

北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 算法设计与分析 姓名： _____ 学号： _____

考试时间： 2011 年 6 月 13 日 任课教师： 汪小林/蒋婷婷/肖臻

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								
阅卷人								

北京大学考场纪律

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场。在考试开始 30 分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

以下为试题和答题纸，共 15 页。

装订线内

不要答题

得分

一、填空题（每空 1 分，共 20 分）

1. 请将下列 5 个关于 n 的函数 $(\sqrt{2})^{\lg n}$, n^2 , $\lg^2 n$, $(\lg n)!$, $2^{\sqrt{2} \lg n}$ 按渐进增长的关系排序, 使得 $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, ..., $g_4 = \Omega(g_5)$ 。

_____、_____、_____、_____和_____。

2. 对于 n 个元素的数组, 插入排序、归并排序和快速排序的最坏情形运行时间分别是 n^2 、 $n \log n$ 和 n^2 。

3. 对于某种快速排序算法, 如果每两次连续选取的划分元素, 一次会把数组划分为基本等长的两个部分, 另一次则会划分为长度为 1 和 $n-2$ 的两个部分 (n 表示当前数组长度)。则该快速排序算法的时间复杂度是 $n \log n$ 。

4. 对在 $1 \sim k$ 之间的 n 个数用计数排序法排序, 时间复杂度为 $O(n+k)$, 如果 $k \gg n$ 时, 可以采用基于计数排序法的 基数 排序法提高排序效率。

5. 线性时间选择算法 SELECT 首先从每 5 个数中选取中位数, 用算法 select 递归求这些中位数的 中位数 作为分治划分的参照元素。

6. 如果图 $G=(V, E)$ 中的每条边的长度均为 1, 则求给定起点的单源最短路径问题的时间复杂性为_____。

7. 货郎问题 (TSP) 在 三角不等式 的条件下有多项式时间的 2-近似算法。

8. MAX-3-CNF 可满足问题的随机近似算法是 $\frac{8}{7}$ 近似算法。(填近似比例)

9. 用势能法分析动态表 (T), 其插入操作的平摊代价是 2 , 其势函数 $\Phi(T)=$ _____。(注: $\Phi(T)$ 是 $\text{num}[T]$ 和 $\text{size}[T]$ 的函数, 其中 $\text{num}[T]$ 是动态表中当前数据量, $\text{size}[T]$ 是动态表当前长度。)

10. 平面上有三个点 $P_1=(x_1, y_1)$ 、 $P_2=(x_2, y_2)$ 、 $P_3=(x_2, y_3)$, 判断线段 P_1P_3 在 P_1P_2 逆时针方向的条件是_____。

得分

二、单选题。（每小题 1 分，共 10 分）

1. 下列说法正确的是： []
 - (a) 求 n 个数中的最大数至少需要比较 $n-1$ 次
 - (b) 求 n 个数中的次大数最少只需要比较 $\lfloor \log n \rfloor$ 次
 - (c) 在 n 个数中找某个数 x ，可以采用二分法，只需比较 $O(\log n)$ 次
 - (d) 不可能用少于 7 次的比较对 5 个数排序

2. 下列哪个问题的回溯算法**不能**基于对称性优化： []
 - (a) 图的 m 着色问题
 - (b) 最大团问题
 - (c) 旅行商问题（TSP）
 - (d) 圆排列问题

3. 关于在线算法，下列说法中**错误**的是： []
 - (a) 一个在线问题的最优在线算法具有最小的竞争比
 - (b) 没有比 k 竞争比更优的页面调度算法了
 - (c) LRU 和 FIFO 都是 k 竞争比页面调度在线算法
 - (d) 在实际应用中，LRU 和 FIFO 都是最优的页面调度算法

4. 用 Edmonds-Karp 算法计算最大流，时间复杂度是： []
 - (a) $O(VE^2)$
 - (b) $O(V^2E)$
 - (c) 流网络各边的容量相关，可能很大
 - (d) $O(V^3)$

5. n 个点的点集 Q 的凸包 P 中有 h 个点，下述说法**错误**的是： []
 - (a) Graham 扫描法的时间复杂度为 $O(n \log n)$
 - (b) Jarvis 步进法的时间复杂度为 $O(nh)$
 - (c) Jarvis 步进法比 Graham 扫描法的时间复杂度低
 - (d) Graham 扫描法和 Jarvis 步进法中都可利用叉积法判断点与线段间的关系

6. 以下问题中属于 NPC 的是: []
- (a) 最长公共子序列
 - (b) 最长路径
 - (c) 最小生成树
 - (d) 快速排序
7. 以下叙述**错误**的是: []
- (a) 多项式对加法、乘法、复合运算都是闭合的
 - (b) 判定问题可以通过二分法搜索来求解最优问题
 - (c) NPC 问题和 NP-hard 问题也是 NP 问题
 - (d) 任何一个 NP 问题都可以归于到任何一个 NPC 问题
8. 以下关于 P 、 NP 、 $co-NP$ 的关系中**不可能**出现的情况是: []
- (a) $P = NP = co-NP$
 - (b) $P \neq NP \cap co-NP$
 - (c) $P = NP \cap co-NP$
 - (d) $P = NP \neq co-NP$
9. 以下论述**错误**的是: []
- (a) 如果存在任何一个 NPC 问题是多项式时间内可解, 那么 $P=NP$
 - (b) 如果存在任何一个 NP 问题不能在多项式时间内可解, 那么没有 NPC 问题可在多项式时间内可解
 - (c) 如果 $L_1 \leq_P L_2$, 那么 L_1 不会比 L_2 更难解
 - (d) 语言 L 被算法 A 接受当且仅当 $x \notin L$ 被 A 拒绝
10. 以下关于最优顶点覆盖问题的近似解法的叙述**错误**的是: []
- (a) 是多项式时间的 2-近似算法
 - (b) 所得顶点覆盖集中的边是该图的一个最大匹配
 - (c) 剩余顶点构成其补图的一个团
 - (d) 运行时间为 $O(V+E)$

得分

三、求解下列递归式，假设 $T(1)=1$ （每小题 5 分，共 15 分）

(1) $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

$$(2) \ T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$$

(3) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n \log n$

得分

四、简答题（共 20 分）

(1) 100 个人排队乘坐有 100 个座位的飞机，正常情况时每个都会对号入座，但是，第一个上飞机的是个傻子，他随机坐了一个位子，接下来的人上飞机时，如果自己座位被人坐了就会随机找个座位坐下，否则就坐自己座位。问题：最后一个上飞机的人坐到自己座位的概率是多少？（3 分）

(2) 个人作业分配问题的费用矩阵如下面的表格所示，请给出用于分支限界法的化简后的费用矩阵。（3 分）

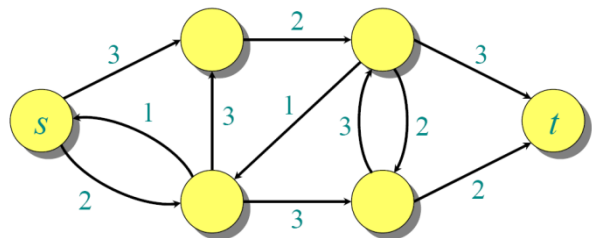
费用矩阵

作业 人 \	1	2	3	4
1	29	19	17	12
2	32	30	26	28
3	3	21	7	9
4	18	13	10	15

化简的费用矩阵

作业 人 \	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

(3) 下图所示是一个流网络，请说明其上的最大流值是多少？（3 分）



(4) 对于类似如下的背包问题，请问如果采用回溯法求解该问题，应该怎样重构该问题 (3 分)。

$$\begin{aligned} \max & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 10 \\ & x_i \in N, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(5) 对于上述重构后的背包问题，给出其节点代价函数。(3 分)

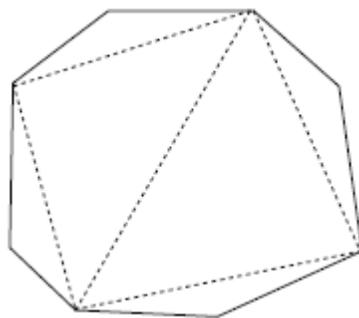
(6) 芝加哥有许多高楼，但是只有一些高楼可以看见密西根湖。假设数组 $A[1 \dots n]$ 存储了 n 栋高楼的高度（从西向东且高度各不相同）。第 i 栋高楼可以看见密西根湖当且仅当第 i 栋高楼东边的每栋楼都比它矮。例如，如果高楼的高度从西向东递减，则每栋高楼都能看到密西根湖。以下是计算哪些高楼可以看见密西根湖的算法。请分析算法的时间复杂度。（5 分）

```
GOODVIEW( $A[1 \dots n]$ ):  
    initialize a stack  $S$   
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$   
        while ( $S$  not empty and  $A[i] > A[Top(S)]$ )  
            Pop( $S$ )  
        Push( $S, i$ )  
    return  $S$ 
```

得分

五、多边形三角剖分问题（共 15 分）

P 是一个有 n 个顶点的凸多边形。连接 P 的两个顶点并且位于 P 的内部线段称为“对角线”。 P 的一个三角剖分是指一组互不相交的“对角线”组成的最大集合（即对角线条数最多集合，如图所示）。请设计一个时间复杂度 $O(n^3)$ 的动态规划算法来计算 P 的三角剖分使得所包含的对角线的长度之和最小。要求：



- (1) 给出算法的简要描述，可以是伪码，也可以是文字性描述（5 分）。

(2) 写出该算法关于对角线长度之和的状态转移方程 (3 分)。

(3) 简要证明该问题具有最优子结构的性质 (4 分)。

(4) 简要分析所设计的算法的时间复杂度是 $O(n^3)$ (3 分)。

得分	六、串匹配问题（共 10 分）

假设有一个字符串 $y = b_1b_2 \dots b_n$ ， y 的一个“分散子串”是指 $x = a_1a_2 \dots a_m$ ， $m \leq n$ 并且 $a_i = b_{j_i}$ ， $1 \leq i \leq m, 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$ 。例如，字符串 12345 就是字符串 1ds2j34muy5dy 一个分散子串。

(1) 请设计一个时间复杂度为 $O(n)$ 的算法来判断 x 是否是 y 的分散子串。(5 分)

(2) 请修改上述算法得到一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法, 使得所找到的分散子串的“分散长度” $j_m - j_1$ 最小。(5 分)

得分

七、矩阵上的快速查找问题（共 10 分）

假设有一个 n 维的方形矩阵 $a(1..n, 1..n)$ ，满足 $a(i, j) < a(i, j+1)$ ， $a(i, j) < a(i+1, j)$ 。现已经将矩阵读入内存，需要在矩阵中查找某一个特定的数 x 的位置。设计尽可能快的查找算法完成这个任务。

(1) 写出查找算法，伪码或文字描述均可（5 分）。

(2) 分析算法的正确性 (3 分)

(3) 说明算法的时间复杂度 (2 分)。