

课程名称：数学分析（一）

2019-2020 学年第（1）学期期末

本试卷共 6 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）对函数 $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1 + x^3$, : (1) 求 $f'(x)$, $f''(x)$; (2) 判断其单调性、极值、凸性; (3) 该函数有无渐近线? 若有, 请给出; (4) 在区间 $[1, 2]$ 上写出柯西中值定理的表达式, 并给出取得中值的点 ξ ; (5) 求 $\int_1^2 f(x) dx$ 。
2. （36 分）求下列各式（若不存在请简要说明理由）:
 - 1) $d\left[\ln\sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x}\right]$;
 - 2) 对数螺线极坐标表示为 $r = 3e^{2\theta}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 3x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right]$;
 - 4) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$;
 - 5) $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$;
 - 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} \right)$.
3. （8 分）对任取的 $a, b > 0$, 试证明 $a \ln a + b \ln b \geq (a+b)(\ln(a+b) - \ln 2)$.
4. （8 分）求解常微分方程 $x'(t) - x(t) = t$.
5. （10 分）近似计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 到小数点后二位有效数字（即误差小于 0.005）.
6. （8 分）若 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续、严格单调递增, 且 $f(0) = 0$ 。由已学到的知识知道其反函数 $x = g(y)$ 也连续、严格单调递增; 对任取的 $a, b > 0$, 由今后将学到的知识知道 $\int_0^a f(x) dx, \int_0^b g(y) dy$ 可积。试证明 $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \geq ab$.

1. (30 分) 对函数 $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1+x^3$, : (1) 求 $f'(x), f''(x)$; (2) 判断其单调性、

极值、凸性; (3) 该函数有无渐近线? 若有, 请给出; (4) 在区间 $[1, 2]$ 上写出柯西中值定理的表达式,

并给出取得中值的点 ξ ; (5) 求 $\int_1^2 f(x) dx$ 。

解: (1) $f'(x) = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}, f''(x) = \frac{6x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3};$

(2) $x < -1, -1 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 单调增; $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 单调降 (不写理由即 $f'(x)$ 正负, 扣 1 分); $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

极大值 (不计算函数值扣 1 分); $x < -1, x > \sqrt[3]{2}$ 下凸; $-1 < x < \sqrt[3]{2}$ 上凸 (不写理由即 $f''(x)$ 正负, 扣 1 分);

(3) 有渐近线 $x = -1, y = 0$ (垂直渐近线 2 分, 其中不写理由扣 1 分; 有同学渐近写成渐进);

(4) $\frac{2-1}{(1+2^3)-(1+1^3)} = \frac{1}{3\xi^2}, \xi = \sqrt{\frac{7}{3}}$ (表达式 4 分, 中值取点 2 分);

(5) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{-1}{1+x} + \frac{1+x}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \left[-\ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln(1-x+x^2) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_1^2$
 $= -\frac{\ln 3}{6} + \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{18} \pi$

(分解 2 分, 其余 4 分)

2. (36 分) 求下列各式 (若不存在请简要说明理由):

1) $d \left[\ln \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x} \right] = \frac{\tan x \sec^2 x - \cot x \csc^2 x}{\tan^2 x + \cot^2 x} dx = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x (\sin^4 x + \cos^4 x)} dx$

(每缺 1 个 dx 扣 0.5 分, 向上取整; 可不化简, 化简错扣 2 分);

2) 对数螺线极坐标表示为 $r = 3e^{2\theta}$, 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y+x}{2x-y} = \frac{2 \sin \theta + \cos \theta}{2 \cos \theta - \sin \theta};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 3x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right] = 1;$ (洛必达法则要写清楚确实是未定型; 泰勒展开要写对余项)

4) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C;$

5) $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8};$ (直接把极限写到换元后的上限, 扣 1 分)

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}$ (写清楚分割和标志点 2 分) .

3. (8 分) 对任取的 $a, b > 0$, 试证明 $a \ln a + b \ln b \geq (a+b)(\ln(a+b) - \ln 2)$.

证: 在 $x > 0$ 上考察函数 $f(x) = x \ln x, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, 下凸; 由定义知 $\frac{a \ln a + b \ln b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2}$,

整理即得所证。(这里是定义, 不需要 Jensen 不等式)

4. (8 分) 求解常微分方程 $x'(t) - x(t) = t$.

解: $x(t) = Ce^t - t - 1$ (只得到特解仅得 2 分, 直接特解加齐次方程通解扣 2 分)

5. (10 分) 近似计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 到小数点后二位有效数字 (即误差小于 0.005) .

解: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.49$ (有限增量公式估算误差 4 分, 直接带着 ξ 作积分估算误差扣 2 分, 注意中值点随着 x 的变化而变化, 未写出 0.49 扣 1 分)

6. (8 分) 若 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续、严格单调递增, 且 $f(0) = 0$ 。由已学到的知识知道其反函数

$x = g(y)$ 也连续、严格单调递增; 对任取的 $a, b > 0$, 由今后将学到的知识知道 $\int_0^a f(x) dx, \int_0^b g(y) dy$

可积。试证明 $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy \geq ab$.

简证: 先对 $b = f(a)$ 的情况进行讨论。此时, 对 $[0, a]$ 作 n 等分 $x_i = \frac{(i-1)a}{n}$, 取标志点 $\xi_i = x_{i-1}$; 相应地,

考虑 $[0, b]$ 的分割 $y_i = f(x_i)$ (由严格单调增知道这确实是一个分割) 以及标志点 $\eta_i = f(x_i)$, 容易证明黎

曼和之和 $\sigma(f, P, \xi) + \sigma(g, \tilde{P}, \eta) = ab$ 。由连续必一致连续知 $n \rightarrow \infty$ 时 $|P| \rightarrow 0, |\tilde{P}| \rightarrow 0$, 于是上式极限

为 $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(y) dy = ab$.

其它情况利用单调性可以在此基础上证明 (略)。

(看图说话的证明无效, 得 1 分; 分部积分法的证明用到 f 或 g 可微的条件, 是不对的, 得 2 分)。