Homework 3

Name: 柯宇斌, ID: 2200013213

Problem 1 (10') . 随机变量 X 只取非负整数值.

(1) 若对非负整数 n, $P(X=n)=A*\frac{B^n}{n!}$, 且 $E(X)=a$, 求 A 和 B

(2) 若对非负整数 n, $P(X=n)=\frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$, 其中常数 $a>0$, 求 $E(X)$ 与 $D(X)$. ◀

Answer. (1) 由定义，我们有

$\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)=1$,$\sum_{i=0}^{+\infty}iP(X=i)=a$.

即 $\begin{cases}\sum_{i=0}^{+\infty}A\frac{B^i}{i!}=1\\ \sum_{i=0}^{+\infty}A\frac{B^i}{i!}*i=a\end{cases} \implies \begin{cases}Ae^B=1\\ B*Ae^B=a\end{cases} \implies \begin{cases}A=e^{-a}\\ B=a\end{cases}$

(2) 熟知以下事实 ($|x|<1$)

$\sum_{i=0}^{+\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$,$\sum_{i=0}^{+\infty}ix^i=\frac{x}{(1-x)^2}$,$\sum_{i=0}^{+\infty}i^2x^i=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

由定义，我们有 $E(X)=\sum_{i=0}^{+\infty}i\frac{a^i}{(1+a)^{i+1}}=\frac{1}{1+a}\sum_{i=0}^{+\infty}i(\frac{a}{1+a})^i=a$

$$\begin{aligned}
D(X)&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)(i-E(X))^2\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)i^2-2E(X)\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)i+\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)E(X)^2\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)i^2-E(X)^2\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a^i}{(1+a)^{i+1}}i^2-E(X)^2\\
&=\frac{1}{1+a}\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{a}{1+a})^ii^2-E(X)^2\\
&=\frac{1}{1+a}\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{a}{1+a})^ii^2-E(X)^2\\
&=a(1+2a)-a^2\\
&=a+a^2
\end{aligned}\tag{1}$$

综上,$E(X)=a,D(X)=a+a^2$ ◁

Problem 2 (10') . 设随机变量 $(X,Y$ 满足

$$E(X)=E(Y)=0,Var(X)=Var(Y)=1,Cov(X,Y)=\rho$$

求证 $E(max\left\{X^2,Y^2\right\})\le 1+\sqrt{1-\rho^2}$ ◀

Answer. (1) 由定义，有

$$E(X^2) = D(X) - E(X)^2 = 1, E(Y^2) = D(Y) - E(Y)^2 = 1$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X,Y) = \rho$$

所以有

$$E((X+Y)^2) = 2 + 2\rho, E((X-Y)^2) = 2 - 2\rho$$

由柯西不等式

$$E(|X^2 - Y^2|) \leq \sqrt{E((X-Y)^2)E((X+Y)^2)} = \sqrt{4-\rho^2}$$

所以有

$$E(max\left\{X^2, Y^2\right\}) = E(\frac{X^2+Y^2}{2}) + E(\frac{|X^2-Y^2|}{2}) \leq 1 + \sqrt{1-\rho^2}$$

◁

Problem 3 (10') . 证明

(1) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X = (-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\} = \frac{2}{3^j}, j = 1, 2, \ldots, X$ 的数学期望不存在

(2) 一盒中装有一只黑球, 一只白球, 作摸球游戏, 规则如下: 一次从盒中随机摸一只球, 若摸到白球, 则游戏结束; 若摸到黑球放回再放人一只黑球, 然后再从盒中随机地摸一只球. 要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在. ◀

Answer. (1) 由定义，有

$$\sum_x |P(X=x)x| = \sum_{j=1}^{+\infty} |(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j} * \frac{2}{3^j}| = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j} = +\infty$$

所以 X 的数学期望不存在

(2) 由定义,X 取值为正整数, 且 $P(X=k) = (\prod_{i=1}^{i=k-1} \frac{i}{i+1}) * \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

$$\sum_x |P(X=x)x| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\frac{1}{k(k+1)}k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

所以 X 的数学期望不存在 ◁

Problem 4 (10') . 设水电公司在指定时间内限于设备能力, 其发电量 X (单位: $10^4 kW$) 服从均匀分布 $U[10, 30]$, 用户的用电量 Y (单位: $10^4 kW$) 服从均匀分布 $U[10, 20]$. 假设 X 与 Y 相互独立, 且水电公司每供应 $1kW$ 电将获利润 0.32 元; 如果空消耗 $1kW$ 电, 将损失 0.12 元; 而当发电量供不应求时, 将从其他电力公司调用电, 每千瓦电获利 0.20 元. 求在指定时间内, 该公司所获利润的期望值. ◀

Answer. 由题意，记利润为 $C(10^4元)$

$$\begin{aligned}E(C)=&\int_{10}^{20}\frac{1}{10}(\int_{10}^{y}\frac{1}{20}(0.32x+0.2(y-x))dx\\&+\int_{y}^{30}\frac{1}{20}(0.32y-0.12(x-y))dx)dy\\=&\int_{10}^{20}\frac{1}{200}(-0.12y^2+11.2y-60)dy\\=&4\end{aligned}\tag{2}$$

所以利润期望值 4 万元 ◁

Problem 5 (10') . 袋子中有 N 张卡片，分别标有数字 1, 2, ..., N. 每次从袋中等可能抽出一张卡片，**有放回** 地抽 n 次. 设随机变量 X_N 表示所抽到卡片上的数字的最大值.

(1) 求 $E(X_N)$

(2) 固定 n，求 $\lim_{N\to\infty}E(\frac{X_N}{N})$ ◀

Answer. (1) 不难得知 X_N 取值为 $1,2,\ldots,N$, 且 $P(X_N=i)=(\frac{i}{N})^n-(\frac{i-1}{N})^n$ 所以有

$$\begin{aligned}E(X_N)&=\sum_{i=1}^{i=N}i*(\frac{i}{N})^n-(\frac{i-1}{N})^n\\&=\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{i=N}i^{n+1}-(i-1)^{n+1}-(i-1)^n\\&=\frac{1}{N^n}(N^{n+1}-\sum_{i=1}^{i=N}(i-1)^n)\\&=N-\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{i=N}(i-1)^n\end{aligned}\tag{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}E(\frac{X_N}{N})&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E(X_N)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}(N-\frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{i=N}(i-1)^n)\\&=1-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}(\frac{i-1}{N})^n\\&=1-\int_0^1x^ndx\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}\tag{4}$$

◁

Problem 6 (10') . 甲乙按照下列规则玩随机游戏：甲从装有 i 个 i 号球 (i = 1, 2, 3, 4, 5) 的袋中等可能摸出一个球，放入密盒中，让乙猜号，**乙可以猜实数**. 乙对甲的支付是猜测号码与真正号码之差的

(1) 平方；

(2) 绝对值.

试分别讨论乙在这两种情况下的最优猜测号码，使得乙期望上向甲支付最少的钱. ◀

Answer. 设乙猜 x , 支付 X (1)

$$\begin{aligned} E(X) =& \frac{1}{15}(1(x-1)^2+2(x-2)^2+3(x-3)^2+4(x-4)^2+5(x-5)^2) \\ =& \frac{1}{15}(15x^2-110x+225) \\ \geq& \frac{14}{9}(x=\frac{11}{3}) \end{aligned} \tag{5}$$

所以猜 $\frac{11}{3}$ 最好

(2)

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}\frac{i}{15}|x-i|=\frac{1}{15}\begin{cases}55-15x, x\leq 1\\ 53-13x, 1<x<2\\ 45-9x, 2\leq x\leq 3\\ 27-3x, 3<x<4\\ 5x-5, 4\leq x\leq 5\\ 15x-55, x>5\end{cases}\geq \frac{1}{15}\begin{cases}40, x=1\\ 27, x=2\\ 18, x=3\\ 15, x=4\\ 15, x=4\\ 20, x=5\end{cases}\geq 1(x=4)$$

所以猜 4 最好 ◁

Problem 7 (10') . 设标准正太分布密度函数为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, -\infty<x<+\infty$$

设

$$g(x)=\begin{cases}\cos x, |x|<\pi,\\ 0, |x|\geq \pi\end{cases}$$

随机向量 (X,Y) 的密度函数（不算分，但请验证一下这是一个密度函数）为

$$f_{X,Y}(x,y)=\phi(x)\phi(y)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y)$$

证明

(1) X,Y 的边缘分布都是正态分布

(2) X,Y 的相关系数为 0，但不独立 ◀

Answer.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi(x)\phi(y)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y))dxdy\\
=&(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)dx)(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}(\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx)(\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy)\\
=&1
\end{aligned} \tag{6}$$

所以是密度函数

(1) 注意到

$$\begin{aligned}
f_X(x)=&\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi(x)\phi(y)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y))dy\\
=&\phi(x)(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)(\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy)\\
=&\phi(x)
\end{aligned} \tag{7}$$

同理 $f_Y(y)=\phi(y)$

所以 X,Y 的边缘分布都是正态分布

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
&Cov(X,Y)\\
=&E(X)E(Y)-E(XY)\\
=&(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)dx)(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy)\\
&-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy(\phi(x)\phi(y)+\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y))dxdy\\
=&(\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)dx)^2-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy(\phi(x)\phi(y))dxdy\\
&-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy(\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y))dxdy\\
=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy(\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}g(x)g(y))dxdy\\
=&-\frac{e^{-\pi^2}}{2\pi}(\int_{-\infty}^{+\infty}xg(x)dx)(\int_{-\infty}^{+\infty}yg(y)dy\\
=&0
\end{aligned} \tag{8}$$

所以 X,Y 相关系数为 0，但 $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不相互独立 ◁

Problem 8 (10') . 设随机向量 (X_1,X_2) 服从 2 元正态分布,$E(X_1)=E(X_2)=0,D(X_1)D(X_2)=1$, 相关系数 $\rho_{X_1,X_2}=\rho$

(1) 求 X_1 与 X_1-X_2 的相关系数

(2) 求 $E(|X_1 - X_2|)$.

(3) 求 $E(max\{X_1, X_2\})$.

◀

Answer. (1) 由题意，有

$$E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = Cov(X_1, X_2) = \rho_{X_1,X_2}\sqrt{D(X_1)D(X_2)} = \rho$$

$$D(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 1$$

所以 $E(X_1X_2) = \rho, E(X_1^2) = 1$

$$Cov(X_1, X_1 - X_2) = E(X_1(X_1 - X_2)) - E(X_1)E(X_1 - X_2) = 1 - \rho$$

而 $D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(-X_2) + 2Cov(X_1, -X_2) = 2 - 2\rho$ 所以 $\rho_{X_1,X_1-X_2} = \frac{Cov(X_1,X_1-X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_1-X_2)}} = \frac{1-\rho}{\sqrt{2-2\rho}} = \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}$

(2) 我们有

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2)}$$

所以 (考虑到 X_1, X_2 对称，只需要算 $X_1 > X_2$ 的部分再乘以 2)

$$\begin{aligned}
&f_{|X_1-X_2|}(m)\\
=&2\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x+m, x)dx\\
=&2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(2(1-\rho)(x+\frac{m}{2})^2+\frac{1+\rho}{2}m^2)}dx\\
=&\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{m^2}{4(1-\rho)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1+\rho}(x+\frac{m}{2})^2}dx\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{m^2}{4(1-\rho)}}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&E(|X_1 - X_2|)\\
=&\int_{0}^{+\infty} f_{|X_1-X_2|}(m)mdm\\
=&\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{m^2}{4(1-\rho)}}mdm\\
=&\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{m^2}{4(1-\rho)}}mdm\\
=&\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}e^{-\frac{m^2}{4(1-\rho)}}dm^2\\
=&2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}
\end{aligned} \tag{10}$$

(3)

$$E(max\{X_1, X_2\}) = E(\frac{X_1 + X_2}{2}) + E(\frac{|X_1 - X_2|}{2}) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

◁

Problem 9 (10') . 罐中有 N 个球，其中 a 个白球，b 个黑球，c 个红球 $a+b+c=N$. 从中依次等可能摸出 n 个球，每次摸出球后**都放回**，设取出的球中有 X 个白球和 Y 个黑球. 设 $p=a/N, q=b/N$. 证明：

(1) $Cov(X,Y)=-npq$

(2) $\rho_{X,Y}=-\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$ ◀

Answer. (1)

记 X_k, Y_k 为第 k 次取出的球中白球和黑球的数目，则 $X_k(k=1,2,\ldots,n)$ 彼此间相互独立,$Y_k(k=1,2,\ldots,n)$ 彼此间相互独立.X_k 与除了 Y_k 以外的 Y_i 相互独立

所以有 $\forall k=1,2,\ldots,n$

$$E(X_k)=\frac{a}{a+b+c}, E(Y_k)=\frac{b}{a+b+c}$$
$$D(X_k)=\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}, D(Y_k)=\frac{b(a+c)}{(a+b+c)^2}$$

所以

$$\begin{aligned}
&Cov(X,Y)\\
=&E((\sum_{i=1}^{n}X_i)(\sum_{i=1}^{n}Y_i))-E(\sum_{i=1}^{n}X_i)E(\sum_{i=1}^{n}Y_i)\\
=&\sum_{i\neq j}E(X_iY_j)+\sum_{i=j}E(X_iY_i)-(\sum_{i=1}^{n}E(X_i))(\sum_{i=1}^{n}E(Y_i))\\
=&\sum_{i\neq j}E(X_i)E(Y_j)+\sum_{i=j}E(X_iY_i)-(\sum_{i=1}^{n}E(X_i))(\sum_{i=1}^{n}E(Y_i))\\
=&n(n-1)\frac{ab}{(a+b+c)^2}+n*0-\frac{na}{a+b+c}\frac{nb}{a+b+c}\\
=&-\frac{nab}{(a+b+c)^2}\\
=&-npq
\end{aligned} \tag{11}$$

(2)

$$\begin{aligned}
D(X) =& D(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
=& \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{i=1}^{n-1} 2Cov(\sum_{j=1}^{i} X_j, X_{i+1}) \\
=& \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} Cov(X_j, X_{i+1}) \\
=& \sum_{i=1}^{n} D(X_i) \\
=& \frac{na(b+c)}{(a+b+c)^2} \\
=& np(1-p)
\end{aligned} \tag{12}$$

同理 $D(Y) = nq(1-q)$

所以 $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$ ◁

Problem 10 (10') . 罐中有 N 个球，其中 a 个标有数字 1，b 个标有数字 $0.a+b=N$. 从中依次等可能摸出 n 个球，每次摸出球后**都不放回**，设随机变量 X_k 表示第 k 次摸出秋上的号码,X 表示摸出球号码之和. 设 $p = a/N, q = b/N$. 证明：

(1) $E(X)$

(2) 设 $n=N$, 求 $D(X)$, 并对 $1 \leq i < j \leq n$，求 $Cov(X_i, X_j)$

(3) 现在不再假设 $n=N$，求 $D(X)$ ◀

Answer. 显然 $n \leq N$

(1) 我们有

$$E(X_i) = \frac{\binom{N-1}{a-1}}{\binom{N}{a}} = \frac{a}{N} = p, D(X_i) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1-p)$$

所以

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) =& E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \\
=& (\binom{N-2}{a-2})/(\binom{N}{a}) - p^2 \\
=& \frac{a(a-1)}{N(N-1)} - \frac{a^2}{N^2} \\
=& \frac{p(p-1)}{N-1}
\end{aligned} \tag{13}$$

从而有

$$
\begin{aligned}
D(X) =& D(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
=& \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{i=1}^{n-1} 2Cov(\sum_{j=1}^{i} X_j, X_{i+1}) \\
=& \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} Cov(X_j, X_{i+1}) \\
=& np(1-p) + n(n-1)\frac{p(p-1)}{N-1} \\
=& np(1-p)(1-\frac{n-1}{N-1}) \\
=& np(1-p)\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

令 $n = N$, 有 $D(X) = 0$

所以 $n = N$,$D(X) = 0$, 对 $1 \leq i < j \leq n$， $Cov(X_i, X_j) = \frac{p(p-1)}{N-1}$

(3) 由 (2) 有 $D(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ $\triangleleft$