

PROF. DR. NELSON JOSÉ FREITAS DA SILVEIRA - DCC

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

24 de agosto de 2020

2

Transcrito com muito zelo por José Carlos Tobias da Silva.

# Conteúdo

<b>1 Conjuntos</b>	<b>11</b>
1.1 Conceitos	11
1.1.1 Conjuntos	11
1.1.2 Elementos	11
1.1.3 Pertinência	11
1.2 Representação de um conjunto	11
1.2.1 Por enumeração	12
1.2.2 Por propriedade	12
1.2.3 Exemplos	12
1.3 Diagrama de Venn	13
1.4 Igualdade entre conjuntos	14
1.5 Conjunto unitário	14
1.6 Conjunto vazio	14
1.7 Principais símbolos lógicos	14
1.8 Subconjuntos	15
1.9 Exercícios Propostos	16
1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos	17
<b>2 Conjuntos</b>	<b>19</b>
2.1 Conjunto Universo	19
2.2 Conjunto das partes	19
2.3 Reunião de conjuntos	20
2.3.1 Intersecção de conjuntos	21
2.3.2 Diferença de conjuntos	22
2.3.3 Complementar de B em A	22
2.4 Propriedades	23
2.4.1 Inclusão ( $\subset$ )	23
2.4.2 União ( $\cup$ )	23
2.4.3 Intersecção ( $\cap$ )	23
2.5 Exercícios Propostos	24
2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos	24

<b>3 Conjuntos Numéricos</b>	<b>25</b>
3.1 Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$	25
3.2 Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$	25
3.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$	26
3.4 Números Irracionais $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	27
3.5 Exercícios Resolvidos	27
3.6 Números Reais $\mathbb{R}$	28
3.7 Relação de ordem no conjunto $\mathbb{R}$	29

3.8 Exercícios Propostos .....	29
Exercícios Propostos .....	29
<b>4 Intervalos 31</b>	
4.1 Exemplos .....	32
Sistema Cartesiano .....	33
4.2.1 Par Ordenado .....	34
4.3 Exercícios Propostos .....	35
4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos .....	35
<b>5 Produto Cartesiano 37</b>	
5.0.1 Exemplos .....	37
5.0.2 Exercícios Resolvidos .....	39
5.0.3 Exercícios Propostos .....	39
5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano .....	40
5.2 Relação Binária .....	41
5.2.1 Exemplos .....	41
<b>6 Domínio e Imagem 43</b>	
6.0.1 Exemplos .....	43
6.0.2 Exercícios Resolvidos .....	44
6.1 Relação Inversa .....	46
6.1.1 Exemplos .....	46
6.1.2 Propriedades .....	46
6.2 Funções .....	47
<b>7 Polinômios 49</b>	
7.1 Nomenclatura .....	49
7.2 Igualdade .....	50
7.3 Exercícios Resolvidos .....	50
7.4 Operações .....	51
7.4.1 Adição .....	51
7.4.2 Subtração .....	52
7.4.3 Multiplicação .....	52
<b>8 Polinômios - Continuação 55</b>	
8.1 Propriedades .....	55
8.2 Divisão .....	55
8.2.1 Método da Chave .....	56
8.2.2 Exercícios Resolvidos .....	57
8.2.3 Exercícios Propostos .....	58
8.3 Produtos Notáveis .....	58
8.3.1 Quadrado da soma de dois termos .....	58
8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos .....	59
8.3.3 Cubo da soma de dois termos .....	59
8.3.4 Cubo da diferença de dois termos .....	59

Conteúdo 5

.....	59	8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos	.....	59
.....	59	8.3.6 Exemplos	.....	59
8.4 Triângulo de Pascal	.....	60	8.4.1 Exemplos de uso	.....
		60		
<b>9 Funções e Não Funções</b>	<b>61</b>	9.1 Exercícios Resolvidos	.....	62
.....	62	9.2 Notação de Funções	.....	65
9.2.1 Exemplos	.....	65	9.2.2 Exercícios Resolvidos	.....
		66	9.2.3 Exercícios Propostos	.....
		67		
9.3 Domínio e Imagem de Funções	.....	67	9.3.1 Exemplos	.....
		68	9.3.2 Exercícios Propostos	.....
		69		
<b>10 Função do Primeiro Grau</b>	<b>71</b>	10.1 Função Constante	.....	71
.....	71	10.1.1 Exemplos	.....	71
Função Identidade	.....	72	10.3 Função Linear	.....
.....	72	10.3.1 Exemplos	.....	73
.....	73	10.3.2 Exercícios Resolvidos	.....	74
10.3.3 Exercícios Propostos	.....	74	10.4 Função Afim	.....
		75		
		75		
		76		
		75		
		76		
<b>11 Função do Primeiro Grau</b>	<b>79</b>	11.1 Coeficientes da Função Afim	.....	79
.....	79	11.1.1 Exercícios Resolvidos	.....	79
		Zero da Função Afim	.....	80
		Crescentes ou Decrescentes	.....	81
Resolvidos	.....	82	11.3.1 Exercícios Resolvidos	.....
		83	11.3.2 Exercícios Propostos	.....
		83		
<b>12 Função do Primeiro Grau</b>	<b>85</b>	12.1 Teorema	.....	85
.....	85	12.2 Sinal da Função Afim	.....	85
12.3 Exercícios Resolvidos	.....	88	12.4 Exercícios Propostos	.....
		89		
<b>13 Função Quadrática</b>	<b>91</b>	13.0.1 Gráfico	.....	91
	91	13.0.2 Exercícios Propostos	.....	93
13.1 Concavidade	.....	93	13.2 Zero da	.....

Função Quadrática . . . . .	94	13.2.1 Discussão quanto aos zeros da função quadrática . . . . .	94	13.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . .	95	13.2.3 Exercícios Propostos . . . . .	96
-----------------------------	----	--	----	--	----	---------------------------------------	----

<b>14 Função quadrática 97</b>	14.1 Vértice da Parábola . . . . .	97	14.1.1 As coordenadas do vértice . . . . .	97	14.1.2 Demonstração . . . . .	99	14.1.3 Exemplos . . . . .	99	14.2 Conjunto Imagem da Função Quadrática . . . . .	101	14.2.1 Exemplos . . . . .	101
--------------------------------	------------------------------------	----	--	----	-------------------------------	----	---------------------------	----	---	-----	---------------------------	-----

<b>15 Funções quadráticas crescentes e decrescentes 105</b>	15.0.1 Exemplos . . . . .	105	15.0.2 Exercícios Propostos . . . . .	108
---	---------------------------	-----	---------------------------------------	-----

## Conteúdo 7

<b>16 Função Modular 109</b>	16.1 Módulo de um número real . . . . .	109	16.1.1 Exercícios Resolvidos . . . . .	109	16.2 Equações que envolvem módulo . . . . .	110	16.2.1 Exemplos . . . . .	111	16.2.2 Exercícios Resolvidos . . . . .	112	16.2.3 Exercícios Propostos . . . . .	113	16.3 Função Modular . . . . .	114	16.3.1 Exemplos . . . . .	115	16.3.2 Exemplo . . . . .	116
------------------------------	---	-----	--	-----	---	-----	---------------------------	-----	--	-----	---------------------------------------	-----	-------------------------------	-----	---------------------------	-----	--------------------------	-----

<b>17 Função Modular 117</b>	17.0.1 Exercícios Resolvidos . . . . .	117	17.0.2 Exercícios Propostos . . . . .	118	17.0.3 Exemplo . . . . .	119	17.0.4 Exercícios Resolvidos . . . . .	120	17.0.5 Exercícios Propostos . . . . .	121
------------------------------	--	-----	---------------------------------------	-----	--------------------------	-----	--	-----	---------------------------------------	-----

<b>18 Função Exponencial 123</b>	18.1 Potência de Expoente Natural . . . . .	123	18.1.1 Exercícios Resolvidos . . . . .	123	18.1.2 Propriedades . . . . .	124	18.2 Função Exponencial . . . . .	124	18.2.1 Exemplos . . . . .	124	18.3 Equação Exponencial . . . . .	124	18.3.1 Exemplos . . . . .	125	18.4 Método de Resolução de Equações Exponenciais . . . . .	125	18.4.1 Método de Redução a Uma Base Comum . . . . .	125	18.4.2 Exercícios Resolvidos . . . . .	125	18.4.3 Exercícios Propostos . . . . .	126	18.5 Gráficos de Funções Exponenciais . . . . .	126	18.5.1 Exercícios Propostos . . . . .	127
----------------------------------	---	-----	--	-----	-------------------------------	-----	-----------------------------------	-----	---------------------------	-----	------------------------------------	-----	---------------------------	-----	---	-----	---	-----	--	-----	---------------------------------------	-----	---	-----	---------------------------------------	-----

<b>19 Logaritmos</b>	<b>129</b>	19.1 Símbolos	129
	129	19.1.1 Exemplos	129
Consequências da Definição	130	19.2.1 Exemplo	130
	130	19.2.2 Exercícios Propostos	130
			130
			8 <i>Conteúdo</i>
19.3 sistemas de Logaritmos	131	19.4	
Propriedades dos Logaritmos	131	19.4.1	
Exercícios Propostos	132	19.5 Mudança de Base	
	132	19.5.1 Propriedades	
	132	19.5.2 Exemplos	
	132	19.6 Observações	133
Função Logarítmica	133	19.7.1 Exemplos	
	133	19.7.2 Exercícios Propostos	133
			133
<b>20 Inequações Simultâneas</b>	<b>135</b>	20.0.1 Exercícios Resolvidos	
	136	20.0.2 Exercícios Propostos	
	137		
20.1 Inequação Produto	137	20.1.1	
Exemplos	138	20.2 Método Prático	
			138
<b>21 Funções Trigonométricas</b>	<b>141</b>	21.1 Unidades	
	141	21.1.1 Exemplo	142
Exercícios	142	21.2 Círculo Trigonométrico	
			143
<b>22 Funções Circulares</b>	<b>147</b>	22.1 Noções Gerais	
	147	22.1.1 Exemplo Preliminar	148
Função Seno	150	22.2.1 Definição	
	150	22.2.2 Propriedades	
	150	22.2.3 Gráfico	151
22.2.4 Exercícios Resolvidos	152	22.2.5 Exercícios	
Propostos	155	22.2.6 Solução dos Exercícios	
Propostos	155	22.3 Função Cosseno	
	158	22.3.1 Definição	158
22.3.2 Propriedades	158	22.3.3 Gráfico	
	159	22.3.4 Exercícios Resolvidos	
			159

22.3.5 Exercícios Propostos . . . . .	160	22.3.6 Solução dos Exercícios Propostos . . . . .	160
22.4 Função Tangente . . . . .	162	22.4.1 Definição . . . . .	162
22.4.2 Propriedades . . . . .	162	22.4.3 Gráfico . . . . .	163
22.4.4 Exercícios Resolvidos . . . . .	164	22.4.5 Exercícios Propostos . . . . .	165
22.4.6 Solução dos Exercícios Propostos . . . . .	165	22.5 Função Cotangente . . . . .	166
22.5.1 Definição . . . . .	166	22.5.2 Propriedades . . . . .	166
22.5.3 Gráfico . . . . .	167	22.6 Função Secante . . . . .	167
22.6.1 Definição . . . . .	167	22.6.2 Propriedades . . . . .	167
22.6.3 Gráfico . . . . .	168	22.7 Função Cossecante . . . . .	169
22.7.1 Definição . . . . .	169	22.7.2 Propriedades . . . . .	169
22.7.3 Gráfico . . . . .	170	22.8 Exercícios Propostos . . . . .	170
22.8.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . .	171		

<b>23 Relações Fundamentais 173</b>	23.1 Introdução . . . . .	173
23.2 Relações Fundamentais . . . . .	174	
23.2.1 Teorema . . . . .	174	23.2.2 Relações . . . . .
23.2.3 Teoremas . . . . .	175	23.2.4 Relações . . . . .
23.2.5 Corolários . . . . .	176	23.3 Exercícios Resolvidos . . . . .
23.4 Exercícios Propostos . . . . .	178	23.4.1 Solução dos Exercícios Propostos . . . . .
	179	

10 *Conteúdo*

<b>24 Triângulos Retângulos 181</b>	24.1 Elementos Principais . . . . .	181
24.2 Propriedades Trigonométricas . . . . .	182	
24.2.1 Observações . . . . .	183	24.3 Exercícios Resolvidos . . . . .
24.4 Exercícios Propostos . . . . .	184	

.....	186	24.4.1 Solução dos Exercícios Propostos	.....	186
<b>25 Triângulos Quaisquer</b>	<b>189</b>	25.1 Lei dos Cossenos	.....	
.....	189	25.1.1 Demonstração	.....	189
		Exercícios Resolvidos	.....	190
Triângulos Quaisquer	.....	191	25.2 Resolução de	
.....	193	25.3 Exercícios Propostos	.....	
		25.3.1 Solução dos Exercícios Propostos	.....	194

**Bibliografia 195**

## NOTAS DE AULA 1

# Conjuntos

## 1.1 Conceitos

### 1.1.1 Conjuntos

Sinônimo de agrupamento, coleção, classe, etc. representado com letras maiúsculas.

**Exemplo 1:**

A,B,F

### 1.1.2 Elementos

Objetos que constituem determinado conjunto, são chamados de elementos do conjunto e representados por letras minúsculas.

**Exemplo 2:**

*a,b, f*

### 1.1.3 Pertinência

Um elemento pode pertencer ou não a um conjunto. Para indicar pertinência, utilizamos o símbolo  $\in$ , e quando não pertence utilizamos o  $\notin$ .

- $X \in A$  (Lê-se: X pertence a A)
- $X \notin B$  (Lê-se: X não pertence a B)

\*Tais símbolos são usados para representar a relação de elemento com conjunto.



## 1.2 Representação de um conjunto

Um conjunto pode ser representado por 2 formas:

11

12 Notas de Aula 1. Conjuntos

### 1.2.1 Por enumeração

Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

**Exemplo 1:** Conjunto dos números positivos pares, menores que 10:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

### 1.2.2 Por propriedade

Podemos representar por meio de uma propriedade que caracteriza seus elementos.

**Exemplo 2:**

- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 8\}$
- $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

A propriedade permite estabelecer se um dado elemento, pertence ou não a um conjunto.

### 1.2.3 Exemplos

**Exemplo 1:** Sendo  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , dar por enumeração, os seguintes conjuntos:

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

• **Solução:** É determinado pela expressão  $x = 3k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , logo:

$$k = 0 \Rightarrow x = 3 \cdot 0 = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 3 \cdot 1 = 3$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 3 \cdot 2 = 6$$

...

Logo:  $A = \{0, 3, 6, \dots\}$

b)  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^k, k \in \mathbb{N}\}$

• **Solução:** Os elementos são determinados pela expressão  $x = 2^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , logo:

$$k = 0 \Rightarrow x = 2^0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

...

Logo:  $B = \{1, 2, 4, \dots\}$

### 1.3. Diagrama de Venn 13

**Exemplo 2:** Representar o conjunto  $A = \{0, 4, 8, 12, \dots\}$  por meio de uma propriedade.

• **Solução:** Os elementos de  $A$  variam de 4 em 4, logo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$$

**Exercício:** Escrever por enumeração o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

• **Solução:** Os elementos de  $A$  são raízes da equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Logo,  $A = \{2, 3\}$ .

## 1.3 Diagrama de Venn

Toda figura utilizada para representar um conjunto é chamada diagrama de Venn.

**Exemplo 1:** O conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  pode ser representado por:

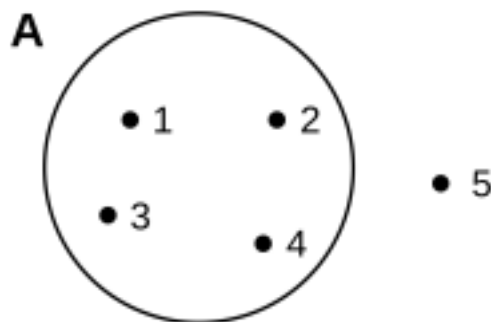


Figura 1.1: Demonstração de membros de um conjunto.

Observe que:

$$2 \in A \text{ (ponto interno a } A)$$

$$5 \notin A \text{ (ponto externo a } A)$$

14 Notas de Aula 1. Conjuntos

## 1.4 Igualdade entre conjuntos

Sejam:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e}$$

$$B = \{4, 3, 2, 1\}$$

Nota-se que A e B possuem os mesmo elementos. Para:

$$A = \{x | x \text{ é par e menor que } 10\} \text{ e}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Novamente A e B possuem os mesmo elementos.

Logo,  $A = B$ , pois possuem os mesmos elementos. A negação da igualdade é indicada por  $A \neq B$ .

**Exemplo 1:**

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{0, 1, 4, 8\}$$

$$A \neq B \text{ (1.1)}$$

## 1.5 Conjunto unitário

Definição: chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

**Exemplo 1:**

1. Conjunto das soluções da equação:  $3x + 1 = 10$

• **Solução:**  $\{3\}$

2. Conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai: •

**Solução:** {Rio Grande do Sul}

## 1.6 Conjunto vazio

**Definição:** Conjunto que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é  $\emptyset$ . Um conjunto vazio é obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.

**Exemplo 1:**

### 1.7. Principais símbolos lógicos 15

1.  $\{x | x \neq x\} = \emptyset$  ;
2.  $\{x | x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$  ;
3.  $\{x | x < 0 \text{ e } x > 0\} = \emptyset$  ;

## 1.7 Principais símbolos lógicos

- $|$ : tal que
- $\exists$  : existe ao menos um
- $\exists !$ : existe um único
- $\forall$  : qualquer que seja ou para todo
- $\Rightarrow$  : implicação ou então
- $\Leftrightarrow$  : equivalente ou se e somente se

## 1.8 Subconjuntos

**Definição:** Dados 2 conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se, cada elemento do conjunto A, é também um elemento do conjunto B. Indicamos por:

$$A \subset B \text{ (Lê-se A está contido em B)}$$

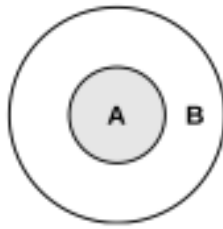


Figura 1.2: Demonstração de um conjunto A contido em um conjunto B.

Em símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

**Exemplo 1:**

16 Notas de Aula 1. Conjuntos

- $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$
- $\{a\} \subset \{a, b\}$
- $\{x | x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x | x \text{ é inteiro}\}$

Também podemos escrever  $B \supset A$  (Lê-se B contém A).

Com a notação  $A \not\subset B$ , indicamos que A não está contido em B, logo, existe ao menos 1 elemento de A que não pertence a B.

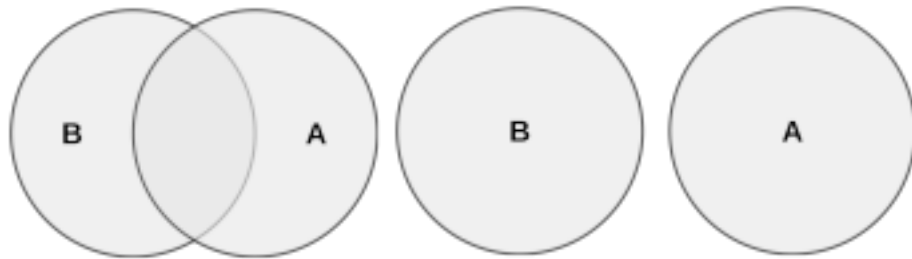


Figura 1.3:  $A \not\subset B$  Figura 1.4:  $A \not\subset B$

Com a igualdade de conjuntos podemos representar como:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, ou seja,  $A \subset B$  e  $B \subset A$ ,

$$\text{logo: } A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

## 1.9 Exercícios Propostos

1. Dados  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{2, 4\}$ , pede-se:

a) Reescrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

1º) 3 é elemento de A

• **Solução:**  $3 \in A$

2º) 1 não está em B

• **Solução:**  $1 \notin B$

3º) B é parte de A

• **Solução:**  $B \subset A$  ou  $A \supset B$

4º) B é igual a A

• **Solução:** ;

5º) 4 pertence a B

• **Solução:**  $4 \in B$

b) Classificar as sentenças anteriores em V ou F

### 1.9. Exercícios Propostos 17

3º) (V)

1º) (V)

4º) (F)

2º) (V)

5º) (V)

2. Sendo  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{2,3\}$ ,  $C = \{1,3,4\}$  e  $D = \{1,2,3,4\}$ , classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar

a)  $A \subset D$ :

b)  $A \subset B$ :

c)  $B \subset C$ :

d)  $D \supset B$ :

e)  $C = D$ :

f)  $A \not\subset C$ :

### 1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. (V), pois  $1 \in A$ ,  $1 \in D$ ,  $2 \in A$  e  $2 \in D$ .

2. (F), pois  $1 \in A$  e  $1 \notin B$ .

3. (F), pois  $2 \in B$  e  $2 \notin C$ .

4. (V), pois  $2 \in B$  e  $2 \in D$ ,  $3 \in B$  e  $3 \in D$ .

5. (F), pois  $2 \in D$  e  $2 \notin C$ .

6. (V), pois  $2 \in A$  e  $2 \notin C$ .

# NOTAS DE AULA 2

## Conjuntos

### 2.1 Conjunto Universo

**Definição:** O conjunto que contém todos os outros conjuntos chama-se conjunto universo (U).

### 2.2 Conjunto das partes

**Definição:** O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é denominado conjunto das partes de A, sendo indicado por  $P(A)$ , onde:

$$P(A) = \{x \mid x \in A\}$$

**Exemplo 1:** Se  $A = \{a\}$  os elementos de  $P(A)$  são ; e  $\{a\}$ , isto é:

$$P(A) = \{;, \{a\}\}$$

Se  $A = \{a,b\}$  os elementos de  $P(A)$  são ;,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  e  $\{a,b\}$  isto é:

$$P(A) = \{;, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

Se  $A = \{1, 2, 3\}$ , os elementos de  $P(A)$  são:

$$\{;, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = P(A)$$

Logo,  $|P(A)| = 2^n$  onde  $n$  é o número de elementos do conjunto.

**Definição:** Dados dois conjuntos A e B, chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto  $A \cup B$  (lê-se A união B) é formado pelos elementos que pertencem a pelos menos um dos conjuntos A ou B.

**Exemplos 1:**

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

**Em diagrama:**

- a)  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$   
 $B = \{1, 3, 5, 7\}$   
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

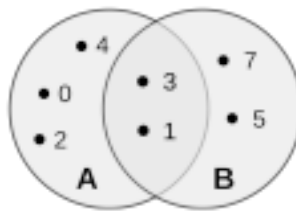


Figura 2.1: Diagrama de Venn para  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

- b)  $A = \{0, 1, 2\}$   
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$   
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} = B$

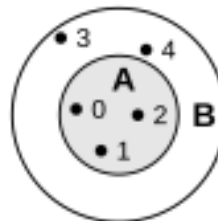




Figura 2.2: Diagrama de Venn para  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} = B$

### 2.3.1 Intersecção de conjuntos

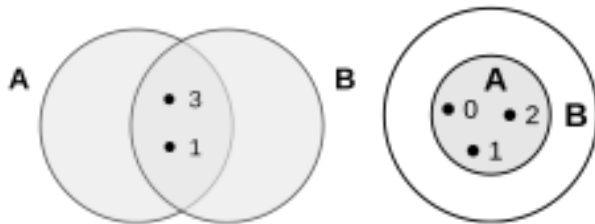
**Definição:** Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertençam a A e B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

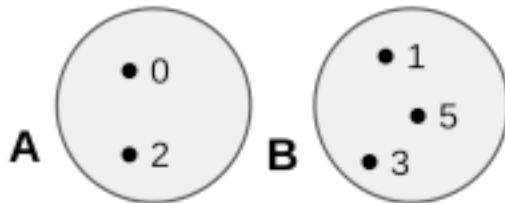
**Exemplos:**

**Exemplo 1:**  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$   $B = \{1, 3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$   
**Exemplo 2:**  $A = \{0, 1, 2\}$   $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$   
 $A \cap B = \{0, 1, 2\} = A$



**Exemplo 3:**  $A = \{0, 2\}$   
 $B = \{1, 3, 5\}$   
 $A \cap B = ;$



22 Notas de Aula 2. Conjuntos

### 2.3.2 Diferença de conjuntos

**Definição:** Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

**Exemplo 1:**

- a)  $\{a,b,c\} - \{b,c,d,e\} = \{a\}$
- b)  $\{a,b,c\} - \{b,c\} = \{a\}$
- c)  $\{a,b\} - \{c,d,e,f\} = \{a,b\}$
- d)  $\{a,b\} - \{a,b,c,d,e\} = ;$

### 2.3.3 Complementar de B em A

**Definição:** Dados dois conjuntos A e B, tais que  $B \subset A$ , chama-se complementar de B em relação a A, o conjunto  $A - B$ , isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

**Símbolo:**

$$C_A^B \text{ ou } A$$

Esta simbologia indica "**o complemento de B em relação a A**". Notemos que  $C_A^B$  só é definido para  $B \subset A$  e aí temos:

$$C_A^B = A - B$$

**Exemplo 1::**

- a) Se  $A = \{a,b,c,d,e\}$  e  $B = \{c,d,e\}$ , então:

$$C_A^B = A - B = \{a,b\}$$

- b) Se  $A = \{a,b,c,d\} = B$  então:

$$C_A^B = ;$$

**Observação:** O complementar de B em relação a A é o que falta para B ficar igual a A.

## 2.4 Propriedades 23 2.4 Propriedades

### 2.4.1 Inclusão ( $\subset$ )

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

$$1. ; \subset A$$

$$2. A \subset A \text{ (reflexiva)}$$

3.  $A \subset B$  e  $B \subset A \Rightarrow A = B$  (anti-simétrica)

4.  $A \subset B$  e  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$  (transitiva)

### 2.4.2 União ( $\cup$ )

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1.  $A \cup A = A$  (idempotente)

2.  $A \cup \emptyset = A$  (elemento neutro)

3.  $A \cup B = B \cup A$  (comutativa)

4.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (associativa)

### 2.4.3 Intersecção ( $\cap$ )

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1.  $A \cap A = A$  (idempotente)

2.  $A \cap U = A$  (elemento neutro)

3.  $A \cap B = B \cap A$  (comutativa)

4.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  (associativa)

*24 Notas de Aula 2. Conjuntos*

## 2.5 Exercícios Propostos

1. Construir o conjunto das partes do conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$

2. Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4\}$  e  $C = \{1, 2, 4\}$  determinar o conjunto X tal que:

a)  $X \cup B = A \cup C$ :

b)  $X \cap B = \emptyset$ :

### 2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos

1.  $nP(A) = 2^4 = 16$ , logo:

$$P(A) = \{;, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \\ \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \\ \{b,c,d\}, \{c,d,a\}, \{A\}\}$$

2. a)  $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ , então, os possíveis elementos de X são:

1, 2, 3 e 4

b)  $X \cap B = ; \Rightarrow 3 \notin X \text{ e } 4 \notin X$

Conclusão:

$$X = \{1, 2\}$$

## NOTAS DE AULA 3

# Conjuntos Numéricos

### 3.1 Conjunto dos Números Naturais N

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Um subconjunto importante de N é o conjunto  $N^*$ :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \Rightarrow \text{zero foi excluído}$$

Ordenando sobre uma reta, temos:

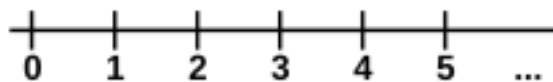


Figura 3.1: Demonstração de N sobre a reta real

## 3.2 Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Além do  $\mathbb{N}$  convém destacar os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ :

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$
- $\mathbb{Z}_+$  = Conjunto dos inteiros positivos
- $\mathbb{Z}_-$  = Conjunto dos inteiros negativos

Observe que  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ .

Ordenando  $\mathbb{Z}$  sobre uma reta, temos:

25

26 Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos

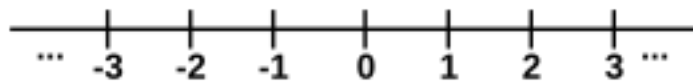


Figura 3.2: Demonstração de  $\mathbb{Z}$  sobre a reta real

## 3.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

Acrescentando as frações positivas e negativas aos números inteiros, teremos os números racionais  $\mathbb{Q}$ .

**Então:**  $-2, -\frac{5}{4}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{2}$  por exemplo são números racionais. Todo número racional pode ser colocado na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{Z}$  e  $b \neq 0$ .

**Exemplo 1:**

- $-2 = -\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = -\frac{6}{3}$
- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$
- $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$

Assim podemos escrever:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Consideremos a representação decimal de um número racional  $\frac{a}{b}$ , que se obtém dividindo-se  $a$  por  $b$

$$1. \frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{-5}{4} = -1,25 \quad \frac{75}{20} = 3,75$$

Estes exemplos referem-se aos decimais exatos ou finitos.

$$2. \frac{1}{3} = 0,333... \quad \frac{7}{6} = 1,1666... \quad \frac{6}{7} = 0,857142857142...$$

Estes exemplos referem-se aos decimais periódicos ou infinitos.

Então todo decimal exato ou periódico pode ser representado na forma de um número racional  $\frac{a}{b}$ . Os números racionais podem ser expressos sobre a reta, como segue:

Observando o gráfico notamos que:

1. Entre dois inteiros nem sempre existe outro inteiro

2. Entre dois racionais sempre existe outro racional

### 3.4. Números Irracionais R-Q 27

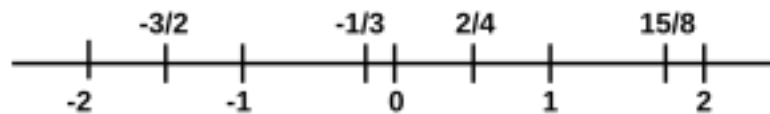


Figura 3.3: Reta real com números racionais Q.

## 3.4 Números Irracionais R-Q

Consideremos, por exemplo, os números  $p_2$  e  $p_3$ , e vamos determinar sua representação decimal:

$$p_2 = 1,14142135...$$

$$p_3 = 1,73205080...$$

Observamos que existem decimais infinitos, não periódicos, as quais damos o nome de números irracionais que não podem ser escritos na forma  $\frac{a}{b}$ .

Um número irracional bastante conhecido é o número  $\pi = 3,1415926535....$

## 3.5 Exercícios Resolvidos

1. Assinale V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

- a)  $-7 \in \mathbb{N}$ :  
• **Solução:** (F)
- b)  $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- c)  $4 \in \mathbb{Z}$ :  
• **Solução:** (V)
- d)  $-6 \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (V)
- e)  $\sqrt[3]{10} \in \{\text{irracionais}\}$ :  
• **Solução:** (V)
- f)  $3\pi \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- g)  $-\pi \in \{\text{irracionais}\}$ :  
• **Solução:** (V)
- h)  $\sqrt[3]{-2} \in \mathbb{Z}$ :  
• **Solução:** (F)
- i)  $\sqrt[3]{-5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- j)  $\sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (V)
- k)  $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{N}$ :  
• **Solução:** (V)
- l)  $0,16666... \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (V)

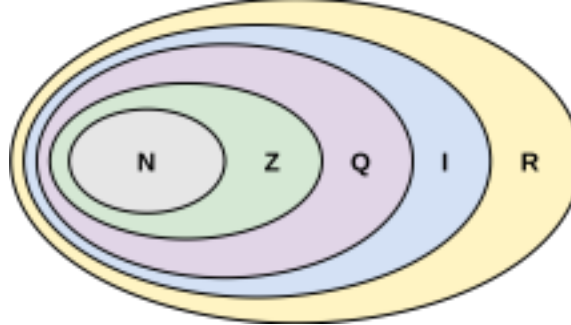
28 Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos

- p)  $-2 \in \mathbb{Z}$ :  
• **Solução:** (V)
- m)  $0,202002000... \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (V)
- n)  $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- o)  $0,010010001... \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- q)  $\pi \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)
- r)  $\pi^3 \in \mathbb{Q}$ :  
• **Solução:** (F)

### 3.6 Números Reais $\mathbb{R}$

Dados  $\mathbb{Q}$  e  $\{\text{irracionais}\}$ , define-se o conjunto dos números reais como:  $\mathbb{R} =$

$\mathbb{Q} \cup \{\text{irracionais}\} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$  Assim, são números reais:



- Os N
- Os Z
- Os Q
- Os {irracionais} \*indicados pela letra I no diagrama

Figura 3.4: Representação dos conjuntos numéricos

Como subconjuntos importantes de R temos: •

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

- $\mathbb{R}_+ =$  Conjunto dos reais positivos •  $\mathbb{R}_- =$

Conjunto dos reais negativos Logo

chegamos a representação da reta real:

### 3.7. Relação de ordem no conjunto R 29



Figura 3.5: Representação da reta nos números reais

## 3.7 Relação de ordem no conjunto R

Sejam dois números reais quaisquer  $a$  e  $b$ :

- Entre  $a$  e  $b$ , poderá ocorrer uma e somente uma das relações:

$$a = b \text{ ou } a > b \text{ ou } a < b$$

- $a \leq b$  (lê-se  $a$  menor ou igual a  $b$ )
- $a \geq b$  (lê-se  $a$  maior ou igual a  $b$ )



- Um número real  $c$  está entre  $a$  e  $b$  se e somente se  $a < c$  e  $c < b$ . Podemos representar como:  $a < c < b$ .

## 3.8 Exercícios Propostos

1. Usando a notação de desigualdade, escreva as seguintes relações:

- a)  $x$  está situado à direita de 10 na reta real:
- b)  $y$  está situado entre  $-1$  e  $6$  na reta real:
- c)  $x$  está situado à esquerda de  $-2$  na reta real:
- d)  $z$  é um número positivo, ou seja, está situado à direita de 0 na reta real:
- e)  $x$  está situado entre 2 e 7 na reta real:
- f)  $x$  é um número negativo, ou seja, está situado à esquerda de 0 na reta real:

### 3.8.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. a)  $x > 10$  b)  $-1 < y < 6$  d)  $z > 0$   
 c)  $x < -2$  e)  $2 < x < 7$  f)  $x < 0$

30 Notas de Aula 3. Conjuntos Numéricos

## NOTAS DE AULA 4

## Intervalos

Dados dois números reais  $a$  e  $b$ , com  $a < b$ , definimos:

a) Intervalo aberto de extremos  $a, b$  é o conjunto:

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



Figura 4.1: Representação gráfica para  $]a, b[$

b) Intervalo fechado de extremos  $a, b$  é o conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

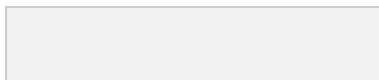


Figura 4.2: Representação gráfica para  $[a, b]$

c) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos  $a, b$  é o conjunto:

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

d) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos  $a, b$  é o conjunto:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

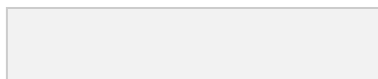


Figura 4.3: Representação gráfica para  $[a, b[$

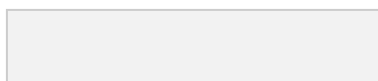


Figura 4.4: Representação gráfica para  $]a, b]$

## 4.1 Exemplos

**Exemplo 1:**  $]2, 5[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ , intervalo aberto

**Exemplo 2:**  $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ , intervalo fechado

**Exemplo 3:**  $[\frac{2}{5}, 7[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\}$ , intervalo fechado à esquerda

**Exemplo 4:**  $]^{-1}_3, \overset{p}{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \overset{p}{2}\}$ , intervalo fechado à direita

Definimos como intervalos infinitos os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , com sua representação na reta real:

$$1^\circ. \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = ]a, +\infty[$$

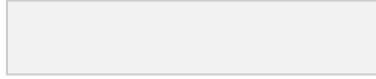


Figura 4.5: Representação gráfica para  $x > a$

$$2^\circ. \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$$

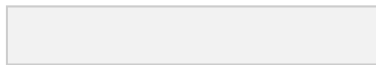


Figura 4.6: Representação gráfica para  $x \geq a$

$$3^\circ. \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = ]-\infty, a[$$

4.2. Sistema Cartesiano 33

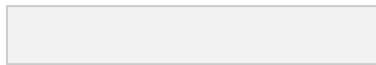


Figura 4.7: Representação gráfica para  $x < a$

$$4^\circ. \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = ]-\infty, a]$$

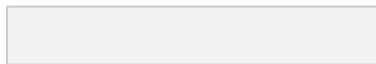


Figura 4.8: Representação gráfica para  $x \leq a$

5º. Logo, o intervalo  $] -\infty, +\infty = \mathbb{R}$ .

## 4.2 Sistema Cartesiano

**Definição:** É um sistema constituído por dois eixos,  $x$  e  $y$ , perpendiculares entre si. O

eixo  $x$  é denominado eixo das abscissas.

O eixo  $y$  é denominado eixo das ordenadas.

Estes eixos dividem o plano em quadrantes.

**Exemplo 1:** Localização no plano do ponto  $P$  com coordenadas  $(x, y) = (a, b)$ :



Figura 4.9: Demonstração do plano cartesiano com ponto  $P$  de coordenadas  $(x, y) = (a, b)$

34 Notas de Aula 4. Intervalos

#### 4.2.1 Par Ordenado

**Definição:** Para cada elemento  $a$  e cada elemento  $b$ , admitiremos a existência de um terceiro elemento  $(a, b)$  que denominamos par ordenado de modo que se tenha:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

**Exemplos:**

**Exemplo 1:** Localize os pontos no plano cartesiano:

$A(0, 2), B(0, -3), C(2, 5), D(-3, 4)$

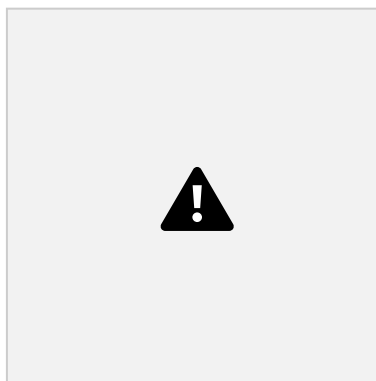


Figura 4.10: Localização dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no plano cartesiano

**Exemplo 2:** Calcular  $x$  e  $y$  de modo que os pares ordenados  $(x + y, x - y)$  e  $(3, 5)$  sejam iguais:

□ □ □

(4.1)

□ □

Então:

$$x + y = 3 \text{ (I)}$$

$$x - y = 5 \text{ (II)} \quad 2x = 8 \text{ (I + II)}$$

$$x = 4 \text{ (4.2)}$$

Pela equação (I)  $(x + y = 3)$ :

$$y = 3 - 4$$

$$y = -1$$

$$4 + y = 3 \text{ (4.3)}$$

Então  $(x + y, x - y) = (4 - 1, 4 + 1) = (3, 5)$ .

#### 4.3. Exercícios Propostos 35

### 4.3 Exercícios Propostos

1. Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

a)  $[-1, 3]$

b)  $[0, 2[$

c)  $] -3, 4[$

d)  $] -\infty, 5[$

e)  $[1, +\infty[$

2. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar  $A \cap B$  e  $A \cup B$ , sendo  $A = [0, 3]$  e  $B = [1, 4]$

3. Descrever os seguintes conjuntos:

a)  $[0, 2] \cap [1, 3]$

b)  $[0, 2] \cap ]1, 3[$

c)  $] -1, \frac{2}{3}[ \cap ]0, \frac{4}{3}[$

d)  $] -\infty, 2] \cap [0, +\infty[$

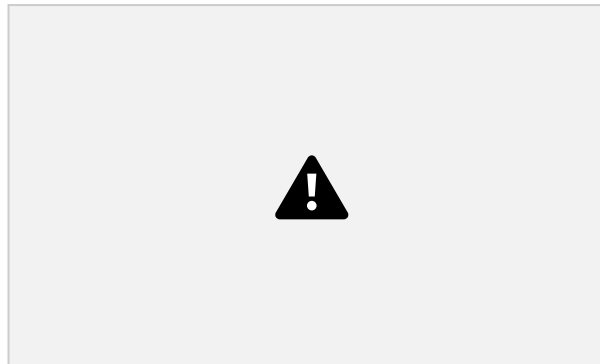
4. Determinar os seguintes conjuntos:

- a)  $[-1, 3] \cup [0, 4]$
- b)  $] -2, 1] \cup ]0, 5[$
- c)  $[-1, 3] \cup [3, 5]$
- d)  $[-\frac{1}{2}, 0[ \cup ]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$

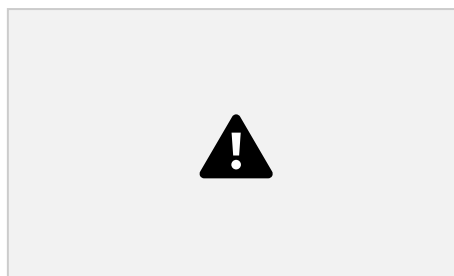
5. Sendo  $A = [0, 5[$  e  $B = ]1, 3[$ , determinar  $C^B_A$

### 4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos

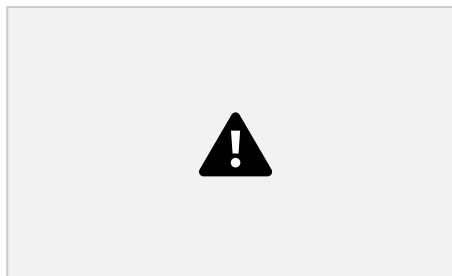
- 1. a)  $[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
- b)  $[0, 2[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
- c)  $] -3, 4[ = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
- d)  $] -\infty, 5[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
- e)  $[1, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$



36 Notas de Aula 4. Intervalos 2.



3. a)



b)



5.

Logo,  $C_A^B = [0, 1] \cup [3, 5[$

## NOTAS DE AULA 5

# Produto Cartesiano

**Definição:** Sejam dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , denomina-se produto cartesiano de  $A$  por  $B$  o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a  $A$  e o segundo elemento pertence a  $B$ .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

### Observações:

1. Se  $A = ;$  ou  $B = ;$  por definição:  $A \times B = ;$ , isto é,  $A \times ; = ;$  ou  $; \times B = ;$
2. Se  $A = B$ , podemos escrever o produto cartesiano  $A \times A$  como  $A^2$ , isto é,  $A \times A = A^2$
3. Sendo  $A$  e  $B$  não vazios, temos  $A \times B \neq B \times A$ . Ou seja, não há comutatividade
4. Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos com  $m$  e  $n$  elementos respectivamente, então  $A \times B$  é um conjunto finito com  $m \times n$  elementos
5. Se  $A$  ou  $B$  for infinito e nenhum deles for vazio, então  $A \times B$  é um conjunto infinito

### 5.0.1 Exemplos

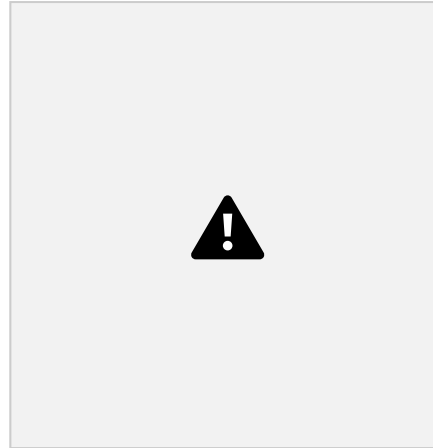
**Exemplo 1:** Se  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 2\}$  temos:

$$A \times B = \{1, 1, (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

As representações no plano cartesiano são as seguintes:

37



38 Notas de Aula 5. Produto Cartesiano

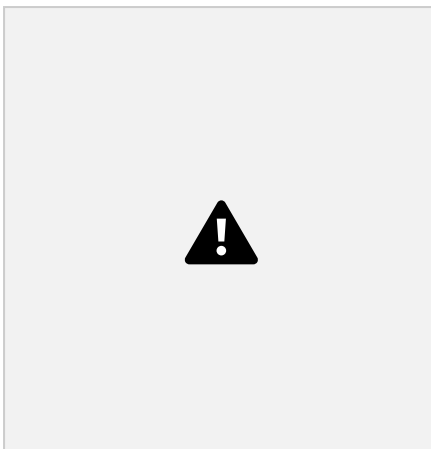


Figura 5.1: Representação de  $A \times B$  Figura 5.2:

Representação de  $B \times A$  **Exemplo 2:** Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3 \text{ e } B = \{2\}$ , logo  $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A \text{ e } 2 \in B\}$ .

A representação gráfica de  $A \times B$  dá como resultado o conjunto de pontos paralelo ao eixo  $x$  da figura abaixo:



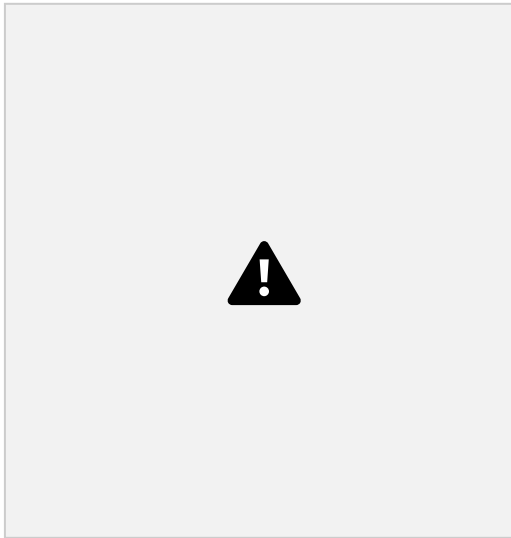
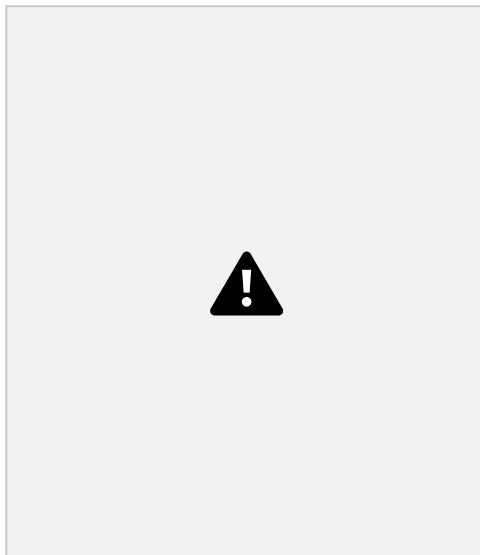


Figura 5.3: Representação no plano cartesiano de  $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A \text{ e } 2 \in B\}$

**Exemplo 3:** Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$  temos  $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$ .

Graficamente é representado por um retângulo, distinto do anterior:

39



**Observação:** Como A e B são intervalos e produto cartesiano, neste caso será o conjunto dos pontos do plano hachurado na figura.

Figura 5.4: Representação no plano cartesiano de  $A \times B$

## 5.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Dados  $A = \{1, 3, 4\}$ ,  $B = \{-2, 1\}$  e  $C = \{1, 2\}$ , determine e represente-os pelo gráfico cartesiano

a)  $A \times B$

• **Solução:**  $A \times B = \{(1, -2), (1, 1), (3, -2), (3, 1), (4, -2), (4, 1)\}$

b)  $B \times C$

• **Solução:**  $B \times C = \{(-2, 1), (-2, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

c)  $B^2$

• **Solução:**  $B^2 = \{(-2, -2), (-2, 1), (1, -2), (1, 1)\}$

### 5.0.3 Exercícios Propostos

1. Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$  e  $C = \{1, 2\}$  determine:

a)  $A \times (B - C)$

b)  $B \times C_A^C$

c)  $(A - B) \times (A - C)$

40 *Notas de Aula 5. Produto Cartesiano* 2. Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1\}$$

Representar graficamente os produtos:

a)  $A \times B$

b)  $A \times C$

c)  $B \times C$

d)  $C \times B$

### Solução dos Exercícios Propostos

1. a)  $\{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$

b)  $\{(2, 3), (4, 3), (6, 3)\}$

c)  $\{(1, 3), (3, 3)\}$

## 5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano

Observe:

$$\bullet A = \{0, 1, 2\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$\bullet B = \{2, 4\} \Rightarrow n(B) = 2$$

$$\bullet A \times B = \{(0, 2), (0, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$$

$$\text{ã } A \times B \Rightarrow n(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$$

Logo:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

**Exemplo 1:** Sabendo que  $\{(1,2), (4,2)\} \subset A^2$  e  $n(A^2) = 9$ , represente pelos elementos o conjunto  $A^2$ .

### 5.2. Relação Binária 41

• **Solução:**  $A^2$  representa o quadrado do número de elementos de A, logo:

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \Rightarrow [n(A)]^2 = 9 \Rightarrow n(A) = 3$$

Se A é um conjunto de 3 elementos,  $(1,2) \in A^2$  e  $(4,2) \in A^2$ , logo concluímos que  $A = \{1, 2, 4\}$ , sendo assim:

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A = & \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 4), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 4)\} \end{aligned}$$

**Exercício:** Se  $\{(1,-2), (3, 0)\} \subset A^2$  e  $n(A^2) = 16$ , represente  $A^2$  pelos seus elementos.

## 5.2 Relação Binária

**Definição:** Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo sub

conjunto  $R$  de  $A \times B$ :

$R$  é uma relação binária de  $A$  em  $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$

Se eventualmente os conjuntos  $A$  e  $B$  forem iguais, todo subconjunto de  $A \times A$  é chamado de relação binária em  $A$ .

$R$  é relação binária em  $A \Leftrightarrow R \subseteq A \times A$

#### Nomenclatura:

- $A$ , conjunto de partida da relação  $R$
- $B$ , conjunto de chegada ou contradomínio da relação  $R$
- Quando o par  $(x, y) \in R$ , escrevemos  $xRy$
- Quando o par  $(x, y) \notin R$  escrevemos  $x \nmid Ry$ .

### 5.2.1 Exemplos

**Exemplo 1:** Se  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  quais são os elementos da relação  $R = \{(x, y) \mid x < y\}$  de  $A$  em  $B$ ?

• **Solução:** Temos:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \\ (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

42 Notas de Aula 5. Produto Cartesiano

**Exemplo 2:** Se  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  quais os elementos da relação binária  $R$  de  $A$  em  $B$ , assim definida:  $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$

o: Fazem parte da relação todos os pares ordenados  $(x, y)$ , tais que  $x \in B$  tal que  $y = x + 2$ . Utilizando as representações gráficas, temos:

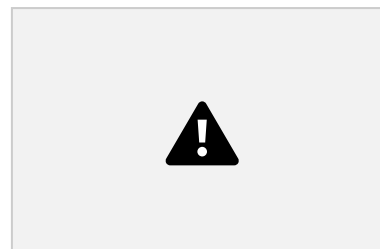
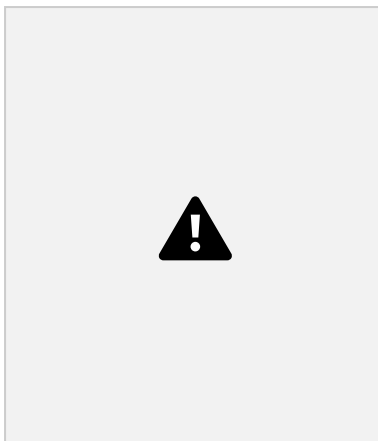


Figura 5.6: Domínio e imagem de  $R$

## NOTAS DE AULA 6

# Domínio e Imagem

**Definição:** Se  $R$  é uma relação de  $A$  em  $B$

- Chama-se domínio de  $R$  o conjunto  $D$  de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a  $R$ .

$$x \in D \Leftrightarrow \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

- Chama-se imagem de  $R$  o conjunto  $Im$  de todos os segundo elementos dos pares ordenados pertencentes a  $R$ .

$$y \in Im \Leftrightarrow \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Da definição, temos:

$$D \subset A \text{ e } Im \subset B$$

### 6.0.1 Exemplos

**Exemplo 1:** Se  $A = \{0, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  qual é o domínio e imagem da relação  $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$

- **Solução:** Pelo esquema das flechas, notamos que  $D$  é o conjunto dos elementos de  $A$ , dos quais partem flechas e quem  $Im$  é o conjunto dos elementos de  $B$  aos quais chegam as flechas, logo:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

$$D = \{2, 3, 4\} \text{ e } Im = \{2, 3, 4, 6\}$$

**Exemplo 2:** Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  e  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$  qual o domínio e a imagem da relação  $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ ?

- **Solução:** Pela representação cartesiana temos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \text{ e}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$$



Figura 6.1: Representação de conjuntos para  $A \times B$

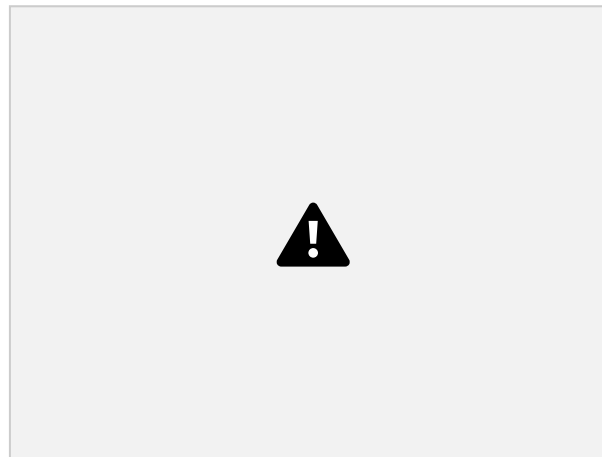


Figura 6.2: Representação cartesiana da relação  $R$

### 6.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Estabelecer o domínio( $D$ ) e a imagem( $Im$ ) das seguintes relações:

a)  $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$

$$D = \{1, 2\}$$

$$Im = \{1, 3, 4\}$$

b)  $\{(2, 1), (1, -3), (5, 2)\}$

$$D = \{1, 2, 5\}$$

$$Im = \{1, -3, 2\}$$

$$-3,$$

$$c) \quad (1+\frac{p}{2}, 2), (1-\frac{p}{3}, 1)^a$$

$$D = \text{Im} \quad \begin{matrix} n & n \\ 1+\frac{p}{2}, & 1-\frac{p}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} p \\ 2^0 \end{matrix}$$

2. Sejam os conjuntos  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  e  $R$  a relação binária de  $A$  e  $B$ , definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

Pede-se:

a) Enumerar os pares ordenados de  $R$

$$R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$$

b) Enumerar os elementos do domínio e imagem de  $R$

$$D = \{0, 1, 4\}$$

$$\text{Im} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

c) Fazer o gráfico cartes

$$y^2x(x, y)$$

$$(-2)^2 4 (4, -2)$$

$$(-1)^2 1 (1, -1)$$

$$(0)^2 0 (0, 0)$$

$$(1)^2 1 (1, 1)$$

$$(2)^2 4 (4, 2)$$

Figura 6.3: Representação gráfica da relação  $R$  entre os conjuntos  $A$  e  $B$ .

## 6.1 Relação Inversa

**Definição:** Seja uma relação binária  $R$  de  $A$  em  $B$ , consideramos o conjunto  $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$

Como  $R^{-1}$  é um subconjunto de  $B \times A$ , então  $R^{-1}$  é uma relação binária de  $B$  em  $A$  a qual chamamos de relação inversa de  $R$ .

$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Ou seja, da definição que  $R^{-1}$  é o conjunto dos pares ordenados obtidos à partir dos pares ordenados de  $R$ , invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

### 6.1.1 Exemplos

**Exemplo 1:** Se  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ , quais são os elementos de  $R$ , sendo  $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$  e de  $R^{-1}$ ?

• **Solução:**

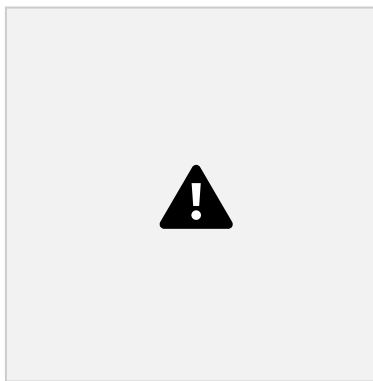


Figura 6.4: Esquema de flechas para  $(x < y)$

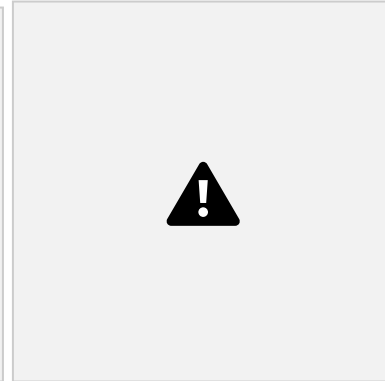


Figura 6.5: Esquema de flechas para  $(y > x)$

$$R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (5, 7)\}$$
$$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 5)\}$$

### 6.1.2 Propriedades

1.  $D(R^{-1}) = Im(R)$



$$2. \text{Im}(R^{-1}) = D(R)$$

$$3. (R^{-1})^{-1} = R$$

## 6.2 Funções

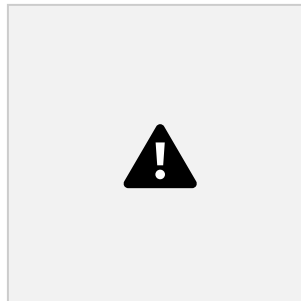
**Definição:** Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação  $f$  de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B, se e somente se, para todo  $x \in A$  existe um só  $y \in B$ , tal que  $(x, y) \in f$ .

$$f \text{ é aplicação de A em B} \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B \mid (x, y) \in f)$$

Com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação  $f$  de A em B para ser aplicação:

1. Todo  $x \in A$  participe de pelo menos um par  $(x, y) \in f$ , isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha
2. É necessário que cada elemento  $x \in A$  participe de apenas um único par  $(x, y) \in f$ , isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha

1. Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma



2. Se existir um elemento de A do qual partam 2 ou mais flechas



**Observação:** Uma relação  $f$  não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima.

## NOTAS DE AULA 7

# Polinômios

**Definição:** Um polinômio em  $x$  é qualquer expressão na forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$f_1(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Onde  $n$  é um número inteiro não negativo e  $a_n \neq 0$ . Os números  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  são números reais chamados coeficientes. O grau do polinômio é  $n$ . O coeficiente principal é  $a_n$  e  $a_0$  é o termo independente.

### 7.1 Nomenclatura

Os polinômios com um, dois ou três termos são chamados monômios, binômios ou trinômios, respectivamente.

A forma padrão de um polinômio é com potências de  $x$  na ordem crescente.

**Exemplo 1:**

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

Onde:  $a_0 = 2$  (termo independente),  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 3$  e  $a_4 = 1$  tendo-se o grau do polinômio igual a 4.

**Exemplo 2:** Identifique os polinômios pelos termos que os compõe:

- a)  $3x$  = monômio
- b)  $5abc$  = monômio
- c)  $3x + y$  = binômio
- d)  $5ab + 3cd^2$  = binômio
- e)  $x^2 + 3x + 7$  = trinômio
- f)  $3ab + 4xy - 10y$  = trinômio

**Observações:** Os trinômios são compostos por três monômios (3 termos), separados por operação de soma ou subtração.

Chama-se valor numérico de  $f$  em  $x$  a imagem de  $x$  pela função  $f$ , assim como por exemplo, dado o polinômio:

$$f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$$

Onde o valor de  $x = 2$ , então:

$$f(2) = 2 + (2) + (2)^2 + 3(2)^3$$

$$f(2) = 2 + 2 + 4 + 24$$

$$f(2) = 32$$

Logo, a imagem de  $f$  no ponto  $x = 2$  é 32.

Em particular, se  $x$  é um número real e  $f$  é um polinômio, tal que  $f(x) = 0$  dizemos que  $x$  é "uma raiz" ou "um zero" de  $f$ . Por exemplo, os números -2 e -1 são raízes de:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$$

pois:

$$f(-2) = 2(-2) + 3(-2)^2 + (-2)^3 = 0$$

$$f(-1) = 2(-1) + 3(-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

## 7.2 Igualdade

**Definição:** Dizemos que dois polinômios  $f$  e  $g$  são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja:

$$f = g \Rightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

## 7.3 Exercícios Resolvidos

1. Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável  $x$ ?

a)  $x^5 + x^3 + 2$ , Sim

b)  $0x^4 + 0x^2$ , Sim

c) 3, Sim

#### 7.4. Operações 51

d)  $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$ , Não

e)  $(x^{\frac{p}{2}})^4 + x + 2$ , Sim

f)  $x^{\frac{p}{2}} + x^2$ , Não

g)  $x^{15}$ , Sim

h)  $x + 2$ , Sim

i)  $x^2 + 2x + 3$ , Sim

2. Dada a função polinomial

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

pede-se para calcular:  $f(-3)$ ,  $f(2x)$  e  $f(f(-1))$

• **Solução:**

Temos que:

$$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20$$

$$f(2x) = (2x)^3 + (2x)^2 + (2x) + 1 = 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

$$f(f(-1)) \Rightarrow$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$f(f(-1)) = f(0) = 1$$

## 7.4 Operações

### 7.4.1 Adição

Dados dois polinômios  $f$  e  $g$ , onde:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = X^n$$

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = X^n$$

Chama-se soma de  $f$  com  $g$  o polinômio:

$$a_i x^i + b_i x^i$$

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

52 Notas de Aula 7. Polinômios

$$\text{isto é: } (f + g)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$$

**Exemplo 1:** Somar  $f(x) = 4 + 3x + x^2$  e  $g(x) = 5 + 3x^2 + x^4$ :

$$f(x) = 0x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 3x + 4$$

$$g(x) = 1x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 5$$

$$(f + g)(x) = 1x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 3x + 9$$

### 7.4.2 Subtração

Dados dois polinômios  $f$  e  $g$ , segue pela definição anterior de adição, que:  $(f$

$$- g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n$$

isto é:

### Multiplicação

### 7.4.3

$$(f - g)(x) = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i$$

Dados dois polinômios  $f$  e  $g$ ,  
onde:

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$$

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

polinômio:

$$a_i x^i + b_i x^i$$

$$i=0$$

Chama-se produto  $f \cdot g$  o

$$(f \cdot g)(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_0 b_2)x^2 + \dots + a_m b_n x^{m+n}$$

**Exemplo 1:**

#### 7.4. Operações 53

1. Multiplicar  $f(x) = 3x^3 + 2x + x$  e  $g(x) = 6x^2 + 5x + 4$ , temos:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= (3x^3 + 2x + x)(6x^2 + 5x + 4) \\(f \cdot g)(x) &= 3x^3(6x^2 + 5x + 4) + 2x(6x^2 + 5x + 4) + x(6x^2 + 5x + 4) \\&= 18x^5 + 15x^4 + 12x^3 + 12x^3 + 10x^2 + 8x + 6x^3 + 5x^2 + 4x \\&= 18x^5 + 15x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 12x\end{aligned}$$

54 Notas de Aula 7. Polinômios

## NOTAS DE AULA 8

# Polinômios - Continuação

**Aviso:** Estudar os dispositivos práticos 1 e 2 página 55F do livro Fundamentos de matemática elementar: Polinômios.

## 8.1 Propriedades

as operações seguem as propriedades:

1. Associativa:  $f(g h) = (f g)h, \forall f, g, h \in P$
2. Comutativa:  $f g = g f, \forall f, g \in P$
3. Elemento Neutro:  $\exists en \in P \mid f.en = f, \forall f \in P$
4. Distributiva:  $f(g + h) = f g + f h, \forall f, g, h \in P$

## 8.2 Divisão

**Definição:** Dados dois polinômios  $f$  (dividendo) e  $g \neq 0$  (divisor), dividir  $f$  por  $g$  é determinar dois outros polinômios  $q$  (quociente) e  $r$  (resto), de modo que se atenda as seguintes condições:

i)  $q.g + r = f$

ii)  $\delta r < \delta g$  (ou  $r = 0$  para divisão exata)

55

56 Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação

Dividendo Divisor

Resto Quociente

Tabela 8.1: Método da chave para divisão de números reais e para polinômios

### 8.2.1 Método da Chave

O método da chave descreve o procedimento usado para divisões de números reais, ou seja:

Logo, para divisão de polinômios usando tal método, temos:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1 \text{ dividendo}$$

$$g(x) = x - 4 \text{ divisor}$$

Logo:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

$$x^3 - 2x^3 + 8x^2 - 2x^2 + x + 8$$

$$x^2 + 4x - 1$$

$$-x^2 + 4x$$

$$+8x - 1$$

$$x - 8x + 32$$

$$31$$

Tabela 8.2: Divisão de polinômios  $f$  por  $g$  utilizando método da chave

Logo, a divisão de  $f$  por  $g$  nos dá  $2x^2 + x + 8$  como coeficiente e resto  $r = 31$ . Neste tipo de divisão,  $r$  é um polinômio constante, pois:

$$\delta g = 1 \Rightarrow \delta r = 0 \text{ ou } r = 0$$

## 8.2. Divisão 57

Notemos, finalmente que:

$$\begin{aligned} f(4) &= 2(4)^3 - 7(4)^2 + 4(4) - 1 \\ &= 128 - 112 + 16 - 1 \\ &= 31 = r \end{aligned}$$

### 8.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Dividir  $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$  por  $g(x) = x^2 - 2x + 3$ .

**Solução:**

Temos a operação dada por:



$$\begin{array}{r} 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \\ x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 6x^4 - 9x^3 + 4x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^3 + 8x^2 - 12x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x + 2 \end{array}$$

Com resultado:

$$f(x)$$

$$g(x) = 3x^3 + 4x - 1 + \frac{-3x + 2}{x^2 - 2x + 3}$$

2. Determinar  $a$  de modo que a divisão de  $f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$  por  $g(x) = x - 2$  apresente resto igual a 7.

• **Solução:**

Quando temos a divisão de um polinômio  $f$  com  $\deg f \geq 1$ , por um outro polinômio  $g$  com  $\deg g = 1$ , notamos que  $f$  aplicada à raiz de  $g$ , nos dá o resto da divisão de  $f$  por  $g$ . Assim:

58 Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação

$$g(x) = x - 2$$

$$0 = x - 2$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 7$$

E assim:

$$(2)^4 - 2a(2)^3 + (a+2)(2)^2 + 3a + 1 = 7$$

$$16 - 16a + 4a + 8 + 3a + 1 = 7$$

$$-9a + 25 = 7$$

$$-9a = -18$$

$$a = \frac{18}{9}$$

$$a = 2$$

### 8.2.3 Exercícios Propostos

1. Dividir  $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$  por  $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

### Solução dos Exercícios Propostos

- 1.

## 8.3 Produtos Notáveis

Os produtos notáveis obedecem a leis especiais de formação, e por isso sua utilização permite agilizar determinados tipos de cálculos que, pelas regras normais da multiplicação de expressões, ficariam mais longos. Os produtos notáveis apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de grande aplicação.

### 8.3.1 Quadrado da soma de dois termos

Seja  $a, b \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

8.3. Produtos Notáveis 59

### 8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos

Seja  $a, b \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

### 8.3.3 Cubo da soma de dois termos

Seja  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

notemos que o número de termos é 4, pois obedecemos  $n + 1$ , com  $n = 3$  neste caso. O sinal de positivo se mantém e decrescemos a potência a partir do primeiro elemento  $a$  e

a partir do primeiro elemento  $b$ .

### 8.3.4 Cubo da diferença de dois termos

Seja  $a, b \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

### 8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, ou seja:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### 8.3.6 Exemplos

**Exemplo 1:**  $(x + 7)^2 = x^2 + 2x7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

**Exemplo 2:**  $(x - 4)^2 = x^2 + 2x4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

**Exemplo 3:**  $(x + 7)^3 = x^3 + 3x^27 + 3x7^2 + 7^3 = x^3 + 21x^2 + 147x + 343$

**Exemplo 4:**  $(x - 4)^3 = x^3 - 3x^24 + 3x4^2 + 4^3 = x^3 - 12x^2 + 48x + 64$

**Exemplo 5:**  $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

60 Notas de Aula 8. Polinômios - Continuação

## 8.4 Triângulo de Pascal

Para se obter a soma ou diferença de dois termos elevados à potências superiores, utilizamos um método prático chamado de triângulo de Pascal. Logo, segue:

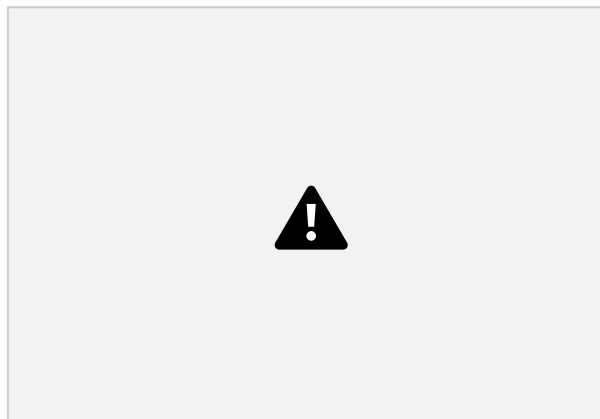


Figura 8.1: Triângulo de Pascal

### 8.4.1 Exemplos de uso

**Exemplo 1:**  $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

**Exemplo 2:**  $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Os produtos notáveis têm aplicação direta na fatoração para cálculo usando funções polinomiais.

## NOTAS DE AULA 9

# Funções e Não Funções

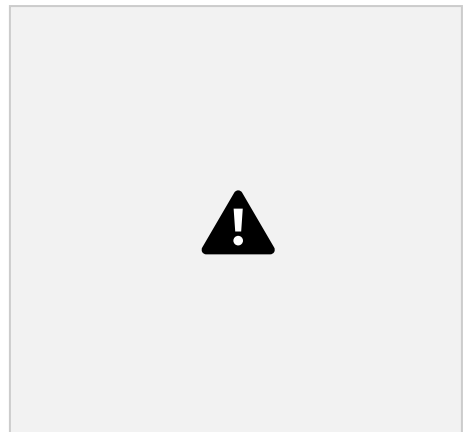
1. A relação de  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , com  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$  é função pois toda reta vertical conduzida pelos pontos  $x \in A$  encontra a gráfica de  $f$  num só ponto.



Figura 9.1: Demonstração de função  $f$

2. A relação  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , onde  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$  não é função, pois há retas verticais que encontra o gráfico de  $f$  em 2 pontos.

61



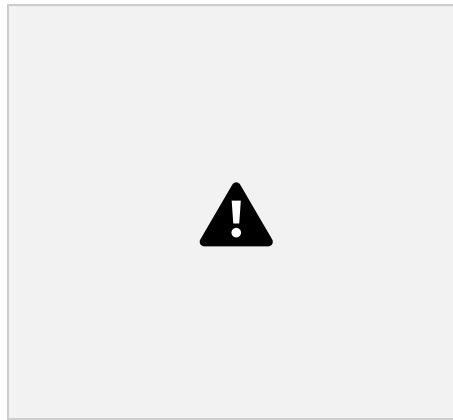


Figura 9.2:  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

3. A função  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , com  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$  não é função de  $A$  em  $\mathbb{R}$ , pois a reta vertical conduzida pelo ponto  $(1,0)$  não encontra o gráfico de  $f$ . Se  $f$  fosse função de  $B$  em  $\mathbb{R}$ , onde  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$  poderíamos observar uma função  $f$ .

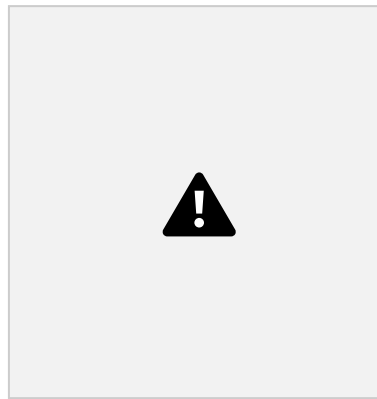
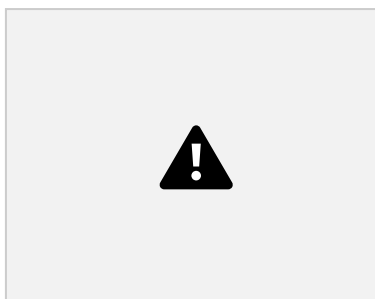


Figura 9.3: Função  $f$  de  $A$  em  $\mathbb{R}$

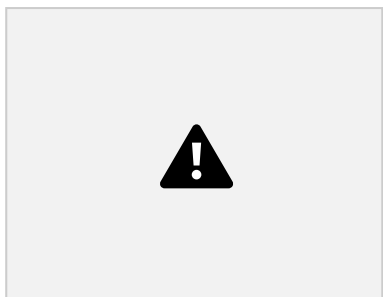
## 9.1 Exercícios Resolvidos

1. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de  $A = \{0,1,2\}$  em  $B = \{-1,0,1,2\}$ ?

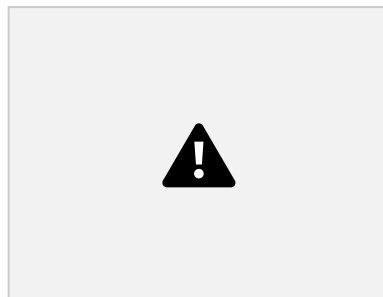
9.1. Exercícios Resolvidos 63 a)



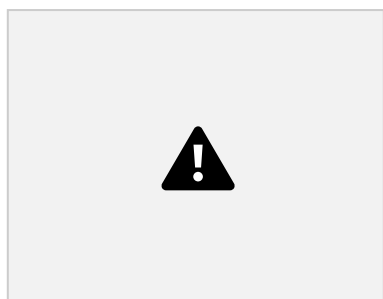
b)



c)



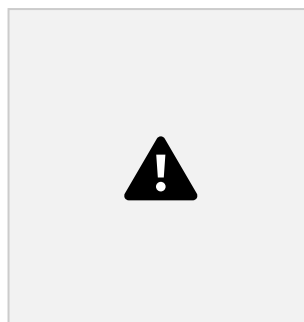
d)



• **Solução:** Esta é a alternativa cor

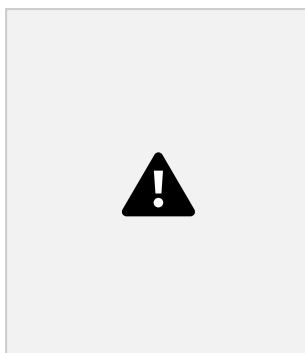
reta, pois o conjunto de partida é  $A = \{0, 1, 2\}$  e o conjunto de chegada é  $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ .

2. Quais das relações de  $R$  em  $R$ , cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

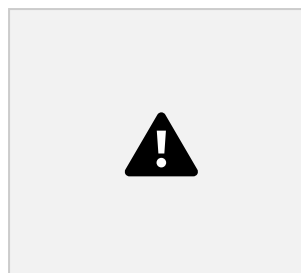


• Solução: É

função. b)

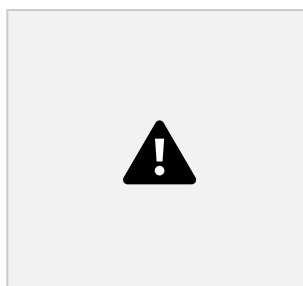


• Solução: Não é função. c)



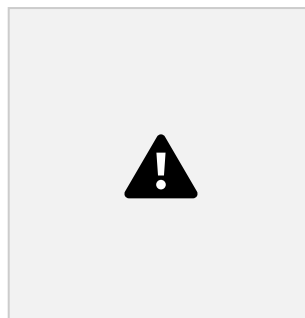
•

Solução: Não é função. d)



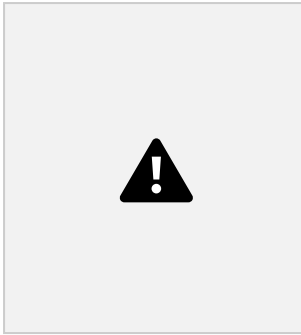
• Solução: É função.

9.2. Notação de Funções 65 e)



• Solução: É função. f )





• **Solução:** Não é função. **9.2 Notação de Funções**

Existe uma sentença aberta  $y = f(x)$  que expressa a lei mediante a qual dado  $x \in A$  determina-se  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in f$ , então  $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } f(x) = y\}$  e significa que dados ons conjuntos  $A$  e  $B$  a função  $f$  tem a lei de correspondência  $y = f(x)$ . Indicando tal correspondência  $y = f(x)$ , temos:

$$\text{ou } f: A \rightarrow B \text{ e } x \mapsto f(x)$$

$$f: A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x)$$

### 9.2.1 Exemplos

**Exemplo 1:** Associa  $x \in A$  e  $y \in B$  tal que  $y = 2x$ : • **Solução:**

$$f: A \rightarrow B \\ x \mapsto 2x$$

**Exemplo 2:** A cada  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$ , associa  $y = x^2$ :

66 Notas de Aula 9. Funções e Não Funções

• **Solução:**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

**Exemplo 3:** A cada  $x \in \mathbb{R}_+$  e  $y \in \mathbb{R}$  associa  $y = x^p$ :

• **Solução:**

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^p$$

### 9.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Seja a função:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

então calcule a imagem de 0 pela aplicação  $f$ .

$$\begin{aligned} f(0) &= 2(0) + 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

2. Qual a notação das seguintes funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ :

a)  $f$  associa a cada número real ao seu oposto:

• **Solução:**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

b)  $g$  associa cada número real ao seu cubo:

• **Solução:**

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

### 9.3. Domínio e Imagem de Funções 67

### 9.2.3 Exercícios Propostos

1. Seja a função:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

então calcule a imagem de  $-2$  pela aplicação de  $f$ .

2. Qual a notação das seguintes funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ :

a)  $h$  associa a cada número real ao seu quadrado menos  $-1$ :

b)  $k$  associa a cada número real ao número 2:

### Solução dos Exercícios Propostos

1.

$$\begin{aligned}f(-2) &= 2(-2)+1 \\ &= -4+1 \\ f(-2) &= -3\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}k: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\end{aligned}$$

## 9.3 Domínio e Imagem de Funções

**Definição:** Domínio é o conjunto  $D$  dos elementos  $x \in A$ , para os quais  $\exists y \in B \mid (x, y) \in f$ . Domínio é o conjunto de partida,  $D = A$ .

Imagem é o conjunto  $Im$  dos elementos  $y \in B$ , para os quais  $\exists x \in A \mid (x, y) \in f$ . Imagem é o subconjunto do contradomínio, logo notado por  $Im \subset B$ .

68 *Notas de Aula 9. Funções e Não Funções*



Pela representação cartesiana, temos:

- $D$  é o conjunto dos pontos da abscissa, tais que as retas verticais conduzidas por estes pontos interceptam o gráfico de  $f$ .
- $Im$  é o conjunto dos pontos da ordenada, tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de  $f$ .

### 9.3.1 Exemplos

**Exemplo 1:**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$   $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$

**Exemplo 2:**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$   $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 4\}$



**Exemplo 3:**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0 \text{ ou } 1 < y < 2\}$

**Exemplo 4:**  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$   $Im = \{1, 2\}$

### 9.3.2 Exercícios Propostos

1. Dar o domínio das seguintes funções reais:

70 Notas de Aula 9. Funções e Não Funções

a)  $f(x) = 3x + 2$ :

b)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ :

$x^2-4$ :

d)  $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ :

$\sqrt[3]{x+2}$

e)  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ :

$$c) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

### Solução dos Exercícios Propostos

$$1. a) D(f) = \mathbb{R}$$

$$d) D(f) = \mathbb{R}$$

$$b) D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

$$e) D(f) = \mathbb{R} - \{3\} \quad f) D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$c) D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

## NOTAS DE AULA 10

# Função do Primeiro Grau

## 10.1 Função Constante

**Definição:** Uma aplicação de  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  recebe o nome de função constante, quando a cada elemento  $x \in \mathbb{R}$  associa sempre o elemento  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto k \end{aligned}$$

O gráfico da função constante é uma reta passando pelo ponto  $(0, k)$

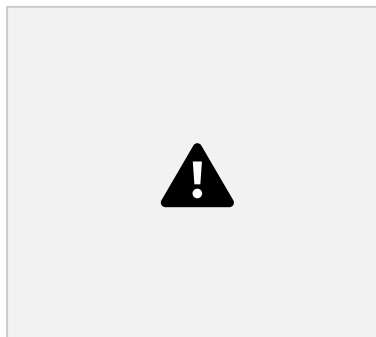


Figura 10.1:  $Im = \{k\}$

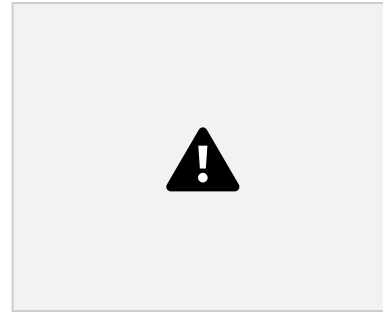
### 10.1.1 Exemplos

Construir os gráficos das aplicações de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por:

**Exemplo 1:**  $y = 3$

• **Solução:**

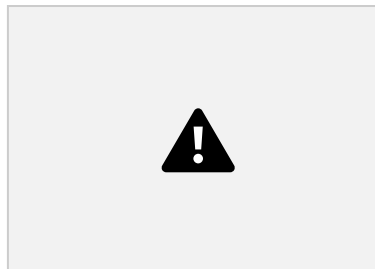
71



72 Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau

**Exemplo 2:**  $y = -1$

• **Solução:**



## 10.2 Função Identidade

**Definição:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  recebe o nome de função identidade quando cada elemento  $x \in \mathbb{R}$ , associa o próprio  $x$ , isto é:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

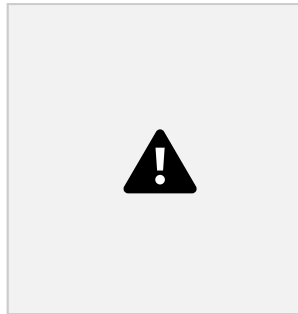
O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes de 1º e 3º quadrantes:

## 10.3 Função Linear

**Definição:**  $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$  recebe o nome de função linear quando a cada elemento  $x \in \mathbb{R}$  associa o elemento de  $ax \in \mathbb{R}$  dado:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax, a \neq 0$$



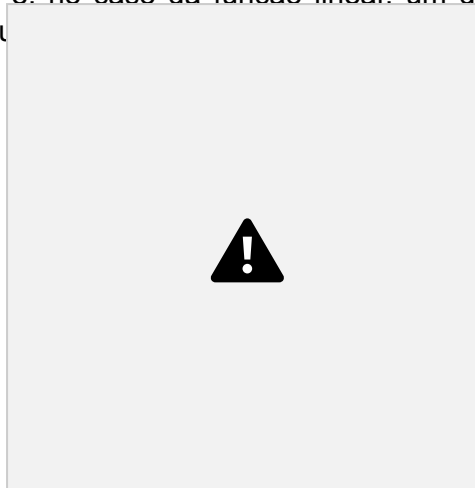
10.3. Função Linear 73

Figura 10.2:  $Im = \mathbb{R}$

### 10.3.1 Exemplos

**Exemplo 1:** Construir o gráfico da função  $y = 2x$  considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e, no caso da função linear, um dos pontos é a origem, logo basta atribuir a  $x$  um valor qualquer e obter o correspondente  $y = 2x$ .

• **Solução:**



$x$   $2x$

0 0

1 2

Pelos pontos  $P(0, 0)$  e  $Q(1, 2)$ , traçamos a reta  $PQ$  que é o gráfico da

função. **Exemplo 2:** Construir o gráfico da função  $y = -2x$ . Logo, temos:



• Solução:

10. Função do Primeiro Grau

$x \ 2x$

$0 \ 0$

$1 \ -2$



### 10.3.2 Exercícios Resolvidos

1. Construir o gráfico das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$

a)  $y = 2$

b)  $y = x^2$

• Solução:

• Solução:



### 10.3.3 Exercícios Propostos

1. Construir, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções

10.4. Função Afim 75

(a)  $y = x$

(b)  $y = 3x$

**Solução dos Exercícios Propostos 1.**

## 10.4 Função Afim

(c)  $y = -x$  (d)  $y = -3x$



**Definição:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  recebe o nome de função afim quando cada  $x \in \mathbb{R}$  estiver associado a um elemento  $(ax + b) \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , ou seja:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b, a \neq 0$$

### 10.4.1 Exemplos

**Exemplo 1:**  $y = 3x + 2$

• **Solução:**  $a = 3$  e  $b = 2$

**Exemplo 2:**  $-2x + 1$

• **Solução:**  $a = -2$  e  $b = 1$

**Exemplo 3:**  $y = x - 3$

• **Solução:**  $a = 1$  e  $b = -3$

*76 Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau*

**Exemplo 4:**  $y = 4x$

• **Solução:**  $a = 4$  e  $b = 0$

### 10.4.2 Exercícios Propostos

1. Construir o gráfico cartesiano das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ :

a)  $y = 2x - 1$

b)  $y = x + 2$

c)  $y = 3x + 2$

d)  $y = \frac{2x-3}{2}$

2. Resolver analiticamente e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \text{ (I)} \end{cases}$$

$$2x + 3y = 4 \text{ (II)}$$

### Solução dos Exercícios Propostos

1. a)



b)



c)



d)

10.4. Função Afim 77



2. Temos duas maneiras distintas para resolução:

a) por substituição e b) por adição. a)  $x - y = -3 \Rightarrow x = y - 3$ . Substituindo em (II), temos:

$$2(y - 3) + 3y = 4$$

$$2y - 6 + 3y = 4$$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

Logo, substituindo  $y = 2$  em (I), temos:

$$x - 2 = -3$$

$$x = -1$$

Assim  $(x, y) = (-1, 2)$

b) Multiplicando-se (I) por 3 e somando-se as duas expressões termo a termo, obtemos:

$$3x - 3 + y = -9 \quad (I)$$

$$2x + 3 + y = 4 \quad (II) \quad \Rightarrow \quad 5x = -5$$

Então, substituindo-se  $x = -1$  em (I) e/ou (II) temos:

$$(I) -1 - y = -3 \Rightarrow -y = -2 \Rightarrow y = 2$$

$$(II) 2(-1) + 3y = 4 \Rightarrow -2 + 3y = 4 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

Assim  $(x, y) = (-1, 2)$

78 Notas de Aula 10. Função do Primeiro Grau

## NOTAS DE AULA 11

# Função do Primeiro Grau

### 11.1 Coeficientes da Função Afim

O coeficiente a da função  $f(x) = ax + b$ , é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função  $f(x) = ax + b$  é denominado coeficiente linear.

#### 11.1.1 Exercícios Resolvidos

1. Obter a equação da reta que passa pelo ponto  $(1, 3)$  e tem coeficiente angular igual a 2.

##### • Solução

A equação de interesse é  $f(x) = ax + b$  ou  $y = ax + b$ . Se o coeficiente angular é 2, temos  $a = 2$ .

Substituindo-se  $x = 1$ ,  $y = 3$  e  $a = 2$  em  $y = ax + b$ , temos:

$$3 = (2)(1) + b$$
$$b = 1$$

Logo, a equação procurada é:

$$y = 2x + 1$$

2. Obter a equação da reta que passa pelo ponto  $(-2, 4)$  e tem coeficiente angular igual a  $-3$ .

• **Solução**

Se  $x = -2$ ,  $y = 4$  e  $a = -3$ , logo  $f(x) = ax + b$  ou  $y = ax + b$  é igual a: 4

$$= (-3)(-2) + b$$
$$b = -2$$

79

80 Notas de Aula 11. Função do Primeiro Grau

Logo, a equação procurada é:

$$y = -3x - 2$$

3. Obter a equação da reta que passa pelo ponto  $(-2, 1)$  e tem coeficiente linear igual a 4.

• **Solução**

Tendo-se  $y = ax + b$ , logo  $x = -2$ ,  $y = 1$  e  $b = 4$  nos dando:

$$1 = a(-2) - 4$$
$$a = \frac{3}{2}$$

E assim:

## Função Afim

$$y = \frac{3}{2}x + 4$$

## 11.2 Zero da

O zero de uma função é todo ponto  $x$ , onde a função é nula, ou seja, a imagem no ponto  $x$  é igual a zero.

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Logo, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação do primeiro grau:

$$ax + b = 0$$

Que apresenta uma única solução dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

De fato, resolvendo a equação, temos:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{a \neq 0} ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

**Exemplo 1**