组合计数

请在 11 月 23 日课前提交纸质作业.

1. (6 分) 化简 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\min(k,n-k)$，使得结果不出现求和号。

2. (6 分) 给定一个函数 $f:2^{[n]}\to\mathbb{R}$。证明如果定义 $\tilde{f}(S)=\sum_{T\supseteq S}f(T)$，那么

$$f(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T\setminus S|}\tilde{f}(T)$$

   Remark: 对于一组有限集 $A_1,\ldots,A_n$ 和 $\Omega=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。如果定义

$$f(S)=|\{x\in\Omega|\forall i\in[n],x\in A_i\iff i\in S\}|,$$

   那么题目结论可以推出容斥原理。

   Remark: 对称地，如果定义 $\hat{f}(S)=\sum_{T\subseteq S}f(T)$，那么

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S\setminus T|}\hat{f}(T)$$

3. (10 分) 令 $M\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个有限域 $\mathbb{F}$ 上的 $n\times n$ 矩阵。定义 M 是一个 MDS（maximum distance separable）矩阵，当且仅当对任何不同的 $x,x'\in\mathbb{F}^n$，(Mx,x) 和 (Mx',x') 至少在 $n+1$ 个位置不同。不难证明以下命题等价，

   a. M 是 MDS 矩阵；
   b. M 可逆，且 M^{-1} 是 MDS 矩阵；
   c. M 的任何子矩阵满秩；
   d. 考虑方程 $(y_1,\ldots,y_n)=M(x_1,\ldots,x_n)$，任意固定 $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ 中的 n 个变量，方程仍有解；
   e. 考虑方程 $(y_1,\ldots,y_n)=M(x_1,\ldots,x_n)$，任意固定 $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ 中的 n 个变量，方程有唯一解。

   由等价命题 c 可以看出，当 $|\mathbb{F}|$ 足够大时，大部分矩阵都是 MDS 矩阵。因此，可以说 MDS 刻画了“一般的”矩阵。

   (1) 若 $M\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个 MDS 矩阵，求出满足 $(x_{n+1},\ldots,x_{2n})=M(x_1,\ldots,x_n)$ 且 $x_1,\ldots,x_{2n}$ 均不为 0 的解的个数。

   提示：对每个集合 $S\subseteq[2n]$，计算满足 $(x_{n+1},\ldots,x_{2n})=M(x_1,\ldots,x_n)$ 且 $x_i=0\iff i\in S$ 的解的个数。

   (2) 记上问求出的解的个数为 L。证明

$$\left|L-\frac{(|\mathbb{F}|-1)^{2n}}{|\mathbb{F}|^n}\right|\le 2^{2n}.$$

4. (8 分) 在一块 n 行 n 列，一共 $n \times n$ 个格子的棋盘上放棋子，需要保证每行每列恰好有两个棋子，每种方法都有一个权重，试求在以下两种情况下，所有不同的可行放法的权值之和：

(1) 每个格子上最多只能放一个棋子，且每种放法的权值均为 1。

(2) 格子上可以放两枚棋子，假设当前方案中有 x 个格子放了两枚棋子，该方案的权值为 $(\frac{1}{2})^x$。

两种情况选一种做即可。设大小为 $n \times n$ 的棋盘的答案为 f_n，写出 $\{f_n\}$ 的通项公式或递推式均可。

提示：可以考虑将每个列看成一个点，每个在第 i 列和第 j 列包含的棋子的行表示第 i 个点和第 j 个点之间连一条边。考察得到的图有什么样的性质，以及如何计数。