第8讲 线性规划 (下)

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

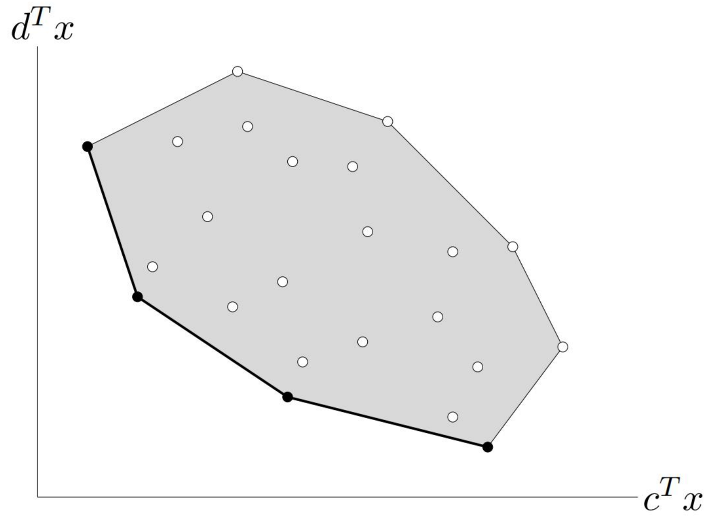
2024年春季学期

算法设计与分析『实验班』

PKU-04833060

练习题

Exercise 69. In some applications we are interested in minimizing *two* cost functions, $c^T x$ and $d^T x$, over a polyhedron $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \leq b\}$. For general c and d, the two objectives are competing, *i.e.*, it is not possible to minimize them simultaneously, and there exists a trade-off between them. The problem can be visualized as in the figure below.



The shaded region is the set of pairs $(c^T x, d^T x)$ for all possible $x \in \mathcal{P}$. The circles are the values $(c^T x, d^T x)$ at the extreme points of $\mathcal{P}$. The lower part of the boundary, shown as a heavy line, is called the *trade-off curve*. Points $(c^T \hat{x}, d^T \hat{x})$ on this curve are efficient in the following sense: it is not possible to improve both objectives by choosing a different feasible x.

Suppose $(c^T \hat{x}, d^T \hat{x})$ is a breakpoint of the trade-off curve, where $\hat{x}$ is a nondegenerate extreme point of $\mathcal{P}$. Explain how the left and right derivatives of the trade-off curve at this breakpoint can be computed.

Hint. Compute the largest and smallest values of γ such that $\hat{x}$ is optimal for the LP

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & d^T x + \gamma c^T x \\ \text{subject to} & Ax \leq b. \end{array}$$

L. Vandenberghe, "Linear Programming Exercises," 2013-2014.

本节提要

- Linear programming tricks
  - minimax 目标函数
  - 绝对值
  - 范围约束
  - 分式目标函数
  - 约束包含有界未知系数
  - 约束右侧是随机变量
- Integer programming tricks
  - 特殊的“或”约束
  - “或”约束
  - 条件约束
  - 固定成本
  - 乘积消除

J. Bisschop, “AIMMS: Optimization Modeling,” 2006.

minimax 目标函数

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{k\in K} \sum_{j\in J} c_{kj} x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \gtreqless b_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \gtreqless b_i \quad \forall i \in I \\ & \sum_{j\in J} c_{kj} x_j \le z \quad \forall k \in K \end{aligned}$$

绝对值

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j |x_j| \qquad (c_j > 0) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j t_j \qquad (c_j > 0) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I \\ & -t_j \le x_j \le t_j \qquad \forall j \in J \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j \left(x_j^+ + x_j^- \right) \qquad (c_j > 0) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} \left(x_j^+ - x_j^- \right) \gtrless b_i \qquad \forall i \in I \\ & x_j^+, x_j^- \ge 0 \qquad \forall j \in J \end{aligned}$$

范围约束

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & d_i \le \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le e_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

#变量 = $|J|$（x）
#约束 = $2|I|$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & u_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = e_i \quad \forall i \in I \\ & 0 \le u_i \le e_i - d_i \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

#变量 = $|I| + |J|$（x 和 u）
#约束 = $|I|$（+ $|I|$ 个边界约束）

分式目标函数

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \\ \text{s.t.} \quad & Ax \gtreqless b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- 常出现在财务规划模型
  - 收益率、周转率、生产率等
- 假设分母在可行域恒为正（或恒为负）
- 假设可行域非空且有界
  - 用约束 $t \geq 0$ 求解，能保证 $t > 0$

令 $t = 1/(d^T x + \beta) > 0$，

$$\begin{aligned} \min_{x,t} \quad & (c^T x + \alpha) \cdot t \\ \text{s.t.} \quad & Ax \gtreqless b \\ & x \geq 0 \\ & (d^T x + \beta) \cdot t = 1 \\ & t > 0 \end{aligned}$$

令 $y = x \cdot t$，

$$\begin{aligned} \min_{y,t} \quad & c^T y + \alpha t \\ \text{s.t.} \quad & Ay \gtreqless bt \\ & d^T y + \beta t = 1 \\ & t > 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

A. Charnes and W.W. Cooper, “Programming with linear fractional functional,” Naval Research Logistics Quarterly 9 (1962), 181–186.

约束包含有界的未知系数

- 系数未知的线性约束 $\sum_{j\in J}\tilde{a}_j x_j \le b$
  - $\tilde{a}_j$ 具体值未知
  - 只知道 $\tilde{a}_j \in [L_j, U_j]$
- 建模成 $\sum_{j\in J}\tilde{a}_j x_j \le b + \delta\cdot\max(1,|b|)$
  - $\forall \tilde{a}_j \in [L_j, U_j]$
  - 为避免过分保守，右侧放宽一定比例
  - 挑战：有无穷个约束

- 记 $a_j = (L_j + U_j)/2$，$\Delta_j = (U_j - L_j)/2$
- 有 $\tilde{a}_j \in [a_j - \Delta_j,\ a_j + \Delta_j]$
- 观察到
  - 当 $x_j \ge 0$，$\tilde{a}_j x_j \le a_j x_j + \Delta_j x_j$
  - 当 $x_j \le 0$，$\tilde{a}_j x_j \le a_j x_j - \Delta_j x_j$
  - 都有 $\tilde{a}_j x_j \le a_j x_j + \Delta_j |x_j|$
- 转化成线性约束

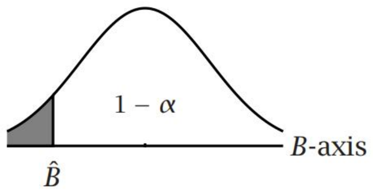
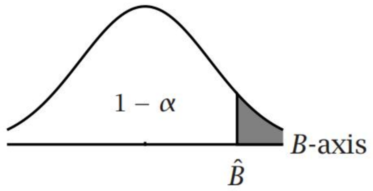
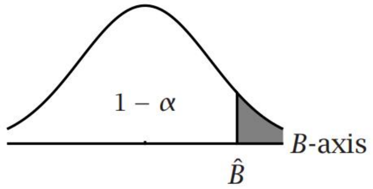
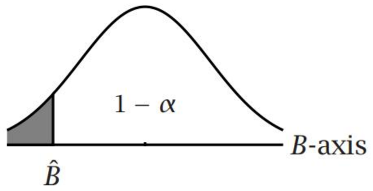
$$\sum_{j\in J} a_j x_j + \sum_{j\in J}\Delta_j y_j \le b + \delta\cdot\max(1,|b|)$$

$$-y_j \le x_j \le y_j$$

约束右侧是随机变量

- 约束 $\sum_{j \in J} a_j x_j \leq B$
  - B 是随机变量
- 约束的意义?
  - 当 $B_{min} \leq B \leq B_{max}$
  - 当 $-\infty < B < +\infty$
- 概率约束 $Pr\left[\sum_{j \in J} a_j x_j \leq B\right] = 1 - \alpha$

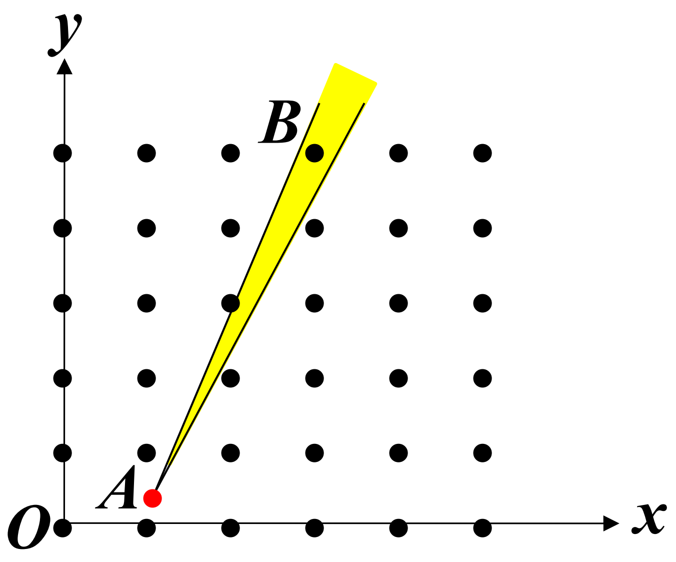
from: J. Bisschop, “AIMMS: Optimization Modeling,” 2006.

$\Pr\left[\sum_{j\in J} a_j x_j \leq B\right] \geq 1-\alpha$ $\sum_{j\in J} a_j x_j \leq \hat{B}$	
$\Pr\left[\sum_{j\in J} a_j x_j \leq B\right] \leq \alpha$ $\sum_{j\in J} a_j x_j \geq \hat{B}$	
$\Pr\left[\sum_{j\in J} a_j x_j \geq B\right] \geq 1-\alpha$ $\sum_{j\in J} a_j x_j \geq \hat{B}$	
$\Pr\left[\sum_{j\in J} a_j x_j \geq B\right] \leq \alpha$ $\sum_{j\in J} a_j x_j \leq \hat{B}$	

A. Charnes and W.W. Cooper, “Chance-constrained programming,” Management Science 6 (1959), 73–80.

整数线性规划的分支限界算法

- 整数线性规划 在线性规划上对变量增添整数的要求
- 纯整数线性规划(全整数线性规划) 要求所有变量是整数
- 混合整数线性规划 只要求部分变量是整数
- 0-1型整数线性规划 要求所有变量是0或1
- 松弛规划(简称松弛) 删去整数要求后得到的线性规划
  - 松弛规划的最优值是原整数规划的最优值的界限
    - (最小化的下界,最大化的上界)
  - 但通常不是原整数规划的最优解



分支限界法 （最小化问题的上界、最大化问题的下界）

- 记整数线性规划为 ILP，其松弛为 LP
- 如果 LP 的最优解 α 满足整数要求，则 α 是 ILP 的最优解
- 否则，设 α_1 分量不满足整数要求，分别添加以下约束构造子问题

$x_1 \leq \lfloor \alpha_1 \rfloor$（构造$LP_1$）和 $x_1 \geq \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1$ （构造LP_2）

- 如果 LP_1 或 LP_2 的最优解符合整数要求，那么这个解也是 ILP 的可行解，得到 ILP 的最优值的一个界限，该子问题的计算结束
- 如果子问题的最优解不满足整数要求。则继续分支计算
- 如果子问题的最优值超过界限，则往下计算不可能得到 ILP 的最优解。计算结束
- 当没有待计算的子问题时，所有可行解中最好的是 ILP 的最优解

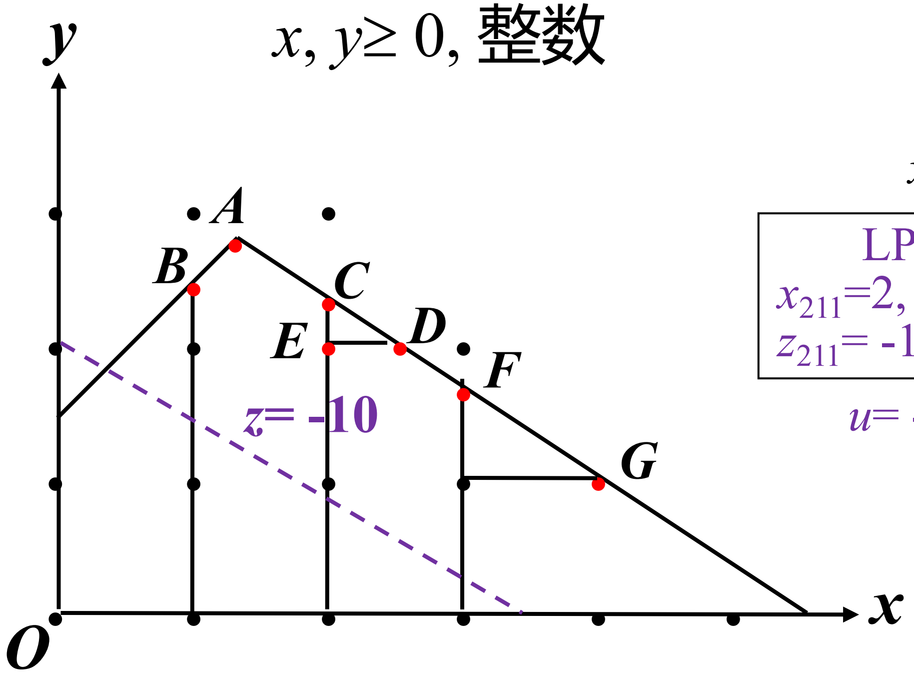
ILP 分支限界法例子

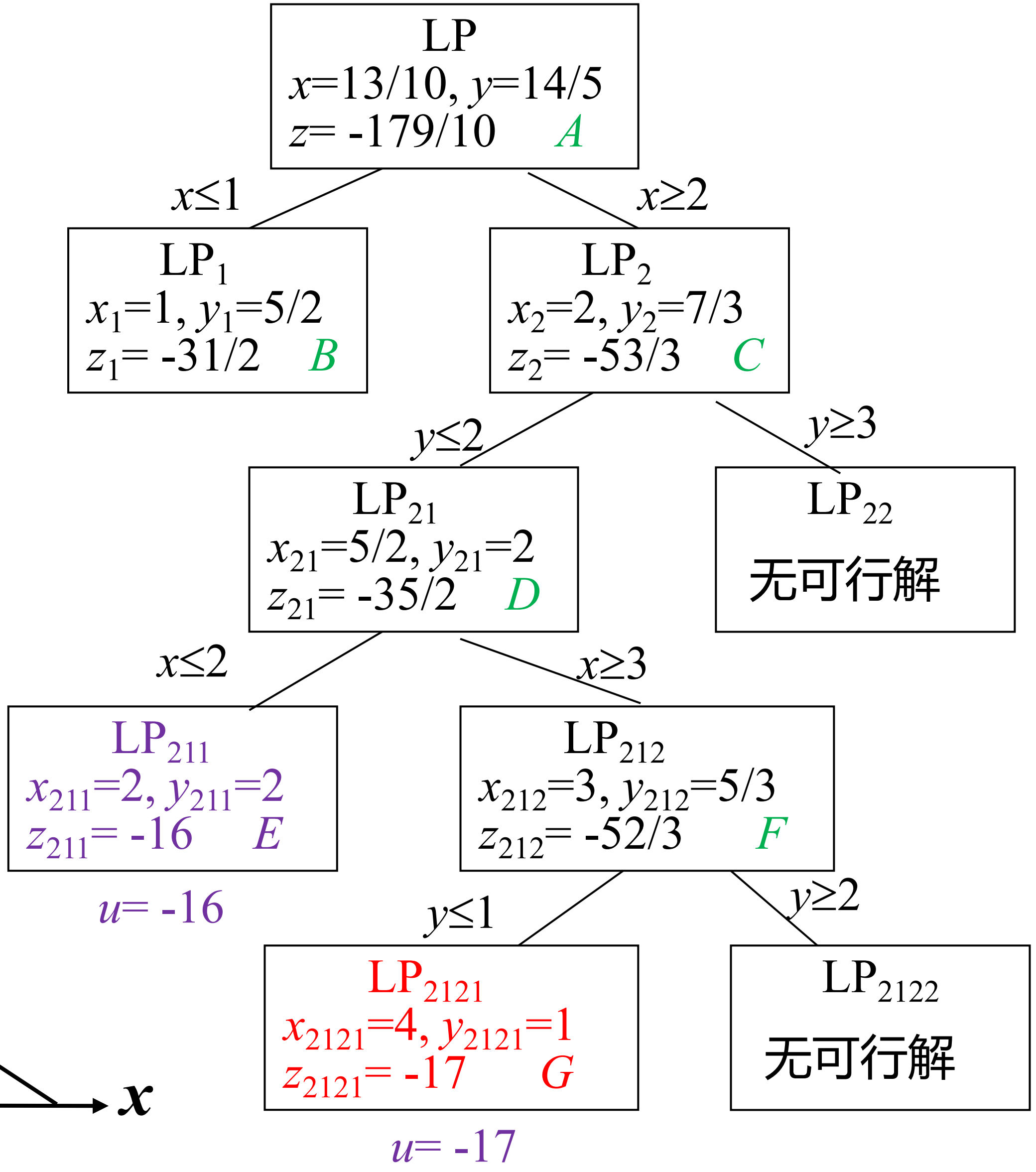
$$\min z = -3x-5y$$

$$\text{s.t. } -x + y \le 3/2$$

$$2x + 3y \le 11$$

$$x, y \ge 0, \text{ 整数}$$





应用：最小顶点覆盖

- 顶点覆盖问题

给定图 $G=(V,E)$，G 的顶点覆盖是顶点子集 $S\subseteq V$，使得每条边至少有一个端点属于S. 求G的最小的顶点覆盖.

- 转化为0-1线性规划问题

令 $V=\{1, 2, \ldots, n\}$，$\forall e\in E$，存在 $i, j\in V$，使得 $e=(i, j)$

$\forall i\in V$，定义变量 $x_i \in \{0,1\}$，且 $x_i=1 \Leftrightarrow i\in S$

$\forall e=(i, j)\in E$，$x_i+x_j\geq 1$

$$\min \sum_{i\in V} x_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_i+x_j \geq 1 && \forall (i, j)\in E \\ & x_i \in \{0,1\} && \forall i\in V \end{aligned}$$

应用：最小顶点覆盖

- 顶点覆盖属于NP难问题.
- 近似算法的设计思想

1. 放松 $x_i \in \{0,1\}$的约束条件，令 x_i 为[0,1]区间任意实数，转化为线性规划问题.
2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0,1]$，$i=1,2,\ldots,n$，使得其和达到最小.
3. 令 $S = \{ i \mid x_i \geq 1/2 \}$.

- 算法分析

可证明四舍五入得到的 S 是 G 的顶点覆盖，且 $|S| \leq 2|S^*|$，其中 S^*为最优解.

$|S|/|S^*| = \text{cost}_{\text{rounding}} / \text{cost}_{\text{ILP}} \leq \text{cost}_{\text{rounding}} / \text{cost}_{\text{LP}} \leq 2$

应用：负载均衡问题

- 负载均衡问题

给定作业集合$J=\{1, 2, \ldots, n\}$，作业j加工时间为t_j，$j=1, 2, \ldots, n$. 机器集合$M=\{1, 2, \ldots, m\}$，对每个作业分配一台机器，作业j可分配的机器集合为M_j. J_i是分配到机器i上的作业集合. 机器i的负载是L_i. 设分配方案的负载为L，其中

$$L=\max_{i\in\{1,2,\ldots,m\}} L_i, \qquad L_i=\sum_{j\in J_i} t_j$$

问题： 求分配方案 使得L达到最小.

负载均衡问题：转化为线性规划

x_{ij}：任务 j 在机器 i 上的负载

$\min L$

$$\text{s.t.} \quad \sum_i x_{ij} = t_j \quad \forall j \in J$$

任务 j 在各机器的负载之和等于加工时间

$$\sum_j x_{ij} \le L \quad \forall i \in M$$

任何机器的负载总量不超过 L

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall j \in J, i \in M_j$$

- 如果上述线性规划有值不超过 L 的解，那么最优负载的值至少是 L.
- 线性规划的最优解有可能把一个作业分配到多台机器上，即负载是分数. 需要调整这个解，以满足原问题的需求：每个作业只能分配到一台机器上.

若干混合整数线性规划求解器

- CPLEX https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer
- Gurobi (Gu, Rothberg, Bixby) https://www.gurobi.com/
- 杉数科技 http://www.cardopt.com/
- 天筹 https://www.huaweicloud.com/product/modelarts/optverse.html
- MindOpt https://tianchi.aliyun.com/mindopt

Some Examples of ILP Formulation

- H. Paul Williams, “Model Building in Mathematical Programming (5th Edition)”, John Wiley & Sons Inc., 2013.
- Gurobi Jupyter Notebook Modeling Examples
  - https://www.gurobi.com/resource/modeling-examples-using-the-gurobi-python-api-in-jupyter-notebook/
- The OPL model library: a collection of known problems in the academia and industry
  - https://www.ibm.com/docs/zh/icos/22.1.0?topic=examples-opl-model-library

特殊的“或”约束

$$x = 0 \ \text{ or } \ l \le x \le u$$

- 引入指示变量 y，使得

$$y = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } l \le x \le u \end{cases}$$

- 整数线性约束

$$x \ge ly$$
$$x \le uy$$
$$y \in \{0,1\}$$

"或"约束

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x & \\
\text{s.t.} & A_1 x \le b_1 & (1) \\
& A_2 x \le b_2 & (2) \\
& x \ge 0 & \\
\text{where} & \text{(1) or (2) holds} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x & \\
\text{s.t.} & A_1 x \le b_1 + My & \\
& A_2 x \le b_2 + M(1-y) & \\
& x_j \ge 0 & \forall j \in J \\
& y \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

条件约束

- if $A_1x \le b_1$, then $A_2x \le b_2$
- 等价于 $A_1x > b_1$ or $A_2x \le b_2$

$$
\begin{aligned}
& \alpha \to \beta \\
\Leftrightarrow \quad & \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \\
\Leftrightarrow \quad & \neg\alpha \vee \beta
\end{aligned}
$$

- $A_1x \ge b_1 + \varepsilon \quad$ or $\quad A_2x \le b_2$

$$
\begin{gathered}
A_1x \ge b_1 + \varepsilon - My \\
A_2x \le b_2 + M(1-y) \\
y \in \{0,1\}
\end{gathered}
$$

固定成本

$$
\begin{aligned}
\min \quad & C(x) \\
\text{s.t.} \quad & a_i x + \sum_{j \in J} a_{ij} w_j \gtreqless b_i && \forall i \in I \\
& x \geq 0 \\
& w_j \geq 0 && \forall j \in J \\
\text{where} \quad & C(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ k + cx & x > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 引入指示变量 $y = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$
- 整数线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & ky + cx \\
\text{s.t.} \quad & a_i x + \sum_{j \in J} a_{ij} w_j \gtreqless b_i && \forall i \in I \\
& x \leq My \\
& x \geq 0 \\
& w_j \geq 0 && \forall j \in J \\
& y \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

乘积消除

- $x_1 x_2$： $x_1, x_2 \in \{0,1\}$

$$
\begin{gathered}
y \leq x_1 \\
y \leq x_2 \\
y \geq x_1 + x_2 - 1 \\
y \in \{0,1\}
\end{gathered}
$$

- $x_1 x_2$： $x_1 \in \{0,1\}$， $x_2 \in [0, u]$

$$
\begin{gathered}
y \leq u x_1 \\
y \leq x_2 \\
y \geq x_2 - u \cdot (1 - x_1) \\
y \geq 0
\end{gathered}
$$

- $x_1 x_2$： $x_1 \in [l_1, u_1]$， $x_2 \in [l_2, u_2]$
  - 特殊情况： $l_1, l_2 \geq 0$ 且 x_1 只出现在 $x_1 x_2$ 项
  - 用 $l_1 x_2 \leq z \leq u_1 x_2$ 替换非线性项 $x_1 x_2$
  - 一般情况
  - 用 $y_1^2 - y_2^2$ 替换 $x_1 x_2$
    - 用 $y_1 + y_2$ 替换 x_1
    - 用 $y_1 - y_2$ 替换 x_2
  - 分段线性的 λ formulation 近似 y_1^2 和 y_2^2
    - 详见 G. Dantzig, "Linear Programming and Extensions", Pirnceton University Press, 1998.

问题求解技术的不完全二分类

- 基于模型的通用求解器
  - 布尔可满足性 (SAT)
  - satisfiability modulo theories (SMT)
  - optimization modulo theories (OMT)
  - （混合）整数线性规划 (ILP & MILP)
  - constraint programming (CP)
  - 混合技术 (LCG = CP + SAT, ...)
- 无模型的求解方法学
  - 动态规划
  - 贪心算法
  - 近似算法
  - 局部搜索
  - 遗传算法
  - ...

Monette, Flener, “Topic 7: Solving Technologies”, in 1DL451: Modelling for Combinatorial Optimisation, 2021.

本节小结

- Linear programming tricks
  - minimax 目标函数
  - 绝对值
  - 范围约束
  - 分式目标函数
  - 约束包含有界未知系数
  - 约束右侧是随机变量
- Integer programming tricks
  - 特殊的“或”约束
  - “或”约束
  - 条件约束
  - 固定成本
  - 乘积消除