

# Problema del missile

Gabriele Filosofi

Maggio 2006

## Abstract

Problemi dinamici apparentemente semplici possono facilmente resistere al tentativo di trovare una soluzione esatta.

## 1 Problema

Un aereo vola alla quota  $h > 0$ , mantenendo una velocità costante  $v_a > 0$ . All'istante  $t = 0$ , dal punto di proiezione a terra del velivolo, parte un missile. Il missile, con velocità costante  $v_m > v_a$ , punta l'aereo istante per istante. Determinare le condizioni necessarie affinché il missile colpisca l'aereo. Determinare le equazioni del moto del missile  $(x(t), y(t))$  in funzione dei parametri  $v_a$ ,  $v_m$  e  $h$ .

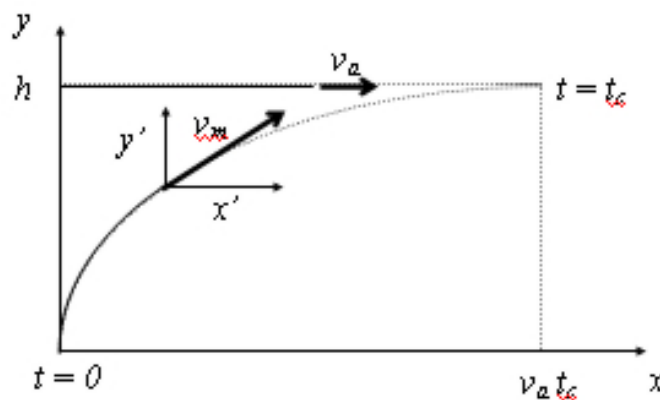


Figure 1: Problema del missile.

## 2 Soluzione analitica approssimata

Intuitivamente, se  $v_m$  è maggiore di  $v_a$  il missile colpirà l'aereo. Non è sufficiente che sia  $v_m = v_a$  perchè ciò avvenga, dato che la traiettoria percorsa dal missile è curva e quindi di lunghezza sempre maggiore rispetto alla traiettoria rettilinea dell'aereo. Detto  $t_c$  l'istante di collisione, le coordinate del punto di collisione saranno  $(x_c, y_c) = (v_a t_c, h)$ . Osserviamo che la curva  $y = f(x)$  deve necessariamente partire con tangente verticale in  $t = 0$ . La distanza totale percorsa dal'aereo è  $v_a t_c$ ,  $v_m t_c$  quella percorsa dal missile.

Le equazioni del moto del missile sono

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_m^2 \\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{h-y}{v_a t - x} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie nonlineari del primo ordine. La prima equazione impone che il missile abbia velocità costante. La seconda equazione esprime la condizione di puntamento. In  $t = 0$  valgono le seguenti condizioni per  $x$ ,  $y$  e le loro prime derivate

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_m \\ \ddot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = -\frac{v_m v_a^2}{h^2} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \ddot{x}(0) = \frac{v_m v_a}{h} \\ \ddot{x}(0) = \frac{v_m^2 v_a}{h^2} \end{cases}$$

Pur trattandosi di equazioni differenziali del primo ordine, abbiamo voluto calcolare anche il valore delle derivate di ordine successivo al primo per i motivi che vedremo discussi in seguito, quando si presenterà una soluzione approssimata.

Differenziando la prima equazione rispetto al tempo, applicando la sostituzione di variabili

$$\psi \equiv h - y \quad (2.0.1)$$

$$\phi \equiv v_a t - x \quad (2.0.2)$$

e utilizzando la seconda equazione, arriviamo alla relazione

$$\ddot{\psi}\psi = -\ddot{\phi}\phi \quad (2.0.3)$$

E' una relazione semplice ed elegante, ma per nulla semplice da risolvere.

## 2.1 Soluzione approssimata

Da una rapida analisi sappiamo che  $\phi > 0$ ,  $\psi > 0$ ,  $\ddot{\psi} > 0$ ,  $\ddot{\phi} < 0$  per  $0 < t < t_c$ . Sicuramente la 2.0.3 è soddisfatta se si ipotizza una dipendenza lineare mutua del tipo

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \beta\phi \\ \ddot{\phi} = -\beta\psi \end{cases}$$

con  $\beta > 0$  costante reale. Nelle coordinate originali avremmo cioè

$$\ddot{y} = -\beta(v_a t - x) \quad (2.1.1)$$

$$\ddot{x} = \beta(h - y) \quad (2.1.2)$$

Dalle condizioni iniziali sappiamo che  $\psi(0) = h$  e  $\ddot{\phi}(0) = -\frac{v_m v_a}{h}$ , sicché deve essere  $\beta = \frac{v_a v_m}{h^2} > 0$ .

Chiaramente non è detto che il legame ipotizzato tra  $\phi$  e  $\psi$  sia esatto. In effetti tale relazione è corretta solo in prima approssimazione, e precisamente per  $t \simeq 0$  è un'approssimazione del secondo ordine. La soluzione che ne potremo dedurre ha dunque validità nel primo tratto di volo del missile.

Differenziando una delle due equazioni due volte e usando l'altra otteniamo un'unica equazione differenziale autonoma lineare omogenea del quarto ordine

$$\frac{d^4 u}{dt^4} + \beta^2 u = 0 \quad u = \psi, \phi \quad (2.1.3)$$

dove  $u$  sta per  $\psi$  oppure  $\phi$ . L'equazione caratteristica della 2.1.3 è

$$r^4 + \beta^2 = 0 \quad (2.1.4)$$

che ha radici

$$r_k = \sqrt{\beta} \cdot e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})} \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1.5)$$

Le radici complesse  $r_1$  e  $r_2$  generano le due soluzioni indipendenti

$$e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \quad (2.1.6)$$

$$e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \quad (2.1.7)$$

mentre  $r_0$  e  $r_3$  generano le due soluzioni

$$e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \quad (2.1.8)$$

$$e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \quad (2.1.9)$$

La soluzione generale risultante è

$$u(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + C_2 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + C_3 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \quad (2.1.10)$$

Queste soluzioni hanno ovviamente senso soltanto nell'intervallo temporale in cui il nostro problema è definito e in cui vale la nostra approssimazione. Le costanti  $C_k$  (dette  $c_k$  per la  $\phi$  e  $d_k$  per la  $\psi$ ) si determinano dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \dot{\phi}(0) = v_a \\ \ddot{\phi}(0) = -\beta h \\ \dot{\phi}(0) = \beta v_m \\ \psi(0) = h \\ \dot{\psi}(0) = -v_m \\ \ddot{\psi}(0) = 0 \\ \dot{\psi}(0) = \beta v_a \end{cases}$$

Notiamo che la condizione  $\ddot{\phi}(0) = \beta v_m$ , dedotta dalla  $\ddot{\phi} = -\beta\psi$ , è in contraddizione con la condizione  $\ddot{x}(0) = \beta v_m$  relativa al problema originale. Ciò evidenzia l'inesattezza del legame ipotizzato tra  $\phi$  e  $\psi$ . Comunque, nei limiti di validità della nostra approssimazione, abbiamo

$$\begin{cases} \phi(0) = c_1 + c_3 = 0 \\ \dot{\phi}(0) = c_1 + c_2 - c_3 + c_4 = v_a \\ \ddot{\phi}(0) = 2c_2 - 2c_4 = -\beta h \\ \dot{\phi}(0) = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \beta v_m \\ \psi(0) = d_1 + d_3 = h \\ \dot{\psi}(0) = d_1 + d_2 - d_3 + d_4 = -v_m \\ \ddot{\psi}(0) = 2d_2 - 2d_4 = 0 \\ \dot{\psi}(0) = -d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = \beta v_a \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{4}{\beta}} \\ c_2 = -\frac{h}{2} + \frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \\ c_4 = \frac{h}{2} + \frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \\ c_3 = -c_1 \\ d_1 = \frac{h}{2} - \frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} - \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \\ d_2 = -\frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \\ d_3 = \frac{h}{2} + \frac{v_m}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} + \frac{v_a}{4} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \\ d_4 = d_2 \end{cases}$$

Ricordando le relazioni che legano  $x$  e  $y$  a  $\phi$  e a  $\psi$ , ricaviamo infine le soluzioni per le coordinate di posizione del missile

$$\begin{cases} x(t) = v_a t - c_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - c_2 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - c_3 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - c_4 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \\ y(t) = h - d_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - d_2 e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - d_3 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - d_4 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) \end{cases}$$

La figura 2.1 mostra la traiettoria approssimata del missile con un certo insieme di dati iniziali.

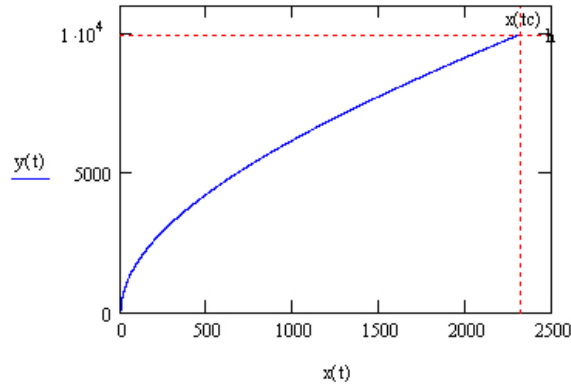


Figure 2: Soluzione approssimata - Traiettoria del missile. Dati iniziali  $v_a = 263 \frac{m}{s}$ ;  $v_m = 416 \frac{m}{s}$ ;  $h = 10000m$ . Il tempo di collisione è, in prima approssimazione,  $t_c \simeq 25.5sec$

E' istruttivo guardare separatamente il grafico delle coordinate  $x$  e  $y$  in funzione del tempo.

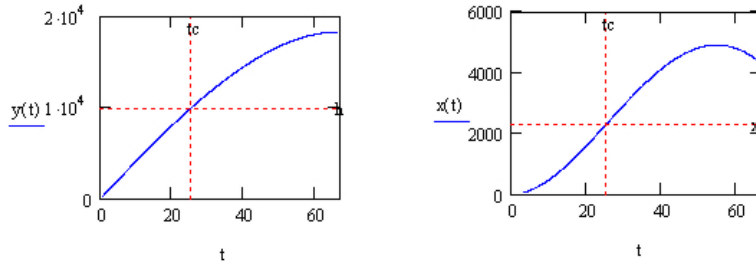


Figure 3: Soluzione approssimata - Coordinate del missile. I dati iniziali sono gli stessi della figura precedente. Le linee rosse intercettano il punto di collisione.

Occorre ribadire che la soluzione ricavata si discosta sempre più dalla soluzione vera man mano che  $t$  aumenta, quindi l'esatto valore del tempo di collisione  $t_c$  e dell'ascissa  $x_c$  sono validi solo nei limiti, assai laschi, di questa approssimazione.

### 3 Soluzione numerica

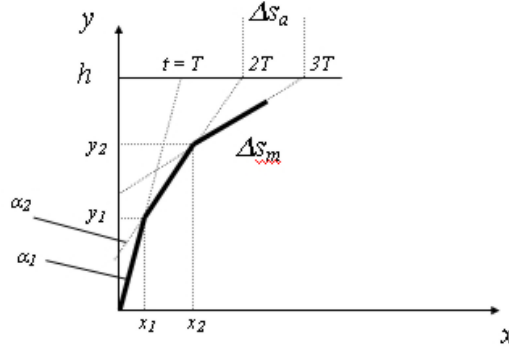


Figure 4: Soluzione numerica.

Non riuscendo a trovare una soluzione analitica esatta al problema posto, la cosa più naturale da fare è trovare una soluzione numerica. Discretizziamo il tempo negli istanti  $nT$ . In un intervallo di tempo  $(n-1)T, nT$  l'aereo percorre una distanza  $\Delta s_a = v_a T$ , mentre il missile percorre una distanza  $\Delta s_m = v_m T$  lungo la congiungente il punto  $(x_{n-1}, y_{n-1})$  con il punto  $(nT, h)$ , posizione dell'aereo nell'istante finale  $nT$ . Quest'ultima è una direzione di comodo che introduce un errore, trascurabile per  $T$  abbastanza piccolo.

$$x_0 = y_0 = 0 \quad (3.0.11)$$

$$x_1 = \Delta s_m \sin(\alpha_1) = \Delta s_m \sin(\arctg(\frac{\Delta s_a - x_0}{h - y_0})) \quad (3.0.12)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_m \sin(\alpha_2) = x_1 + \Delta s_m \sin(\arctg(\frac{2\Delta s_a - x_1}{h - y_1})) \quad (3.0.13)$$

In definitiva

$$x_n = x_{n-1} + \Delta s_m \sin(\alpha_n) = x_{n-1} + \Delta s_m \sin(\arctg(\frac{n\Delta s_a - x_{n-1}}{h - y_{n-1}})) \quad (3.0.14)$$

$$= x_{n-1} + \Delta s_m \frac{\frac{n\Delta s_a - x_{n-1}}{h - y_{n-1}}}{\sqrt{1 + (\frac{n\Delta s_a - x_{n-1}}{h - y_{n-1}})^2}} \quad (3.0.15)$$

Analogamente si trova

$$y_n = y_{n-1} + \Delta s_m \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n\Delta s_a - x_{n-1}}{h - y_{n-1}})^2}} \quad (3.0.16)$$

Le ultime due equazioni (accoppiate) sono direttamente utilizzabili per riprodurre la traiettoria del missile. Le curve in blu rappresentano la soluzione analitica approssimata.

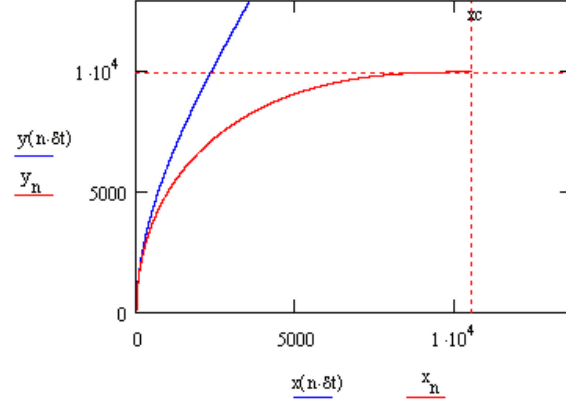


Figure 5: Soluzione numerica - Traiettoria del missile (in rosso). I dati iniziali sono gli stessi delle figure precedenti,  $v_a = 263 \frac{m}{s}$ ;  $v_m = 416 \frac{m}{s}$ ;  $h = 10000m$ . Il tempo di collisione è  $t_c \simeq 40.0sec$ , l'ascissa di collisione è  $x_c \simeq 10530m$ . Per confronto è anche mostrata la soluzione analitica approssimata (in blu).

La figura seguente mostra separatamente il grafico delle coordinate  $x_n$  e  $y_n$  in funzione del tempo.

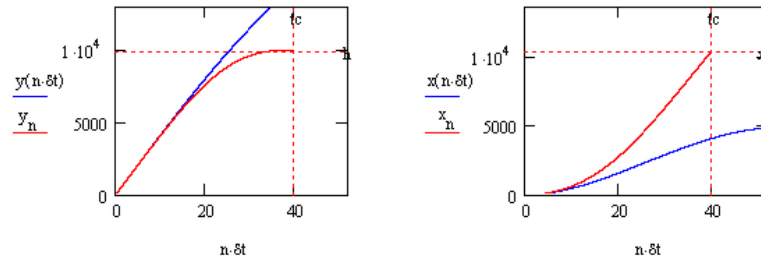


Figure 6: Soluzione numerica - Coordinate del missile. I dati iniziali sono gli stessi della figura precedente. In blu la soluzione analitica approssimata.



## 4 Appendice

### 4.1 Espressione delle derivate per la soluzione approssimata

Con riferimento alla soluzione approssimata in  $t \simeq 0$ , scriviamo per completezza l'espressione delle prime derivate di  $x$  e di  $y$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_a - \sqrt{\frac{\beta}{2}}[(c_2 + c_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + (c_2 - c_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + \\ (c_4 - c_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - (c_4 - c_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \\ \ddot{x} = -\beta[c_2e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - c_1e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - c_4e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + c_3e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \\ \ddot{x} = -\sqrt{\frac{\beta^3}{2}}[(c_2 - c_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - (c_2 + c_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + \\ (c_4 + c_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + (c_4 - c_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = -\sqrt{\frac{\beta}{2}}[(d_2 + d_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + (d_2 - d_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + \\ (d_4 - d_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - (d_4 - d_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \\ \ddot{y} = -\beta[d_2e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - d_1e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - d_4e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + d_3e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \\ \ddot{y} = -\sqrt{\frac{\beta^3}{2}}[(d_2 - d_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) - (d_2 + d_1)e^{\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + \\ (d_4 + d_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \cos(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t) + (d_4 - d_3)e^{-\sqrt{\frac{\beta}{2}}t} \sin(\sqrt{\frac{\beta}{2}}t)] \end{array} \right.$$

### 4.2 Andamento di $\phi$ e $\psi$ ricavato dalla soluzione numerica

Ottenuta la soluzione numerica è istruttivo visualizzare l'andamento di  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$ .

Da questa figura si intuisce l'errore commesso nelle relazioni ipotizzate nel ricavare la soluzione approssimata (in particolare  $\ddot{\phi} = -\beta\psi$ ).

### 4.3 Problema nel dominio di Laplace

Posto  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  e  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ , le equazioni risolventi originali

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_m^2 \\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{h-y}{v_a t - x} \end{array} \right.$$

nel dominio di Laplace si riscrivono

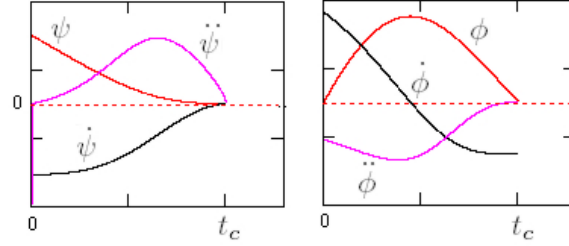


Figure 7: Andamento qualitativo di  $\phi(t), \psi(t)$  e delle loro prime derivate, così come ottenuto dalla soluzione numerica.

$$\begin{cases} (sX(s) - x(0)) * (sX(s) - x(0)) + (sY(s) + y(0)) * (sY(s) + y(0)) = \frac{v_m^2}{s} \\ (sY(s) - y(0)) * (\frac{v_a}{s} - X(s)) = (sX(s) - x(0)) * (\frac{h}{s} - Y(s)) \end{cases}$$

Usando le condizioni iniziali, rimaneggiando e omettendo la dipendenza da  $s$

$$\begin{cases} (sX) * (sX) + (sY) * (sY) = \frac{v_m^2}{s} \\ v_a(sY) * \frac{1}{s} - (sY) * X = h(sX) * \frac{1}{s} - (sX) * Y \end{cases}$$

I numerosi prodotti di convoluzione non semplificano il problema.

#### 4.4 Serie di potenze

L'andamento regolare delle funzioni  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$ , evidenziato mediante il metodo numerico, ci rassicura abbastanza riguardo all'ipotesi che queste funzioni siano analitiche in  $0 \leq t \leq t_c$ . Esiste dunque lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di  $t = 0$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad (4.4.1)$$

con

$$a_n = \frac{1}{n!} \psi^{(n)}|_{t=0} \quad b_n = \frac{1}{n!} \phi^{(n)}|_{t=0} \quad (4.4.2)$$

Le due equazioni risolventi

$$\begin{cases} \ddot{\psi}\psi + \ddot{\phi}\phi = 0 \\ \dot{\psi}\phi - (\dot{\phi} - v_a)\psi = 0 \end{cases}$$

si riscrivono

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - (\sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} - b_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \end{cases}$$

dove si è usato  $v_a = \dot{\phi}(0) = b_1$ . Mettendo un pò in ordine i vari prodotti si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} a_0 = h, & a_1 = -v_m, & b_0 = 0, & b_1 = v_a \\ 1 \cdot 2(a_0 a_2 + b_0 b_2) = 0 \\ 2 \cdot 3(a_0 a_3 + b_0 b_3) = -1 \cdot 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ 3 \cdot 4(a_0 a_4 + b_0 b_4) = -2 \cdot 3(a_1 a_3 + b_1 b_3) - 1 \cdot 2(a_2 a_2 + b_2 b_2) \\ 4 \cdot 5(a_0 a_5 + b_0 b_5) = -3 \cdot 4(a_1 a_4 + b_1 b_4) - 2 \cdot 3(a_2 a_3 + b_2 b_3) - 1 \cdot 2(a_3 a_2 + b_3 b_2) \\ 5 \cdot 6(a_0 a_6 + b_0 b_6) = -4 \cdot 5(a_1 a_5 + b_1 b_5) - 3 \cdot 4(a_2 a_4 + b_2 b_4) - 2 \cdot 3(a_3 a_3 + b_3 b_3) - 1 \cdot 2(a_4 a_2 + b_4 b_2) \\ \dots \\ 2(a_0 b_2 - a_2 b_0) = a_1 b_1 \\ 3(a_0 b_3 - a_3 b_0) = 2(a_2 b_1 - a_1 b_2) + a_1 b_2 \\ 4(a_0 b_4 - a_4 b_0) = 3(a_3 b_1 - a_1 b_3) + 2(a_2 b_2 - a_2 b_2) + a_1 b_3 \\ 5(a_0 b_5 - a_5 b_0) = 4(a_4 b_1 - a_1 b_4) + 3(a_3 b_2 - a_2 b_3) + 2(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_1 b_4 \\ 6(a_0 b_6 - a_6 b_0) = 5(a_5 b_1 - a_1 b_5) + 4(a_4 b_2 - a_2 b_4) + 3(a_3 b_3 - a_3 b_3) + 2(a_2 b_4 - a_4 b_2) + a_1 b_5 \\ \dots \end{cases}$$

Tenendo conto che  $b_0 = 0$ , si giunge alle equazioni interdipendenti

$$\begin{cases} a_n = -\frac{1}{a_0 n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a_k a_{n-k} + b_k b_{n-k}) & n \geq 2 \\ b_n = \frac{1}{a_0 n} \{a_{n-1} b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-n) a_k b_{n-k}\} & n \geq 2 \end{cases}$$

Anche in questo caso appare assai ostico trovare un modo di risolvere separatamente per  $a_n$  e  $b_n$ .

## **Ringraziamenti**

I miei ringraziamenti a Prof. Gianni Arioli, Prof. Roberto Giambo', Prof. Gianluca Stefanucci, Prof. Arnaldo D'Amico.