

算法设计与分析期中考试试卷

答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树、约束条件、优化算法等；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。

一、（10 分）求解递推方程，每题 5 分

1. $T(n) = T(n-1) + \log n, T(1) = 1$
2. $T(n) = 4 T(n/2) + n^2, T(1) = 1$

二、（10 分）下面是算法 ALG 的伪码，输入 A 是 n 个互不相等的浮点数的数组。请说明该算法输出的 x 和 y 分别是具有什么性质？以浮点数比较计算为基本操作，该算法的时间复杂度（渐进复杂度）是多少？该算法精确的浮点数比较次数是多少？

```
void ALG(double A[], int n) {
    double x, y;
    x = y = a[n];
    for (int i = 1; i < n; i += 2) {
        if (a[i] > a[i+1]) {
            if (x < a[i])
                x = a[i];
            if (y > a[i+1])
                y = a[i+1];
        }
        else {
            if (x < a[i+1])
                x = a[i+1];
            if (y > a[i])
                y = a[i];
        }
    }
    printf("%1f %1f\n", x, y);
}
```

三、（10 分）

某同学大四最后一学期选课，根据培养方案，他还需要选 5 学分的专业限选课，3 学分的通选课，2 学分的公共基础课才能毕业。现在他感兴趣的课表如下（假定课表上的上课时间都不冲突）：

课号	类别	学分	学时
1	通选	3	3
2	专业限选	2	3
...			
n	公共基础课	3	4

同时，他想尽可能的减少上课时间，以便有更多的时间来写本科毕业论文。请问如何选择课程，来实现上述目标？写出模型即可，不用具体求解。

1. 请先定义变量和写出目标函数。（5 分）
2. 请写出要满足的约束条件。（5 分）

四、(10 分)

任意给 n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 设计一个算法判断能否把这些整数恰好分成和相等的两个部分? 即存在子集 $T \subseteq I = \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $\sum_{i \in T} a_i = \sum_{i \in I-T} a_i$.

五、(20 分) 马上就要开校运会了, 假设你是比赛的组织者, 共有 n 个选手。每个参赛选手都有一个编号 $1, \dots, n$ 。这些选手之间形成若干小组, 允许一名选手属于多个小组。每个小组的选手编号都是连续的, 例如 $\{2, 3, 4\}$, $\{8, 9, 10, 11\}$ 。现在你要选取若干名选手作为联络人, 请设计一个算法找到最少的联络人, 使得每个小组都至少有一名联络人。

六、(20 分) 对玻璃瓶做强度测试, 设地面高度为 0, 从 0 向上有 n 个高度, 记为 $1, 2, 3, \dots, n$, 其中任何两个高度之间的距离都相等。如果一个玻璃瓶从高度 i 落到地上没有摔破, 但从高度 $i+1$ 落到地上摔破了, 那么就将玻璃瓶的强度记为 i 。

(1) 假设每种玻璃瓶有足够多的相同的测试样本, 设计算法使用最少的测试次数来完成测试。该算法的最坏情况下的时间复杂度是多少?

(2) 假设每种玻璃瓶只有 2 个相同的测试样本, 设计次数尽可能少的算法完成测试。你的算法最坏情况下的时间复杂度是多少?

七、(20 分) 热爱极限运动的小明计划参加一项公益跑步活动, 在未来的 n 天里按预先确定的顺序到访 n 个城市做公益。假设第 i 天从前一个城市出发到第 i 个城市的距离为 x_i 。如果小明体力好, 可以完全跑完这段路程; 但如果跑不下来全程, 也可以坐收容车完成当天剩余的路程。连续每天跑步会消耗小明的体力, 假设小明连续 n 天跑步, 每天能跑的路程为 s_i , 且满足

$$s_1 > s_2 > \dots > s_n > 0$$

但如果小明某天不跑, 完全坐收容车完成当天路程, 那么第二天小明的体力就可恢复如初, 接下来得日子里又可以跑完 s_1, s_2, \dots 的路程了。为了在整个活动中跑出最长的总距离, 小明需要仔细计划一下, 都应该在哪些天里不跑步完全坐收容车完成当天路程。请为小明设计一个算法解决该问题。