Homework 3

Name: 柯宇斌, ID: 2200013213

Problem 1 (10') . 离散型随机向量 (X, Y) 的分布列如下表.

X/Y	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.2	b	0.1
1	0	0.1	c

已知 $P(X \geq 0) = 0.6$，$P(X \neq 0 | Y \neq 0) = \frac{5}{8}$.

求

(1)a, b, c 的值.

(2) X, Y 各自的边缘分布列.

(3) $X + Y$ 的分布列. ◀

Answer. (1) 由定义，有

$$\begin{cases} a + 0.2 = 1 - 0.6 \\ \frac{a+0.2+0+c}{a+0.2+0.2+0.1+0+c} = \frac{5}{8} \\ a + 0 + 0.2 + 0.2 + b + 0.1 + 0 + 0.1 + c = 1 \end{cases}$$

所以有 $\begin{cases} a = 0.2 \\ b = 0.1 \\ c = 0.1 \end{cases}$

(2) 如下（表格不会）

$$\begin{cases} P(X = -1) = 0.4 \\ P(X = 0) = 0.4 \\ P(X = 1) = 0.2 \end{cases} \quad \begin{cases} P(Y = -1) = 0.4 \\ P(Y = 0) = 0.2 \\ P(Y = 1) = 0.4 \end{cases}$$

(3) 如下（表格不会）

$$\begin{cases} P(X + Y = -2) = 0.2 \\ P(X + Y = -1) = 0.2 \\ P(X + Y = 0) = 0.3 \\ P(X + Y = 1) = 0.2 \\ P(X + Y = 2) = 0.1 \end{cases}$$ ◁

Problem 2 (10') . 证明如下两个问题

(1) 设随机向量 (X, Y, Z) 的密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z, 0\leq x,y,z\leq 2\pi\\ 0,\end{cases}$$

证明 X, Y, Z 两两独立但不相互独立

(2) 设随机向量 (X, Y, Z) 的密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4}, |x|,|y|\leq 1\\ 0,\end{cases}$$

证明 X, Y 不独立但 X^2, Y^2 独立 ◀

Answer. (1) 由定义，有 (这里的 m,n 都在 $[0, 2\pi]$ 之间)

$$f_X(m)=f_Y(m)=f_Z(m)=\int_{x,y\in[0,2\pi]}f(x,y,m)dxdy=\frac{1}{2\pi}$$

$$f_{X,Y}(m,n)=\int_{z\in[0,2\pi]}f(m,n,z)dz=\frac{1}{4\pi^2}$$

所以 $f_{X,Y}(m,n)=f_X(m)f_Y(n)$, 所以 X, Y 独立，同理 $Y, Z; X, Z$ 相互独立

但 $f_{X,Y,Z}(m,n,t)\neq f_X(m)f_Y(n)f_Z(t)$

所以 X, Y, Z 不相互独立

结合对称性，得证

(2) 由定义有 (这里的 m,n 都在 $(-1, 1)$ 之间)

我们只考虑在分布函数的部分，一些边缘情况 (f 恒为 0 的情况) 不考虑

$$F_{X,Y}(m,n)=\int_{x\in(-1,m),y\in(-1,n)}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}(m+1)(n+1)-\frac{1}{8}(m^2-1)(n^2-1)$$

$$F_X(m)=F_Y(m)=F_{X,Y}(m,1)=\begin{cases}0, m\leq 0\\ \frac{m+1}{2}, -1<m<1\\ 1, m\geq 1\end{cases}$$

$$F_{X^2}(m)=F_{Y^2}(m)=F_X(\sqrt{m})-F_X(-\sqrt{m})=\begin{cases}0, m\leq -1\\ \sqrt{m}, 0<m<1\\ 1, m\geq 1\end{cases}$$

$$F_{X^2,Y^2}(m,n)=\int_{x\in(-\sqrt{m},\sqrt{m}),y\in(-\sqrt{n},\sqrt{n})}f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, m\leq -1\\ \sqrt{mn}, 0<m<1\\ 1, m\geq 1\end{cases}$$

所以 $F_{X,Y}(x,y)\neq F_X(x)F_Y(y)$，但 $F_{X^2,Y^2}(m,n)=F_{X^2}(m)F_{Y^2}(n)$

所以 X, Y 不独立，X^2, Y^2 独立 ◁

Problem 3 (10') . 设随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}C(|xy|+\frac{xy}{2}),|x|,|y|<1,\\0,\end{cases}$$

(1)1 求 C 的值；计算 X, Y 各自的边缘密度.

(2) X, Y 是否相互独立?

(3) X^2+Y^2, X^2-Y^2 的概率密度是什么？是否相互独立? ◀

Answer. 本题的分布函数只考虑 $f_{X,Y}(x,y)$ 不恒为 0 的部分

(1)$F_{X,Y}(m,n)=\int_{-1\le x\le m,-1\le y\le n} f_{X,Y}(x,y)dxdy = C(\frac{(1+m|m|)(1+n|n|)}{4}+\frac{(m^2-1)(n^2-1)}{8})$

而由概率的定义，有 $F_{X,Y}(1,1)=1$，故有 $C=1$

而 $F_X(m)=F_{X,Y}(m,1)=\frac{1+m|m|}{2}$, 从而 $f_X(m)=|m|$

结合对称性,$f_X(m)=f_Y(m)=\begin{cases}|m|,|m|<1\\0,others\end{cases}$

(2) 显然 $f_{X,Y}(m,n)\neq f_X(m)f_Y(n)$ ，所以不相互独立

(3) 当 $0\le m\le 1$ 时

$$F_{X^2+Y^2}(m)=\int_0^m\int_0^{2\pi} f_{X,Y}(\sqrt{r}\cos\theta,\sqrt{r}\sin\theta)drd\theta=\frac{1}{2}m^2$$

当 $1\le m\le 2$ 时

$$F_{X^2+Y^2}(m)=(\int_{-\sqrt{m-1}}^{\sqrt{m-1}}\int_{-1}^{1}+\int_{\sqrt{m-1}}^{1}\int_{-\sqrt{m-x^2}}^{\sqrt{m-x^2}}+\int_{-1}^{-\sqrt{m-1}}\int_{-\sqrt{m-x^2}}^{\sqrt{m-x^2}})f_{X,Y}(x,y)dxdy=-\frac{1}{2}m^2+2m-1$$

从而

$$F_{X^2+Y^2}(m)=\begin{cases}0,m<0\\\frac{1}{2}m^2,0\le m\le 1\\-\frac{1}{2}m^2+2m-1,1<m<2\\1,m\ge 2\end{cases}$$

同理

$$F_{X^2-Y^2}(m)=\begin{cases}0,m\le -1\\\frac{1}{2}m^2+m+\frac{1}{2},-1<m<0\\-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{1}{2},0\le m<1\\1,m\ge 1\end{cases}$$

而

$$f_{X^2+Y^2,X^2-Y^2}(m,n)=P(|X|\le\sqrt{\frac{m+n}{2}},|Y|\le\sqrt{\frac{m-n}{2}})=\frac{(m+n)(m-n)}{4}$$

其中 $0\le m+n, m-n\le 2$

则不难看出 $F_{X^2+Y^2}(m)F_{X^2-Y^2}(n) \neq F_{X^2+Y^2,X^2-Y^2}(m,n)$

所以不互相独立 ◁

Problem 4 (10') . 设 Z 是取值为正整数的随机变量，在集合 $\{1, 2, \cdots, Z\}$ 中均匀随机取一个数 X，记 R 是集合 $\{X+1, X+2, ..., Z\}$ 的大小，即比 X 大的数的个数. 设随机变量 U 与 Z 独立，且 U $U(0,1)$，问 R 与 $[UZ]$ 是否同分布？（$[x]$ 表示 x 的整数部分） ◀

Answer. 显然取值都是 0 到 $Z-1$ 之间的整数

设取出来的数是 M

$P(R=x) = \sum_z P(Z=z)P(M=z-x|Z=z) = \sum_{z>x} P(Z=z)\frac{1}{z}$

$P([UZ]=x)=P(x \le UZ < x+1) = \sum_z P(Z=z)P(\frac{x}{z} \le U < \frac{x+1}{z}) = \sum_{z>x} P(Z=z)\frac{1}{z}$

所以是同分布的 ◁

Problem 5 (10') . 称取值为正整数的离散型随机变量 ξ 服从以 (n, p) 为参数的帕斯卡分布，如果它的分布列为 $P(\xi=r) = \begin{cases} \binom{r-1}{n-1}p^n q^{r-n}, r=n, n+1, \ldots, \\ 0, others \end{cases}$ 设随机变量 X, Y 相互独立，且分别服从参数为 $(1, p)$ 和 $(2, p)$ 的帕斯卡分布，求证：$X+Y$ 服从参数为 $(3, p)$ 的帕斯卡分布 ◀

Answer. 显然 $X+Y$ 的取值只能为大于等于 3 的正整数，所以有

当 $r \ge 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} P(X+Y=r) &= \sum_{i=0}^{r-3} P(X=i+1)P(Y=(r-3-i)+2) \\ &= \sum_{i=0}^{r-3} \binom{i}{0} p^1 q^i \binom{r-3-i+1}{1} p^2 q^{r-3-i} \\ &= \sum_{i=0}^{r-3} \binom{i}{0}\binom{r-2-i}{1} p^3 q^{r-3} \\ &= \binom{r-1}{2} p^3 q^{r-3} \end{aligned} \tag{1}$$

得证 ◁

Problem 6 (10') . 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 p 的几何分布. 令 $Z = max\{X, Y\}$. 求

(1)(X, Z) 的联合概率分布

(2)X 关于 Z 的条件概率分布 ◀

Answer. 本题只讨论正整数 (所有的 m, n, k 都是正整数

(1) 不难得知 $P(X=k) = P(Y=k) = (1-p)^k p$,

$P(X \le k) = 1 - P(X > k) = 1 - (1-p)^{k+1}$

当 $m = n$ 时,

$P_{X,Z}(X = m, Z = n) = P(X = m)P(Y \le m) = p(1-p)^m(1-(1-p)^{m+1})$

当 $m < n$ 时

$P_{X,Z}(X = m, Z = n) = P(X = m)P(Y = n) = p^2(1-p)^{m+n}$

综上

$$P_{X,Z}(m,n) = \begin{cases} p(1-p)^m(1-(1-p)^{m+1}), m = n > 0 \\ p^2(1-p)^{m+n}, 0 < m < n \\ 0, others \end{cases}$$

(2) 注意到 $P(Z = n) = P(X \le n)P(Y \le n) - P(X \le n-1)P(Y \le n-1)$

所以 $P(Z = n) = p(1-p)^n(2-(1-p)^n-(1-p)^{n+1})$ 结合 (1), 有

$$P_{X|Z}(m|n) = \begin{cases} \frac{1-(1-p)^{n+1}}{2-(1-p)^n-(1-p)^{n+1}}, m = n > 0 \\ \frac{p(1-p)^m}{2-(1-p)^n-(1-p)^{n+1}}, 0 < m < n \\ 0, others \end{cases}$$

◁

Problem 7 (10') . 设 $X_1, \ldots, X_n \sim i.i.d.U(0,1)$

(1) 令 $Y_n = min_{1\le i\le n}X_i$, Y_n 的分布函数为 $F_n(x)$. 对一切 $x \in R$, 计算 $\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$

(2) 令 $Z = min\{n \in N^*|X_1 + \cdots + X_n > 1\}$. 求证:$P(Z > 3) = \frac{1}{6}$ ◀

Answer. 不难有 $F(X) = A - Ae^{-x}(x > 0)$. 由 $F(+\infty) = 1$ 有 $A = 1$.

(1) 当 $0 < x < 1$ 时 $F_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = 1 - (1-x)^n$

从而 $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$

(2)

$$\begin{aligned} P(Z > 3) &= P(X_1 + X_2 + X_3 \le 1) \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-m} \int_0^{1-m-n} P(X_1 = m)P(X_2 = n)P(X_3 = t)dmdndt \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{2}$$

得证 ◁

Problem 8 (10') . 若 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$, 现在将 (ξ,η) 化为极坐标 (ρ,ϕ), 其中 $\xi = \rho\cos\phi, \eta = \rho\sin\phi(\rho \ge 0, \phi \in [0, 2\pi]$. 试证 ρ, ϕ 是相互独立的. ◀

Answer. 当 $0 \le r$ 时

$$\begin{aligned} f_{\rho,\phi}(r,\theta) &= f_\xi(r\cos\theta) f_\eta(r\sin\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(r\cos\theta)^2}{2}) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(r\sin\theta)^2}{2}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2}) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_\rho(r) &= \int_0^{2\pi} f_{\rho,\phi}(r,\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2})d\theta \\ &= \exp(-\frac{r^2}{2}) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f_\phi(\theta) &= \int_0^{+\infty} f_{\rho,\phi}(r,\theta)dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{r^2}{2})dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{5}$$

从而

$$f_\phi(\theta) f_\rho(r) = f_{\rho,\phi}(r,\theta)$$

◁

Problem 9 (10') . 设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_1^2,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, 已知 (X,Y) 的联合密度为

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65))$$

(1) 将 $f_{X,Y}(x,y)$ 写成二元正态分布定义中的密度的形式，指出 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_1^2$

(2) 写出边缘密度 $f_X(x)$

(3) 写出条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$ ◀

Answer. (1) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))$

由此可见 $\mu_1 = 4, \mu_2 = 3, \sigma_1^2 = 1, \sigma_1^2 = 2$

(2)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{1}{2}(x-4+y-3)^2)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2) \end{aligned} \tag{6}$$

(3)$f_{Y|X}(y|x)$

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= f_{X,Y}(x,y)/f_X(x) \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi}\exp(-((x-4)^2+(x-4)(y-3)+\frac{1}{2}(y-3)^2))}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x-4)^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}(x+y-7)^2) \end{aligned} \tag{7}$$

◁

Problem 10 (10') . 对任意两个随机变量 X, Y，设其存在概率分布密度为 $f_{X,Y}(x,y)$，是否一定存在两个可逆函数 $Z = g(X,Y), W = h(X,Y)$ 使得 Z, W 相互独立？更一般地，是否能使 Z, W 都是 $U(0,1)$

为了简便起见，本题假设 $f_{X,Y}(x,y) \neq 0$ ◀

Answer. 可以。记 $Z = g(X,Y) = g(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(m,y)}{f_Y(y)} dy, W = F_Y(y)$

则 $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \frac{\partial W}{\partial y} = f_Y(y)$ 则

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} \end{bmatrix} = f_{X,Y}(x,y)$$

而

$$f_{Z,W}(Z,W) \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} \end{bmatrix} = f_{X,Y}(x,y)$$

所以

$$f_{Z,W}(Z,W) = 1$$

显然与 x, y 无关，自然也与 Z, W 无关

则 $W \quad [0,1]$

对 $0 \leq w \leq 1$

$$F_W(w) = P(F_Y(y) \leq w) = w$$

(当 y 取值在最小的 w 部分时，恰好使得 $F_Y(y) = w$)

所以

$$f_W(w) = 1$$

$f_Z(z) = \int_0^1 f_{Z,W}(z,w)dw = 1$ 所以 W, Z 相互独立且与 $U(0,1)$ 同分布 ◁