课程名称：数学分析（三）

2017 -2018 学年第（一）学期期中（2017 年 11 月 10 日） 本试卷共 9 道大题，满分 100 分

一．设 $a_n > 0$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，证明：$a_n \to 0$。（10 分）

二．设 $a_n > 0$，若 $\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \to 2$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$，提示：利用 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(a_n + b_n)$。（10 分）

三．判断下列级数的敛散性（20 分）

1．$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^p, (p>0)$， 提示：考虑 $e^x - 1$；

2．$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}, (\alpha>0)$，讨论绝对收敛和条件收敛，提示：考虑 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$。

四．已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛，提示：应用 Cauchy 不等式（10 分）。

五．已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，$\{a_n\}$ 单调下降，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$，提示：应用 Stolz 公式。（10 分）

六．求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ 之和（10 分）

七．利用将 $\int_0^x \ln(t+\sqrt{1+t^2})dt$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数， 并求此幂级数的收敛半径，提示：先求导。（10 分）

八．判断以下函数级数在所给定的区间上是否一致收敛（10 分）

1．$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^6}{(1+x^6)^n}$ $\quad 0 \le x \le 1$ （提示：反证） 2．$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}, x\in\mathbb{R}$

九．证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+nx^2}\sin\left(\dfrac{x}{n^{\alpha}}\right)$ 在任一有限区间上一致收敛的充分必要条件是 $\alpha > \dfrac{1}{2}$，提示：必要性证明，利用 Cauchy 收敛原理，考虑 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{2N}\dfrac{1}{1+nx^2}\sin\left(\dfrac{x}{n^{\alpha}}\right)\right|$，取 $x = N^{\alpha-1}$；充分性证明，自己想！（10 分）