Xiao Yuan

第五章:大数定律与中心极限定理1

Xiao Yuan¹

¹Center on Frontiers of Computing Studies, Peking University, Beijing 100871, China xiaoyuan@pku.edu.cn

March 28, 2024

目录



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

事件

依概率收:

切比雪夫不等式与

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

与尔科天大数定律 辛钦大数定律

随机变重的收 敛性

几于必然収3 依分布收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 血处上於少律(2)

中心极限定理

1 大数定律

- 事件
 - 依概率收敛
 - 伯努利定理
 - 切比雪夫不等式与马尔科夫不等式
- 随机变量
 - 依概率收敛
 - 切比雪夫大数定律
 - 马尔科夫大数定律
 - 辛钦大数定律
- 2 随机变量的收敛性
 - 几乎必然收敛
 - 依分布收敛
- 3 特征函数
 - 特征函数定义
 - 特征函数的性质
 - 辛钦大数定律证明
- 4 中心极限定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛

依概率收:

伯努利定理

切比雪夫不等:

56 de etc.45-

20 day do 30 24

初比索夫士新言

马尔科夫大教

辛钦大数定律

随机变量的收

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

频率

频率: n 次试验中事件发生 $(n_A$ 次) 的比例: $f_n(A) = n_A/n$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量 依据邀前分

切比雪夫大数次 马尔科·卡大新公

与尔科大大数次 辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

频率

频率: n 次试验中事件发生 $(n_A$ 次) 的比例: $f_n(A) = n_A/n$

■ 频率 f_n(A) 随着 n 增大逐渐趋于一个稳定值,也即是事件 A 发生的概率



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数定 马尔科夫大数定 辛飲大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

频率

频率: n 次试验中事件发生 $(n_A \ \mathcal{L})$ 的比例: $f_n(A) = n_A/n$

- 频率 f_n(A) 随着 n 增大逐渐趋于一个稳定值,也即是事件 A 发生的概率
- 考虑 n 重伯努利试验,也即是每次试验只有 A, A 两个事件可能发生,将试验独立重复 n 次,设事件 A 发生 n_A 次,则上述结论意味着 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p$?



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大赦定利 马尔科夫大赦定利 辛钦大赦定律

随机变量的收敛性 几乎必然收敛

依分布收敛 特征 派 粉

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证明

中心极限定理

频率

频率: n 次试验中事件发生 $(n_A$ 次) 的比例: $f_n(A) = n_A/n$

- 频率 f_n(A) 随着 n 增大逐渐趋于一个稳定值,也即是事件 A 发生的概率
- 考虑 n 重伯努利试验,也即是每次试验只有 A, \overline{A} 两个事件可能发生,将试验独立重复 n 次,设事件 A 发生 n_A 次,则上述结论意味着 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p$?
- 注意到尽管在实际进行 n 重伯努利试验时,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$ 成立,但是总是存在该式不成立的情况,例如 n 个 A 发生,且违背该式的事件有随 n 增加有无穷多个



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式

切比當夫不等式与 你科夫不等式 随机变量 依概率收敛 切比當夫大數定律 马尔科夫大數定律

随机变量的收敛性

九丁必然收8 依分布收敛

村在函数定义 特征函数的性质 各种上数定律证明

中心极限定理

频率

频率: n 次试验中事件发生 $(n_A$ 次) 的比例: $f_n(A) = n_A/n$

- 频率 f_n(A) 随着 n 增大逐渐趋于一个稳定值,也即是事件 A 发生的概率
- 考虑 n 重伯努利试验,也即是每次试验只有 A, \overline{A} 两个事件可能发生,将试验独立重复 n 次,设事件 A 发生 n_A 次,则上述结论意味着 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p$?
- 注意到尽管在实际进行 n 重伯努利试验时,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$ 成立,但是总是存在该式不成立的情况,例如 n 个 A 发生,且违背该式的事件有随 n 增加有无穷多个
- 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=p$ 成立的事件个数相对总的事件个数是指数小的



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛

伯努利定理

尔科夫不等式 随如亦母

依概率收發

初步而未上於

马尔科夫大数:

辛钦大数定律

随机发重的収

几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

■ 尽管如此,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty}\frac{nA}{n}\approx p$ 成立



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

事件 依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与

尔科夫不寺式 随机变量 依概率收敛 切比雪夫大教定

切比雷夫大數定 马尔科夫大數定 辛钦大數定律

随机变量的收

几乎必然收5 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

- 尽管如此,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}\approx p$ 成立
- 也即是事件 $B = \{\frac{nA}{n} \approx p\}$ 随 n 的增加成立的概率也增加



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 コルテェアギャト

尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛 切比雪夫大數定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛針士新古律证

中心极限定理

- 尽管如此,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}\approx p$ 成立
- 也即是事件 $B = \{\frac{nA}{n} \approx p\}$ 随 n 的增加成立的概率也增加
- 定量来说,对于任意 $\varepsilon > 0$,我们考虑 $B = \{|\frac{n_A}{n} p| < \varepsilon\}$,则有 $\lim_{n \to \infty} P(B) = 1$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与:

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大敏定律 马尔科夫大敏定律 每位上标定律

随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心初限定日

■ 尽管如此,我们总是很大概率观察到 $\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}\approx p$ 成立

- 也即是事件 $B = \{\frac{nA}{n} \approx p\}$ 随 n 的增加成立的概率也增加
- 定量来说,对于任意 $\varepsilon > 0$,我们考虑 $B = \{ |\frac{n_A}{n} p| < \varepsilon \}$,则有 $\lim_{n \to \infty} P(B) = 1$
- 也即是,频率依概率收敛域概率

伯努利定理



概率统计

Xiao Yuan

伯努利定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A ,则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

伯努利定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收到

伯努利定理 切比雪夫不等式与: 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数定征

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收分 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A , 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

- 伯努利定理从理论上论证了频率"收敛"于概率的规律, 也被称作伯努利大数定律
- 伯努利定理也是 0-1 分布的大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定

事件

依概率收分

伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大组

马尔科夫大数;

辛钦大敖定律

3久1王 日本丛秋於於

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

马尔科夫不等式

设随机变量 X 的 k 阶矩存在,也即是 $E(|X|^k) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定

事件

依概率收至

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

尔杆夫不守马 随机变量

超机災軍

依概率收敛

切比雪夫大数

马尔科夫大数定

辛钦大敖定律

随机变量的收

敛性

依分布收敛

行任函数 特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

马尔科夫不等式

设随机变量 X 的 k 阶矩存在,也即是 $E(|X|^k) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$. 有

$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$

证明: 以连续型随机变量为例, 有

$$P(|X| \ge \varepsilon) = \int_{|x| \ge \varepsilon} f(x) dx$$

$$\le \int_{|x| \ge \varepsilon} \frac{|x|^k}{\varepsilon^k} f(x) dx$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{|x| \ge \varepsilon} |x|^k f(x) dx$$

$$\le \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛

切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛

马尔科夫大数定征

辛钦大数定律

致性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

马尔科夫不等式

设随机变量 X 的 k 阶矩存在,也即是 $E(|X|^k) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收到

伯努利定理 切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式 随机变量

依佩平收效 切比雪夫大数定4 马尔科夫大数定4

随机变量的收

致性 几乎必然收敛

胜江 正 崧

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证明

中心极限定理

马尔科夫不等式

设随机变量 X 的 k 阶矩存在,也即是 $E(|X|^k) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$$

另证: 定义事件 $A = \{|X| \ge \varepsilon\}$, 则随机变量 $1_A \le \frac{|X|^k}{\varepsilon^k}$.

- $1_A = 0$ 时,显然 $\frac{|X|^k}{\varepsilon^k} \ge 0$.

$$1_A \le \frac{|X|^k}{\varepsilon^k} \Rightarrow P(|X| \ge \varepsilon) = E(1_A) \le E\left(\frac{|X|^k}{\varepsilon^k}\right)$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定

事件

依概率收分

伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大车

马尔科夫大数2

辛钦大数定律

随机变量的收

敛性

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

切比雪夫不等式

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛

切比雪夫大教; 马尔科夫大教;

马尔科夫大教定 辛钦大教定律

随机发重的收 敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

切比雪夫不等式

设随机变量 X 的期望 $\mu = E(X)$ 方差 $\sigma^2 = D(X)$ 存在,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

■ 切比雪夫不等式是马尔科夫不等式 n = 2, X = X - E(X) 的特殊情况



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收到 伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大教

马尔科夫大数定 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收; 依分布收敛

村征函数定义

特征函数的性质 争钦大数定律证明

中心极限定理

切比雪夫不等式

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- 切比雪夫不等式是马尔科夫不等式 n = 2, X = X E(X) 的特殊情况
- 例如:考虑 $\varepsilon = 3\sigma$, 则有 $P(|X \mu| \ge 3\sigma) \le 1/9 \approx 0.11$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛 切比雪未太新

马尔科夫大数定

随机变量的

致性 几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证5

中心极限定理

切比雪夫不等式

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- 切比雪夫不等式是马尔科夫不等式 n = 2, X = X E(X) 的特殊情况
- 例如:考虑 $\varepsilon = 3\sigma$, 则有 $P(|X \mu| \ge 3\sigma) \le 1/9 \approx 0.11$
- 另一方面,假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则有 $P(|X \mu| \ge 3\sigma) \approx 0.003$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科去不等式

随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数;

马尔科夫大数定

随机变量的

双1年 几乎必然收敛

行任函数 特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

切比雪夫不等式

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- 切比雪夫不等式是马尔科夫不等式 n = 2, X = X E(X) 的特殊情况
- 例如:考虑 $\varepsilon = 3\sigma$, 则有 $P(|X \mu| \ge 3\sigma) \le 1/9 \approx 0.11$
- 另一方面,假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则有 $P(|X \mu| \ge 3\sigma) \approx 0.003$
- 尽管切比雪夫不等式给出更松的界,它不依赖于随机变量的分布

Hoeffding 不等式



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收分

伯努利定理 切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大多

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收会

特征函数定义

特征函数的性

中心极限定理

Hoeffding 不等式

设随机变量 $X \in [a,b]$ 的期望存在,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(X - E(X) \ge \varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$$

$$P(X - E(X) \le -\varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$$

Hoeffding 不等式



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪炭不等式与马 你料束不等式

随机变量 依概率收敛

马尔科夫大数定行

辛钦大数定律

致性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 争於士新字律证

中心极限定理

Hoeffding 不等式

设随机变量 $X \in [a,b]$ 的期望存在,则对于任意 $\varepsilon > 0$,有

$$P(X - E(X) \ge \varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$$

$$P(X - E(X) \le -\varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$$

证明: $P(X - E(X) \ge \varepsilon) \le e^{-t\varepsilon} E(e^{t(X - E(X))}) \le e^{-t\varepsilon} e^{\frac{t^2(b-a)^2}{8}}$ (第一个不等号类似于马尔科夫不等式证明,第二个不等号用 到 Hoeffding 不等式)

取 $t = 4\varepsilon/(b-a)^2$,因此有 $P(X - E(X) \ge \varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$. 考虑 -X 则得到第二个不等式。



Xiao Yuan

上粉 定 往

)Call /Ci

依概率收

伯努利定理

切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

尔科夫不等式

医机笼室

依概率收敛

辛钦大数定律

随机变重的^收 敛性

几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限党和

■ 例: (Hoeffding 不等式) 设 X 是在区间 [a,b] 中取值且 $\mathbb{E}X=0$ 的随机变量,则对每一个 t>0,有 $\mathbb{E}\exp(tX)\leqslant \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$



Xiao Yuan

大数定律

Although all all

伯努利害

旧分和人志

切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式

12.400000

依机平以效

切比当大大致)

马尔科夫大数

辛钦大数定律

敛性

几乎必然收敛

体分布収敛

特征函数定义

特征函数的性质 辛钦大数定律证

中心极限定理

■ 例: (Hoeffding 不等式) 设 X 是在区间 [a,b] 中取值且 $\mathbb{E}X=0$ 的随机变量,则对每一个 t>0,有 $\mathbb{E}\exp(tX)\leqslant \exp\left(\frac{t^2(B-a)^2}{8}\right)$

证明: 将 $\exp(tX)$ 視为 X 的函数,利用凸性得到 $\exp(tX)$ $\leqslant \frac{X-a}{b-a}\exp(tb)+\frac{b-X}{b-a}\exp(ta)$. 由于 $\mathbb{E}X=0$,于是

$$\mathbb{E}\exp(tX)\leqslant \frac{b}{b-a}\mathbb{E}\exp(ta)-\frac{a}{b-a}\mathbb{E}\exp(tb)$$

定义 $\varphi(t) = \log\left(\frac{b}{b-a}\exp(ta) - \frac{a}{b-a}\exp(tb)\right)$. 则 $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0$,而

$$\varphi''(\xi) = \frac{ab\left(ae^{\xi a} - be^{\xi b}\right)\left(be^{\xi a} - ae^{\xi b}\right) - a^2b^2\left(e^{\xi a} - e^{\xi b}\right)^2}{\left(be^{\xi a} - ae^{\xi b}\right)^2}$$
$$= \frac{-ab(b-a)^2}{-2ab+a^2e^{\xi(a-b)} + b^2e^{\xi(b-a)}} \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

利用带 Lagrange 余项的展开得, 存在 $\xi \in (0, t)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(\xi)}{2}t^2 \leqslant \frac{t^2(b-a)^2}{8}$$

故

$$\mathbb{E}\exp(tX) \leqslant \mathbb{E}e^{\varphi(t)} \leqslant \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收约

切比雪夫不等式与马 尔科卡不等式

随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数

与尔科天大教定 辛钦大教定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛

特征函数定义

特征函数定义

中心极限定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A , 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科未不等式

尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛

依概率收敛

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A , 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

证明: 定义事件 $A_i = \{$ 事件 A 第 i 次试验中发生 $\}$,则 $n_A = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$,且 $E(1_{A_i}) = p$, $D(1_{A_i}) = p(1-p)$, $E(n_A) = np$, $D(n_A) = np(1-p)$. 因此利用 切比雪夫不等式 $[P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}]$ 有

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) = P(|n_A - np| \ge n\varepsilon) \le \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) = 0$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定行 事件

依概率收敛

切比雪夫不等式与马

尔科夫不等式 随机变量

随机交重 依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A , 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛 伯努利定理

伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数定4

随机变量的制

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

伯努利定理

设事件 A 发生的概率为 $p \in (0,1)$, n 重伯努利试验中 A 事件 发生的次数为 n_A , 则对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - \rho\right| < \varepsilon\right) = 1$$

证明: 定义事件 $A_i = \{$ 事件 A 第 i 次试验中发生 $\}$, 则 $n_A = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$, $P(n_A - n_P \ge \varepsilon) \le e^{-t\varepsilon} E(e^{t(n_A - n_P)}) = e^{-t\varepsilon} \prod_{i=1}^n E(e^{t(1_{A_i} - p)}) \le e^{-t\varepsilon} e^{\frac{t^2 n(b-a)^2}{8}} = e^{-t\varepsilon + \frac{t^2 n}{8}}$,取 $t = \frac{4\varepsilon}{n}$,则有 $P(n_A - n_P \ge \varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{n}}$ 同理可得 $P(n_A - n_P \le -\varepsilon) \le e^{-\frac{2\varepsilon^2}{n}}$ 因此有 $P(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon) \le 2e^{-\frac{2\varepsilon^2}{n}}$,因此 $\lim_{n \to \infty} P(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \ge \varepsilon) = 0$



Xiao Yuan

大 數 定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比當夫不等式与局 随机变量 依概率效效 切比當夫大數定律

随机变量的收敛性

几乎必然收分 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

- 例:某天文机构想测量宇宙中两颗行星的距离,进行了 n 次独立的观测,测量值分别为 X_i (光年), $i=1,2,\cdots,n$ 若 $E(X_i)=\mu$ (为两颗行星的真实距离,末知), $D(X_i)=5$. 现取这 n 次观测的平均作为真实距离 μ 的估计.
 - (1) 若 n = 100, 那公估计值与真实值之间的误差在 ± 0.5 光年之内的概率至少有多大?



Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比當美不等式与馬 陸和变量 依概率收效 切比當夫大數定律 馬尔科夫大數定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收5 依分布收敛

中心极限定理

- 例:某天文机构想测量宇宙中两颗行星的距离,进行了 n 次独立的观测,测量值分别为 X_i (光年), $i=1,2,\cdots,n$ 若 $E(X_i)=\mu$ (为两颗行星的真实距离,末知), $D(X_i)=5$. 现取这 n 次观测的平均作为真实距离 μ 的估计.
 - (1) 若 n = 100, 那公估计值与真实值之间的误差在 ± 0.5 光年之内的概率至少有多大?

$$P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i}-\mu| \geq 0.5) = P(|\sum_{i}X_{i}-\mu| \geq 50) \leq \frac{500}{50^{2}} = 0.2$$
, 因此 $P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i}-\mu| < 0.5) = 0.8$



Xiao Yuan

大數定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比當美不等或与馬 於和安豐 依概率收效 切比當夫大數定律 马尔科夫大數定律

随机变量的收敛性

几乎必然收; 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

- 例:某天文机构想测量宇宙中两颗行星的距离,进行了 n 次独立的观测,测量值分别为 X_i (光年), $i=1,2,\cdots,n$ 若 $E(X_i)=\mu$ (为两颗行星的真实距离,未知), $D(X_i)=5$. 现取这 n 次观测的平均作为真实距离 μ 的估计.
 - (1) 若 n = 100, 那公估计值与真实值之间的误差在 ± 0.5 光年之内的 概率至少有多大?

$$P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i}-\mu| \geq 0.5) = P(|\sum_{i}X_{i}-\mu| \geq 50) \leq \frac{500}{50^{2}} = 0.2$$
, 因此 $P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i}-\mu| < 0.5) = 0.8$

(2) 若要以不低于 95% 的把握控制估计值与真实值之间的误差在 ±0.5 光年之内, 至少要观测多少次?



Xiao Yuan

大 數 定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雷夫不等式 链机变量 依概率收敛 切比雷夫大 裁定律 导价大夫 故定律 等价大款定律

随机变量的

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证

中心极限定理

- 例:某天文机构想测量宇宙中两颗行星的距离,进行了 n 次独立的观测,测量值分别为 X_i (光年), $i=1,2,\cdots,n$ 若 $E(X_i)=\mu$ (为两颗行星的真实距离,未知), $D(X_i)=5$. 现取这 n 次观测的平均作为真实距离 μ 的估计.
 - (1) 若 n = 100, 那公估计值与真实值之间的误差在 ± 0.5 光年之内的概率至少有多大?

$$P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i} - \mu| \ge 0.5) = P(|\sum_{i}X_{i} - \mu| \ge 50) \le \frac{500}{50^{2}} = 0.2$$
, 因此 $P(|\frac{1}{100}\sum_{i}X_{i} - \mu| < 0.5) = 0.8$

(2) 若要以不低于 95% 的把握控制估计值与真实值之间的误差在 ±0.5 光年之内, 至少要观测多少次?

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i}X_{i} - \mu| \ge 0.5) = P(|\sum_{i}X_{i} - \mu| \ge 0.5n) \le \frac{5n}{(0.5n)^{2}} \le 0.05$$
, 因此 $n > 400$



概率统计

Xiao Yuan

大数定

事件依据患此句

伯努利定理 切比雪夫不等式与

随机变量

依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

敛性

九丁必 A 收敛

特征函数定义

中心极限定理

依概率收敛

考虑随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots 如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1,$$

则成随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X, 并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{P}{=} X$ 或者 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} X$ $(n\to\infty)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定

事件 依概率收敛 伯努利定理 如此而上 7 年 7 年 7 年

切比雪天不寺式与

随机变量 依概率收敛

松帆平板泵

马尔科夫大数定

随机变量的均敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛

考虑随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots , 如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1,$$

则成随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X, 并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{P}{=} X$ 或者 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} X$ $(n\to\infty)$

■ 若 $X_n \xrightarrow{P} a$, $Y_n \xrightarrow{P} b$, 当 $n \to \infty$ 时. 函数 g(x, y) 在点 (a, b) 连续, 则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$, 当 $n \to \infty$ 时.

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b,$$

 $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b,$
 $X_n/Y_n \xrightarrow{P} a/b(b \neq 0).$

随机变量序列的大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

切比雷天不寺式与 尔科夫不等式 吐加士品

依概率收發

依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义

辛钦大数定律证

中心极限定理

随机变量序列的大数定律

考虑随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 若存在常数列 a_1, a_2, \ldots , 使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - a_n\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

则成随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,服从大数定律

随机变量序列的大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与具 你站走不等式

依概率收發

切比雪夫大数

马尔科夫大数定? 辛钦大数定律

随机变重的¹ 敛性

化分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

随机变量序列的大数定律

考虑随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 若存在常数列 a_1, a_2, \ldots , 使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - a_n\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

则成随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,服从大数定律

■ 伯努利定理是上述一般大数定律的特例

随机变量序列的大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与; 尔科夫不等式

依概率收發

依概率収敛

马尔科夫大数定征 全位士新古往

随机变量的/ 敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

刊4年函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

随机变量序列的大数定律

考虑随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 若存在常数列 a_1, a_2, \ldots , 使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - a_n\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

则成随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,服从大数定律

- 伯努利定理是上述一般大数定律的特例
- 一般我们取 $a_n = \sum_{i=1}^n E(X_i)/n$
- 另外三个代表性的大数定律有:切比雪夫大数定律、马尔科夫大数定律、辛钦大数定律

切比雪夫大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

依概率收敛 切比雷夫大数定律

马尔科夫大数定4 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

切比雪夫大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 两两不相关, 且方差有界, 也即是对于常数 C 有 $D(X_i) \leq C$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

切比雪夫大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大 数 定律
事件
依概率收敛
伯努利定理
切比當夫不等式与馬
於此大夫等
随机变量
依概率收敛
切比當失大數定律

马尔科夫大数定? 辛钦大数定律

随机变量的收 敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

切比雪夫大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 两两不相关, 且方差有界, 也即是对于常数 C 有 $D(X_i) \leq C$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

证明:根据切比雪夫不等式 $\left[P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right]$ 有

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_{i})}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i}}{n}\right)}{\varepsilon^{2}} = \frac{D(\sum_{i=1}^{n} X_{i})}{n^{2}\varepsilon^{2}}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_{i})}{n^{2}\varepsilon^{2}} \le \frac{C}{n\varepsilon^{2}}$$

马尔科夫大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大教定

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收分 依分布收敛

行任函数定义

特征函数及义

中心极限定理

马尔科夫大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 满足 $\lim_{\infty} \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i) = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

马尔科夫大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收分 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

马尔科夫大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 满足 $\lim_{\infty} \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i) = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

■ 证明方法仅需利用切比雪夫不等式, 也即是注意到 $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{i}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_{i})}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(\sum_{i=1}^{n}X_{i})}{n^{2}\varepsilon^{2}}$

马尔科夫大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛 伯努利定理

尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛

切比雪夫大數定律 马尔科夫大数定律

辛钦大数定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛於士新字律证明

中心极限定理

马尔科夫大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots , 满足 $\lim_{\infty} \frac{1}{n^2} D(\sum_{i=1}^n X_i) = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

- 证明方法仅需利用切比雪夫不等式, 也即是注意到 $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{i}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_{i})}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\sum_{i=1}^{n}X_{i}\right)}{n^{2}\varepsilon^{2}}$
- 切比雪夫大数定律是马尔科夫大数定律的特例
- 马尔科夫大数定律不需要假设随机变量的独立性



Xiao Yuan

事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与 防机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

■ 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立, 且它们的分布律为 $P\{X_i = \sqrt{i}\} = P\{X_i = -\sqrt{i}\} = \frac{1}{2i}, P\{X_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}, i = 1, 2, \dots$. 试判断 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是否服从大数定律?



Xiao Yuan

大 数 定 律
事件
依 概率收敛
伯努利定理
切比皆夫不等式与
防机变量
依 概率收敛
切比官夫大数定律

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收 依分布收敛

行在四级 特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立, 且它们的分布律为 $P\{X_i = \sqrt{i}\} = P\{X_i = -\sqrt{i}\} = \frac{1}{2i}, P\{X_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}, i = 1, 2, \dots$. 试判断 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是否服从大数定律?

解: 由于对任意的 $i \ge 1$, 有 $E(X_i) = 0$,

$$D(X_i) = E(X_i^2) = 0 + (\sqrt{i})^2 \cdot \frac{1}{2i} + (\sqrt{i})^2 \cdot \frac{1}{2i} = 1,$$

所以 $\{X_i, i \geq 1\}$ 相互独立, 方差相同, 由马尔科夫大数定律知满足大数定律, 且

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i}\stackrel{P}{\longrightarrow}0,\ \ \underline{\,}\underline{\,}\underline{\,}\underline{\,}\underline{\,} n\to+\infty.$$

辛钦大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

事件 依概率收敛

伯努利定理

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定

马尔科夫大数;

辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性力

中心极限定理

辛钦大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,满足独立同分布,且存在期望 $\mu = E(X_i) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

辛钦大数定律



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

尔科夫不守式 随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定

辛钦大赦定律

461 3-10-11

敛性

依分布 收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

辛钦大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,满足独立同分布,且存在期望 $\mu = E(X_i) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

- 辛钦大数定律一方面需要更强的独立同分布假设,
- 一方面又对方差没有假设



Xiao Yuan

依概率收效 伯努利定理 切比雪夫不等式与 随机变量 依概率收效 切比雪夫大数定律 争饮未数定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

■ 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, X_i 服从柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$, 则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗? 如果依概率收敛, 收敛于什么?



Xiao Yuan

大數定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比信夫不等式与耳 能執支量 依概率收敛 切比信夫大數定律

辛钦大数定律 随机变量的水

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 例:设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots ,相互独立同分布, X_i 服从柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$,则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗?如果依概率收敛,收敛于什么?注意到柯西分布的期望发散,因此 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 的收敛性无法直接判断,其它证明方法?



Xiao Yuan

大 数 定律

事件
依据率收效
伯努特定理
切比肯定大等式,与局
能核定等
依依据率收效
动比肯定大使走收效
为比肯定大数定律
事飲大數定律

随机变量的构敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

刊 四 致 特征函数定义 特征函数的性质 每於上 於文律证

中心极限定理

- 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, X_i 服从柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$, 则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗?如果依概率收敛,收敛于什么?注意到柯西分布的期望发散,因此 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 的收敛性无法直接判断,其它证明方法?
- 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, X_i 服从分布 $f(x) = \frac{c}{(|x|^3+1)}$, 其中 $c = 3\sqrt{3}/(4\pi)$ 为归一化常数,则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗? 如果依概率收敛,收敛于什么?



Xiao Yuan

大數定律
事件
依概率收效
伯努利定理
等式与馬
防能,在東平等式
随机变量
依概率收效
切比古夫大數定律
切比古夫大數定律
动比古夫大數定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

行住函数 特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

- 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, X_i 服从柯西分布 $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$, 则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗?如果依概率收敛,收敛于什么?注意到柯西分布的期望发散,因此 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 的收敛性无法直接判断,其它证明方法?
- 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, X_i 服从分布 $f(x) = \frac{c}{(|x|^3+1)}$, 其中 $c = 3\sqrt{3}/(4\pi)$ 为归一化常数,则 $\sum_{i=1}^n X_i/n$ 依概率收敛吗? 如果依概率收敛,收敛于什么?

注意到 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = 2c \int_{0}^{\infty} x/(x^3+1) dx$ 收敛,因此 $\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ 依概率收敛于 $E(X_i) = 0$



Xiao Yuan

依概率收敛 伯努利定理 切比告失不等式与 院机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

辛钦大数定律 随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

■ 例:设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots ,相互独立同分布, $X_i \sim U(0,1)$,则 $\sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$ 依概率收敛吗?如果依概率收敛,收敛于什么?



Xiao Yuan

事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式 随机变量

使概率收敛 切比雪夫大数定律

与尔科天大教育 辛钦大教定律

随机变量的收敛性

几乎必然收分 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

■ 例: 设随机变量 X_1, \dots, X_n, \dots , 相互独立同分布, $X_i \sim U(0,1)$, 则 $\sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$ 依概率收敛吗? 如果依概率收敛, 收敛于什么?

解: 记 $Y_n = \sqrt[n]{X_1 \dots X_n}$, 令 $Z_n = \ln Y_n = \frac{1}{n} (\ln X_1 + \dots + \ln X_n)$. 则 $\ln X_1, \dots, \ln X_n, \dots$,相互独立同分布,又 $E(\ln X_1) = \int_0^1 \ln x dx = -1$,由辛钦大数定律知,

 $Z_n \xrightarrow{p} -1$, 当 $n \to +\infty$. 利用依概率收敛的性质, 得 $Y_n = e^{Z_n} \xrightarrow{p} e^{-1}$ 当 $n \to +\infty$

 $Y_n = e^{z_n} \xrightarrow{r} e^{-1}, \ \ \, \ \, \ \, n \to +\infty$

几乎必然收敛



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

まみ

依概率收敛

伯努利定理 切比雪ま不等すら

小行大个

随机变量

依据惠政計

切比雪夫大数;

马尔科夫大数定

随机变量的相

敛性 几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性

中心极限定理

几乎必然收敛

考虑随机变量 X 和 $X_1, X_2, ..., 若$

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1,$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 几乎必然收敛于 X,并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{\mathrm{a.s.}}{=} X$ 或者 $X_n \stackrel{\mathrm{a.s.}}{\longrightarrow} X (n \to \infty)$

几乎必然收敛



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定行 马尔科夫大数定行

与尔科大大致定律 辛钦大数定律

競机发重的形 致性 几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

几乎必然收敛

考虑随机变量 X 和 $X_1, X_2, ..., 若$

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=X)=1,$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 几乎必然收敛于 X,并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{\text{a.s.}}{=} X$ 或者 $X_n \stackrel{\text{a.s.}}{\longrightarrow} X$ $(n\to\infty)$

几乎必然收敛

$$\Leftrightarrow A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| \ge \varepsilon\}, \ \text{则} \ X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \ (n \to \infty) \ \text{等价于}$$

$$P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收分

伯努利定理

尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

随机发重的^报 敛性

几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛与几乎必然收敛

$$\Leftrightarrow A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| \ge \varepsilon\},\$$

则
$$X_n \stackrel{\mathrm{a.s.}}{\longrightarrow} X (n \to \infty)$$
 等价于 $P(\cup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \forall \varepsilon > 0$

则
$$X_n \xrightarrow{P} X (n \to \infty)$$
 等价于 $P(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

尔科夫不等式 随机变量

随机交重 依概率收敛

切比雪大大数定4 马尔科夫大数定4

辛钦大数定律

随机发重的^报 敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

行412四级 特征函数定义 特征函数的性/

中心极限定理

依概率收敛与几乎必然收敛

$$A_n(\varepsilon) = \{ |X_n - X| \ge \varepsilon \},$$

则
$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X (n \to \infty)$$
 等价于 $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$ 则 $X_n \xrightarrow{P} X (n \to \infty)$ 等价于 $P(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$

■ 例: $X_n \sim B(1,1/n)$ 且相互独立,则有 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} B(1,0)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与。

尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛

切比雷夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的非

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛与几乎必然收敛

令
$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| \ge \varepsilon\},$$

则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X (n \to \infty)$ 等价于 $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$
则 $X_n \xrightarrow{P} X (n \to \infty)$ 等价于 $P(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$

- 例: $X_n \sim B(1, 1/n)$ 且相互独立,则有 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} B(1, 0)$
- 另一方面, 对于 $\varepsilon > 0$, 我们有 $P(A_n(\varepsilon)) = P(X_n = 1) = 1/n, 因此$ $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) = 1 \prod_{m=n}^{\infty} (1 1/n) \xrightarrow{n \to \infty} 1, 因此 X_n \text{不几乎必然收敛于 } X$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与。

尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛

依概率收敛 切比雪夫大数定

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

刊 121 00 00 特征函数定义 特征函数的性质 亦处上标少律221

中心极限定理

依概率收敛与几乎必然收敛

令
$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| \ge \varepsilon\},$$

则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X (n \to \infty)$ 等价于 $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$
则 $X_n \xrightarrow{P} X (n \to \infty)$ 等价于 $P(A_n(\varepsilon)) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \forall \varepsilon > 0$

- 例: $X_n \sim B(1, 1/n)$ 且相互独立,则有 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} B(1, 0)$
- 另一方面, 对于 $\varepsilon > 0$, 我们有 $P(A_n(\varepsilon)) = P(X_n = 1) = 1/n, 因此$ $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) = 1 \prod_{m=n}^{\infty} (1 1/n) \xrightarrow{n \to \infty} 1, 因此 X_n 不几乎必然收敛于 X$

几乎必然收敛 → 依概率收敛

几乎必然收敛 → 依概率收敛, 反之不成立



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数定行 马尔科夫大数定行

随机变量的基

致性 几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性力

中心极限定理

依分布收敛

考虑随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots 若对于 $F_X(x)$ 的每个连续点 x

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

则称 $\{F_{X_n}(x)\}$ 弱收敛于 F(x), 随机变量序列 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X, 并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ 或者 $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ $(n\to\infty)$.



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与

ホイスペテス 随机変量 依概率收位

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的非

30人工工 几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证

中心极限定理

依分布收敛

考虑随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots 若对于 $F_X(x)$ 的每个连续点 x

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

则称 $\{F_{X_n}(x)\}$ 弱收敛于 F(x), 随机变量序列 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X, 并记作 $\lim_{n\to\infty} X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ 或者 $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ $(n\to\infty)$.

依概率收敛→依分布收敛

依概率收敛 → 依分布收敛, 反之不成立



概率统计

Xiao Yuan

- 払ウ油

人蚁处

依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定 马尔科卡士新定

辛钦大数定律

随机变量的收

敛性

依分布收敛

依分布収级

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛 → 依分布收敛

依概率收敛 → 依分布收敛, 反之不成立



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与

切比雪天不寺式与 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数突

马尔科夫大教定 辛钦大教定律

随机变量的基

几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛 → 依分布收敛

依概率收敛 → 依分布收敛, 反之不成立

■ 关键点在于分布函数 F(x) (实数函数) 相同不意味着随机变量 (样本空间到实数的函数) 相同



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式 随机亦号

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

辛钦大数定律随机变量的收

致性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

依概率收敛 → 依分布收敛

依概率收敛→依分布收敛,反之不成立

- 关键点在于分布函数 F(x) (实数函数) 相同不意味着随机变量 (样本空间到实数的函数) 相同
- 例: 考虑样本空间 $S = \{\omega_1, \omega_2\}$, 随机变量 $X(\omega_\pm) = \pm 1$, $Y(\omega_\pm) = -\pm 1$, 且 $P_X(X = \pm 1) = P_Y(Y = \pm 1) = 1/2$, 则 随机变量 X 与 Y 不同,而分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_X(x)$ 相同



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

辛飲大數定律 随机变量的收

敛性 几乎必然收敛

依分布收敛 特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

依概率收敛 → 依分布收敛

依概率收敛 → 依分布收敛, 反之不成立

- 关键点在于分布函数 F(x) (实数函数) 相同不意味着随机变量 (样本空间到实数的函数) 相同
- 例:考虑样本空间 $S = \{\omega_1, \omega_2\}$,随机变量 $X(\omega_\pm) = \pm 1$, $Y(\omega_\pm) = -\pm 1$,且 $P_X(X = \pm 1) = P_Y(Y = \pm 1) = 1/2$,则随机变量 X 与 Y 不同,而分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_X(x)$ 相同

(常数分布) 依概率收敛 ≡ 依分布收敛

对于常数 c, 依概率收敛 $X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} X \equiv c \ (n \to \infty)$ 等价于依分布收敛 $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X \equiv c \ (n \to \infty)$



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与』

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律

马尔科夫大教定律 辛钦大教定律

随机 尖重的 收 敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

三种收敛方式

考虑样本空间 $S = \{\omega\}$, 随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots , 分布函数 $F_X(x), F_{X_n}(x), A = \{\omega \in S : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\},$ $A_n(\varepsilon) = \{\omega \in S : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$

- 几乎必然收敛: $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ $\Leftrightarrow P(A) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\cup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依概率收敛: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n X| \ge \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$ ⇔ $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依分布收敛: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

几乎必然收敛→依概率收敛 常数分布等价 依分布收敛



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与A

随机变量 依概率收敛 切比雷夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收敛 **依分布收**领

特征函数 特征函数定义 维征函数的性质

特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

三种收敛方式

考虑样本空间 $S = \{\omega\}$, 随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots , 分布函数 $F_X(x), F_{X_n}(x), A = \{\omega \in S : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\},$ $A_n(\varepsilon) = \{\omega \in S : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}$

- 几乎必然收敛: $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ $\Leftrightarrow P(A) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依概率收敛: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n X| \ge \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依分布收敛: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

几乎必然收敛 → 依概率收敛 常数分布等价 依分布收敛

■ 依概率收敛下的大数定理为弱大数定律



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与i

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律

马尔科夫大教定律 辛钦大教定律

随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

三种收敛方式

考虑样本空间 $S = \{\omega\}$, 随机变量 X 和 X_1, X_2, \ldots , 分布函数 $F_X(x), F_{X_n}(x), A = \{\omega \in S : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\},$ $A_n(\varepsilon) = \{\omega \in S : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}$

- 几乎必然收敛: $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ $\Leftrightarrow P(A) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依概率收敛: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n X| \ge \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$ ⇔ $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0, \forall \varepsilon > 0$
- 依分布收敛: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

几乎必然收敛 → 依概率收敛 ^{常数分布等价} 依分布收敛

- 依概率收敛下的大数定理为弱大数定律
- 几乎必然收敛下的大数定理为强大数定律



Xiao Yuan

大数定

事件

依概率的

位据·创定

11分利天理

尔科夫不

随机变电

10年4年3年3年

依概率收敛

切比当大大致

随机变量的周

敛性

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

特征函数

随机变量 X 的特征函数为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \ t \in (-\infty, \infty)$$



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与J 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

马尔科夫大教定 各位上标定律

随机变量的影

敛性

the state of the state

特征函数定义

特征函数的性质 辛钦大数定律证:

中心极限定理

特征函数

随机变量X的特征函数为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \ t \in (-\infty, \infty)$$

■ 对于连续型随机变量,特征函数也即是密度函数 $f_X(x)$ 的傅里叶变换 $\psi_X(t) = \int e^{itx} f(x) dx$



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

伯努利定理 切比雪夫不等式与。 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛

马尔科夫大教定

随机变量的机

致性 几乎必然收敛

桂红泵,新

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

特征函数

随机变量X的特征函数为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \ t \in (-\infty, \infty)$$

- 对于连续型随机变量,特征函数也即是密度函数 $f_X(x)$ 的傅里叶变换 $\psi_X(t) = \int e^{itx} f(x) dx$
- 退化分布 P(X=x)=1, $\psi_X(t)=e^{itx}$

特征函数



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与具 尔科卡不等式

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定 马尔科夫士新定

辛钦大敖定律

随机发重的^收 敛性

几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 血处上粒少分22

中心极限定理

特征函数

随机变量X的特征函数为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \ t \in (-\infty, \infty)$$

- 对于连续型随机变量,特征函数也即是密度函数 $f_X(x)$ 的傅里叶变换 $\psi_X(t) = \int e^{itx} f(x) dx$
- 退化分布 P(X = x) = 1, $\psi_X(t) = e^{itx}$
- 泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的特征函数为 $\psi_X(t) = \sum_k e^{itk} e^{-\lambda} \lambda^k / k! = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

特征函数



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与其 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数定 马尔科夫大数定

随机变量的收

致性 几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 每於上於定律(2)

中心极限定理

特征函数

随机变量 X 的特征函数为

$$\psi_X(t) = E(e^{itX}), \ t \in (-\infty, \infty)$$

- 对于连续型随机变量,特征函数也即是密度函数 $f_X(x)$ 的傅里叶变换 $\psi_X(t) = \int e^{itx} f(x) dx$
- 退化分布 P(X = x) = 1, $\psi_X(t) = e^{itx}$
- 泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的特征函数为 $\psi_X(t) = \sum_k e^{itk} e^{-\lambda} \lambda^k / k! = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- 正态分布的特征函数为 $\psi_X(t) = \int e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = e^{i\mu t \sigma^2 t^2/2}$



概率统计

Xiao Yuan

特征函数的性盾

a
$$X + b$$
 的特征函数为 $\psi_{(aX+b)}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\psi_X(at)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理

切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

敛性

依分布收敛

付任四级

特征函数的性质

中心极限定理

aX + b 的特征函数为 $\psi_{(aX+b)}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\psi_X(at)$

■ 假设 $\{X_n\}$ 相互独立且 $X = \sum X_n$,则 $\psi_X(t) = E(e^{it\sum X_n}) = \prod E(e^{itX_n}) = \prod \psi_{X_n}(t)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 **

依佩平収效 伯努利定理 切比雪夫不等式与A

尔科夫不寺式 随机变量 依概率收敛

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收敛性

几于必然收3 依分布收敛

桂红添粉

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

a aX + b 的特征函数为 $\psi_{(aX+b)}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\psi_X(at)$

■ 假设 $\{X_n\}$ 相互独立且 $X = \sum X_n$,则 $\psi_X(t) = E(e^{it\sum X_n}) = \prod E(e^{itX_n}) = \prod \psi_{X_n}(t)$

■ 若 X 的 k 阶矩存在,则 $E(X^k) = (-i)^k \psi_X^{(k)}(0)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律

切比雪夫大數定律 马尔科夫大數定律 辛钦大數定律

随机变量的收敛性 几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

辛钦大数定律证明

a X + b 的特征函数为 $\psi_{(aX+b)}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\psi_X(at)$

■ 假设 $\{X_n\}$ 相互独立且 $X = \sum X_n$,则 $\psi_X(t) = E(e^{it\sum X_n}) = \prod E(e^{itX_n}) = \prod \psi_{X_n}(t)$

- 若 X 的 k 阶矩存在,则 $E(X^k) = (-i)^k \psi_X^{(k)}(0)$
- 以连续型随机变量为例, $\psi_X^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} f(x) dx$,因此 $(-i)^k \psi_X^{(k)}(0) = \int x^k f(x) dx = E(X^k)$



概率统计

Xiao Yuan

事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛 特征 派 對

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

- **a** aX + b 的特征函数为 $\psi_{(aX+b)}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{iatX}) = e^{itb}\psi_X(at)$
- 假设 $\{X_n\}$ 相互独立且 $X = \sum X_n$,则 $\psi_X(t) = E(e^{it\sum X_n}) = \prod E(e^{itX_n}) = \prod \psi_{X_n}(t)$
- 若 X 的 k 阶矩存在,则 $E(X^k) = (-i)^k \psi_X^{(k)}(0)$
- 以连续型随机变量为例, $\psi_X^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} f(x) dx$,因此 $(-i)^k \psi_X^{(k)}(0) = \int x^k f(x) dx = E(X^k)$
- 例:已知正态分布的特征函数为 $\psi_X(t) = e^{i\mu t \sigma^2 t^2/2}$,则 $E(X) = -i\psi_X'(0) = \mu$, $E(X^2) = -\psi_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

事件

伯努利定理

切比雪夫不等式与

随机容量

依概率收發

切比雪夫大教

与小杆大入级/ 辛钦大数定律

随机变量的收

敛性

依分布收敛

村1上四·双

符位函数足义 特征函数的性盾

辛钦大数定律证明

中心极限定理

唯一性定理

随机变量的分布函数由特征函数唯一决定



概率统计

Xiao Yuan

大数定征

依概率收敛 伯努利定理

切比雪天不寺式与 尔科夫不等式 wan 本品

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

与尔科大天教 定律 辛钦大教定律

随机变重的收 敛性

化子如AAA 依分布收敛

特征函数

特征函数的性质

中心极限定理

唯一性定理

随机变量的分布函数由特征函数唯一决定

■ 给定相互独立 $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 令 $X = \sum X_n$, 证明 $X \sim N(\sum \mu_n, \sum \sigma_n^2)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

尔科大不可具 随机变量 分細由从从

依概率收敛
切比雪夫大数定律

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

几乎必然收敛 依分布的分

特征函数定义

特征函数的性质 辛钦大数定律证明

中心极限定理

唯一性定理

随机变量的分布函数由特征函数唯一决定

● 给定相互独立 $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$,令 $X = \sum X_n$,证明 $X \sim N(\sum \mu_n, \sum \sigma_n^2)$ $\psi_X(t) = \prod \psi_{X_n}(t) = \prod e^{i\mu_n t - \sigma_n^2 t^2/2} = e^{i\sum \mu_n t - \sum \sigma_n^2 t^2/2}$,结论根据独立性定理得证



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收 敛性

致性 几乎必然收敛

特征函数 特征函数定义 特征函数的性质

do so do un de m

中心极限定理

唯一性定理

随机变量的分布函数由特征函数唯一决定

- 给定相互独立 $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 令 $X = \sum X_n$, 证明 $X \sim N(\sum \mu_n, \sum \sigma_n^2)$ $\psi_X(t) = \prod \psi_{X_n}(t) = \prod e^{i\mu_n t \sigma_n^2 t^2/2} = e^{i\sum \mu_n t \sum \sigma_n^2 t^2/2}$, 结论根据独立性定理得证
- 类似的方法可以证明其它分布的可加性

连续性定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

事件

伯努利定理

切比雪夫不等式。

かけんかする

组机发生

依概率收敛

切比雪夫大数定

20.24 上 40 cb cb

辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收敛

11 /- - b

特征函数定义

特征函数的性质

中心初限定理

连续性定理

分布函数 $\{F_{X_n}(x)\}$ 弱收敛于 $F_X(x)$ 的充要条件为相应的特征函数 $\{\psi_{X_n}(t)\}$ 收敛于 $F_X(x)$ 的特征函数 $\psi_X(t)$

连续性定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 **

依概率收敛

伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科卡不等式

随机变量

依概率收敛

马尔科夫大数定

辛钦大数定律

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数

特征函数的性质

中心极限定理

连续性定理

分布函数 $\{F_{X_n}(x)\}$ 弱收敛于 $F_X(x)$ 的充要条件为相应的特征函数 $\{\psi_{X_n}(t)\}$ 收敛于 $F_X(x)$ 的特征函数 $\psi_X(t)$

• 例: 已知 $X \sim \pi(\lambda)$, $Y = (X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$, 证明 $\lim_{\lambda \to \infty} Y \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0, 1)$

连续性定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式。

随机变量 依概率收敛 切比雷夫大般定律

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收 致性

化分布收敛

特征函数定义 **特征函数的性质**

辛钦大数定律证明

中心极限定理

连续性定理

分布函数 $\{F_{X_n}(x)\}$ 弱收敛于 $F_X(x)$ 的充要条件为相应的特征函数 $\{\psi_{X_n}(t)\}$ 收敛于 $F_X(x)$ 的特征函数 $\psi_X(t)$

• 例:已知 $X \sim \pi(\lambda)$, $Y = (X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$, 证明 $\lim_{\lambda \to \infty} Y \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$ X 的特征函数为 $\psi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, 因此 Y 的特征函数为 $\psi_Y(t) = \psi_X(t/\sqrt{\lambda})e^{-i\sqrt{\lambda}t} = e^{\lambda(e^{it}/\sqrt{\lambda}-1)-i\sqrt{\lambda}t}$ 注意 $e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1 = it/\sqrt{\lambda} - t^2/(2\lambda) + o(1/\lambda)$ 因此 $\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1) - i\sqrt{\lambda}t = -t^2/(2\lambda) + \lambda \cdot o(1/\lambda)$ 也即是 $\lim_{\lambda \to \infty} \psi_Y(t) = e^{\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)-i\sqrt{\lambda}t} = e^{-t^2/2}$ 因此 Y 的特征函数的极限为正态分布的特征函数,根据 唯一性定理,则 Y 依分布收敛于标准正态分布 N(0,1)

辛钦大数定律证明



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

事件

依佩平收效 伯努利定理

切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量

All less of the Asia

依概率收敛

切比雪夫大多

随机变量的收

敛性

依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质 辛飲大數定律证明

中心极限定理

辛钦大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,满足独立同分布,且存在期望 $\mu = E(X_i) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

辛钦大数定律证明



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比曾天大平等式与马 5044年又等式

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛

有4年四级 特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大數定律证明

中心极限定理

辛钦大数定律

设随机变量序列 X_1, X_2, \ldots ,满足独立同分布,且存在期望 $\mu = E(X_i) < \infty$,则对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

证明: 弱大数定律(依概率收敛) 當數分布 收敛 之 分布函数弱收敛 连续型定理 特征函数收敛

因为 X_k 期望存在,因此其特征函数存在二阶导数且 $\psi_{X_k}(t) = \psi_{X_k}(0) + \psi'(0)t + o(t) = 1 + i\mu t + o(t)$ 令 $\bar{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ 则有 $\psi_{\bar{X}_n}(t) = \prod_{i=k}^n \psi_{X_k}(t/n) = \left[1 + i\mu \frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})\right]^n$ 对于任意 t,则有 $\lim_{n\to\infty} \psi_{\bar{X}_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + i\mu \frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})\right]^n = e^{it\mu}$ 注意 $e^{it\mu}$ 是退化分布 $X = \mu$ 的特征函数,因此有 $F_{\bar{X}_n}(x)$ 弱收敛于

 $F_{X=\mu}(x)$, 也即是 \bar{X}_n 依分布收敛于 $X=\mu$, 也即是 \bar{X}_n 依概率收敛于 $X=\mu$



概率统计

Xiao Yuan

大 数 定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比當夫不等式与 随机变量 依概率收敛 切比當夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 大数定律告诉我们 $\xrightarrow{\sum_{i=1}^{n} X_i} \xrightarrow{P} \xrightarrow{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$ 或者说 $\xrightarrow{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)} \xrightarrow{P} 0$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

依概率收敛 切比雪夫大数次

马尔科夫大数定 辛钦大数定律

随机变量的收

几乎必然收; 依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质 辛钦大数定律证

中心极限定理

■ 大数定律告诉我们 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}$ 或者说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)}{n} \xrightarrow{P} 0$

■ 考虑独立同分布的情况,大数定律为 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ 或者 说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{n} \xrightarrow{P} 0$, 其中 $\mu = E(X_i)$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定

马尔科夫大数定律 辛钦大数定律

随机变量的收 敛性

几乎必然收分 依分布收敛

特征函数定义

中心极限定理

■ 大数定律告诉我们 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}$ 或者说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)}{n} \xrightarrow{P} 0$

- 考虑独立同分布的情况,大数定律为 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ 或者 说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{n} \xrightarrow{P} 0$, 其中 $\mu = E(X_i)$
- 考虑 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化,也即是 $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{\sqrt{n}\sigma}$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

- 大数定律告诉我们 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i}}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_{i})}{n}$ 或者说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i} E(X_{i})}{n} \xrightarrow{P} 0$
- 考虑独立同分布的情况,大数定律为 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ 或者 说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{n} \xrightarrow{P} 0$,其中 $\mu = E(X_i)$
- 考虑 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化,也即是 $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{\sqrt{n}\sigma}$
- 对于随机变量 \tilde{S}_n , 我们有 $E(\tilde{S}_n) = 0$, $D(\tilde{S}_n) = 1$, 因此我们不再有 $\tilde{S}_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 0$



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式 随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的收

几乎必然收敛 依分布收敛

行在四级 特征函数定义 特征函数的性质 辛软大数定律证明

中心极限定理

■ 大数定律告诉我们 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n}$ 或者说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_i)}{n} \xrightarrow{P} 0$

- 考虑独立同分布的情况,大数定律为 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ 或者 说 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{n} \xrightarrow{P} 0$,其中 $\mu = E(X_i)$
- 考虑 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化,也即是 $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \mu}{\sqrt{n}\sigma}$
- 对于随机变量 \tilde{S}_n ,我们有 $E(\tilde{S}_n) = 0$, $D(\tilde{S}_n) = 1$,因此我们不再有 $\tilde{S}_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 0$
- 那么 Sn 随 n 的增加是否仍然服从一定的规律呢?

De Moivre-Laplace 定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与J

随机变量

切比雪夫大数定行 马尔科夫大数定行

随机变量的收

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

De Moivre-Laplace 定理

$$X_i \sim B(1, p)$$
 独立同分布, $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma}}$, 其中 $\sigma = \sqrt{pq}$, 则有 $\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0, 1)$

De Moivre-Laplace 定理



概率统计

Xiao Yuan

大数 定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律 马尔科夫大数定律

随机变量的4 敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛飲大数定律证明

中心极限定理

De Moivre-Laplace 定理

$$X_i \sim B(1,p)$$
 独立同分布, $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$, 其中 $\sigma = \sqrt{pq}$, 则有 $\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$

证明: 首先我们注意到 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$.

另一方面, 我们知道 n 很大时, 我们有 $B(n,p) \approx \pi(\lambda)$, 其中 $\lambda = np$. 因此 $S_n \sim \pi(\lambda)$.

在上面的例题中我们知道, 当 $X \sim \pi(\lambda)$, $Y = (X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ 时 我们有 $\lim_{\lambda \to \infty} Y \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$.

注意到 Y 也即是 X 的标准化,因此我们有 $\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$

Lindeberg-Lévy 定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

事件 依概率收敛 伯努利定理

伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量

依概率收敛 切比雪夫大数

马尔科夫大数

辛钦大数定律

致性

几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

Lindeberg-Lévy 定理

$$X_i$$
 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$, 则有 $\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$

Lindeberg-Lévy 定理



概率统计

Xiao Yuan

大数定律 事件

你似乎以双 伯努利定理 切比雪夫不等式与。 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛 切比雪夫大数定律

马尔科夫大数定行 辛钦大数定律

致性 几乎必然收敛

依分布收敛 持征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证明

中心极限定理

Lindeberg-Lévy 定理

 X_i 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $\tilde{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$, 则有 $\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$

证明:假设 $X_i - \mu$ 的特征函数为 $\psi_{X_i}(t)$,则有

$$\psi_{X_i}(t) = \psi_{X_i}(0) + \psi'_{X_i}(0)t + \psi''_{X_i}(0)t^2/2 + o(t^2)$$

= 1 - \sigma^2 t^2/2 + o(t^2)

因此 Sn 的特征函数为

$$\left[\psi_{X_i}(t/\sqrt{n}\sigma)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right]^n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2}$$

也即是
$$\tilde{S}_n \stackrel{d}{\longrightarrow} Z \sim N(0,1)$$



Xiao Yuan

中心极限定理

■ 中心极限定理告诉我们, 当 n 很大, X_i 为独立同分布时, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \approx Z \sim N(n\mu, n\sigma^{2})$$



Xiao Yuan

大数定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科夫不等式 随机变量

切比雪夫大数定? 马尔科夫大数定?

随机变量的收

致性 几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 中心极限定理告诉我们,当 n 很大, X_i 为独立同分布时, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$,我们有

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \approx Z \sim N(n\mu, n\sigma^{2})$$

■ 因此对于大数定律的情况,我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i}\approx Z\sim N(\mu,\sigma^{2}/n)$$

应用



概率统计

Xiao Yuan

大數定律 事件 依概率收錄 伯勢利定理 切比當夫不等式与 於科夫不等式 隨机变量 依概率收錄 切比當夫大數定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义特征函数的性质

中心极限定理

■ 中心极限定理告诉我们, 当 n 很大, X_i 为独立同分布时, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \approx Z \sim N(n\mu, n\sigma^{2})$$

■ 因此对于大数定律的情况, 我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i}\approx Z\sim N(\mu,\sigma^{2}/n)$$

■ 因此 $P(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$

应用



概率统计

Xiao Yuan

大教定律 事件 依概率收效 伯努利定理 切比信夫不等式与目 防机变量 依概率收敛 切比官夫大载定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质 辛分十数次律证

中心极限定理

中心极限定理告诉我们,当 n 很大, X_i 为独立同分布时, E(X_i) = μ,
 D(X_i) = σ². 我们有

$$\sum_{i=1}^{n} X_{i} \approx Z \sim N(n\mu, n\sigma^{2})$$

■ 因此对于大数定律的情况,我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \approx Z \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

- 因此 $P(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$
- •特别地,对于 $X_i \sim B(1,p)$, $P(a < \sum_{i=1}^n X_i \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$



Xiao Yuan

大数定律

依概率收敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与 尔科夫不等式

随机变量 依概率收敛

切比雪夫大数

· 内小行大入我
· 小 上 れ か か

辛钦大敖定律

敛性

几乎必然收敛

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

特征函数的性质 辛钦大数定律证

中心极限定理

■ 在 n 重贝努里试验中,若已知每次试验事件 A 出现的概率为 0.75,试利用中心极限定理, (1) 若 n=7500, 估计 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率近似值; (2) 估计 n, 使 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率不小于 0.90



Xiao Yuan

大数定律

依概率收到

但分利及理 切比雪夫不等式与

随机变量

依概率收敛

切比雪夫大数定

马尔科夫大数定 辛钦大数定律

几乎必然收; 依分布收敛

特征函数定义

特征函数的性质

中心极限定理

■ 在 n 重贝努里试验中,若已知每次试验事件 A 出现的概率为 0.75,试利用中心极限定理,(1) 若 n = 7500,估计 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率近似值;(2) 估计 n,使 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率不小于 0.90

(1) 记 A 出现的次数为 X, 则 E(X) = np = 0.75n, D(X) = npq = 0.1875n, 因此 $P(0.74n < X \le 0.76n) \approx T(0.76-0.75)n$

$$\Phi\left(\frac{(0.76 - 0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.74 - 0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \approx 0.9544$$

(2)
$$\Phi\left(\frac{(0.76-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.74-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \geq 0.95$$
, 得 $n \geq 5074$ 注意和利用切比雪夫不等式的结果比较



Xiao Yuan

中心极限定理

■ 在 n 重贝努里试验中, 若已知每次试验事件 A 出现的概率为 0.75, 试利用中心极限定理, (1) 若 n = 7500, 估计 A 出现的频率在 0.74至 0.76 之间的概率近似值; (2) 估计 n, 使 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率不小于 0.90

(1) 记 A 出现的次数为 X, 则 E(X) = np = 0.75n, D(X) = npq = 0.1875n, 因此 $P(0.74n < X < 0.76n) \approx$ $\Phi\left(\frac{(0.76-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.74-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \approx 0.9544$

(2)
$$\Phi\left(\frac{(0.76-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.74-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \ge 0.95$$
, 得 $n \ge 5074$ 注意和利用切比雪夫不等式的结果比较

■ 设随机变量 X_1, \dots, X_{20} , 相互独立同分布, $X_i \sim U(-1,1)$, 分别求 (1) $\frac{1}{20}$ $\sum_{k=1}^{20} X_k$, (2) $\frac{1}{20}$ $\sum_{k=1}^{20} |X_k|$ (3) $\frac{1}{20}$ $\sum_{k=1}^{20} X_k^2$ 的近似分布

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 900



Xiao Yuan

入致 尺件 事件 依概率放敛 伯努利定理 切比雪夫不等式与马 尔科夫不等式

依概率收敛
切比雪夫大数定律

马尔科夫大数定? 辛钦大数定律

随机变重的^收 敛性

依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

在 n 重贝努里试验中,若已知每次试验事件 A 出现的概率为 0.75, 试利用中心极限定理, (1) 若 n = 7500,估计 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率近似值; (2) 估计 n,使 A 出现的频率在 0.74 至 0.76 之间的概率不小于 0.90

(1) 记 A 出现的次数为 X, 则 E(X) = np = 0.75n, D(X) = npq = 0.1875n, 因此 $P(0.74n < X \le 0.76n) \approx \Phi\left(\frac{(0.76 - 0.75)n}{n}\right) = \Phi\left(\frac{(0.74 - 0.75)n}{n}\right) \approx 0.0544$

$$\Phi\left(\frac{(0.76 - 0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) - \Phi\left(\frac{(0.74 - 0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \approx 0.9544$$

- (2) $\Phi\left(\frac{(0.76-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \Phi\left(\frac{(0.74-0.75)n}{\sqrt{0.1875n}}\right) \ge 0.95$, 得 $n \ge 5074$ 注意和利用切比雪夫不等式的结果比较
- 设随机变量 X_1, \dots, X_{20} , 相互独立同分布, $X_i \sim U(-1,1)$, 分别求 (1) $\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} X_k$, (2) $\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} |X_k|$ (3) $\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} X_k^2$ 的近似分布 三个分布均近似服从正态分布
 - (1) $E(X) = 0, D(X) = 1/3, \frac{1}{200} \sum_{k=1}^{20} X_k \approx Z \sim N(0, 1/60)$
 - (2) E(|X|) = 1/2, D(|X|) = 1/12,
 - $\frac{1}{200} \sum_{k=1}^{20} |X_k| \approx Z \sim N(1/2, 1/240)$
 - (3) $E(X^2) = 1/3, D(X) = 4/45, \frac{1}{200} \sum_{k=1}^{20} X_k^2 \approx Z \sim N(1/3, 1/225)$



Xiao Yuan

大 数 定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 切比雷夫不等式与 随机变量 依概率收敛 切比雷夫大 数定样 马尔科夫女 验

随机变量的收敛性

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

设某工厂有400台同类机器,各台机器发生故障的概率都是0.01,各台机器工作是相互独立的,试用三种方法求机器出故障的台数不小于2的概率。



Xiao Yuan

中心极限定理

■ 设某工厂有 400 台同类机器,各台机器发生故障的概率 都是 0.01, 各台机器工作是相互独立的, 试用三种方法 求机器出故障的台数不小于2的概率。 记X为故障机器数量

- (1) 根据二项分布有 $P(X \ge 2) = 1 P(X = 0) P(X = 0)$
- $1) = 1 0.99^{400} 400 \times 0.01 \times 0.99^{399} \approx 0.9095$
- (2) 用泊松分布近似计算 $\lambda = np = 400 \times 0.01 = 4$.
- $P(X > 2) = 1 e^{-4} 4e^{-4} \approx 0.9084$ (3) 用正态分布近似计算
- $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.01 \times 0.99} = 1.99$

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{3}{1.99}\right) = 0.9341$$



Xiao Yuan

大数 定律
事件
依概率收效
伯努利定理
切比雷夫不等式与
尔科夫不等式
随机变量
依概率收效
切比雷夫大数定律
导尔科夫大数定律

随机变量的收敛性

几乎必然收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 设某工厂有 400 台同类机器,各台机器发生故障的概率 都是 0.02,各台机器工作是相互独立的,试用三种方法 求机器出故障的台数不小于 2 的概率。



Xiao Yuan

中心极限定理

■ 设某工厂有 400 台同类机器,各台机器发生故障的概率 都是 0.02、各台机器工作是相互独立的、试用三种方法 求机器出故障的台数不小于2的概率。 记X为故障机器数量

- (1) 根据二项分布有 $P(X \ge 2) = 1 P(X = 0) P(X = 0)$
- $1) = 1 0.98^{400} 400 \times 0.02 \times 0.98^{399} \approx 0.9972$
- (2) 用泊松分布近似计算 $\lambda = np = 400 \times 0.02 = 8$.
- $P(X \ge 2) = 1 e^{-8} 8e^{-8} \approx 0.9969$
- (3) 用正态分布近似计算 $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.02 \times 0.98} = 2.8$

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{7}{2.8}\right) = 0.9938$$



Xiao Yuan

大數定律 事件 依概率收敛 伯努利定理 动比雷夫不等式与五 尔科夫不等式 随机变量 依概率收敛 切比雷夫大赦定律

随机变量的收

几乎必然收敛 依分布收敛

特征函数定义 特征函数的性质

中心极限定理

■ 某校 1500 名学生选修"概率统计"课程,共有 10 名教师主讲此课,假定每位学生可以随意地选择一位教师(即,选择任意一位教师的可能性均为 1/10),而且学生之间的选择是相互独立的.问:每位教师的上课教室应该设有多少座位才能保证该班因没有座位而使学生离开的概率小于5%.



Xiao Yuan

大數定律
事件
依据率收效
伯努利定理
切比哲夫不等式与
该科文學
依据率收效
如此哲夫本等式与
成於定學
依据率收效
如此信表大統定律
再外科夫大教定律
陸机、変量
的
收

致性 几乎必然收敛

特征函数

特征函数定义 特征函数的性质 辛钦大数定律证明

中心极限定理

■ 某校 1500 名学生选修"概率统计"课程,共有 10 名教师主讲此课,假定每位学生可以随意地选择一位教师(即,选择任意一位教师的可能性均为 1/10),而且学生之间的选择是相互独立的.问:每位教师的上课教室应该设有多少座位才能保证该班因没有座位而使学生离开的概率小于5%.

考虑任意一位老师甲, 且记

立同分布. 记 $Y = \sum_{i=1}^{1500} X_i$, 则 $Y \sim B(1500, 1/10)$. 设教室有 a 个座位,因此

$$P(Y \le a) \approx \Phi\left(\frac{a - 1500*1/10}{\sqrt{1500*(1/10)*(9/10)}}\right)$$
 注意

$$\Phi(1.645) = 95\%$$
,因此有 $a \ge 169.11$