PKU-04833060
算法设计与分析『实验班』

第2讲 基础知识

函数的渐近界 与 递推方程求解

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

2024年春季学期

数学基础

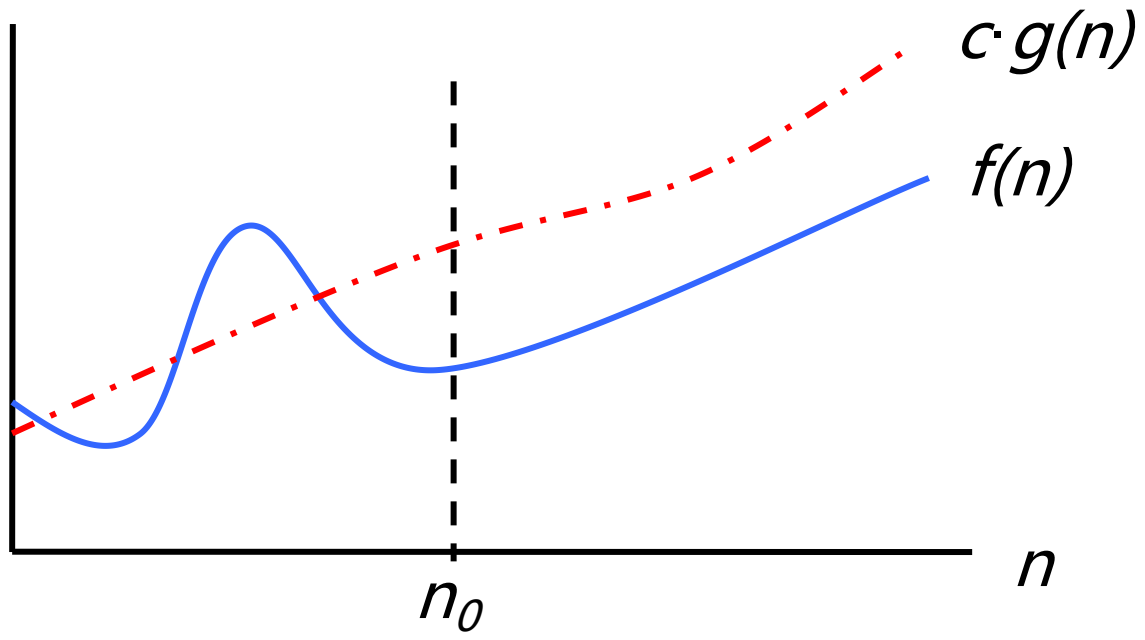
- 函数的渐近的界
- 常见函数的阶
- 递推方程求解
  - 递归树
  - 主定理证明及应用
  - 生成函数

函数的渐近的界

- 下列公式表示的确切含义是什么?
  - f (n) = O(g(n)) : Big Oh
    f (n) = Ω(g(n)) : Big Omega
  - f (n) = o(g(n)) : little oh
    f (n) = ω(g(n)) : little omega
  - f (n) = Θ(g(n)) : Big Theta

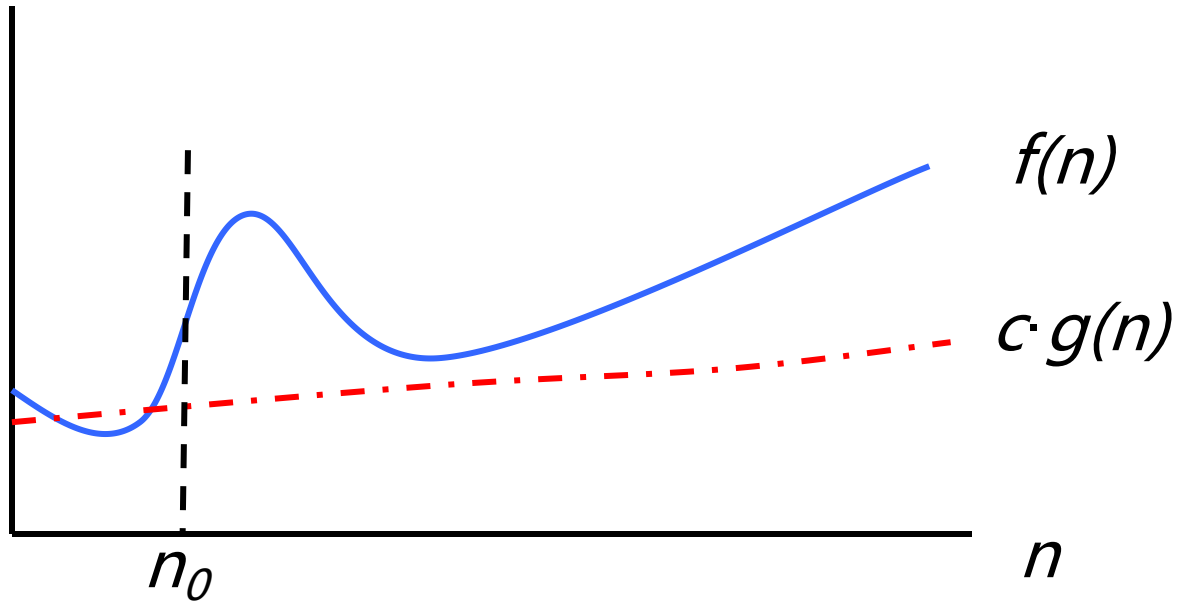
大O记号（渐近上界）

- f(n) = O(g(n))
  - iff ∃ c, n_0 > 0, s.t. ∀ n≥n_0: 0 ≤ f(n) ≤ c·g(n)



大Ω记号（渐近下界）

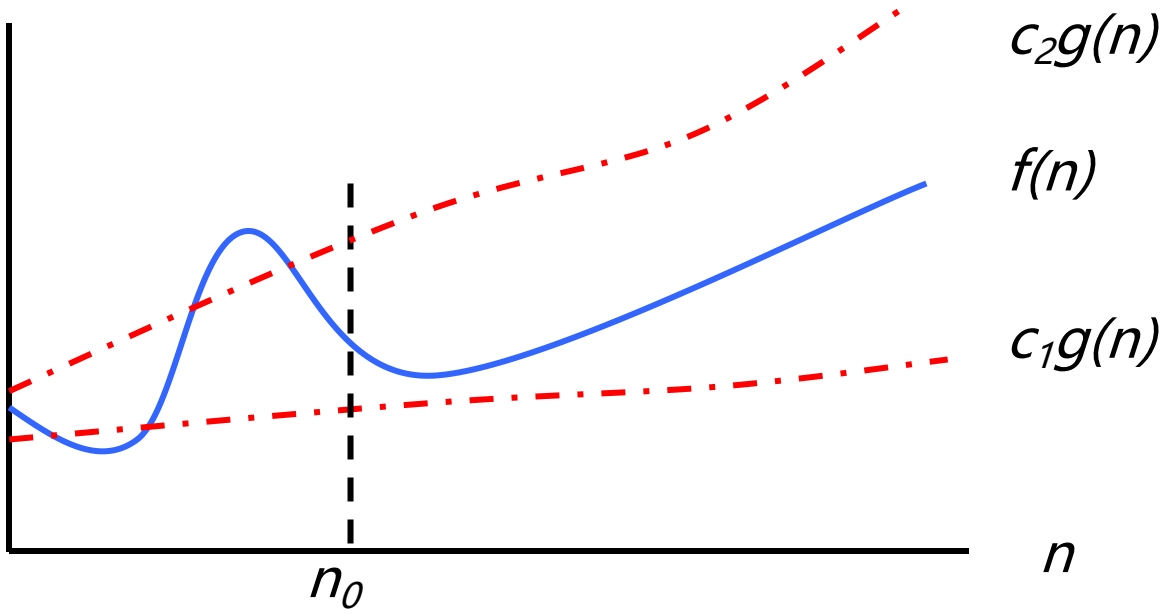
- f(n) = Ω(g(n))
  - iff ∃ c, n_0 > 0, s.t. ∀ n≥n_0, 0 ≤ c·g(n) ≤ f(n)



大Θ记号（渐近紧确界）

- $f(n) = \Theta(g(n))$

  iff $\exists\ c_1, c_2, n_0 > 0$, s.t. $\forall\ n > n_0$: $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$



函数的渐近的界

定义 设 f 和 g 是定义域为自然数集 N 上的函数

1. 若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n > n_0$ 有
   $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 成立，则称 $f(n)$ 的渐近的上界是 $g(n)$，
   记作 $f(n) = O(g(n))$。 // 也记作 $f(n) \in O(g(n))$

2. 若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n > n_0$ 有
   $0 \leq cg\,(n) \leq f(n)$ 成立，则称 $f(n)$ 的渐近的下界是 $g(n)$，
   记作 $f(n) = \Omega(g(n))$。 // 也记作 $f(n) \in \Omega(g(n))$

3. 若 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$，
   则记作 $f(n) = \Theta(g(n))$。 // 也记作 $f(n) \in \Theta(g(n))$

函数的渐近的界

4. 若对任意正数 c 都存在 n_0，使得当 $n \geq n_0$ 时有 $0 \leq f(n) < cg(n)$ 成立, 则记作 $f(n) = o(g(n))$.

   即 $f(n) = O(g(n))$ 但 $f(n) \neq \Theta(g(n))$

5. 若对任意正数 c 都存在 n_0，使得当 $n \geq n_0$ 时有 $0 \leq cg(n) < f(n)$ 成立, 则记作 $f(n) = \omega(g(n))$.

   即 $f(n) = \Omega(g(n))$ 但 $f(n) \neq \Theta(g(n))$

例 函数 $f(n) = n^2 + n$,

$f(n) = O(n^2)$, $f(n) = O(n^3)$, $f(n) = o(n^3)$, $f(n) = \Theta(n^2)$

有关定理

定理 设 f 和 g 是定义域为自然数集合的函数.

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=c>0$，那么 $f(n)=\Theta(g(n))$.

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=0$，那么 $f(n)=o(g(n))$.

(3) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=+\infty$，那么 $f(n)=\omega(g(n))$.

有关阶的一些性质

- 定理 设 f, g, h 是定义域为自然数集合的函数，
  1. 如果 $f = O(g)$ 且 $g = O(h)$，那么 $f = O(h)$.
  2. 如果 $f = \Omega(g)$ 且 $g = \Omega(h)$，那么 $f = \Omega(h)$.
  3. 如果 $f = \Theta(g)$ 和 $g = \Theta(h)$，那么 $f = \Theta(h)$.

- 定理 假设 f 和 g 是定义域为自然数集合的函数，若对某个其它的函数h，有 $f = O(h)$ 和 $g = O(h)$，那么 $f + g = O(h)$.

例题

例题 设$f(n)=\frac{1}{2}n^2-3n$，证明$f(n)=\Theta(n^2)$。

证：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2-3n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

根据定理有$f(n)=\Theta(n^2)$。

可以证明：多项式函数，幂函数的阶低于指数函数

$$\boldsymbol{n^d=o(r^n)，\ r>1，\ d>0}$$

对数函数的阶

符号：

$$\log n = \log_2 n$$

$$\log^k n = (\log n)^k$$

$$\log\log n = \log(\log n)$$

性质：

$$\log_b n = o(n^\alpha) \quad \alpha > 0$$

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$\log_k n = \Theta(\log_l n)$$

阶乘函数的阶

Stirling公式 $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n}))$

$$n! = o(n^n)$$

$$n! = \Omega(2^n)$$

$$\log(n!) = \Theta(n\log n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)/\ln 2}{n\ln n/\ln 2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n!)}{n\ln n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+(\frac{c}{n})))}{n\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{2\pi n}+n\ln\frac{n}{e}}{n\ln n} = 1$$

上述的c为某个常数

例题：函数的阶

按照阶从高到低对以下函数排序：

$$\log^2 n,\ 1,\ n!,\ n2^n,\ n^{n/\log n},\ \left(\frac{3}{2}\right)^n,\ \sqrt{\log n},\ (\log n)^{\log n},\ 2^{2^n},$$
$$n^{\log\log n},\ n^3,\ \log\log n,\ n\log n,\ n,\ 2^{\log n},\ \log n,\ \log(n!)$$

结果：

$$2^{2^n},\ n!,\ n2^n,\ n^{n/\log n},\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ (\log n)^{\log n}=n^{\log\log n},\ n^3,\ \log(n!)=$$
$$\Theta(n\log n)\ ,\ n=2^{\log n},\ \log^2 n,\ \log n,\ \sqrt{\log n},\ \log\log n$$

多项式函数与指数函数

时间复杂度函数	问题规模					
	10	20	30	40	50	60
n	10 ns	20 ns	30 ns	40 ns	50 ns	60 ns
n^2	0.1 μs	0.4 μs	0.9 μs	1.6 μs	2.5 μs	3.6 μs
n^3	1 μs	8 μs	27 μs	64 μs	125 μs	216 μs
n^5	0.1 ms	3.2 ms	24.3 ms	0.10 s	0.31 s	0.78 s
2^n	1 μs	1 ms	1.1 s	18 min	13 d	37 y
3^n	59 μs	3.5 s	57 h	3.9 C	$2*10^5$ C	$1.3*10^{10}$ C

* 假设单个操作耗时1ns

10亿次/秒机器求解的问题

- 快速排序算法给10万个数据排序, 运算量约为
  $10^5 \times \log_2 10^5 \approx 1.7 \times 10^6$，仅需$1.7 \times 10^6 / 10^9 = 1.7 \times 10^{-3}$秒.
- Dijkstra算法求解1万个顶点的图的单源最短路径问题,
  运算量约为$(10^4)^2 = 10^8$，约需$10^8 / 10^9 = 0.1$秒.
- 回溯法解100个顶点的图的最大团问题, 运算量为
  $100 \times 2^{100} \approx 1.8 \times 10^{32}$，需要$1.8 \times 10^{32} / 10^9 = 1.8 \times 10^{21}$秒
  $= 5.7 \times 10^{15}$年，即5千7百万亿年!
- 1 分钟能解多大的问题：1分钟=60秒，这台计算机可做用
  快速排序算法可给2×10^9（20亿）个数据排序,
  用 Dijkstra算法可解2.4×10^5个顶点的图的单源最短路径问题,
  而用回溯法一天只能解41个顶点的图的最大团问题

多项式函数与指数函数

时间复杂度函数	1小时可解的问题实例的最大规模		
	计算机	快100倍的计算机	快1000倍的计算机
n	N_1	$100\ N_1$	$1000\ N_1$
n^2	N_2	$10\ N_2$	$31.6\ N_2$
n^3	N_3	$4.64\ N_3$	$10\ N_3$
n^5	N_4	$2.5\ N_4$	$3.98\ N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
3^n	N_6	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$

快1000倍的计算机

- 😁 求解规模更大的难题?
- 😀 求解更多规模适中的难题!
  - 或将原问题分解为更多、更精确的规模适中的难题

问题的复杂度分析

多项式时间可解的问题与难解的问题

- 多项式时间可解的问题P

  存在着解P的多项式时间的算法

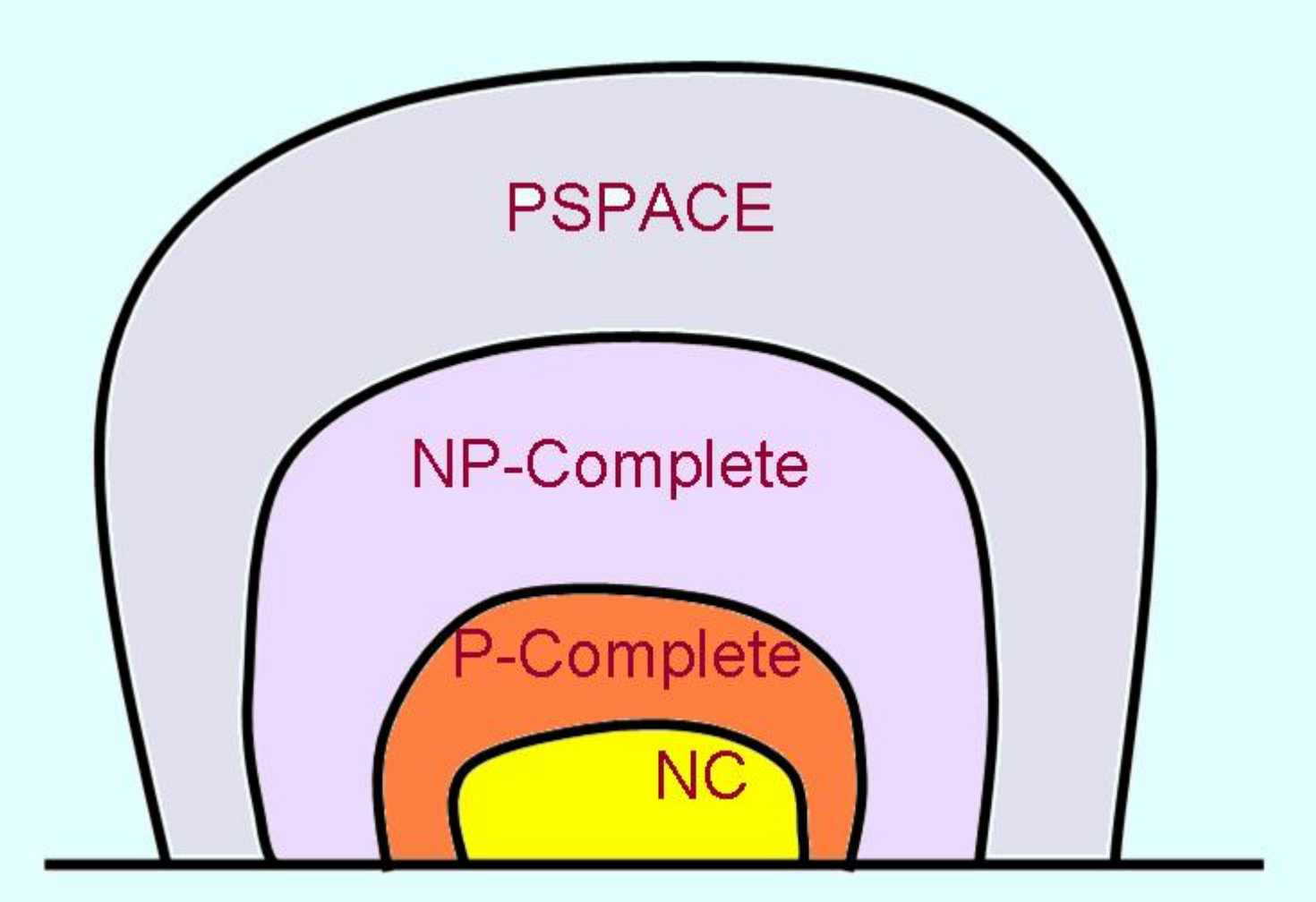
- 难解的问题P

  不存在解P的多项式时间的算法

- 实际上可计算的问题

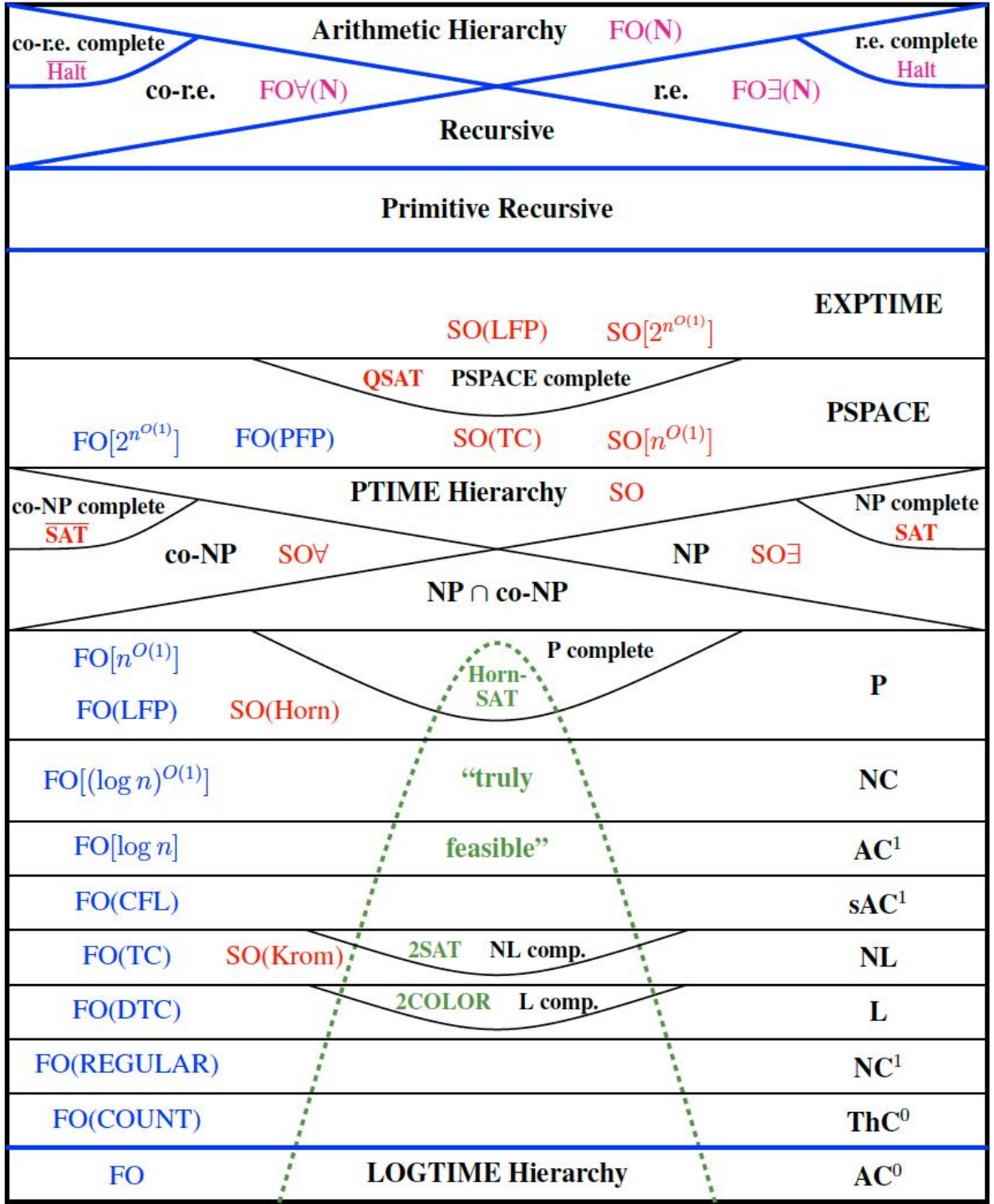
  多项式时间可解的问题

不同复杂性类的基本层次结构



计算复杂性类的谱系

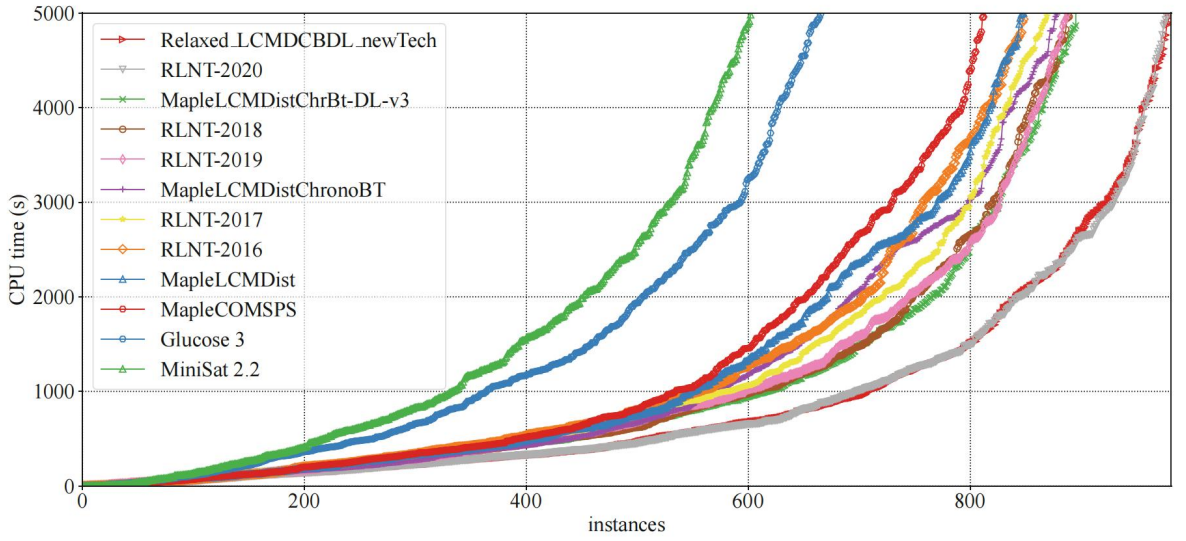
https://people.cs.umass.edu/~immerman/descriptive_complexity.html



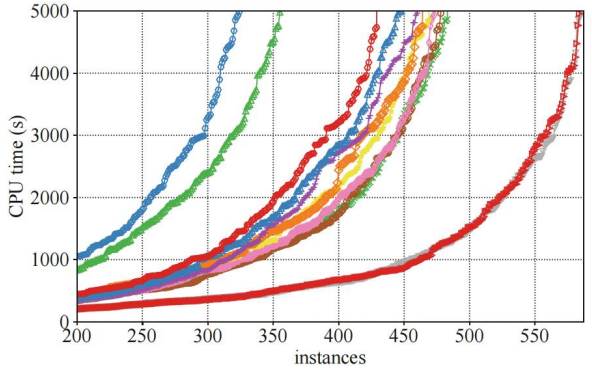
部分NPC问题的实例可在合理时间内取得结果

- 可满足性问题 SAT
  - 某类问题的变量和子句平均数目可高达 10^7

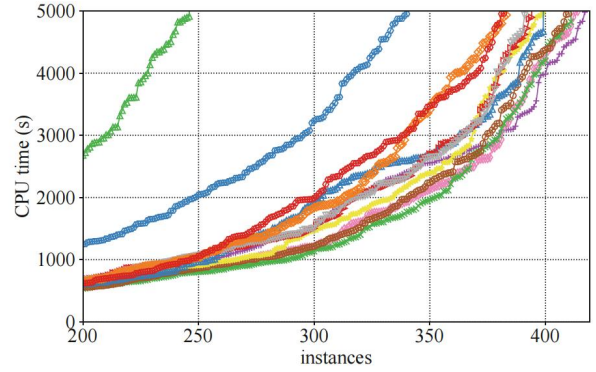
Family	#instances	avg. #vars.	avg. #clauses
2d-strip-packing	5	12753.20	1267404.40
bio	5	46376.40	471256.00
crypto-aes	11	25285.90	82980.81
crypto-des	9	31590.22	95015.66
crypto-gos	30	1892.93	22883.60
crypto-md5	11	66894.00	267579.54
crypto-sha	30	4773.33	151027.86
crypto-vmpc	8	1061.50	171947.00
diagnosis	26	235279.42	1129797.46
hardware-bmc-ibm	4	1335863.00	5234846.00
hardware-bmc	3	114448.33	341918.00
hardware-cec	30	255757.16	754358.03
hardware-velev	21	282973.85	7478281.09
planning	25	469285.60	3323685.24
scheduling-pesp	30	37454.30	270133.10
scheduling	30	160310.13	722325.73
software-bit-verif	14	131492.71	378409.78
software-bmc	3	11216817.00	32697150.00
termination	5	219846.80	950546.60



(a) All benchmarks



(b) Satisfiable benchmarks



(c) Unsatisfiable benchmarks

Kochemazov, S., Ignatiev, A., Marques-Silva, J. (2021). Assessing Progress in SAT Solvers Through the Lens of Incremental SAT. In SAT 2021.

递推方程的求解

递推方程的求解

设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 简记为 $\{a_n\}$，一个把 a_n 与某些个 $a_i (i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程

例子：$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 0, a_1 = 1$

求解目标：给出 a_n 的关于 n 的显式公式

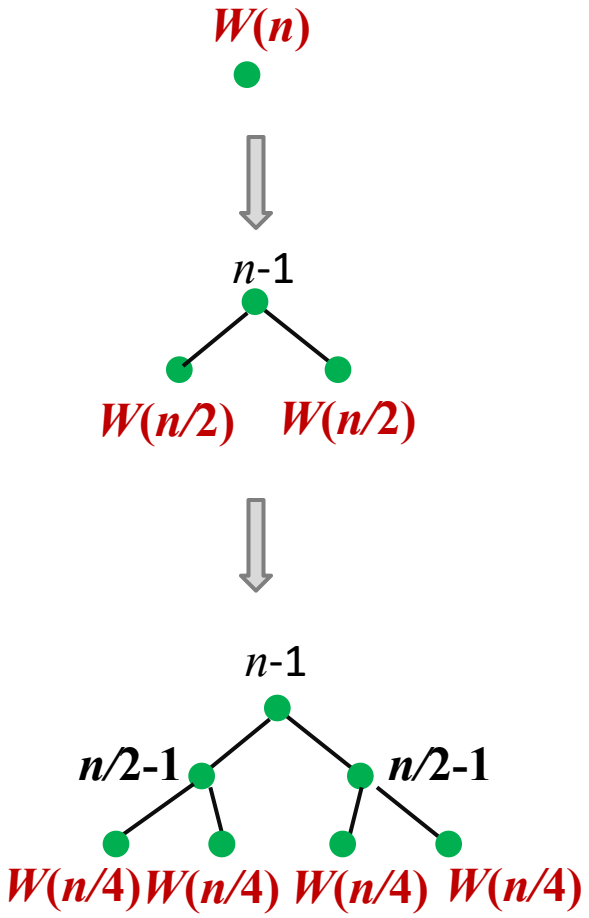
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \widehat{\phi}^n\right)$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \widehat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

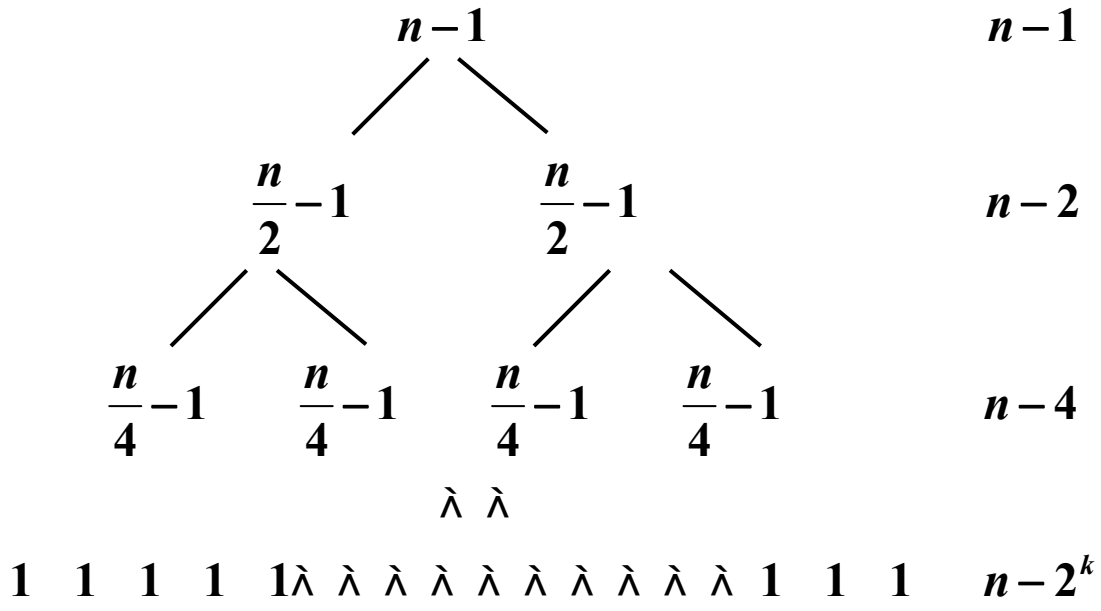
递推方程的求解

- 设序列 $a_0, a_1, ..., a_n, ...$, 简记为 $\{a_n\}$, 一个把 a_n与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程
- 求解方法：
  - 迭代法
    - 直接迭代：插入排序最坏情况下时间分析
    - 换元迭代：二分归并排序最坏情况下时间分析
    - 差消迭代：快速排序平均情况下的时间分析
  - 迭代模型：递归树
  - 尝试法：快速排序平均情况下的时间分析
  - 主定理：递归算法的分析
  - 生成函数

迭代模型：递归树



生成过程



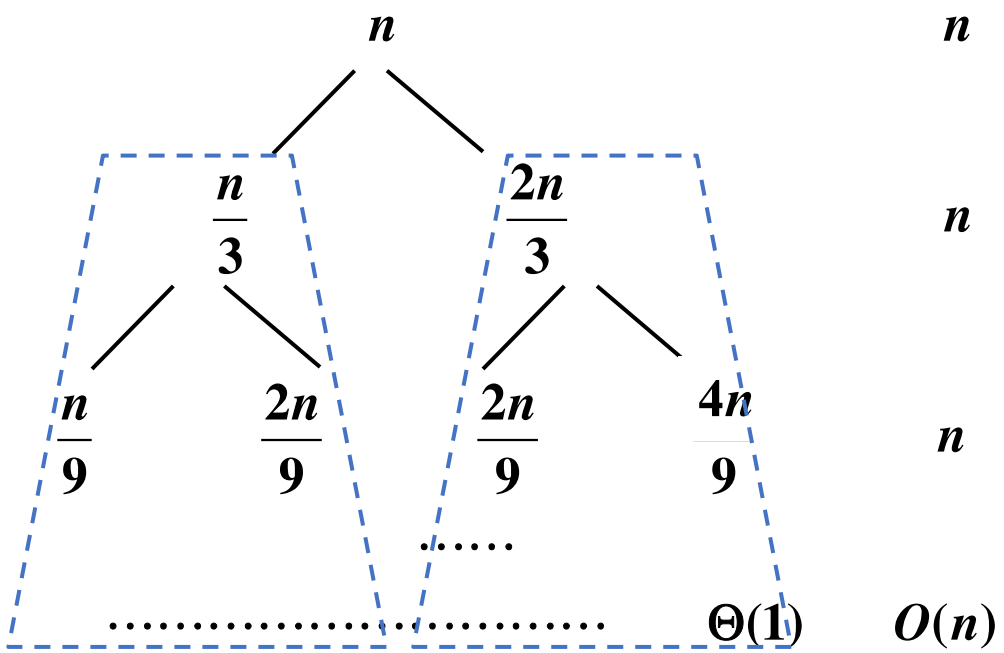
$$W(n)=2W(n/2)+n-1,\ n=2^k,\quad W(1)=0$$

$$W(n)=n-1+n-2+\ldots+n-2^k$$

$$=kn-(2^k-1)=n\log n-n+1$$

递归树的应用实例

求解： $a_n = a_{n/3} + a_{2n/3} + n$



层数 k: $n(2/3)^k \le 1 \Rightarrow (3/2)^k \ge n \Rightarrow k \ge \log_{3/2} n$

$a_n = O(n\log n)$

尝试法：快速排序

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n)$$

(1) $T(n)=C$ 为常函数，左边$=O(1)$

右边$=\frac{2}{n}C(n-1)+O(n)=2C-\frac{2C}{n}+O(n)$

(2) $T(n)=cn$，左边$=cn$

右边$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci+O(n)=\frac{2c}{n}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+O(n)=cn-c+O(n)$

(3) $T(n)=cn^2$，左边$=cn^2$

右边$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci^2+O(n)=\frac{2}{n}[\frac{cn^3}{3}+O(n^2)]+O(n)=\frac{2c}{3}n^2+O(n)$

(4) $T(n)=cn\log n$，左边$=cn\log n$

右边$=\frac{2c}{n}\sum_{i=1}^{n-1}i\log i+O(n)=cn\log n+O(n)$

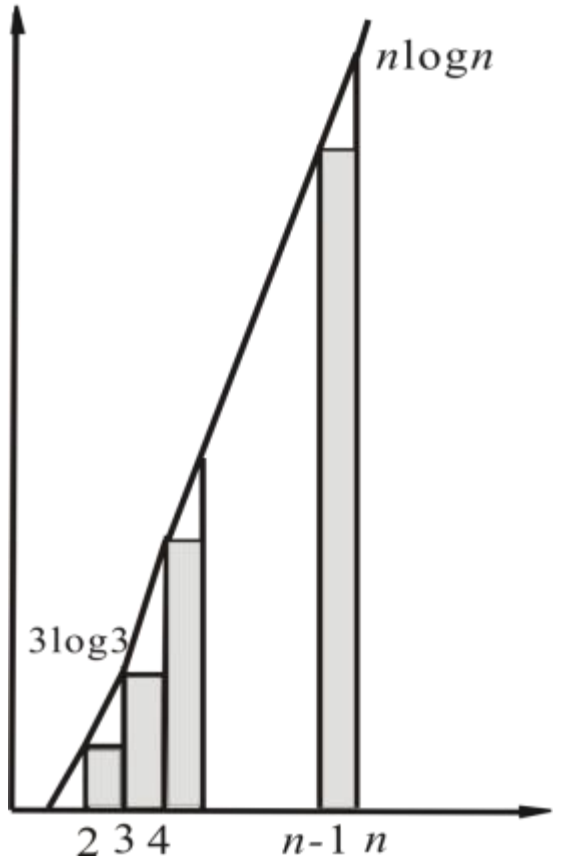
以积分作为求和的近似

$$\int_1^{n-1} x\log x dx \le \sum_{i=1}^{n-1} i\log i \le \int_2^n x\log x dx$$

$$\int_2^n x\log x dx = \int_2^n \frac{x}{\ln 2}\ln x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]\Bigg|_2^n$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4}\right) - \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right)$$



递推方程的归纳证明

- 尝试（猜测）递推方程的解应用归纳法严格证明

- 归纳法求解递推方程的三个步骤
  - 猜测解的形式
  - 用数学归纳法证明
    - 找出使解有效的常数
  - 确定常数使边界条件成立

- 常用技巧
  - 通过引入低阶项获得更紧的解的形式

递推方程的归纳证明

例：$T(n) = 4T(n/2) + n$

- [假定$T(1)=\Theta(1)$]
- 猜测$T(n)= O(n^3)$（分别证明O和Ω 关系）
- 假设，对于所有的$k<n$

  $T(k) \le ck^3$
- 通过归纳法证明

  $T(n) \le cn^3$

例：$T(n) = 4T(n/2) + n$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\leq 4c(n/2)^3 + n$$

$$= (c/2)n^3 + n$$

$$= cn^3 - ((c/2)n^3 - n)$$ ← 期望的形式 – 余项

$$\leq cn^3$$ ← 期望的形式

这里要保证：$((c/2)n^3 - n) \geq 0$，

这只需要：$c \geq 2$并且$n \geq 1$ ← 余项

于是有 $T(n) = O(n^3)$

例：$T(n) = 4T(n/2) + n$

- 还必须处理初始情形，才能使归纳成立。
- 注意到，因为对所有的 $1 \le n < n_0$ 都有 $T(n) = \Theta(1)$ （其中n_0是某个适当的常数）
- 于是当 $1 \le n < n_0$时，只要 c 足够大，就有

$$\text{“}\Theta(1)\text{”} \le cn^3$$

- 但 $T(n) = O(n^3)$ 这个界并不够紧

更紧的上界

- 我们来证明 $T(n) = O(n^2)$
- 假设对于所有的 $k<n$，有 $T(k) \le ck^2$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\le 4c(n/2)^2 + n = cn^2 + n$$

$$= O(n^2)$$

错！必须证明完全一致的形式

更紧的上界

- 我们来证明 $T(n) = O(n^2)$
- 假设对于所有的 $k<n$，有 $T(k) \le ck^2$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\le 4c(n/2)^2 + n = cn^2 + n$$

$$= cn^2 - (-n)$$ ← 期望的形式 – 余项

$$\le cn^2$$

但对任何 $c > 0$，上式最后一步不可能成立！

更紧的上界

要点：加强归纳假设

*减去一个低阶项

假设：对于 $k < n$，有 $T(k) \leq c_1k^2 - c_2k$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\leq 4(c_1(n/2)^2 - c_2(n/2)) + n$$

$$= c_1n^2 - 2c_2n + n$$

$$= c_1n^2 - c_2n - (c_2n - n)$$

$$\leq c_1n^2 - c_2n \quad \text{当 } c_2 > 1$$

可以取 c_1 足够大来处理初始情况。

例：$T(n) = 4T(n/2) + n = \Omega(n^2)$

- 再证明： $T(n) = \Omega(n^2)$
- 假设对于 $k < n$，有 $T(k) \geq ck^2$

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\geq 4c(n/2)^2 + n$$

$$= cn^2 + n$$

- 取 c 足够小来处理初始情况。
- $T(n) = O(n^2)$ 且 $T(n) = \Omega(n^2)$ 得 $T(n) = \Theta(n^2)$

换元法的求解递推方程

- 例：$T(n)=2T(\sqrt{n})+\log n$
- 通过改变变量转化递归式，将 $\sqrt{n}$ 转化为整数。
  令 $m=\log n$，于是

$$T(2^m)=2T(2^{m/2})+m$$

- 再令 $S(m)=T(2^m)$，于是

$$S(m)=2S(m/2)+m$$

$$=\Theta(m\log m)$$

$$T(n)=T(2^m)=S(m)=\Theta(m\log m)$$

$$=\Theta(\log n\ \log\log n)$$

主定理（Master Theorem）

- Bentley, Haken, Saxe, “A general method for solving divide-and-conquer recurrences,” *ACM SIGACT News*, 12 (3): 36–44, 1980.
- Popularized by the CLRS Textbook

主定理

定理： 设$a \geq 1, b>1$为常数，$f(n)$为函数，$T(n)$为非负整数，且

$$T(n)=aT(n/b)+f(n)$$

则有以下结果：

1. 若$f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon}), \varepsilon>0$，那么$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$
2. 若$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$，那么$T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$
3. 若$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon>0$，
   且对某个常数 $c<1$ 和 所有充分大的 n 有
   $a f(n/b) \leq c f(n)$，那么 $T(n)=\Theta(f(n))$

主定理的应用

例9 求解递推方程 $T(n)=9T(n/3)+n$

解 上述递推方程中的$a=9, b=3, f(n)=n$, 那么

$$n^{\log_3 9}=n^2, \quad f(n)=O(n^{\log_3 9-1}),$$

相当于主定理的第一种情况，其中ε=1. 根据定理得到

$$T(n)=\Theta(n^2)$$

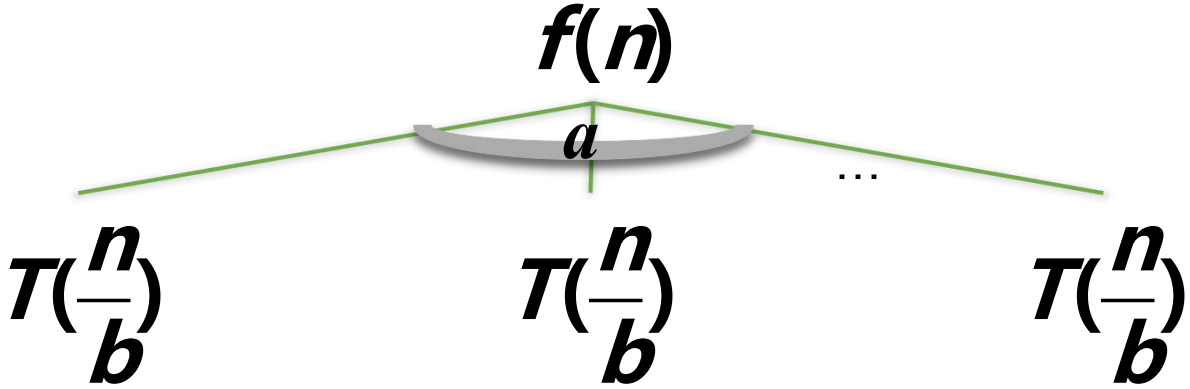
例10 求解递推方程 $T(n)=T(2n/3)+1$

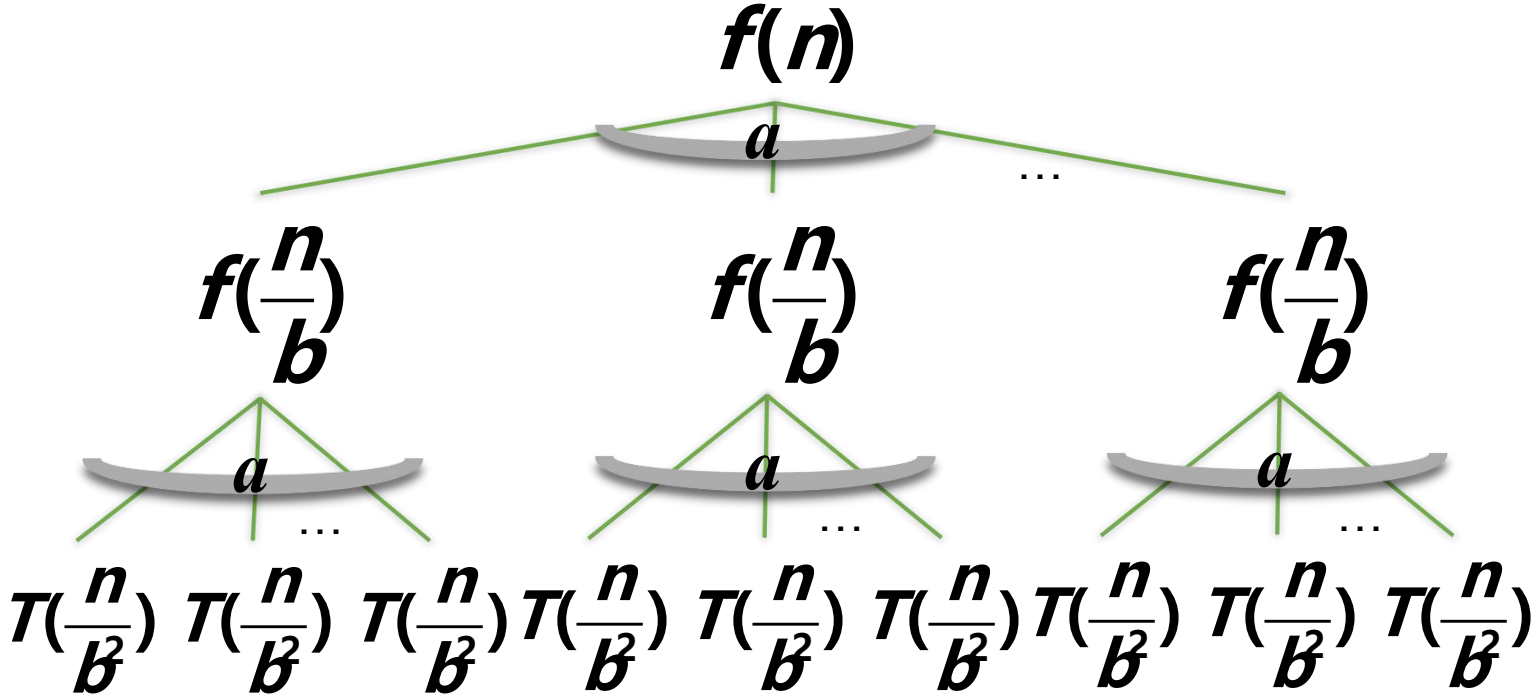
解 上述递推方程中的 a=1, b=3/2, $f(n)$=1，那么

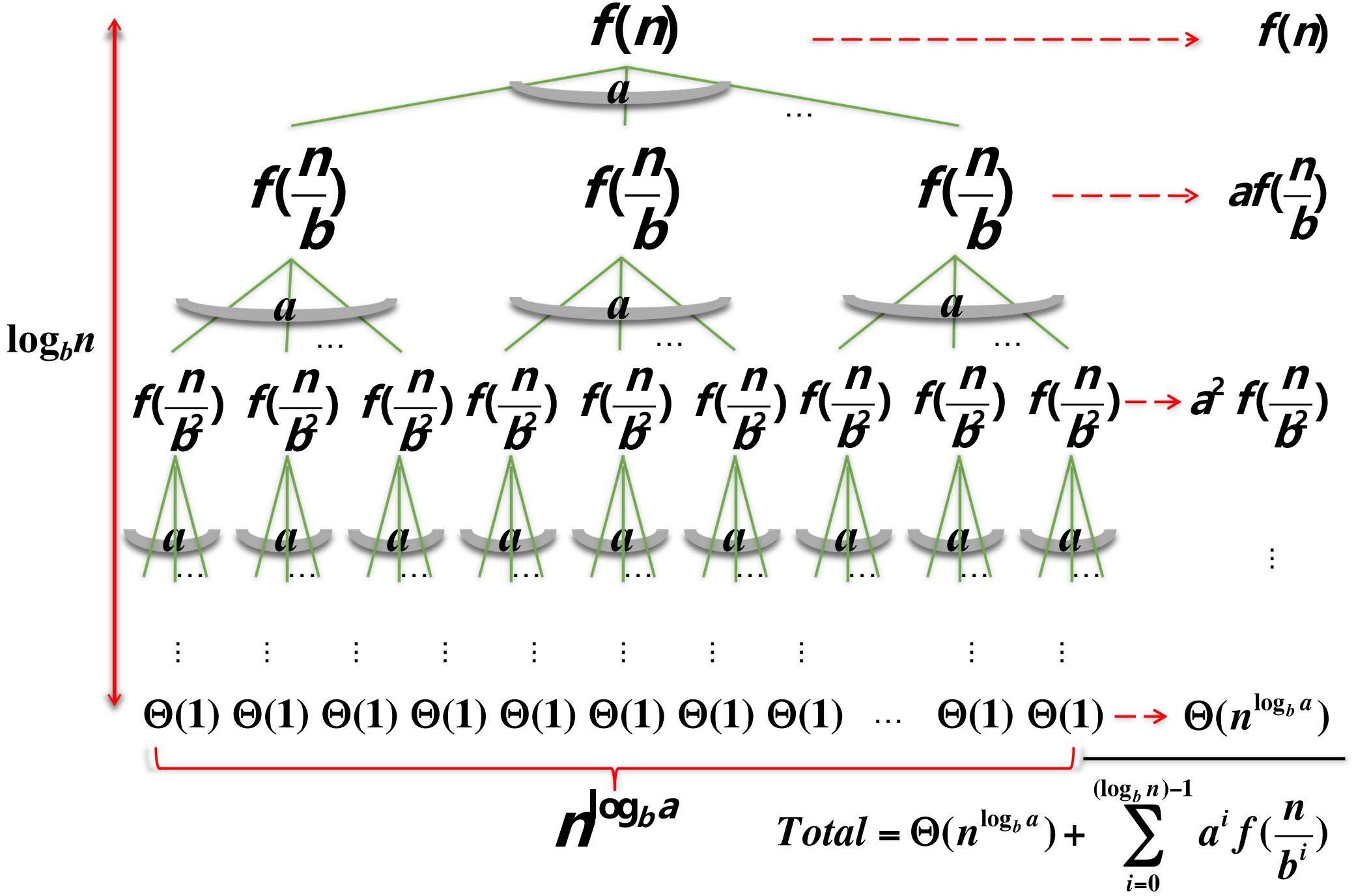
$$n^{\log_{3/2} 1}=n^0=1, \quad f(n)=1$$

相当于主定理的第二种情况. 根据定理得到 .

$$T(n)=\Theta(n^0 \log n)=\Theta(\log n)$$


f(n)
a
...
T(n/b)
T(n/b)
T(n/b)


f(n)
a
...
f(n/b)
f(n/b)
f(n/b)
a
a
a
...
...
...
T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²) T(n/b²)


f(n)
f(n)
a
...
f(n/b)
f(n/b)
f(n/b)
af(n/b)
log_b n
f(n/b²)
a²f(n/b²)
Θ(1)
Θ(n^{log_b a})
n^{log_b a}
Total = Θ(n^{log_b a}) + Σ_{i=0}^{(log_b n)−1} a^i f(n/b^i)

主定理的证明

不妨设 $n=b^k$

$$T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=a[aT(\frac{n}{b^2})+f(\frac{n}{b})]+f(n)=a^2T(\frac{n}{b^2})+af(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=...$$

$$=a^kT(\frac{n}{b^k})+a^{k-1}f(\frac{n}{b^{k-1}})+...+af(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=a^kT(1)+\sum_{j=0}^{k-1}a^jf(\frac{n}{b^j})$$

$$=c_1n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1}a^jf(\frac{n}{b^j}) \qquad T(1)=c_1$$

情况1

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \frac{a^j}{(b^{\log_b a - \varepsilon})^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^{\varepsilon})^j)$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} \frac{b^{\varepsilon \log_b n} - 1}{b^{\varepsilon} - 1})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} n^{\varepsilon}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

情况2

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \frac{a^j}{a^j})$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

$$= \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

情况3

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$$

$$T(n) = c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$\leq c_1 n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \qquad (af(\frac{n}{b}) \leq cf(n))$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + f(n)\frac{c^{\log_b n}-1}{c-1}$$

$$= c_1 n^{\log_b a} + \Theta(f(n)) \qquad (c<1)$$

$$= \Theta(f(n)) \qquad (f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}))$$

应用实例

例11 求解递推方程

$$T(n)=3T(n/4)+n\log n$$

解 上述递推方程中的a=3, b=4, $f(n)$=$n$log$n$，那么

$$n\log n=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})=\Omega(n^{0.793+\varepsilon})\ ,\ \varepsilon\approx 0.2$$

此外，要使 $a\,f(n/b)\le cf(n)$成立，代入 $f(n)$=$n$log$n$，得到

$$\frac{3n}{4}\log\frac{n}{4}\le cn\log n$$

显然只要 $c\ge 3/4$，上述不等式就可以对充分大的n成立.

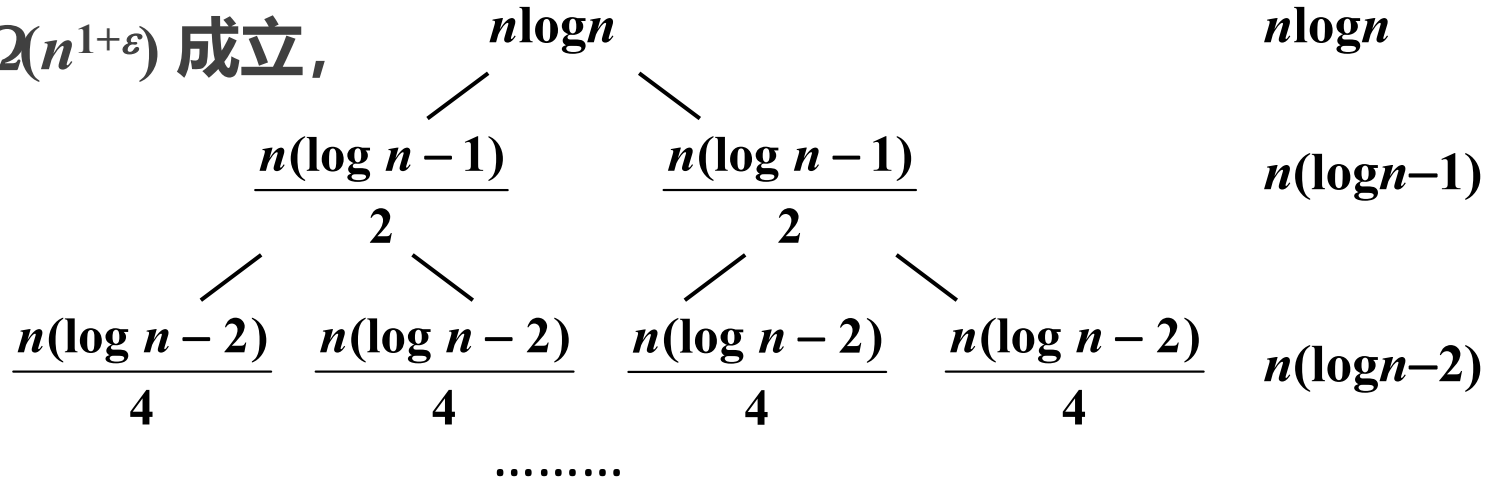
相当于主定理的第三种情况. 因此有 $T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n\log n)$

不能直接使用主定理的例子

例12 求解 $T(n)=2T(n/2)+n\log n$

$a=b=2$，$n^{\log_2 2}=n$ ，$f(n)=n\log n$

不存在$\varepsilon>0$ 使得 $n\log n=\Omega(n^{1+\varepsilon})$ 成立，



$$T(n)=n\log n+n(\log n-1)+n(\log n-2)+\ldots+n(\log n-k+1)$$
$$=(n\log n)\log n-n(1+2+\ldots+k-1)$$
$$=n\log^2 n-nk(k-1)/2=O(n\log^2 n)$$

生成函数求解递推方程

生成函数

- 生成函数 / 形式幂级数
  - 带形式变量（无需考虑级数的收敛性）的幂级数，以幂级数系数表示递推序列

- 定义 给的序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ （即$\{a_n\}$），称函数

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

为该序列的常规生成函数（OGF），
用记号 $[z^k]A(z)$ 表示系数 a_k。

- 生成函数求解递推方程的基本思想
  - 表示：序列 ~ 生成函数系数
  - 求解：递推方程 ⇒ 数列相邻项方程 ⇒ 生成函数方程 ⇒ 生成函数 ~ 序列

表1：基本的常规生成函数

$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} 1 \cdot z^N = \frac{1}{1-z}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, N, \ldots$	$\sum_{N\geq 1} N \cdot z^N = \frac{z}{(1-z)^2}$
$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots$	$\sum_{N\geq 2} \binom{N}{2} \cdot z^N = \frac{z^2}{(1-z)^3}$
$0, \ldots, 0, 1, M+1, \ldots, \binom{N}{M}, \ldots$	$\sum_{N\geq M} \binom{N}{M} \cdot z^N = \frac{z^M}{(1-z)^{M+1}}$
$1, M, \binom{M}{2}, \ldots, \binom{M}{N}, \ldots, M, 1$	$\sum_{N\geq 0} \binom{M}{N} \cdot z^N = (1+z)^M$
$1, M+1, \binom{M+2}{2}, \binom{M+3}{3}, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} \binom{N+M}{N} \cdot z^N = \frac{1}{(1-z)^{M+1}}$

表1：基本的常规生成函数（续）

$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} z^{2N} = \frac{1}{1-z^2}$
$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^N, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} c^N \cdot z^N = \frac{1}{1-cz}$
$1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots \frac{1}{N!}, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} \frac{1}{N!} \cdot z^N = e^z$
$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots$	$\sum_{N\geq 1} \frac{1}{N} \cdot z^N = \ln \frac{1}{1-z}$
$0, 1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, H_N, \ldots$	$\sum_{N\geq 1} H_N \cdot z^N = \frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z}$
$0, 0, 1, 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right), \ldots, N(H_N-1), \ldots$	$\sum_{N\geq 0} N(H_N-1) \cdot z^N = \frac{z}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z}$

表2：关于常规生成函数的运算

	$A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$	$a_0,\ a_1, a_2, \ldots,\ a_n,\ \ldots$
	$B(z)=\sum_{n\geq 0} b_n z^n$	$b_0,\ b_1, b_2, \ldots,\ b_n,\ \ldots$
右移	$zA(z)=\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n$	$0,\ a_0,\ a_1, a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ \ldots$
左移	$\frac{A(z)-a_0}{z}=\sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$	$a_1, a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n+1},\ \ldots$
下标乘（微分）	$A'(z)=\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$	$a_1, 2a_2,\ 3a_3, \ldots,\ (n+1)a_{n+1},\ \ldots$
下标除（积分）	$\int_0^z A(t)dt=\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$	$0,\ a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n},\ \ldots$

表2：关于常规生成函数的运算（续）

比例因子	$A(\lambda z) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n z^n$	$a_0,\ \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \ldots,\ \lambda^n a_n,\ \ldots$
相加	$A(z) + B(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$	$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots,\ a_n + b_n,\ \ldots$
差分	$(1 - z)A(z) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n-1}) z^n$	$a_0, a_1 - a_0,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1},\ \ldots$
卷积	$A(z)B(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} \right) z^n$	$a_0 + b_0,\ a_1 b_0 + a_0 b_1,\ \ldots,\ \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k},\ \ldots$
部分和	$\frac{A(z)}{1 - z} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k \right) z^n$	$a_0,\ a_0 + a_1, \ldots,\ \sum_{0\leq k\leq n} a_k,\ \ldots$

例子：若干数列的生成函数

$$\frac{1}{(1-3z)^4} \qquad a_n = \binom{n+3}{n} 3^n$$

$$(1-z^2)\ln\frac{1}{1-z} \qquad 0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-2}\right)$$

$$\frac{1}{(1-2z^2)^2} \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\sqrt{2}^n$$

指数生成函数

- 定义 给的序列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ （即$\{a_n\}$），称函数

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k \frac{z^k}{k!}$$

- 为该序列的指数生成函数（EGF），
  用记号 $k![z^k]A(z)$ 表示系数 a_k。

表3 基本的指数生成函数

$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$	$e^z = \sum_{N\geq 0} \frac{z^N}{N!}$
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, N, \ldots$	$ze^z = \sum_{N\geq 1} \frac{z^N}{(N-1)!}$
$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots$	$\frac{1}{2}z^2e^z = \frac{1}{2}\sum_{N\geq 2} \frac{z^N}{(N-2)!}$
$0, \ldots, 0, 1, M+1, \ldots, \binom{N}{M}, \ldots$	$\frac{1}{M!}z^Me^z = \frac{1}{M!}\sum_{N\geq M} \frac{z^N}{(N-M)!}$
$1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$	$\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{N\geq 0} \frac{1+(-1)^N}{2}\frac{z^N}{N!}$
$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^N, \ldots$	$e^{cz} = \sum_{N\geq 0} \frac{c^N z^N}{N!}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N+1}, \ldots$	$\frac{e^z-1}{z} = \sum_{N\geq 1} \frac{z^N}{(N+1)!}$
$1, 2, 6, 24, \ldots, N!, \ldots$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{N\geq 1} \frac{N!\, z^N}{N!}$

表4 关于指数生成函数的运算

	$A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$	$a_0,\ a_1, a_2, \ldots,\ a_n,\ \ldots$
	$B(z)=\sum_{n\geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$	$b_0,\ b_1, b_2, \ldots,\ b_n,\ \ldots$
右移 (积分)	$\int_0^z A(t)dt=\sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$	$0,\ a_0,\ a_1, a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ \ldots$
左移 (微分)	$A'(z)=\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$	$a_1, a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n+1},\ \ldots$
下标乘	$zA(z)=\sum_{n\geq 0} n a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$	$0, a_0, 2a_1,\ 3a_2, \ldots,\ na_{n-1},\ \ldots$
下标除	$\frac{A(z)-A(0)}{z}=\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{z^n}{n!}$	$a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{n+1},\ \ldots$

表4 关于指数生成函数的运算（续）

相加	$A(z)+B(z)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\frac{z^n}{n!}$	$a_0+b_0,\ldots,a_n+b_n,\ \ldots$
差分	$A'(z)-A(z)=\sum_{n\geq 0}(a_{n+1}-a_n)\frac{z^n}{n!}$	$a_1-a_0,\ \ldots,\ a_{n+1}-a_n,\ \ldots$
卷积	$A(z)B(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}$	$a_0+b_0,\ a_1b_0+a_0b_1,\ \ldots,\ \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k},\ \ldots$
部分和	$e^z A(z)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k\right)\frac{z^n}{n!}$	$a_0,\ a_0+a_1,\ldots,\ \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}a_k,\ \ldots$

生成函数求解递推方程

- 利用常规生成函数求解递推方程的机械步骤
  - 在递推方程的两边乘以 z^n，然后关于 n 求和。
  - 处理所得的各个和，导出一个关于 OGF 的函数方程。
  - 解这个方程，导出 OGF 的显式公式。
  - 将 OGF 展开为一个幂级数，从而得到系数表达式。
  - 这些系数就是原序列中的元素
- 同样的步骤也适用于指数生成函数
  - 只是递推方程两边乘以 $z^n/n!$，然后在关于 n 求和。

例题：平凡线性递推

- 解递推方程：$a_n = a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 0$
- 两边乘以z^n，然后关于 n 求和

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + \frac{z}{1-z}$$

- 由生成函数：$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$
- 求得方程

$$A(z) = zA(z) + \frac{z}{1-z}$$

- 于是

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \Rightarrow \quad a_n = n$$

例题：简单指数型递推（1/2）

- 解递推方程： $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 1$
- 两边乘以 z^n，然后关于 n 求和

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2z \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + \frac{z}{1-z}$$

- 由生成函数：$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$
- 求得方程

$$A(z) - 1 = 2zA(z) + \frac{z}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)}$$

例题：简单指数型递推（2/2）

- 应用分式和

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z}$$

- 求和展开

$$[z^n]A(z) = [z^n]\left(\frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z}\right) = 2^{n+1} - 1$$

例题：斐波那契数列

- 解递推方程：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$
- 由生成函数：$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$
- 满足

$$F(z) = zF(z) + z^2 F(z) + z$$

- 导出

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \widehat{\phi} z}\right)$$

- 两项对应的数列相加/减

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \widehat{\phi}^n\right)$$

例题：高阶线性递推

- 解递归方程

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 0, a_1 = 1$$

- 由生成函数

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

- 满足

$$A(z) - z = 5zA(z) - 6z^2 A(z)$$

- 导出

$$A(z) = \frac{z}{1 - 5z + 6z} = \frac{1}{1 - 3z} - \frac{1}{1 - 2z}$$

- 于是

$$a_n = (3^n - 2^n)$$

递推方程与生成函数简史

- 四大文明古国的数学家们研究数列问题
- 1202年 Leonardo Bonacci（a.k.a., Fibonacci / 斐波那契）研究 Fibonacci 数列
  - Leonardo Bonacci. “Liber Abaci,” 1202.
- 1722年 De Moivre（棣莫弗）提出用生成函数方法研究 Fibonacci 数列
  - Abraham de Moivre. “De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarundam serierum aequali intervallo a se distantibus.” Philosophical Transactions, 32(373):162–168, 1722.
- 生成函数的扩展阅读材料（除用于解递推方程，也广泛用于组合计数）
  - Sec. 7.3 “Solving Recurrence” in Graham, Knuth, Patashnik, “Concrete Mathematics (2nd ed.),” 2013
  - Donald E. Knuth. Fundamental Algorithms, volume 1 of The Art of Computer Programming. Addison-Wesley, third edition, 1997.
  - C. L. Liu. Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill, 1968.

内容小结

- 函数的渐近的界
- 常见函数的阶
- 递推方程求解
  - 递归树
  - 主定理证明及应用
  - 生成函数

教材和扩展阅读

- 1.3 算法的数学基础
  - 1.3.1 函数的渐近的界
  - 1.3.2 求和的方法
  - 1.3.3 递推方程求解方法
- 生成函数
  - https://aofa.cs.princeton.edu/30gf/