课程名称：微积分（二）

2015-2016 学年第（2）学期期末　　　　　　本试卷共 **4** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （42 分）计算下列各式（如不存在简要说明理由）：

   a) $\iint\limits_{a^2\le x^2+y^2\le 4a^2} \sin\left(x^2+y^2\right)d(x,y)$；

   b) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} (x^2+y^2+z^2)d(x,y,z)$；

   c) $\int_\Gamma (x+y)ds$ 其中 Γ 为以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形；

   d) $\int_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，$l$ 为抛物线 $y=x^2$ 从 $(1,1)$ 到 $(-1,1)$ 的一段闭曲线；

   e) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$。

2. （18 分）叙述高斯公式，并对 $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z),\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 加以验证（即计算等式两侧的积分）。

3. （15 分）$\mathbb{R}^2$ 上的两个闭方块 $Q\subset\tilde{Q}$，函数 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 分别在这两个方块上定义，且有 $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in Q\text{；}\\ 0, & x\in\tilde{Q}\setminus Q.\end{cases}$ 试写出 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{Q}$ 上不可积的 $\varepsilon-\delta$ 形式的定义，并证明若 $\tilde{f}(x)$ 在 $\tilde{Q}$ 上不可积，必有 $f(x)$ 在 Q 上不可积。

4. （25 分）写出螺旋面 $(x,y,z)=(u\cos v,u\sin v,v)$ 的第一和第二基本形式；求出其上相应于 $(u,v)\in[0,2]\times[0,2\pi]$ 的区域 S 上的积分 $\iint\limits_S xd\sigma$；再考虑其上相应于 $u=1,v\ge 0$ 的螺旋线，求出其 $\underline{T},\underline{N},\underline{B},\kappa,\tau$。