北京大学信息科学技术学院考试试卷

**考试科目：** 算法设计与分析  **姓名：**  **学号：**

**考试时间：**2016年6 月 13 日 **大班教师:** **小班教师:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | **总分** |
| 分数 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 阅卷人 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

装订线内 不要答题

**北京大学考场纪律**

1、考生进入考场后，按照监考老师安排隔位就座，将学生证放在桌面上。无学生证者不能参加考试；迟到超过15分钟不得入场。在考试开始30分钟后方可交卷出场。

2、除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机、或有存储、编程、查询功能的电子用品等）不得带入座位，已经带入考场的必须放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题请向监考教师提出，不得向其他考生询问。提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；交卷后不得在考场内逗留或在附近高声交谈。未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场答卷。考试结束时间到，考生立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准交头接耳，不准偷看、夹带、抄袭或者有意让他人抄袭答题内容，不准接传答案或者试卷等。凡有违纪作弊者，一经发现，当场取消其考试资格，并根据《北京大学本科考试工作与学术规范条例》及相关规定严肃处理。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生以北京大学学生的荣誉与诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

**答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树、约束条件等；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。**

以下为答题纸，共 8 页

一、判断题（每小题1分，总计10分）。

得分

如果命题正确，在后面的括号内打“∨”，否则打“×”。

* 1. 线性规划问题一定有唯一的最优解。 （ ）
  2. 如果是最大流，那么不存在关于的s-t增广链。 （ ）
  3. 堆排序算法在最坏情况和平均情况下时间复杂度均为最优。 ( )
  4. 从个数中找第二大的数，锦标赛算法至少需要

次比较。 ( )

* 1. 如果一个问题可以在多项式时间内归约到一个已知的NP难的  
     问题，那么这个问题一定是NP难的。 （ ）
  2. 所有不能在多项式时间可解的判定问题组成的问题类称作NP类。（ ）
  3. 满足三角不等式的货郎问题存在常数近似比的近似算法。 ( )
  4. 一般情况下的货郎问题是不可近似计算的,即使P=NP。 ( )
  5. 0-1背包问题是完全可近似计算的。 ( )

10.随机选择算法RandomSelect是一个Monte Carlo算法。 ( )

参考答案：× ∨∨∨× ×∨×∨×

评分标准：每错一个扣1分。

二 、(15分) 分析算法。

得分

算法T的伪码如下：

算法T

输入：*A*是*n*个不等的数的数组

输出：*min*, *second*

1. if *A*[1]<*A*[2]

2. then *min*← *A*[1], *second*←*A*[2]

3. else *min*← *A*[2], *second*←*A*[1]

4. for *i*←3 to *n* do

5. if *A*[*i*]<*second*

6. then if *A*[*i*]<*min*

7. then *second*←*min*, *min*←*A*[*i*],

8. else *second*←*A*[*i*]

9. return *min*, *second*

请回答以下问题，对于时间复杂度估计要求给出尽可能精确的运算次数。

1. (3分)算法的输出是什么？
2. (5分)算法T的最坏输入是什么？对这个输入算法做了多少次比较运算？
3. (7分)假定对于给定的*i*，*A*[*i*]在子数组*A*[1..*i*]中是最小数、第二小数、…第*i*小数的概率相等，*i* = 3, 4, …, *n*。算法T平均做多少次比较运算？

参考答案：

1. *A*中的最小数和第二小数。

2. 最坏输入为*A*[1]>*A*[2]>…>*A*[*n*]的输入，比较次数为1+2(*n*-2)=2*n*-3

3.

评分标准：

1. 正确给3分，没说明最小与第二小扣3分，错一个扣1分。
2. 正确给5分，不是2n-3但含有2n项的扣1分，其它扣5分。
3. 正确给7分，公式正确但求和结果不对的根据步数扣1-3分，公式不正确扣7分。

三、（10分）银行卡问题

得分

有*n*张银行卡被怀疑是非法复制的卡，每张卡的数据是加密的，并且与唯一的银行账号对应。有一台检测设备，可以插入2张卡，并判断它们是否对应了同一个银行账户号码。如果对应了同一个账号，就说它们是等价的。问如何使用最小的测试次数来判定这些卡中是否有超过一半的卡是彼此等价的？设计一个算法求解这个问题。

参考答案：

算法一： 采用主元素测试的分治策略。算法设计思想如下：设卡的编号为1,2,…,*n*。

1. 如果*n*为偶数，将它们两两一组分成*n*/2组，每组测试1次。如等价，则任意留1张卡，否则2张都淘汰。如*n*为奇数，任取1张卡，用剩下的卡对它测试；如等价的回答至少为一半，则回答“yes”输出这张卡，否则淘汰它。
2. 对留下的卡(*k*张)递归处理。当*k*为奇数时对这张轮空的卡用其他卡对其进行单独测试。如等价回答至少一半，则保留这张卡，否则淘汰。
3. 最后如没有卡留下，则回答“No”
4. 对留下的卡用其他*n*-1张卡测试，如与之等价的卡至少一半，则回答“Yes”，输出这张卡，否则回答“No”。

算法二：设计一个栈，将第一张卡入栈。依次考察后续卡，如果与栈顶的卡等价，继续入栈；如果不等，将栈顶的卡与这张卡一起抛弃。如果最后栈中有卡，则将这张卡与其他卡测试一遍，若等价的卡数超过n/2，回答“yes”否则回答“No”。如果栈中无卡，直接回答“No”

算法一和算法二的时间都是*T*(*n*)=*O*(*n*)。

评分标准：

*O*(*n*) 时间的分治算法给7分；时间复杂度分析正确给3分。正确的蛮力算法及时间分析给4分。

四、（10分）最大收益问题。

得分

*A*和*B*都是*n*个不等的正整数的集合。现在对每个*a*∈*A*，从*B*中选择一个数与之匹配。匹配后的结果记作M={(*a*1,*b*1),(*a*2,*b*2),…,(*an*,*bn*)}，这里约定*ai*≠*aj*当且仅当*bi*≠*bj*，*i*, *j*=1,2,…,*n*。 如果匹配M的收益为F(M)=. 问如何选择匹配使得收益最大？设计一个算法求解这个问题。

答案：贪心法。

将*A*和*B*中元素按照从大到小排序，即*a*1>*a*2>….>*an*, *b*1>*b*2>…>*bn*，*ai*与*bi*匹配，*i*=1,2,…, *n*。

考虑任意最优匹配*M*，如果*M*中存在逆序即：*ai*>*aj*，但是*bi*<*bj*。那么交换*bi*与*bj*得到匹配*M*’，那么

=

由于*ai*>*aj*>0，*bj*−*bi*>0，因此*F*(*M*’)−*F*(*M*)>0。

或者由

证明了没有逆序的*M*是最优解。

时间复杂度为*O*(*n*log*n*)。

评分标准：

贪心策略选择正确3分，方法的正确性证明给5分，时间复杂度分析给2分。

五、（10分）菜肴选择问题。

得分

营养学家建议每人每天摄入粮食8份、蔬菜4份、水果3份、奶制品/肉鱼蛋/坚果/豆类4类合计取3份。下面是某食堂供应的菜肴营养成分表以及价格，问如何选择菜肴来满足营养学家的要求并使得花费最小？写出模型即可，不用具体求解。

菜肴的营养成分及价格表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 菜肴 | 宫保鸡丁 | 米饭 | 西红柿鸡蛋面 | 地三鲜 | 酸奶 | 胡萝卜牛肉 | 鲶鱼豆腐 | 菠萝咕噜肉 | 水果蔬菜沙拉 |
| 粮食 |  | 2 | 3 |  |  |  |  |  |  |
| 蔬菜 |  |  | 1 | 2 |  | 1 |  |  | 1 |
| 水果 |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 1 |
| 奶制品 |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
| 肉鱼蛋 | 1 |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |
| 坚果 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 豆类 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |
| 价格(元) | 5 | 0.5 | 2 | 3 | 2 | 7 | 6 | 7 | 5 |

参考答案：

设每种菜肴所选择的份数为，i=1,…,9则有

min *z*

s.t. 8,

2,

,

.

*xi*为非负整数，*i*=1,2,…,9

评分标准：

变量定义给1分，

写出目标函数给4分，

每个约束条件给1分，共5个约束条件。

六、(10分) 给定无向简单图*G*=<*V*,*E*>，其中|*V*|=*n*, |*E*|=*m*，*a*,*b*是正整数，且*a*≤*n*,*b*≤*m*。问：*G*中是否存在*a*个顶点的集合*V*1，使得两个端点都在*V*1中的边至少有*b*条？

得分

参考答案：

该问题属于NP，对它的肯定实例，存在猜想*V*1，其中|*V*1|=*a*，验证端点在*V*1中的边是否有*b*条，时间为多项式时间。

对该问题的实例，如果限制*b*=*a*(*a*-1)/2，则构成大小为*a*的团。

评分标准：

证明该问题属于NP，得3分。

利用团或者其他NPC问题证明NP-hard，得7分。

七、（15分）受限的最短路径问题

得分

一个有向连通网络*G*=<*V*,*E*>，其中*V*={*v*0,*v*1,…*vn*-1}，|*E*|=*m*，边*e*=<*vi*,*vj*>的长度是*l*(*i*,*j*)，*l*(*i*,*j*)为正整数，*s*=*v*0是源点。在选择从*s*到*vi*的路由路径时，为了可靠性，限制中间经过的边数不超过*K*。设计一个算法求从*s*到结点*vi* (*i*=1,2,…,*n*-1) 的满足上述限制条件的最短路径。

参考答案：动态规划

最短路径中每个顶点，每条边至多出现一次。

令*dist*(*j*,*k*)是从*s*到*j*的中间经过边数不超过*k*的受限最短路的长度，那么

*dist* (*j*,*k*) =, *k*≤*K*

*dist* (*j*,0) = +∞， *j* ≠ 0

*dist* (0,0) = 0,

以*s*为根，采用宽度优先遍历，按照*k*=1,2,…,*K*，计算*dist* (*j*,*k*), *k* ≤ *K*. *j*=1,2,…,*n*-1, 得到*dist* (*j*,*K*) 即可。时间复杂度为：*O*(*Kn*2)。

评分标准：

设计思想是动态规划算法给5分，递推方程及初值正确给5分，标记函数及初值正确给3分，时间复杂度正确给2分。Dijkstra贪心法不给分。正确的蛮力算法给4分。

八、（20分）撤退路线设计。

得分

一个路网定义为有向图*G*=<*V*,*E*>，顶点子集*X*,*S*⊂*V*分别为居住结点集和安全结点集，且*X*∩*S*=∅。在紧急情况下一组撤退路线是*G*中的路径集*T*，且满足下述条件：

1. 每条路径的起点属于*X*，终点属于*S*；
2. *X*中的每个顶点是*T*中一条路径的起点；
3. *T*中任何两条路径没有公共边；

设计算法求解下述问题：

1. (8分) 给定*G*, *X*和*S*，确定是否存在这样一组撤退路线。
2. (8分) 如果将(*c*)中的条件改为：*T*中的任何两条路径没有公共顶点。在这种更强的避免拥塞的条件下，确定是否存在这样的一组撤退路线。
3. (4分) 给出一个实例，对1中的问题回答“yes”,但对2中的问题回答“No”。

参考答案：

1. 构造容量网络，其中

求*s-t*最大流，最大流值=时回答“Yes”，否则回答“No”。复杂度

1. 构造容量网络，其中

求*s-t*最大流，最大流值=时回答“Yes”，否则回答“No”。复杂度

评分标准：

1. 说明流网络的构建，点集、边集和边的容量，得4分；说明如何利用最大流判断有无撤退路线，得2分；复杂度分析正确，得2分。

如果利用回溯算法，得3分。

1. 说明流网络的构建，点集、边集和边的容量，得4分；说明如何利用最大流判断有无撤退路线，得2分；复杂度分析正确，得2分。
2. 正确画出实例得2分，说明为什么满足要求得2分。

如果画的是无向图，扣2分。