2020-2021 邵嗣烘 数学分析 (III) 期末考试 (回忆版)
2021.1.12 14:00-16:00

1.(20 分) (1) 叙述并证明 Riemann-Lebesgue 引理.
(2) 对 $\mathbb{R}$ 上的绝对可积函数, Riemann-Lebesgue 引理是否还成立?

2.(10 分) 画出 $\mathbb{R}$ 上函数 $G(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 的图像.

3.(10 分) 是否存在 $f(x)\in C[0,1]$, 使得

$$\int_0^1 xf(x)dx=1, \int_0^1 x^n f(x)dx=0, n=0,2,3,4,5,\dots$$

4.(30 分) 设 $f(x),g(x)$ 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数, 集合 S 是所有以 2π 为周期、在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Riemann 定积分等于 1 的连续函数的集合. 定义卷积

$$(f*g)(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

(1) 用 $f(x),g(x)$ 的 Fourier 系数表示出 $(f*g)(x)$ 的 Fourier 系数.
(2) 是否存在一列 $\{f_n(x)\}\subseteq S$, 使得 $\forall g(x)$ 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数, 都有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}((f_n*g)(x))^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(g(x))^2dx$$

(3) 对于给定的以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数 $g(x)$, 求 $\sup\limits_{f(x)\in S}\int_{-\pi}^{\pi}((f*g)(x))^2dx$.

5.(10 分) 设 $f(x)\in C[a,b], K(x,y)\in C([a,b]\times[a,b])$, 当实参数 λ 满足什么条件时, 积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy$$

存在唯一解?

6.(20 分) 计算:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx$
(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\cdot\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|dx$