第7讲 平摊分析

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

2024年春季学期

PKU-04833060

算法设计与分析『实验班』

主要内容

- 平摊分析（amortized analysis）的概念
- 平摊分析的三种方法
  - 聚集分析（aggregate method）
  - 记账法（accounting method）
  - 势能法（potential method）
- 动态表及其上的平摊分析

平摊分析

- 最坏情况分析的问题
  - 单个操作的最坏情况分析，不能反映通常情况的开销
- 解决方法之一：平摊分析
  - 赋予每个操作“虚拟”的代价，保证“虚拟”代价的总和是实际开销总和的上界
  - 每个操作的平摊代价，某种程度上能刻画该操作的平均开销
    - 平均分析不牵涉到概率
    - 保证在最坏情况下，对于任意一组满足假设的操作、每个操作在该组内的平均性能
    - 平摊代价不唯一

聚集分析（aggregate method）

平摊代价 = n个操作总代价 / n

栈S上的三种操作

- **PUSH(*S*,*x*)**：将*x*压入*S*
  - 运行时间O(1)
- **POP(*S*)**：弹出栈顶
  - 运行时间O(1)
- **MULTIPOP(*S*,*k*)**：弹出栈顶*k*个对象

```
MULTIPOP(S, k)
1 while not STACK-EMPTY(S) and k ≠ 0
2     do POP(S)
3         k → k - 1
```

  - 运行时间O(min(*k*,*s*))，*s*为栈中对象个数

*n*个栈操作的最坏时间总和

- 设有*n*个栈操作（PUSH、POP、MULTIPOP） 的序列，作用于初始为空的栈*S*。
- 总的运行时间的界是什么?
  - 每个操作都可能是MULTIPOP
  - 每个MULTIPOP 的运行时间是$O(\min(k, s))=O(n)$
  - 总的运行时间的上界为$O(n^2)$
  - 这是一个紧的上界吗?

n个栈操作的平摊时间

- 只有PUSH操作增加栈S中的对象个数
- 所有POP和MULTIPOP 弹出的对象数不会弹出多于PUSH入栈的对象数
- 故总的运行时间为$O(n)$
  - 所有PUSH入栈的对象数为$O(n)$
  - 所有POP和MULTIPOP 弹出的对象数也为$O(n)$
- 每个PUSH、POP和MULTIPOP 操作的平摊时间
  - $O(n)/n = O(1)$
- **聚集法：**通过总时间求平均得到平摊时间，不需要对操作序列的概率分布做假设。

二进制计数器

- 计数器*A*[0 · · *k* -1] 表示为*k*位二进制位的数组

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

- 操作INCREMENT实现计数器加一
  - 运行时间*O*(*k*)
  - *n*个INCREMENT操作序列的运行时间 *O*(*nk*)（紧吗？）

```
INCREMENT(A)
i ← 0
while i < length[A] and A[i] = 1 do
      A[i] ← 0
      i ← i + 1
if i < length[A] then
      A[i] ← 1
```

INCREMENT操作的平摊时间

- *n*个INCREMENT操作序列的运行时间应为：*O*(*n*)
- 观察INCREMENT 操作序列
  - 每次操作，*A*[0]都反转；
  - 每两次操作，*A*[1]反转；
  - 每2^i次操作，*A*[*i*]反转；
- 于是，总反转次数为

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < n\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2n$$

- 总时间*O*(*n*)
- 每个操作平摊时间*O*(*n*) /*n* = *O*(1)

Counter value	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

平摊分析——记账法

假设 第k步存款余额 $= \sum_{i=1}^{k} 平摊代价_i - \sum_{i=1}^{k} 实际代价_i \geq 0$

则有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} 实际代价_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} 平摊代价_i}{n}$$

其中，在第 i 步，

$平摊代价_i > 实际代价_i$ 时在存款；$平摊代价_i < 实际代价_i$ 时在取款

记账法

- 对不同的操作赋予不同的费用，某些操作的费用比它们的实际代价或多或少。
- 我们对一个操作的收费的数量称为平摊代价。
  - 当一个操作的平摊代价超过了它的实际代价时，两者的差值就被当作存款，并赋予数据结构中的一些特定对象，可以用来补偿那些平摊代价低于其实际代价的操作。
  - 记账法与聚集分析的区别：
    聚集分析中的所有操作都具有相同的平摊代价。
- 数据结构中存储的总存款等于总的平摊代价和总的实际代价之差。注意：总存款不能是负的。(为什么？)

n个栈操作的平摊时间

操作	实际代价	平摊代价
PUSH	1	2
POP	1	0
MULTIPOP	min(k,s)	0

- 对PUSH操作多收费，多出来的1元钱放在入栈的对象上，待POP和MULTIPOP把该对象弹出栈时，恰好每个对象上的1元前抵消了操作的实际代价
- 因为栈s中对象数不可能为负，即存款不会小于0
  - 保证n个操作平摊时间之和是n个操作实际时间的上界

二进制计数器上的记账法分析

- 两个问题
  - 如何对INCREMENT收费？ （平摊代价）
  - 收的费用放在放在哪里？ （如何平摊）

二进制计数器上的记账法分析

- 注意到，每次INCREMENT只会把一个0反转为1，但可能把多个1反转为0。
  - INCREMENT的实际代价为反转的次数
  - INCREMENT平摊代价为2，用于把0反转为1，并把剩余的1元钱存放在反转成1的位上。
  - 把1反转成0的实际代价由存放在1上的1元钱支付
- $A[1..k-1]$数组中，1的个数（=存款）不可能为负

练习题

- 假设我们希望不仅能使一个计数器增值，也能使之复位至零。请说明如何将计数器实现为一个位数组，使得对一个初始为零的计数器，任一包含n个INCREMENT和RESET操作的序列的时间为$O(n)$

平摊分析——势能法

利用数据结构D的函数Φ定义平摊代价：

$$\text{平摊代价}_i = \text{实际代价}_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

只要 $\forall i$，$\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \text{实际代价}_i}{n} = \frac{\Phi(D_0) - \Phi(D_n) + \sum_{i=1}^{n} \text{平摊代价}_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{平摊代价}_i}{n}$$

势能法

- 不是将已预付的费用作为存在数据结构特定对象中存款来表示，而是表示成一 种“势能（potential）”，它在需要时可以释放出来，以支付后面操作的额外开销。
- 势是与整个数据结构而不是其中的个别对象发生联系的。（区别于记账法)

势函数Φ

- 对一个初始数据结构D_0执行n个操作。对每个i，设c_i为每个操作的实际代价， D_i为对数据结构D_{i-1}执行第i个操作的结果。
- 势函数Φ 将每个数据结构D_i映射为一个实数$\Phi(D_i)$, 即与D_i相联系的势。
- 第i个操作的平摊代价a_i根据势函数Φ 定义为

$$a_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

- 即每个操作的平摊代价为其实际代价c_i加上由于该操作所增加的势。n个操作的总的平摊代价为

$$\sum a_i = \sum c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

势函数Φ

- 如果势函数Φ使得对所有n，有$\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$，
  则总平摊代价$\sum a_i$就是总实际代价$\sum c_i$的一个上界
  - 通常为了方便起见会定义$\Phi(D_0) = 0$（不是必须的）
- 正的势差存储势
  - 如果第i个操作的势差$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$是正的，则平摊代价$a_i$表示对第$i$个操作多收了费，同时数据结构的势也随之增加了。
- 负的势差不足收费
  - 如果势差是负值，则平摊代价就表示对第i个操作的补足收费，这是通过减少势来支付该操作的实际代价。
- 平摊代价依赖于所选择的势函数Φ。
  - 不同的势函数可能会产生不同的平摊代价，但它们都是实际代价的上界。最佳势函数的选择取决于所需的时间界。

栈操作——势能法分析

- 定义势函数为栈中对象的个数
  - 开始时要处理是空栈D_0，所以$\Phi(D_0) = 0$
  - 栈中的对象数始终非负，所以$\Phi(D_i) \geq 0 = \Phi(D_0)$
  - 以Φ表示的n个操作的平摊代价的总和，那么Φ就是总的实际代价的一个上界
- 对于作用于一个包含s个对象的栈上的第i个操作
- 如果**PUSH**，则
  - 势差为 $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s+1) - s = 1$
  - 平摊代价为 $a_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1+1 = 2$

栈操作——势能法分析

- 如果是MULTIPOP(S,k)
  - 该操作的实际代价为c_i = min(s, k)
  - 势差为$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = -\min(s, k)$
  - 平摊代价为

$$a_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \min(s, k) - \min(s, k) = 0$$

- 类似的，如果是POP，平摊代价也为0
- 三种栈操作每种的平摊代价都是$O(1)$， 这样包含n个操作的序列的总平摊代价就是$O(n)$。已经证明n个操作的平摊代价的总和是总的实际代价的一个上界。所以n个操作的最坏情况代价为$O(n)$

二进制计数器——势能法分析

- 计数器$A[0 \cdot\cdot k-1]$ 表示为k位二进制位的数组

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

- 操作INCREMENT实现计数器加一

```
INCREMENT(A)
i ← 0
while i < length[A] and A[i] = 1 do
      A[i] ← 0
      i ← i + 1
if i < length[A] then
      A[i] ← 1
```

- 如何定义势?

二进制计数器——势能法分析

- 定义势函数为数组$A[0...k\text{-}1]$中1的个数

  计算INCREMENT的平摊代价

  - 设第i次操作把t_i个1反转为0，则实际代价为t_i+1
  - 设第i次操作后数组中1的个数为b_i
    - 如果$b_i = 0$，则第i次操作反转了k个1，有$b_{i-1}=t_i=k$；
    - 如果$b_i > 0$，则$b_i = b_{i-1} - t_i + 1$。
    - 两种情形下都有：$b_i \le b_{i-1} - t_i + 1$

- 势差为 $\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1}) \le (b_{i-1} - t_i + 1) - b_{i-1} = 1 - t_i$

- 平摊开销为 $a_i = c_i +\Phi(D_i)-\Phi(D_{i-1}) \le (t_i+1)+(1-t_i) = 2$

二进制计数器——初值非零

- 设计数器中初始有b_0个1，n次INCREMENT操作后有b_n个1

（$0 \le b_0, b_n \le k$， k为计数器位数）

对所有的i， $a_i \le 2$

$\Phi(D_n) = b_n$ ， $\Phi(D_0) = b_0$

n次INCREMENT操作总代价

$\sum c_i = \sum a_i - \Phi(D_n) + \Phi(D_0) \le \sum 2 - b_n + b_0 = 2n - b_n + b_0$

- 只要$k \le O(n)$，则总代价就为$O(n)$
- 注意：这里并没有要求$\Phi(D_n) \ge \Phi(D_0)$， 也没有要求$\Phi(D_0) = 0$

练习题

- 考虑普通二叉最小堆上最坏运行时间为$O(\log n)$的操作INSERT和EXTRACT-MIN。请给出势函数Φ，使得INSERT操作的平摊代价为$O(\log n)$，EXTRACT-MIN的平摊代价为$O(1)$。
- 说明如何用两个普通的栈来实现一个队列，使得每个ENQUEUE和DEQUEUE操作的平摊代价都为$O(1)$。

动态表及其上的平摊分析

动态表

- 在有些应用中，在开始的时候无法预知在表中要存储多少个对象。这就希望能根据对象的多少调整所需要的存储空间（多退少补）
- 表的动态扩张和收缩——动态表
  - 用平摊分析证明插入、删除操作的平摊代价是$O(1)$
  - 动态表的具体结构可以是堆、栈、散列表等等
  - 假设我们用数组来存储动态表（不是链表）
  - 通过插入扩张和删除搜索
    - 保证未使用空间总是不多于整个分配空间的一定比例
- 先看只有插入操作的情形，再拓展至包含删除操作

插入算法

```
Insert(T, x)
if size[T]=0 then
      给table[T]分配一个槽的空间
      size[T]←1
if num[T]=size[T] then
      分配一个有2*size[T]个槽的空间的新表
      将table[T]中所有的项插入到新表中
      释放table[T]
      table[T]指向新表的存储块地址
      size[T]←2*size[T]
将x插入table[T]
num[T]←num[T]+1
```

一次插入操作的代价

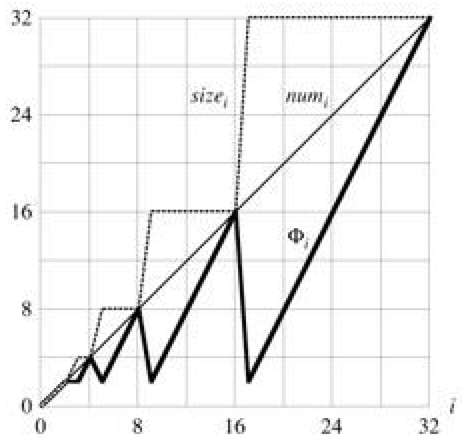
- 简单分析，一次插入操作的代价为$O(n)$
  - 于是n次插入操作总代价为$O(n^2)$
- 聚集分析，一次插入操作的代价为
  - 当i-1是2的幂时： $c_i = i$
  - 其他时候： $c_i = 1$
  - 总代价 $\sum_{i=0}^{n} c_i \le n + \sum_{i=0}^{\lfloor \log(n) \rfloor} 2^i \le n + 2\mathrm{n} = 3n$
  - 平摊代价为$3n/n = 3$
- 记账法，插入收费3元，其中2元钱分别赋给表中最后插入的对象和一个已经没有存款的对象

  当需要扩张表时，每个对象被复制一次，恰好用完存款

表扩张时插入操作的平摊代价

- 势函数： $\Phi(T) = 2num[T] - size[T]$
- 当第i个操作不触发表扩张，则

$$\begin{aligned} a_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\ &= 1 + (2 \cdot num_i - size_i) - (2 \cdot num_{i-1} - size_{i-1}) \\ &= 1 + (2 \cdot num_i - size_i) - (2(num_i - 1) - size_i) \\ &= 3 \end{aligned}$$



- 当第i个操作触发表扩张，则

$$\begin{aligned} a_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\ &= num_i + (2 \cdot num_i - size_i) - (2 \cdot num_{i-1} - size_{i-1}) \\ &= num_i + (2 \cdot num_i - 2(num_i - 1)) - (2(num_i - 1) - (num_i - 1)) \\ &= num_i + 2 - (num_i - 1) = 3 \end{aligned}$$

表扩张和收缩时的平摊代价

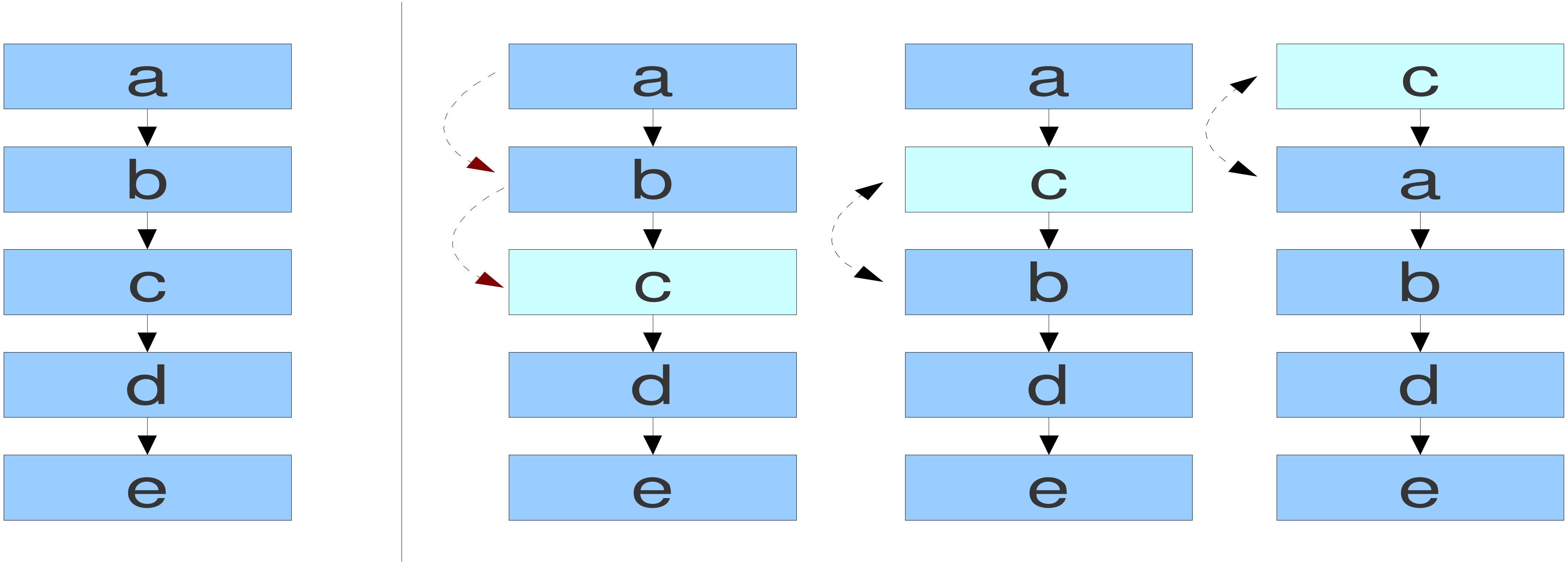
- 插入/删除操作：满时扩张、小于**1/4**时收缩
- 势函数
  - $\Phi(T) = \max(2*num[T] - size[T], 2*size[T]/4 - num[T])$
- 插入操作的平摊代价都小于**3**
  - 根据是否引起扩张来分别计算
- 删除操作的平摊代价都小于**2**
  - 根据是否引起收缩来分别计算
- 总平摊代价为$O(n)$

MTF（move-to-front）链表访问

MTF（move-to-front）链表访问

- 在一个单链表（singly-linked list）上
  - 访问第 i 个元素的访问代价为 i
  - 交换两个相邻元素的代价为某个固定常数值
  - 给定链表的初始状态
  - 目标：通过“交换”调整链表，使得 n 次访问的总访问代价最小？
  - 如果访问序列已知，可以设计一个最优调整策略！ （如何做？）
  - 如果访问序列是在线的，该如何调整？
    - 假设访问具有局部性
    - 采用move-to-front （MTF）方式调整链表

Move-to-front 示例



MTF链表访问有多好?

- 平摊分析能告诉我们
  - **MTF** 不会比任何其他调整策略（包括最优策略）效率的4倍更差
- 提示：定义势函数
  - 设任意调整策略的算法为**A**
  - **MTF**在时刻t的当前链表，相对于算法**A**在时刻t的当前链表，*其中顺序*不同的元素对的个数的**2**倍（$\Phi_A(t)$，相对于**A**的**2**倍逆序对数）

考察访问引起的势的变化

- 设访问*x*前，*x*在MTF中的第*k*个位置，在A中的第*i*个位置。
- 先考虑访问 *x* 后，在 A 交换元素前，势的变化情况
  - 最多增加min{*k*–1, *i*–1}个新逆序对
  - 至少减少*k*-1-min{*k*–1, *i*–1}个旧逆序对
  - 势的变化最多为2倍的两者之差：4min{*k*–1, *i*–1}-2(*k*-1)
  - 于是

$$\begin{aligned}\hat{c} &= c + \Delta\Phi \\ &\le (2k-1) + 4\min(k-1, i-i) - 2(k-1) \\ &\le 4\min(k-1, i-1) + 1 \\ &\le 4i\end{aligned}$$

- 再考虑 A 交换元素后，势的变化
  - A做j次元素交换，最多增加势差2j，小于所增加开销的4倍

更多平摊分析经典问题

- Splay trees
- Red-black trees
- Fibonacci heaps
- Disjoint sets
- Maximum flow
- Hash table
- Scapegoat trees

平摊分析小结

- 平摊分析的概念
- 平摊分析的三种方法
  - 聚集分析
  - 记账法
  - 势能法
- 动态表及其上的平摊分析
- MTF链表访问的平摊分析

- 17 Amortized Analysis (CLRS, 3rd ed.)
  - 17.1 Aggregate analysis
  - 17.2 The accounting method
  - 17.3 The potential method
  - 17.4 Dynamic tables

- 平摊分析也常用于分析“竞争比”
  - （见 第14讲 在线算法）