课程名称：微积分（一）

2017-2018 学年第（1）学期期末　　　　本试卷共 **5** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）对函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$：（1）求 $f'(x), f''(x)$；（2）判断其单调性、极值、凸性；（3）该函数是否有最大、最小值？若有，写出最大、最小值及在何处取得；若无，简要说明理由；（4）该函数有无渐近线？若有，请给出；（5）求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$。

2. （42 分）求下列各式（若不存在请简要说明理由）：

   1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}$　　2）心形线的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，曲线的极坐标表示为 $r=a(1+\cos\theta)$；

   3）$\left.\dfrac{d^n\arctan(x^2)}{dx^n}\right|_{x=0}$；　　4）$\int\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$；

   5）$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,\mathrm{d}x$；　　6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\left(2n-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(n+1-\dfrac{1}{4}\right)}$.

3. （10 分）若 $f(t)\in C^{\infty}[-1,1]$，由我们将学到的可积性理论知道积分 $\int_{-R}^{R}f(t)\,\mathrm{dt}\quad(0<\mathrm{R}<1)$ 存在，

   试求：$\lim\limits_{R\to 0+}\dfrac{1}{R^3}\int_{-R}^{R}(f(t)-f(0))\,dt$.

4. （10 分）实心轮胎可表示为 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2\le r^2\quad(a>r)$，试求其体积与表面积。

5. （8 分）若 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸，试证明 $f(x)\in C(a,b)$.

1. （30 分）对函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$：（1）求 $f'(x), f''(x)$；（2）判断其单调性、极值、凸性；（3）该函数是否有最大、最小值？若有，写出最大、最小值及在何处取得；若无，简要说明理由；（4）该函数有无渐近线？若有，请给出；（5）求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$。

解：（1） $f'(x)=-\dfrac{4x}{(x^2-1)^3}, f''(x)=\dfrac{20x^2+4}{(x^2-1)^4}$ （每个 3 分）；

（2） $(-\infty,-1)\bigcup[0,1)$ 单调增，$(-1,0]\bigcup(1,+\infty)$ 单调减；极小值 $f(0)=1$；整个定义域上下凸；（每问 2 分，单调性 0 缺半闭扣 1 分；下凸的下缺扣 1 分）；

（3）无最大最小值；当 $x\to\pm1, f(x)\to+\infty$，当 $x\to\pm\infty, f(x)\to 0$，而极值为 $f(0)=1$，取不到上下确界；

（4） $x=\pm1, y=0$ （每个 3 分）；

（5） $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)+C$ （缺绝对值符号扣 1 分，缺 C 扣一分；有理因式分解 3 分，积分 3 分；分解系数错但积分形式对而系数跟着错给 1 分）。

2. （42 分）求下列各式（若不存在请简要说明理由）：

1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}$

2）心形线的 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，曲线的极坐标表示为 $r=a(1+\cos\theta)$；

3） $\left.\dfrac{d^n\arctan(x^2)}{dx^n}\right|_{x=0}$；

4） $\int\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$；

5） $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,\mathrm{d}x$；

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\left(2n-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(n+1-\dfrac{1}{4}\right)}$.

解： 1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$；（洛必达法则计算，没有清晰给出分子分母趋于 0 的式子，每次扣 1 分）；

2） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\cos2\theta+\cos\theta}{\sin2\theta+\sin\theta}$，（ $y=r\sin\theta, x=r\cos\theta$ 及其参数导数写对了，但最后表达式分子分母写反了扣 3 分）；

3） $\left.\dfrac{d^n\arctan(x^2)}{dx^n}\right|_{x=0}=\begin{cases}0, & n\neq 4k+2;\\ (-1)^k 2(n-1)!, & n=4k+2.\end{cases}$

；

（一阶二阶导数算对了得 2 分；递推公式的推导和结果正确，最后归纳结果错误扣 3 分）

4） $\int\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4}-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right)+C$ ；（缺绝对值符号扣 1 分，缺 C 扣 1 分）；

5） $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$ （不定积分对，但+1 写成-1 扣 2 分）；

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\left(2n-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(n+1-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{4}{e}$（求对数写对有限和形式 3 分，定积分形式及求出 4 分；最终结果写成 $2\ln 2-1$ 扣 2 分）；.

3. （10 分）若 $f(t)\in C^{\infty}[-1,1]$，由我们将学到的可积性理论知道积分 $\int_{-R}^{R}f(t)\,\mathrm{dt}\ \ (0<\mathrm{R}<1)$ 存在，试求：$\lim\limits_{R\to 0+}\dfrac{1}{R^3}\int_{-R}^{R}(f(t)-f(0))\,dt$.

解：$\lim\limits_{R\to 0+}\dfrac{1}{R^3}\int_{-R}^{R}(f(t)-f(0))\,dt=\dfrac{f''(0)}{3}$ 。

可用泰勒展开或洛必达法则做；若用前者，需证明 $o(t^2)$ 部分可积（用可积函数的差可积），以及按照极限方式证明其积分为 $o(R^3)$；若用后者，需证明变上限积分的导数为被积函数在上限和下限的值之差；未证明者扣 4 分。过程略。

4. （10 分）实心轮胎可表示为 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2\le r^2\quad(a>r)$，试求其体积与表面积。

解：$V=2\left[\int_0^r\pi\left(a+\sqrt{r^2-z^2}\right)^2-\pi\left(a-\sqrt{r^2-z^2}\right)^2dz\right]=2\pi^2ar^2$；

$$S=2\left[2\pi\int_0^r\sqrt{1+\left((a+\sqrt{r^2-z^2})'\right)^2}\left(a+\sqrt{r^2-z^2}\right)-\sqrt{1+\left((a-\sqrt{r^2-z^2})'\right)^2}\left(a-\sqrt{r^2-z^2}\right)dz\right]=4\pi^2ar$$

；（没有恰当过程直接用未证明过的定理得出结论视过程叙述得 2-4 分，微元表示正确、定积分形式正确，计算错误扣 2 分；只算了外表面所围体积和表面积正确者一共得 4 分）。

5. （8 分）若 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸，试证明 $f(x)\in C(a,b)$.

证明：$\forall x_0\in(a,b),\exists x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_0<x_2.$

由 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸，$\forall y\in(x_0,x_2),$

$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}<\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$，其中左右两端与 y 无关，为定值；因此取极限 $\lim\limits_{y\to x_0+}$ 知，$f(x)$ 在 x_0 右连续（其实这里是李普希兹右连续）。同理，左连续，因此连续。由 x_0 任意性，$f(x)\in C(a,b)$。

（凸性定义的表达式写对得 1 分；按照第一类间断点反证一共得 3 分）。