

# 算法设计与分析 (普通班) 2023 春期末

EncodeTalker

2023 年 7 月 3 日

考试时间两个半小时. 实验班的题目可以参见树洞 5157466.

## 1. 填空题, 一题 2 分.

- (1)  $T(n) = T(n-1) + \Theta(\frac{1}{n})$ , 求  $T(n)$
- (2) 具体题目忘了, 但是是个主定理.
- (3) 可以用什么方法估计搜索树的大小?
- (4) 平面最近点对复杂度的下界是多少?
- (5) 对大小为  $k$  的 cache 其 LRU 算法的竞争比为多少?

## 2.

- (1) 简述 Dijkstra 算法求最短路的原理.
- (2) 现有一张无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中边集  $E$  中的边分为特殊边和非特殊边. 求给定源点的单源最短路.
3. 对一个  $n$  行  $m$  列的矩阵, 是否存在一种满足如下条件的填数方式, 如果有则输出一种方案, 否则输出"IMPOSSIBLE".

- (1) 矩阵中所有元素都是正整数.
- (2) 矩阵中第  $i$  行的元素之和为  $a_i (\forall 1 \leq i \leq n)$ .
- (3) 矩阵中第  $j$  列的元素之和为  $b_j (\forall 1 \leq j \leq m)$ .
- (4) 对矩阵中的某些元素, 要求其不超过某个给出的上界  $c_{i,j}$ .

## 4. 对无向图 $G = \langle V, E \rangle$ , 定义支配集 $V' \subseteq V$ 满足 $\forall u \in V - V', \exists v \in V'$ 使得边 $(u, v) \in E$ .

- (1) 证明最小支配集的判定问题  $\in \mathbf{NP}$ .
- (2) 证明其为  $\mathbf{NP}$ -完全问题.

---

5.

- (1) 举例说明最小支配集的大小可能与最小顶点覆盖集的大小不一样.
- (2) 现对一个所有顶点度数均为  $d$  的无向图. 给出了一段伪代码, 大致是最开始时  $S$  集合为空, 之后进行若干次循环, 每次循环等概率从图中选择一个顶点并加入集合  $S$  中 (可能会有重复的元素加入集合). 证明在经过  $\frac{2n \ln n}{d+1}$  次循环后该集合不是支配集的概率小于  $\frac{1}{n}$ . ( $n$  为图中顶点数, 原卷上有提示:  $\forall n \geq 1, (1 - \frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$ ).
- (3) 对如下的求解支配集的算法: 反复运用上一问中生成集合  $S$  的算法, 每一次生成完成后判断  $S$  是否是该图的支配集, 如果是则退出并返回  $S$ , 否则继续生成. 证明这是一个有效的 Las Vegas 算法.

6.

- (1) 设计一个在一般无向图上求极大匹配的贪心算法.
- (2) 求出利用此算法求最大匹配的近似比并证明.