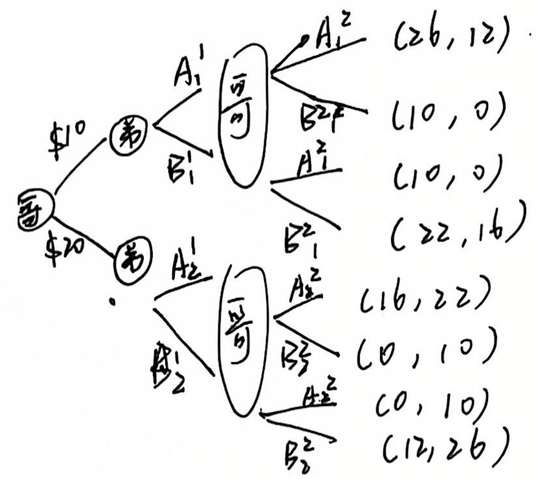
20001321 3 博弈论
柯宇斌 HW3

1. 该博弈的博弈树如下



这里$10表示哥给弟10元钱。

A_2^1表示，弟在给$20元时选择A。

则纯策略纳什均衡存时，最后一阶段弟哥选择分支一定是选同一个电影，那么纳什均衡策略有：

[($10, A_1^2, A_2^2), (A_1^1, A_2^1)] ①

[($10, A_1^2, B_2^2), (A_1^1, A_2^1)] ②

[($10, A_1^2, B_2^2), (A_1^1, B_2^1)] ③

[($10, A_1^2, B_2^2), (A_1^1, B_2^2)] ④

[($10, B_1^2, A_2^2), (B_1^1, A_2^1)] ⑤

[($10, B_1^2, B_2^2), (B_1^1, A_2^1)] ⑥

[($10, B_1^2, B_2^2), (B_1^1, B_2^1)] ⑦

[($10, B_1^2, A_2^2), (B_1^1, B_2^1)] ⑧

(2) ~~子博弈纯策略的子博弈包含①②③⑤⑧~~

但混合策略时，因为上下两个子博弈等价，只求上面的，设哥$x A_1^2$，$(1-x)$选B_1^2

弟$y A_1^1$，$(1-y)$选B_1^1

则有 $\begin{cases} 16y = 12(1-y) \\ 12x = 16(1-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{3}{7} \end{cases}$

故后面两个子博弈有全选A，全选B，~~以~~ ($\frac{4}{7}$A, 以概率[$\frac{4}{7}A_1^2$, $\frac{3}{7}B_1^2$], ($\frac{3}{7}A_1^1$, $\frac{4}{7}B_1^1$)]三种

双方收益为 (16, 12), (12, 16), ($\frac{48}{7}$, $\frac{48}{7}$)

甲因为 $16 - \frac{48}{7} < 10$，故乙没法威胁甲选$20。

故所有子博弈均衡为如下

甲[$10, A_1^2 或 $1B_1^2$ 或 $\frac{4}{7}A_1^2, \frac{3}{7}B_1^2$, $1A_2^2$ 或 $1B_2^2$ 或 $\frac{4}{7}A_2^2, \frac{3}{7}B_2^2$] 乙[$1A_1^1$ 或 $1B_1^1$ 或 $\frac{3}{7}A_1^1, \frac{4}{7}B_1^1$, $1A_2^1$ 或 $1B_2^1$ 或 $\frac{3}{7}A_2^1, \frac{4}{7}B_2^1$]

共 3×3=9 种，其中对应的信息集选择要对应

2. (1) 解：

后一个阶段，有

$U_2 = (a - q_1 - c - q_2 - q_3) q_2$

$U_3 = (a - q_1 - c - q_2 - q_3) q_3$

若均衡时 $a - q_1 - c - q_2 - q_3 \leq 0$，则 $q_2 = q_3 = 0$

否则 $\begin{cases} q_2 = a - q_1 - c - q_2 - q_3 \\ q_3 = a - q_1 - c - q_2 - q_3 \end{cases}$ (平均不变)

故 $q_2 + q_3 = \frac{2(a - q_1 - c)}{3}$ (要求 $\frac{2(a-q_1-c)}{3} > 0$)

故 $q_2 + q_3 = Max\{0, \frac{2(a-q_1-c)}{3}\}$

因此，有 $q_2 = q_3 = Max\{0, \frac{(a-q_1-c)}{3}\}$

第一个阶段，~~带入~~ 因 $U_1 = (a - q_1 - c - q_2 - q_3) q_1$

①若 $a - q_1 - c \leq 0$，则 $q_1 = 0$，否则 $a - c \leq 0$。

此时 $q_2 = q_3 = Max\{0, \frac{a-q_1-c}{3}\} = 0$。

②若 $a - q_1 - c \geq 0$，则 $a - q_1 - c - q_2 - q_3 = q_1$

且代入 q_2, q_3，有 $q_1 = \frac{a-c}{4}$

故 $q_1 = Max\{0, \frac{a-c}{4}\}$

从而子博弈完美均衡为

$q_1 = Max\{0, \frac{a-c}{4}\}$，$q_2 = q_3 = Max\{0, \frac{2(a-q_1-c)}{3}\}$ ~~$\frac{a-c}{4}$~~

~~$= Max\{0, \frac{a-c}{4}\}$~~

(2) 例如：

企业1：选择 $q_1 = Max\{0, \frac{a-c}{7}\}$，

企业2,3策略为：$\begin{cases} 若 q_1 > Max\{0, \frac{a-c}{7}\}, q_2 = q_3 = a \\ 若 q_1 < Max\{0, \frac{a-c}{7}\}, q_2 = q_3 = Max\{0, \frac{a-q_1-c}{3}\} \end{cases}$

则构成第二阶段为纳什均衡

尽管 q_1 理想值是 $\frac{13(a-c)}{14}$，但超过 $\frac{a-c}{7}$ 会让收益变负，故企业1只能选 $\frac{a-c}{7}$。

3. 解：第二阶段的纯策略均衡只有 (B,B)、(C,C)

甲的策略可表示为 $[S_0, S_{A,A}, S_{A,B}, \cdots S_{C,C}]$

乙的策略可表示为 $[T_0, T_{A,A}, \cdots\cdots T_{C,C}]$

其中 $S_{A,B}$ 表示第一阶段双方选 (A,B) 的情况

则由纯策略定义，有 $(S_{x,y}, T_{x,y})=(B,B)$ 或 (C,C)，$\forall x,y \in \{A,B,C\}$。

子博弈完美

首先，~~$T_0 \neq B,C$，否则 否则，此时甲至多 5+5=10的收益，但改选甲~~

若 $(S_0,T_0)=(A,A)$，则 $(S_{AA},T_{AA})=(B,B)$

（否则甲可在第一阶段选 C，多挣钱，而第二阶段不会更差）

也就是说，因为第二阶段只有 (B,B)，(C,C) 两种选择。

~~故要么是真实的经由第二阶段是 B,B 且其他或者二个中字选项（否甲，乙只有1/1 故改第一阶段）~~

所以，应用单阶段偏离条件即可（逐步分析或删）

故所有合法策略如下：

(1) $(S_0, T_0)=(A,A)$，$(S_{AA},T_{AA})=(B,B)$

$(S_{AB},T_{AB})=(S_{AC},T_{AC})=(S_{BA},T_{BA})=(S_{CA},T_{CA})$
$=(C,C)$

（四个威胁，防止偏离）

~~(2) $(S_0,T_0)=(A,B)$，$(S_{AB},T_{AB})=(B,B)$~~

其余未标明的只要是从 (B,B)，(C,C) 选就行

(2) $(S_0,T_0)=(A,B)$，$(S_{AB},T_{AB})=(B,B)$.

$(S_{B,B},T_{B,B})=(S_{A,C},T_{A,C})=(C,C)$.

(3) $(S_0,T_0)=(A,C)$，$(S_{AC},T_{AC})=(B,B)$

$(S_{BC},T_{BC})=(S_{CC},T_{CC})=(C,C)$

(4) $(S_0,T_0)=(B,A)$，$(S_{BA},T_{BA})=(B,B)$

$(S_{B,B},T_{B,B})=(S_{C,A},T_{C,A})=(C,C)$

(5) $(S_0,T_0)=(B,B)$，$(S_{B,B},T_{B,B})=(B,B)$ 或 $(S_0,T_0)=(B,B)$，$(S_{BB},T_{BB})=(S_{AB},T_{AB})=(S_{BA},T_{BA})$
$=(C,C)$

(6) $(S_0,T_0)=(B,C)$，$(S_{B,C},T_{B,C})=(B,B)$

$(S_{C,C},T_{C,C})=(C,C)$

(7) $(S_0,T_0)=(C,A)$，$(S_{CA},T_{CA})=(B,B)$

$(S_{CB},T_{CB})=(S_{CC},T_{CC})=(C,C)$

(8) $(S_0,T_0)=(C,B)$，$(S_{CB},T_{CB})=(B,B)$

$(S_{C,C},T_{C,C})=(C,C)$

(9) $(S_0,T_0)=(C,C)$，$(S_{CC},T_{CC})=(B,B)$

或 $(S_0,T_0)=(C,C)$，$(S_{CC},T_{CC})=(S_{CA},T_{CA})$

且 $(S_{AC},T_{AC})=(C,C)$.

陈可钦 　　　博弈论

2200013213

HW 3

(2).

4. (1) 先看第 (5) 阶段

假设提案为 X.

则 A： $X \in (0, 5)$ 时支持 X

$X \in \{0, 5\}$ 时随意支持或反对

$X \in \{(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)\}$ 反对 X.

B, C, D, E 也类似，在 $|X-d| < |5-d|$ 支持 X

（d 为自身喜好），$|X-d| > |5-d|$ 反对 X.

$|X-d| = |5-d|$ 时随意支持或反对.

故~~最终结果为~~ 新社会状况为
$$\begin{cases} 5, & 若 X \geq 5 或 X < 0. \\ X, & 若 0 < X < 5 \\ 0 或 5, & 若 X = 0 或 5. \end{cases}$$

(2) 再看第 (4) 阶段.

若 ① 若 X_c, X_d 均在 $[0, 5]$ 之外，则

支持~~或不支持~~谁都可随机.

② 若一个通过，一个~~不通过~~ 一定不通过.

例如 $0 < X_c < 5$，$X_d > 5$ 或 $X_d < 0$

or $0 < X_d < 5$，$X_c > 5$ 或 $X_c < 0$

这种情况下支持 $X_d \Leftrightarrow$ 支持维持现状.

则由 (1) 中对第 (5) 阶段分析，知~~通过~~

在最后阶段一定会被通过的方案会胜出.

③ 若一个通过，一个为 5.

同 ②（∵ 5 就是现状）

④ 若一个通过，一个为 0.

则~~⟺ 通过的方案，根据 C 的策略~~

如果对每人策略已知，则一定有人知道 0 会

不会被通过，一定变成上面 ① ③ 情况

~~如果不已知~~.

⑤ 若均通过.

则~~通过的方案 支持哪个方案，哪个方案~~就会

是 选择离自己偏好近的.

(3) ~~注意~~ 考虑第三阶段.

X_c ~~选 2.5~~，若 $X_d < 0$ 或 $X_d > 5$

选 $X_c = 2.5$ 时，由 (2) ② 知必过.

若 $0 \leq X_d \leq 5$ 时，选 $X_c = 2.5$ 至少应会在第 (4) 阶段拿 {A, B} or {D, E} 中一个集合的票，故必通过

（除非 $X_d = 2.5$，那此时选谁都一样）

~~故~~ 且 C 最真实值为 2.5

~~故选 $X_c = 2.5$ 是最好的~~

故 $X_d \neq 2.5$ 时选 $X_c = 2.5$

$X_d = 2.5$ 时 可任选 X_c

(4) 考虑第二阶段.

由上可知，进入第三阶段，则

最终一定~~会是社会~~ 会通过值为 2.5 的

改革方案，如不通过，则一定会是

不维持现状。在 2.5 与 5 中，D、E 反对，

C 支持，故会被否决，博弈一定结束.

(5) 考虑第一阶段

X_d 为任意值均无影响.

故现状不改变.

启示：不能由某一个倾向的小团体

领导（C, D, E 是右倾的）.

5.(1)

企业\消费者　买　不买

高　$(2,1)$　$(-4,0)$

低　$(6,-2)$, $(0,0)$

纳什均衡行为 (低质量, 不买)

(2) 最后一阶段是 (低质量, 不买)

故第一阶段也是 (低质量, 不买)

(3) 企业: 即高品质, 消费者不买就永远设为低品质

消费者: 即买, 一旦是低品质就不买

则由单阶段偏离条件 (贴现因子 N)

企业: $\frac{2}{1-N} \geq 6$

消费者: $\frac{1}{1-N} \geq 0 + (-2)N$ ⇒ (因为只偏1次, 下次会再买)

$\Rightarrow 1 \geq N \geq \frac{2}{3}$

验证已包含在式中.

(4) 企业\消费者　买　不买

高　$(p-4, 5-p)$, $(-4, 0)$

低　$(p, 4-p)$, $(0, 0)$

不会