随机变量及其分布

1. (10 分) 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P(X=-1)=\frac{1}{8}$, $P(X=1)=\frac{1}{4}$, 在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该区间长度成正比. 试求:
   (1) X 的分布函数 $F(x)$.
   (2) $P(X\le 0)$.

2. (10 分) 从 1，2，3，4，5 中任取三个数，按大小排列记为 $x_1<x_2<x_3$，令 $X=x_2$，试求:
   (1) X 的分布函数.
   (2) $P(X<2)$ 及 $P(X>4)$.

3. (10 分) x 轴上有一质点，每经一个单位时间，它分别以概率 p 及 $q=1-p$ 向右或向左移动一格，若该质点在时刻 0 从原点出发，而且每次移动是相互独立的，$x=-a$ 和 $x=b$ 处各有一个吸收壁，求质点在 $x=b$ 处被吸收的概率.

4. (10 分) 若每条蚕的产卵数服从泊松分布，参数为 λ，而每个卵变为成虫的概率为 p，且各卵是否变为成虫彼此独立，求每条蚕养活 k 只小蚕的概率.

5. (10 分) 一个工厂出产的产品中废品率为 0.005，任意取来 1000 件，解答以下问题:
   (1) 求其中至少有两件废品的概率.
   (2) 求其中不超过 5 件废品的概率.
   (3) 能以 90% 的概率希望废品件数不超过多少?

6. (10 分) 设随机变量 X 与 Y 同分布, X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

   已知事件 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 相互独立, 且 $P\{A\cup B\}=\frac{3}{4}$, 求常数 a.

7. (10 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

   求出 A 并求以下 Y 的密度函数:
   (1) $Y=2X+1$.
   (2) $Y=\mathrm{e}^X$.
   (3) $Y=X^2$.

8. (10 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数.

(2) 求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

9. (10 分) 设 N 是正整数，X 服从 $[0,N^2]$ 的均匀分布.

(1) 求 $\sqrt{X}$ 的密度函数.

(2) 求 $[\sqrt{X}]$ 的分布列，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(3) 求 $\sqrt{X}-[\sqrt{X}]$ 的分布函数.

10. (10 分) (1) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证几何分布的极限和指数分布的关系. ”. 提示：将单位时间 n 等分，设每一次试验成功的概率为 λ/n，每一次试验的耗时为 $1/n$，考虑试验第一次成功时间的分布函数.

(2) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证负二项分布的极限和伽马分布的关系（这里负二项分布的参数 r 限制为整数）. 提示：若 α 为整数，则 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$.