18 秋 数分 3 数学分析 3 刘培东 期中

北京大学数学科学学院

2018-2019 学年第一学期数学分析 III 期中试题

请在答卷上填写院系、姓名与学号

1. (共 16 分， 每小题 2 分) 将下列命题 (1)-(8) 中你认为 **正确** 的结论的序号写在答题纸上， 下面的 $\vec{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为连续映射.

(1) 开集在 $\vec{f}$ 下的 原像 恒为开集. (2) 开集在 $\vec{f}$ 下的 像 恒为开集. 映到一个点

(3) 闭集在 $\vec{f}$ 下的 原像 恒为闭集. (4) 闭集在 $\vec{f}$ 下的 像 恒为闭集.

(5) 道路连通集在 $\vec{f}$ 下的 原像 恒为道路连通集.

(6) 道路连通集在 $\vec{f}$ 下的 像 恒为道路连通集.

(7) 道路连通集的闭包恒为道路连通集.

(8) 对任可数多个集合 A_k, 有 $\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}$

2. （8分） 设 E_1, $E_2 \subset \mathbf{R}^d$ 为非空集合， 它们之间的距离定义为

$$d(E_1, E_2) = \inf_{\vec{x} \in E_1,\ \vec{y} \in E_2} d(\vec{x}, \vec{y}).$$

若 E_1, E_2 为有界闭集 (可直接使用闭集的各种等价定义)， 问是否一定存在 $\vec{x}_0 \in E_1$, $\vec{y}_0 \in E_2$ 满足

$$d(E_1, E_2) = d(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$$

$f(x,y)$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)$

$+ f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$

简述理由.

3. (10分) 设 $f(x,y)$ 为 $[0,1] \times [0,1]$ 上的函数， 对每个固定 $y \in [0,1]$, $f(x,y)$ 对 $x \in [0,1]$ 连续; 对每个固定 $x \in [0,1]$, $f(x,y)$ 对 $y \in [0,1]$ 连续. 问 $f(x,y)$ 是否一定是 $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ 的连续函数？ 简述理由.

4. (14 分) 给出一个函数 $f(x,y)$， 使它同时满足下述条件(简述理由)：

(a) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 各个偏导数存在;

(b) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 各个方向导数存在;

(c) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

5. (12分) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为一个凸区域， 函数 $f(\vec{x})$ 在 D 内有二阶连续偏导数， 证明下述两结论等价:

(1) 对任 $\vec{x}_0$, $\vec{x} \in D$, 有 $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)^{\mathrm{T}}$;

(2) 对任 $\vec{x}_0 \in D$, $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 处的 Hessi 矩阵 $\mathbf{H}_f(\vec{x}_0)$ 半正定.

6. (14分) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^4 + z^4$ 在条件 $xyz = 1$ 下是否存在最小值？ 简述理由. 若存在， 求之.

请注意， 背面有题

7. (10分) 用反函数存在定理证明隐函数存在定理.

8. (6分) 设 $\vec{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为 C^1 映射. 若对任 $\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ 导数 $\vec{f}'(\vec{x})$ 为对称且正定矩阵， 证明 $\vec{f}$ 为单射.

9. (10分) 形如 $(u,v)\mapsto(u,\phi(u,v))$ 或 $(u,v)\mapsto(\psi(u,v),v)$ 的 映射称为简单 映射. 设 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 C^1 同胚 （即 F 可逆，且 F 与 F^{-1} 皆为 C^1）. 证明对任 $P_0(x_0,y_0)$ 都存在 P_0 的一个邻域 U 使得 $F:U\to F(U)$ 可分解为两个简单 C^1 映射的合成， 即 $F=\Psi\circ\Phi$, 其中 $\Phi:U\to V$ （V 为 $\mathbf{R}^2$ 开子集）, $\Psi:V\to F(U)$ 皆为简单 C^1 同胚.