《数学分析（三）》期中试题

（2018 年 11 月 23 日）

1. （18 分，每题 6 分）判断下面级数收敛性，并给出证明。

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^{n\ln n}$　　（2）$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{(\ln n)^2}}{(\ln n)^n}$　　（3）$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$

2. （12 分）给出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 满足（a）绝对收敛，（b）收敛，（c）对 x 一致收敛，参数 (x,p) 所满足的条件，并证明之。

3. （20 分）求下面函数的幂级数展开，并给出收敛域（需要研究收敛域端点收敛性）。

（2）$f(x)=(1+x)^2\arctan x$　　（2）$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

4. （20 分）设 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\in[0,1]\\ x(1+x), & x\in[-1,0]\end{cases}$ 是周期为 2 的函数。

（1）计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数 $S_f(x)$。

（2）$S_f(x)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 是否收敛，是否一致收敛？说明理由。

（3）求下列级数和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$，并说明计算的依据和理由。

5. （20 分）设 $f\in R[-\pi,\pi]$ 是周期为 2π 的 Riemann 可积函数。

（1）　证明：$c_n(f)=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]e^{-inx}dx$，其中 $c_n(f)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数。

（2）　设 $f\in C[-\pi,\pi]$，且满足 Hölder 条件：$\forall x,h\in\mathbb{R}$，存在常数 $C>0$，$0<\alpha\le 1$，使得 $\left|f(x+h)-f(x)\right|\le Ch^{\alpha}$。证明：$c_n(f)=O\left(n^{-\alpha}\right)$。

（3）　上面 $c_n(f)$ 阶数 $O\left(n^{-\alpha}\right)$ 是最佳估计。考虑函数 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k\alpha}e^{i2^k x}$，其中 $0<\alpha<1$。证明：

（a）$\forall x,h\in\mathbb{R},\ \left|f(x+h)-f(x)\right|\le Ch^{\alpha}$，（b）当 $N=2^k$ 时，有 $c_N(f)=N^{-\alpha}$。

6. （10 分）$f(x)\in C(0,\infty)$，满足 $f(x)>0$，单调递减，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\gamma$。证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 在 $\gamma<1$ 时收敛，在 $\gamma>1$ 时发散。