $A = \{B\}$, $B = \{A\}$, $C = \{C, A\}$, 证明: 全关系 $\{A, B, C\} \times \{A, B, C\}$ 是 *bisimulation*, 因此 A, B, C 互相都可以被视为同一个集合.

(2) 证明：集合 X 与自己的 bisimilarity 是余归纳定义的.

提示：构造一个映射 $f : 2^{X \times X} \rightarrow 2^{X \times X}$ ，说明该映射的最大不动点是 bisimilarity.