第8讲 线性规划 (中)

罗国杰

gluo@pku.edu.cn

2024年春季学期

PKU-04833060

算法设计与分析『实验班』

对偶性

例　公司甲用 3 种原料混合成 2 种清洁剂.

问：这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

公司乙急需这 3 种原料, 打算向公司甲购买, 应出什么价钱?

对偶性（续）

公司甲

设清洁剂 A和 B分别配制 x_1和 x_2

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 0.25x_1 + 0.50x_2 &\le 120 \\ 0.50x_1 + 0.50x_2 &\le 150 \\ 0.25x_1 \qquad\qquad &\le 50 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

公司乙向甲买3种原料存量，出价每吨分别为 y_1, y_2, y_3万元. 希望总价尽可能的小, 但又不能低于公司甲用这些原料生产清洁剂所产生的价值

$$\min w = 120y_1 + 150y_2 + 50y_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 0.25y_1 + 0.50y_2 + 0.25y_3 &\ge 12 \\ 0.50y_1 + 0.50y_2 \qquad\qquad &\ge 15 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划

定义 原始线性规划 (P)

$$\max\ c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax \le b,\ x \ge 0$$

对偶线性规划 (D)

$$\min\ b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \ge c,\ y \ge 0$$

定理 对偶的对偶是原始线性规划.

证 (D)可改写成 (D′)

$$\max\ -b^T y \quad \text{s.t.}\ -A^T y \le -c,\ y \ge 0$$

(D′) 的对偶为

$$\min\ -c^T x \quad \text{s.t.}\ (-A^T)^T x \ge -b,\ x \ge 0$$

练习：写出线性规划的对偶

写出下述线性规划的对偶

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3\le 5$$

$$-x_1-2x_2+x_3=8$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ \text{任意}$$

自由变量 $x_3 = x_3'-x_3''$,

等式约束 $A=B$ 等价于$A\le B$ 和$-A\le -B$,

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3'-3x_3''$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3'+2x_3''\le 5$$

$$-x_1-2x_2+x_3'-x_3''\le 8$$

$$x_1+2x_2-x_3'+x_3''\le -8$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3'\ge 0,\ x_3''\ge 0$$

对偶规划为

$$\min\ 5y_1+8y_2'-8y_2''$$

$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2'+y_2''\ge 2$$

$$3y_1-2y_2'+2y_2''\ge -1$$

$$-2y_1+y_2'-y_2''\ge 3$$

$$2y_1-y_2'+y_2''\ge -3$$

$$y_1\ge 0,\ y_2'\ge 0,\ y_2''\ge 0$$

令$y_2= y_2'-y_2''$, 合并后2个不等式

$$\min\ 5y_1+8y_2$$

$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2\ge 2$$

$$3y_1-2y_2\ge -1$$

$$-2y_1+y_2=3$$

$$y_1\ge 0,\ \ y_2\text{任意}$$

对偶规划的一般形式

原始规划

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ 1 \le i \le s$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ s+1 \le i \le m$$

$$x_j \ge 0,\ 1 \le j \le t$$

$$x_j \text{ 任意},\ t+1 \le j \le n$$

对偶规划

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$y_i \ge 0,\ 1 \le i \le s$$

$$y_i \text{ 任意},\ s+1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ 1 \le j \le t$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ t+1 \le j \le n$$

练习：其他形式线性规划的对偶

LP with inequality and equality constraints

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ & Cx = d \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & -b^T z - d^T y \\ \text{subject to} & A^T z + C^T y + c = 0 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

standard form LP

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T y \\ \text{subject to} & A^T y \leq c \end{array}$$

- dual problems can be derived by converting primal to inequality form
- same duality results apply

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

对偶问题比原问题简单的例子

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1 + 6x_2 = 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 7y_1 \\
\text{s.t.} \quad & 5y_1 \geq 3 \\
& 6y_1 \geq 4
\end{aligned}
$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_linear_program#Tiny_example

对偶线性规划的性质 (1/3)

定理 (弱对偶性)

设 x 是原始规划 (P) 的可行解（$Ax \le b$， $x \ge 0$）

y 是对偶规划 (D) 的可行解（$A^T y \ge c$， $y \ge 0$）

则恒有 $c^T x \le b^T y$.

证

$$\begin{aligned} c^T x &\le (A^T y)^T x & (x \ge 0, A^T y \ge c) \\ &= y^T A x & \\ &\le y^T b & (y \ge 0, Ax \le b) \\ &= b^T y & \end{aligned}$$

原始规划 (P)

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

对偶规划 (D)

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

对偶线性规划的性质 (2/3)

定理 如果 x^* 和 y^* 分别是原始规划 (P) 和对偶规划 (D) 的可行解，且 $c^Tx^* = b^Ty^*$, 则 x^* 和 y^* 分别是 P 和 D 的最优解.

证

根据弱对偶的性质，

对 P 的任意可行解 x，有 $c^Tx \le b^Ty^* = c^Tx^*$。

同理，对 D 的任意可行解 y，有 $b^Ty \ge c^Tx^* = b^Ty^*$。

原始规划 (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & c^Tx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

对偶规划 (D)

$$\begin{aligned} \min \quad & b^Ty \\ \text{s.t.} \quad & A^Ty \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

线性约束问题不比线性规划问题简单

- 构造线性约束问题

$$
\begin{aligned}
\text{find} \quad & (x, y) \\
\text{s.t.} \quad & c^T x \geq b^T y \\
& Ax \leq b \\
& A^T y \geq c \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

原始规划 (P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

对偶规划 (D)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & b^T y \\
\text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

- 若上述问题存在可行解 (x^*, y^*)，则 $c^T x^* \geq b^T y^*$
- 且 x^* 是 P 的可行解，y^* 是 D 的可行解，有 $c^T x^* \leq b^T y^*$
- 因此，$c^T x^* = b^T y^*$，x^* 是 P 的最优解，y^* 是 D 的最优解

对偶线性规划的性质 (3/3)

定理 (强对偶性) 如果原始规划 (P) 有最优解，则对偶规划 (D) 也有最优解，且它们的最优值相等。反之亦然。

证明 引入松弛变量u，将 (P) 写成

$$\begin{aligned} &\max c^T x && A\text{是}m \times n\text{矩阵} \\ s.t.\ &Ax + Eu = b && E\text{是}m \times m\text{单位矩阵} \\ &x \geq 0,\ u \geq 0 && u\text{是}m\text{维向量} \end{aligned}$$

设某最优解的基为 B，基变量 $x_B = B^{-1}b$，检验数 $\lambda \leq 0$（最大化）。

λ 分成两部分，对应 x 的 λ_x 和对应 u 的 λ_u。

u 在目标函数中的系数都为 0，有 $\lambda_x^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \leq 0$，$\lambda_u^T = 0 - c_B^T B^{-1} E = -c_B^T B^{-1} \leq 0$。

令 $y^T = c_B^T B^{-1}$, 有 $y \geq 0$，$A^T y \geq c$。

从而 y 是 (D) 的可行解，且 $b^T y = y^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x$（当 $x_N=0$ 时），得证 y 是 (D) 的最优解。

反之亦然：同理，若对偶规划有最优解，则对偶的对偶（原始规划）也有最优解，且最优值相等。

对偶线性规划的性质：小结

(弱对偶性)

定理 设 x 是原始规划 (P) 的可行解，y 是对偶规划 (D) 的可行解，则恒有 $c^T x \le b^T y$.

定理 如果 x^* 和 y^* 分别是原始规划 (P) 和对偶规划 (D) 的可行解, 且 $c^T x^* = b^T y^*$, 则 x^* 和 y^* 分别是 P 和 D 的最优解.

(强对偶性)

定理 如果原始规划 (P) 有最优解, 则对偶规划 (D) 也有最优解, 且它们的最优值相等. 反之亦然.

原始规划和对偶规划的解

(1) 都有最优解, 且最优值（$p^* = c^T x^*$ 和 $d^* = b^T y^*$）相等.

(2) 一个有可行解且目标函数值无界, 而另一个无可行解.

(3) 都没有可行解.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">对偶规划 min</td></tr>
<tr><td>有最优解</td><td>有可行解且无界</td><td>无可行解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">原始规划 max</td><td>有最优解</td><td>（1）
$p^* = d^*$</td><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>有可行解且无界</td><td>×</td><td>×</td><td>（2）
$p^* = d^* = +\infty$</td></tr>
<tr><td>无可行解</td><td>×</td><td>（2）
$p^* = d^* = -\infty$</td><td>（3）</td></tr>
</table>

$p^* = d^*$ 的例外：都没有可行解

- $p^* = -\infty$ 且 $d^* = +\infty$ 的例子
- 原始规划

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x \\ \text{subject to} & 0 \cdot x \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- 对偶规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y \\ \text{subject to} & 0 \cdot y \geq 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

分段线性最小化的对偶问题

$$\text{minimize} \quad f(x) = \max_{i=1,\ldots,m} (a_i^T x + b_i)$$

LP formulation (variables x, t; optimal value is $\min_x f(x)$)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} A & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq -b \end{array}$$

dual LP (same optimal value)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T z \\ \text{subject to} & A^T z = 0 \\ & \mathbf{1}^T z = 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

分段线性最小化对偶问题的解释

- for any $z \succeq 0$ with $\sum_i z_i = 1$,

$$f(x) = \max_i (a_i^T x + b_i) \geq z^T(Ax + b) \quad \text{for all } x$$

- this provides a lower bound on the optimal value of the PWL problem

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &\geq \min_x z^T(Ax+b) \\ &= \begin{cases} b^T z & \text{if } A^T z = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

- the dual problem is to find the best lower bound of this type
- strong duality tells us that the best lower bound is tight

无穷范数拟合的对偶问题（1/2）

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_\infty$$

LP formulation

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} A & -\mathbf{1} \\ -A & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \end{array}$$

dual problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -b^T u + b^T v \\ \text{subject to} & A^T u - A^T v = 0 \\ & \mathbf{1}^T u + \mathbf{1}^T v = 1 \\ & u \succeq 0, \ v \succeq 0 \end{array}$$

simpler equivalent dual

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T z \\ \text{subject to} & A^T z = 0, \quad \|z\|_1 \le 1 \end{array}$$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

无穷范数拟合的对偶问题（2/2）

proof of equivalence of the dual problems (assume A is $m \times n$)

- if u, v are feasible in (1), then $z = v - u$ is feasible in (2):

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |v_i - u_i| \leq \mathbf{1}^T v + \mathbf{1}^T u = 1$$

moreover the objective values are equal: $b^T z = b^T(v - u)$

- if z is feasible in (2), define vectors u, v by

$$u_i = \max\{z_i, 0\} + \alpha, \quad v_i = \max\{-z_i, 0\} + \alpha, \quad i = 1, \ldots, m$$

with $\alpha = (1 - \|z\|_1)/(2m)$

these vectors are feasible in (1) with objective value $b^T(v - u) = b^T z$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

无穷范数拟合对偶问题的解释

- lemma: $u^T v \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty$ holds for all u, v
- therefore, for any z with $\|z\|_1 \leq 1$,

$$\|Ax - b\|_\infty \geq z^T(Ax - b)$$

- this provides a bound on the optimal value of the ℓ_∞-norm problem

$$\begin{aligned} \min_x \|Ax - b\|_\infty &\geq \min_x z^T(Ax - b) \\ &= \begin{cases} -b^T z & \text{if } A^T z = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

- the dual problem is to find the best lower bound of this type
- strong duality tells us the best lower bound is tight

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

最优性 ⇔ 互补松弛性 (1/2)

primal and dual LP

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x \\
\text{subject to} & Ax \leq b \\
& Cx = d
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -b^T z - d^T y \\
\text{subject to} & A^T z + C^T y + c = 0 \\
& z \geq 0
\end{array}
$$

optimality conditions: x and (y, z) are primal, dual optimal if and only if

- x is primal feasible: $Ax \leq b$ and $Cx = d$
- y, z are dual feasible: $A^T z + C^T y + c = 0$ and $z \geq 0$
- the duality gap is zero: $c^T x = -b^T z - d^T y$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

最优性 ⇔ 互补松弛性 (2/2)

assume A is $m \times n$ with rows a_i^T

- the duality gap at primal feasible x, dual feasible y, z can be written as

$$\begin{aligned} c^Tx + b^Tz + d^Ty &= (b - Ax)^Tz + (d - Cx)^Ty \\ &= (b - Ax)^Tz \\ &= \sum_{i=1}^m z_i(b_i - a_i^Tx) \end{aligned}$$

- primal, dual feasible x, y, z are optimal if and only if

$$z_i(b_i - a_i^Tx) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

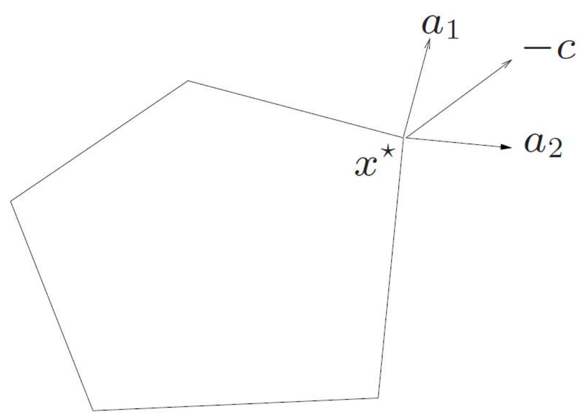
$i.e.$, at optimum, $b - Ax$ and z have a *complementary* sparsity pattern:

$$z_i > 0 \implies a_i^Tx = b_i, \qquad a_i^Tx < b_i \implies z_i = 0$$

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

互补松弛性的几何意义

example in $\mathbf{R}^2$



- two active constraints at optimum: $a_1^T x^\star = b_1$, $a_2^T x^\star = b_2$
- optimal dual solution satisfies

$$A^T z + c = 0, \qquad z \geq 0, \qquad z_i = 0 \text{ for } i \notin \{1,2\}$$

  in other words, $-c = a_1 z_1 + a_2 z_2$ with $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$

- geometric interpretation: $-c$ lies in the cone generated by a_1 and a_2

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

互补松弛性的例子

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -4x_1 - 5x_2 \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

show that $x = (1, 1)$ is optimal

- second and fourth constraints are active at $(1, 1)$
- therefore any dual optimal z must be of the form $z = (0, z_2, 0, z_4)$ with

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad z_2 \geq 0, \quad z_4 \geq 0$$

$z = (0, 1, 0, 2)$ satisfies these conditions

dual feasible z with correct sparsity pattern proves that x is optimal

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

基于拉格朗日乘子法推导对偶问题的形式

- 原始线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

  - 可行域 $Q_P = \{x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$

- 拉格朗日松弛

$$\begin{aligned} \max \quad & L = c^T x + y^T(b - Ax) \\ & \quad = (c - A^T y)^T x + b^T y \\ \text{s.t.} \quad & x \ge 0 \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

- 可证明，拉格朗日松弛 L，在原始规划的可行域内总是原目标函数的上界
  - 即 $c^T x \le L$
  - 当 $c - A^T y < 0$ 时，L 无下界
  - 当 $c - A^T y \ge 0$ 时，$L \ge b^T y$

- 整理得原问题的最优上界估算
  - “对偶线性规划”

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \le c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

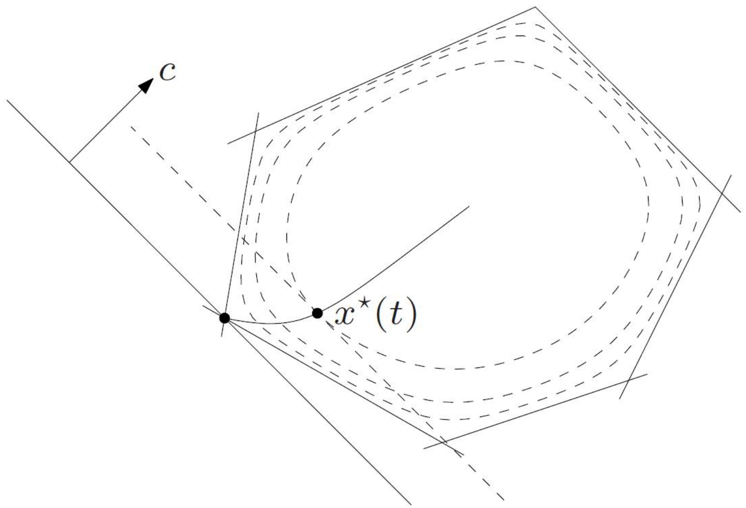
椭球法简介

- 椭球法
  - 求解非线性凸优化问题的通用方法，约起源于1972年
  - Khachiyan于1972年证明该方法用于线性规划是多项式的
- 重要性和意义
  - 回答了开放问题：线性规划的最坏情况复杂度是多项式的
  - 虽然实际性能比单纯形法慢得多，但是其思路不同于单纯形法；启发了新的研究方向

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

内点法简介

- 1950s-1960s：若干用于凸优化的方法
  - ▶ Sequential unconstrained minimization (Fiacco & McCormick)
  - ▶ Logarithmic barrier method (Frisch)
  - ▶ Affine scaling method (Dikin)
  - ▶ Method of centers (Huard & Lieu)
  - ▶ 没有最坏情况复杂性理论，但实践好用



- 1980s-1990s：内点法
  - ▶ Karmarkar于1984年证明其是新的求解线性规划的多项式时间算法（投影法）
  - ▶ 后来发现与之前的若干方法相关
  - ▶ 1984年后出现多个变种和改进
  - ▶ 速度能与单纯形法匹敌；求解大规模问题通常更快

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/ee236a.html

本讲小结

- 对偶性
  - 原始问题和对偶问题的机械转换方法
  - 弱对偶性、强对偶性
  - 对偶问题的解释（最优的上下界估算）
  - 互补松弛性
- 内点法的极简介绍