Homework 2

Name: 柯宇斌, ID: 2200013213

Problem 1 (10') . 设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$，在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该区间长度成正比. 试求：

(1) X 的分布函数 $F(x)$.

(2) $P(X\leq 0)$. ◀

Answer. (1) 不难求出在区间 $(a,b)(-1\leq a<b\leq 1)$ 的概率为 $\frac{1}{2}(b-a)$. 所以

$$F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \frac{7}{16}+\frac{5}{16}x, -1\leq x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$$

(2) 由定义，$P(X\leq 0)=F(0)=\frac{7}{16}$ ◁

Problem 2 (10') . 从 $1,2,3,4,5$ 中任取三个数，按大小排列记为 $x_1<x_2<x_3$，令 $X=x_2$，试求:

(1)X 的分布函数.

(2) $P(X<2)$ 及 $P(X>4)$. ◀

Answer. (1) 由定义,$P(X=1)=P(X=5)=0$, $P(X=2)=P(X=4)\frac{3}{10}$,$P(X=3)=\frac{4}{10}$

所以,$F(X)=\begin{cases}0, X<2\\ \frac{3}{10}, 2\leq X<3\\ \frac{7}{10}, 3\leq X<4\\ 1, X\geq 4\end{cases}$

(2)$P(X<2)=0, P(X>4)=0$ ◁

Problem 3 (10') . x 轴上有一质点，每经一个单位时间，它分别以概率 p 及 $q=1-p$ 向右或向左移动一格，若该质点在时刻 0 从原点出发，而且每次移动是相互独立的，$x=-a$ 和 $x=b$ 处各有一个吸收壁，求质点在 $x=b$ 处被吸收的概率. ◀

Answer. 我们用 $P(i)$ 表示质点在 $x=i$ 时，被 $x=b$ 吸收的概率。

$P(i)=q*P(i-1)+p*P(i+1)$, 且 $P(b)=1, P(-a)=0$.

解得 $P(0)=\begin{cases}\frac{(\frac{q}{p})^a-1}{(\frac{q}{p})^{b+a}-1}, p\neq\frac{1}{2}\\ \frac{a}{a+b}, p=\frac{1}{2}\end{cases}$ ◁

Problem 4 (10') . 若每条蚕的产卵数服从泊松分布，参数为 ，而每个卵变为成虫的概率为 p，且各卵是否变为成虫彼此独立，求每条蚕养活 k 只小蚕的概率 ◀

Answer. 设 X 是每条蚕养活的小蚕个数

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} * \binom{i}{k} p^k(1-p)^{i-k} \\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{k!(i-k)!} p^k(1-p)^{i-k} \\
&= \frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}(1-p)^j \\
&= \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\
&= \frac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{\lambda^k p^k e^{-p\lambda}}{k!}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

◁

Problem 5 (10’) . 一个工厂出产的产品中废品率为 0.005，任意取来 1000 件，解答以下问题：

(1) 求其中至少有两件废品的概率.

(2) 求其中不超过 5 件废品的概率.

(3) 能以 90% 的概率希望废品件数不超过多少? ◀

Answer. 记 X 为废品件数，则 $X \sim B(1000, p)$, 可近似为泊松分布 $\pi(5)$

(1)$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0.9596$

(2)$P(X \leq 5) = \frac{1+5+\frac{5^2}{2}+\frac{5^3}{6}+\frac{5^4}{24}+\frac{5^5}{120}}{e^5} \approx 0.6160$

(3)$P(X \leq 7) \approx 0.867$, 但 $P(X \leq 8) \approx 0.932$, 所以能以 90% 的概率希望废品件数不超过 8 件? ◁

Problem 6 (10’) . 设随机变量 X 与 Y 同分布,X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, 0 < x < 2 \\ 0, \end{cases}$, 已知事件 $A = \{X > a\}$ 与 $B = \{Y > a\}$ 相互独立, 且 $P\{A \cup B\} = \frac{3}{4}$, 求常数 a ◀

Answer. 不难得知 $P(A) = \frac{1}{2}$, $F(x) = \frac{1}{8}x^3 (0 < x < 2)$ 从而 $a = \sqrt[3]{4}$ ◁

Problem 7 (10’) . 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$. 求出 A 并求以下 Y 的密度函数:

(1) $Y = 2X + 1$.

(2) $Y = e^X$.

(3) $Y = X^2$. ◀

Answer. 不难有 $F(X) = A - Ae^{-x}(x > 0)$. 由 $F(+\infty) = 1$ 有 $A = 1$.

(1)$f_1(x) = f(\frac{x-1}{2}) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x-1}{2}}, x > 1 \end{cases}$

(2)$f_2(x) = f(\ln x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, x > 1 \end{cases}$

(3)$f_3(x) = f(\sqrt{x}) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}x^{-\frac{1}{2}}, x > 0 \end{cases}$ ◁

Problem 8 (10') . 设随机变量 X 的概率密度为 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, 0 < x < 3 \\ 0, \end{cases}$ 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, X \leq 1 \\ X, 1 < X < 2, \\ 1, X \geq 2 \end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数.

(2) 求概率 $P\{X \leq Y\}$ ◀

Answer. (1) 由 $P(Y < 1) = 0$,$P(Y \leq 1) = P(X \geq 2) = \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{19}{27}$, $P(Y \leq m)(1 < m < 2) = P(X \geq 2) + P(1 < m < y) = \frac{19}{27} + \int_1^m \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{2}{3} + \frac{m^3}{27}$

不难有 $F_Y(X) = \begin{cases} 0, X < 1 \\ \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3}, 1 \leq X < 2 \\ 1, X \geq 2 \end{cases}$

(2)$P(X \leq Y) = P(0 \leq X < 2) = \frac{8}{27}$ ◁

Problem 9 (10') . 设 N 是正整数，X 服从 $[0, N^2]$ 的均匀分布.

(1) 求 $\sqrt{X}$ 的密度函数.

(2) 求 $[\sqrt{X}]$ 的分布列，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(3) 求 $\sqrt{X}-$ $[\sqrt{X}]$ 的分布函数. ◀

Answer. (1)$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{N^2}, 0 < x < N \\ 0, \end{cases}$

(2) 取值为 $0, 1, 2, \ldots, N$

$P(X = i) = \frac{2i+1}{N^2}(i = 0, 1 \ldots, N - 1)$,$P(X = N) = 0$

(3)$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x^2+(N-1)x}{N}, 0 \leq x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$ ◁

Problem 10 (10') . (1) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证几何分布的极限和指数分布的关系．”．

(2) 利用课上讲的证明“二项分布的极限是泊松分布”的办法，论证负二项分布的极限和伽马分布的关系（这里负二项分布的参数 r 限制为整数）． ◀

Answer. (1) 将单位时间 n 等分, 每次实验成功的概率为 $\frac{\lambda}{n}$, 耗时 $\frac{1}{n}$. 则第一次试验成功的时间满足几何分布. 我们有, 对任意 $x \in (0,1)$, 不妨记 $x = \frac{i}{n}$,(这在 n 趋于无穷大时是合适的)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(x) &= \lim_{n\to+\infty} P(X \leq \frac{i}{n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{i} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{\lambda} * \frac{\lambda}{n} * i} \\
&= 1 - e^{-\frac{\lambda}{n} * i} \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{2}$$

这正是指数分布

(2) 将单位时间 n 等分, 每次实验成功的概率为 $\frac{\lambda}{n}$, 耗时 $\frac{1}{n}$. 则第 r 次试验成功时的时间. 这是一种负二项分布。我们同样记 $x = \frac{i}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(x) &= \lim_{n\to+\infty} P(X \leq \frac{i}{n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \binom{i}{s} (\frac{\lambda}{n})^{s} (1 - \frac{\lambda}{n})^{i-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} \lim_{n\to+\infty} \frac{(nx)!}{(nx-s)!} (\frac{1}{n})^{s} (1 - \frac{\lambda}{n})^{i-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} \lim_{n\to+\infty} (x)(x - \frac{1}{n})(x - \frac{2}{n}) \ldots (x - \frac{s-1}{n})(1 - \frac{\lambda}{n})^{nx-s} \\
&= 1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} x^s e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{3}$$

求导有

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^s}{s!} x^s e^{-\lambda x})' \\
&= -(\sum_{s=1}^{r-1} \frac{\lambda^s}{(s-1)!} x^{s-1} e^{-\lambda x} - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\lambda^{s+1}}{s!} x^s e^{-\lambda x}) \\
&= \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{4}$$

这就是伽玛分布 ◁