2017-2018 年度数学分析 III 期中试题

1. 填空题（24 分）

(1) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f'_x(0,1)=$ ________，$f'_y(0,1)=$ ________；

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=3$。若 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，则 $\frac{d\varphi^3(x)}{dx}|_{x=1}=$ ________。

(3) 有方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ ________。

(4) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A=(1,0,1)$ 处沿 A 指向点 $B=(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 __________。

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=$ __________。

(6) $\mathbb{R}^2$ 中的集合 $E=\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{x}\}$ 的边界点集为 ______________。

2. （12 分）（1）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定，求 z_y，z_y；（2）求 $u(x,y,z)=x^{y^z}$，$x,y,z>0$ 的偏导数。

3.（16 分）选择题

（1）方程 $xyz^3+x^2+y^3-z=0$ 在原点附近能确定连续可微的隐函数形式是

(A) $x=x(y,z)$；(B) $y=y(x,z)$；(C) $z=z(x,y)$；(D) 以上都不对。

（2）设函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为可微函数，且 $g'_y(x,y)\neq 0$。若 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的一个极值点，则

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$；
(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$。

（3）下列平面点集，不是区域的是

(A) $D=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$；(B) $D=\{(x,y)|0<x<1,-2<y<4\}$；
(C) $D=\{(x,y)|0<x<1,y<1+x\}$；(D) $D=\{(x,y)|xy>0\}$。

（4）下列结论正确的是

(A) 重极限存在，累次极限也存在并相等；(B) 累次极限存在，重极限也存在但不一定相等；
(C) 重极限存在，累次极限也可能不存在；(D) 重极限不存在，累次极限也不存在。

4.（16 分）讨论下列函数的连续性

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{y} & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$；

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2\neq 0, p>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

5.（10 分）（1）叙述关于两个方程组的二元二维向量函数的隐函数存在定理；（2）设方程组 $\begin{cases}x-u^2=yu\\ y-v^2=xu\end{cases}$ 确定了隐函数组 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，求 $\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$。

6.（8 分）求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极大值点。

7.（8 分）证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x} & x\neq 0\\ y, & x=0\end{cases}$ 在其定义域内连续。

8.（6 分）设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 上有定义。若 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f'_y(x,y)$ 在 D 上有界。证明：f 在 $(0,0)$ 处连续。

答案

1. (1) 1, 0; (2) 51; (3) $dx - \sqrt{2}dy$; (4) $\frac{1}{2}$;(5) 1; (6)$E \cup \{(x,y)|x=0,-1 \le y \le 1\}$。

2. （1）$z_x = \frac{z^2}{x(y+z)}$，$z_y = \frac{z}{y+z}$。
（2）

$$\begin{aligned} u_x &= y^z x^{y^z-1} \\ u_y &= x^{y^z} \ln x z y^{z-1} \\ u_z &= x^{y^z} \ln x \ln y y^z \end{aligned}$$

3. (1) C；(2) D；(3) D；(4) C。

4. (1) 在 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$ 不连续，其余点连续
(2) $p < \frac{1}{2}$ 时连续，$p \ge \frac{1}{2}$ 时在 $(0,0)$ 不连续。

5. （1）结论中需指出存在唯一性，和偏导数的结论；（2）$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2v}(u + \frac{x}{2u+y})$，$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2v}(1 + \frac{xu}{2u+y})$。

6. $(k\pi, \cos k\pi - 1)$，k 为偶数。
7. 分别在 $(0,0)$ 处和 $(0,y_0)$ 处讨论。
8.