

# Frequenze proibite nei sistemi risonanti

Gabriele Filosofi

9 Giugno 2003

## Abstract

Che un reticolo periodico di  $N$  oscillatori LC a parametri concentrati abbia  $N$  frequenze di risonanza è cosa nota. In questo lavoro si vuole caratterizzare la distribuzione di queste frequenze, per qualsiasi  $N$ , e verificare l'ipotesi di A. D'Amico che queste possano addensarsi in bande definite, separate da intervalli "proibiti", eventualmente in dipendenza della dimensionalità del reticolo.

## 1 Introduzione

I fenomeni oscillatori avvengono quando un sistema, sollecitato da una forza esterna a carattere periodico, reagisce con una forza proporzionale alla sollecitazione applicata. Se la sollecitazione esterna ha una frequenza uguale a una delle frequenze di risonanza del sistema, il trasferimento di potenza verso il sistema ha un massimo.

Che un reticolo periodico di  $N$  di oscillatori accoppiati a parametri concentrati LC abbia  $N$  frequenze di risonanza è cosa nota. Indichiamo queste frequenze  $\{\omega^{(m)}\}$ . Il prof. A. D'Amico ha ipotizzato che le  $\omega^{(m)}$  possano addensarsi in bande definite, separate da intervalli "proibiti", eventualmente in dipendenza della dimensionalità del reticolo, analogamente alle bande di energia degli elettroni nei solidi cristallini.

Una serie di interrogativi sorgono:

1. Dalla risoluzione dell'equazione d'onda  $\mathcal{H}\psi = \epsilon\psi$  per un reticolo lineare monoatomico formato da  $N$  celle primitive risulta che anche in questo caso esistono infinite bande e gap di energia, e ciascuna banda permessa contiene  $2N$  livelli. Se l'analogia "energie proibite"  $\leftrightarrow$  "frequenze proibite" è fondata, dovremmo aspettarci di trovare le bande già nel caso unidimensionale.
2. Si potrebbe anche pensare che, per essere più coerenti con l'analogia del modello a bande dei solidi, si debba considerare non tanto le frequenze di risonanza, quanto la somma delle energie immagazzinate nei condensatori e negli induttori della rete.

3. L'aggiunta di elementi dissipativi nella rete fa sì che in corrispondenza delle risonanze il modulo della funzione di trasferimento non diverga, ma abbia dei massimi. Le frequenze di risonanza e le frequenze proibite restano le stesse?

*Nota.* In questo articolo i potenziali elettrici sono sempre riferiti alla massa; inoltre qualche volta usiamo, anche se impropriamente, il termine frequenza per indicare  $\omega$ , sapendo che  $\omega = 2\pi f$ .

## 2 Caso unidimensionale

In questo paragrafo risolviamo il problema unidimensionale.

### 2.1 Funzione di trasferimento di una rete a scala

Vogliamo determinare  $\Gamma_N \equiv \frac{V_N}{V_0}$ , funzione di trasferimento della rete a scala formata da  $N$  quadripoli passivi identici, così come mostrata in Figura 2.1. Ciascuno dei quadripoli è schematizzabile come un'impedenza trasversale  $Z_a$  e un'impedenza longitudinale verso massa  $Z_b$ .

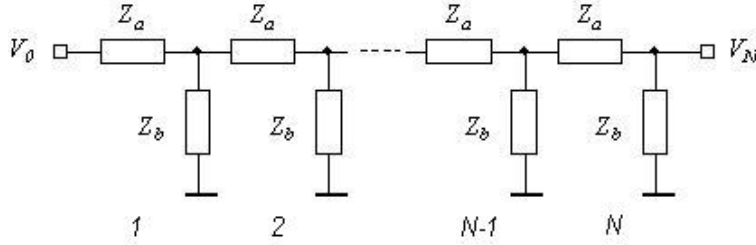


Figure 1: reticolo unidimensionale di impedenze

Per  $N = 1$  il risultato è immediato

$$V_1 = V_0 \frac{Z_b}{Z_a + Z_b} \quad (2.1.1)$$

$$\Gamma_1 \equiv \frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_b}{Z_b + Z_a} \quad (2.1.2)$$

Per il teorema di Thevenin la rete con  $N = 2$  è equivalente a un singolo quadripolo, avente impedenza trasversale  $Z_2 = Z_a + \frac{Z_b Z_a}{Z_b + Z_a}$ , impedenza longitudinale  $Z_b$  e tensione di ingresso  $V_1$ .

Si ha

$$V_2 = V_1 \frac{Z_b}{Z_b + Z_2} \quad (2.1.3)$$

Procedendo allo stesso modo, per qualunque  $N \geq 1$  sarà

$$V_N = V_{N-1} \frac{Z_b}{Z_b + Z_N} \quad (2.1.4a)$$

$$Z_N = Z_a + \frac{Z_b Z_{N-1}}{Z_b + Z_{N-1}} \quad Z_1 \equiv Z_a \quad (2.1.4b)$$

Definiamo la quantità

$$l \equiv \frac{Z_a}{2Z_b} \quad (2.1.5)$$

e introduciamo la variabile

$$K_N \equiv \frac{V_N}{V_{N-1}} = \frac{Z_b}{Z_b + Z_N} = \frac{1}{2(l+1) - K_{N-1}} \quad (2.1.6a)$$

$$K_1 \equiv \frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_b}{Z_b + Z_a} = \frac{1}{1+2l} \quad (2.1.6b)$$

A questo punto, posto

$$K_N \equiv \frac{S_N}{S_{N+1}} \quad (2.1.7)$$

le (2.1.6) diventano

$$S_{N+2} - 2(l+1)S_{N+1} + S_N = 0 \quad (2.1.8a)$$

$$S_1 = 1 \quad (2.1.8b)$$

$$S_2 = 1 + 2l \quad (2.1.8c)$$

L'equazione alle differenze (2.1.8) ha soluzione generale

$$S_N = Pr_1^N + Qr_2^N \quad (2.1.9)$$

Le radici dell'equazione caratteristica della (2.1.8) sono

$$r_1 = 1 + l + \sqrt{(1+l)^2 - 1} \quad (2.1.10a)$$

$$r_2 = 1 + l - \sqrt{(1+l)^2 - 1} \quad (2.1.10b)$$

Si verifica facilmente che una radice è l'inverso dell'altra, ragione per cui definiamo la quantità

$$\mathcal{A} \equiv r_1 = \frac{1}{r_2} = 1 + l + \sqrt{(1+l)^2 - 1} \quad (2.1.11)$$

Per quanto riguarda i coefficienti  $P$  e  $Q$ , questi si ricavano dalle condizioni al contorno. Il risultato è

$$S_N = \frac{(\mathcal{A} - 1)\mathcal{A}^{N-1} - (\frac{1}{\mathcal{A}} - 1)\frac{1}{\mathcal{A}^{N-1}}}{\mathcal{A} - \frac{1}{\mathcal{A}}} \quad (2.1.12)$$

Dalle (2.1.6a) e (2.1.7) abbiamo

$$V_N = V_0 \prod_{n=1}^N K_n = V_0 \prod_{n=1}^N \frac{S_n}{S_{n+1}} = V_0 \frac{S_1}{S_2} \frac{S_2}{S_3} \dots \frac{S_N}{S_{N+1}} = V_0 \frac{S_1}{S_{N+1}} \quad (2.1.13)$$

sicché

$$\Gamma_N \equiv \frac{V_N}{V_0} = \frac{1}{S_{N+1}} \quad (2.1.14)$$

cioè

$$\Gamma_N = \frac{\mathcal{A} - \frac{1}{\mathcal{A}}}{(\mathcal{A} - 1)\mathcal{A}^N - (\frac{1}{\mathcal{A}} - 1)\frac{1}{\mathcal{A}^N}} \quad (2.1.15)$$

oppure, esplicitando rispetto a  $l$ ,

$$\Gamma_N = \frac{\sqrt{(1+l)^2 - 1}}{(l + \sqrt{(1+l)^2 - 1})(1 + l + \sqrt{(1+l)^2 - 1})^N - (l - \sqrt{(1+l)^2 - 1})(1 + l - \sqrt{(1+l)^2 - 1})^N} \quad (2.1.16)$$

La figura 2.1 mostra il modulo di  $\Gamma_N$  relativi alle reti di lunghezza  $N \leq 3$ .

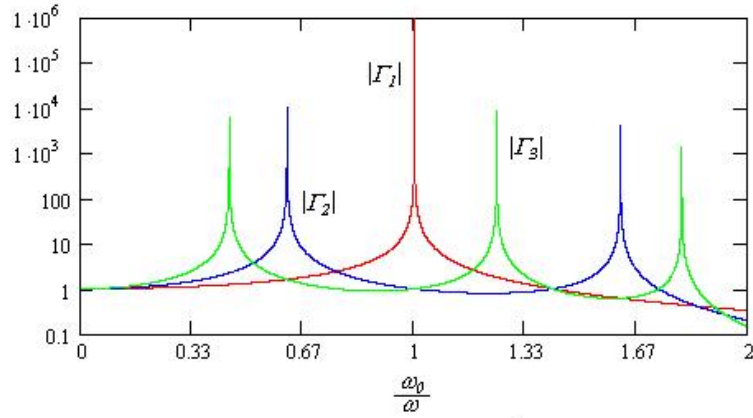


Figure 2: modulo della funzione di trasferimento  $\Gamma_N$  per  $N \leq 3$

## 2.2 poli di $\Gamma_N$

I poli della funzione di trasferimento sono gli zeri del denominatore della (2.1.15), escludendo i casi in cui  $\mathcal{A} = \frac{1}{\mathcal{A}}$  per i quali  $\Gamma_N$  ha una singolarità del tipo  $\frac{0}{0}$ . Il caso  $\mathcal{A} = 1$  si verifica per  $\frac{Z_a}{Z_b} = 0$ , il che è sempre falso.  $\mathcal{A} = -1$  si realizza invece per un opportuno valore di  $\omega$ , come risulterà in un caso specifico al paragrafo seguente. In definitiva, per  $\mathcal{A}^2 \neq 1$ , abbiamo

$$(\mathcal{A} - 1)\mathcal{A}^N - (\frac{1}{\mathcal{A}} - 1)\frac{1}{\mathcal{A}^N} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\mathcal{A}^{2N} = \frac{\frac{1}{\mathcal{A}} - 1}{\mathcal{A} - 1} \quad (2.2.2)$$

I poli di  $\Gamma_N$ ,  $\{\omega^{(m)}\}_{m=0 \dots N-1}$  sono dunque le soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{A}^{2N+1} = -1 \quad (2.2.3)$$

oppure

$$|\mathcal{A}| = 1 \quad (2.2.4a)$$

$$\arg \mathcal{A} = \frac{(2m+1)\pi}{2N+1} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.2.4b)$$

### 2.3 poli di $\Gamma_N$ nel caso di reticolo LC

Consideriamo il caso in cui il quadripolo elementare sia un risonatore puramente reattivo LC (vedi figura)

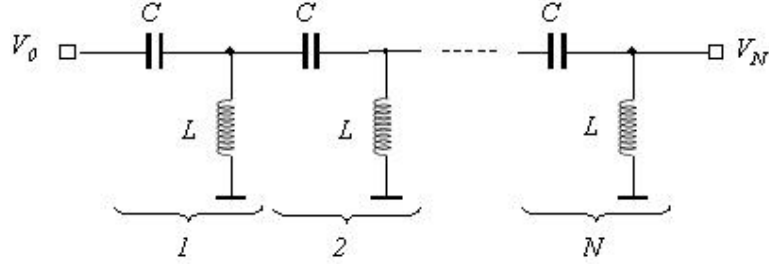


Figure 3: reticolo unidimensionale di oscillatori accoppiati LC

Si ha

$$Z_a = \frac{1}{j\omega C} \quad (2.3.1a)$$

$$Z_b = j\omega L \quad (2.3.1b)$$

Dalla definizione (2.4.5)

$$l = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad (2.3.2)$$

dove  $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Sostituendo la (2.3.2) nella (2.1.11) troviamo che per  $\omega < \frac{1}{2}\omega_0$  è  $\mathcal{A} \in (-1, 0)$ , e la (2.2.4a) non è soddisfatta; per  $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$  si verifica la condizione  $\mathcal{A} = -1$ , di singolarità per  $\Gamma_N$  (in questo caso  $\Gamma_N$  assume un valore finito dipendente da  $N$ ); infine per  $\omega > \frac{1}{2}\omega_0$   $\mathcal{A}$  ha parte immaginaria non nulla,

$$\Re(\mathcal{A}) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad (2.3.3a)$$

$$\Im(\mathcal{A}) = \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^2} \quad (2.3.3b)$$

Quindi,

$$|\mathcal{A}| = \sqrt{\Re(\mathcal{A})^2 + \Im(\mathcal{A})^2} \equiv 1 \quad (2.3.4a)$$

$$\arg(\mathcal{A}) = \arctan \frac{\Im(\mathcal{A})}{\Re(\mathcal{A})} = \arctan \frac{\sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^2}}{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (2.3.4b)$$

Per la (2.2.4), la condizione  $|\mathcal{A}| = 1$ , identicamente valida per  $\omega > \frac{1}{2}\omega_0$ , ci permette di concludere che i poli della rete sono le pulsazioni  $\{\omega^{(m)}\}_{m=0\dots N-1}$  che soddisfano

$$\arctan \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega^{(m)}}\right)^2\right)^2}}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega^{(m)}}\right)^2} = \frac{(2m+1)\pi}{2N+1} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3.5)$$

oppure

$$\omega^{(m)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - 2 \cos \left(\frac{2m+1}{2N+1} \pi\right)}} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3.6)$$



## 2.4 Frequenze proibite nel caso di reticolo LC

**Definizione 2.4.1.** Definito l'insieme delle pulsazioni di risonanza della rete LC a  $N$  celle

$$\Omega_N \equiv \{\underline{\omega} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{t.c.} \quad \lim_{\omega \rightarrow \underline{\omega}} |\Gamma_N(\omega)| = \infty\} \quad (2.4.1)$$

sia l'insieme delle risonanze permesse

$$\Omega \equiv \bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N \quad (2.4.2)$$

Per la (2.3.6) è

$$\Omega = \left\{ \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{2m+1}{2n+1}\pi\right)}}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \right\} \quad (2.4.3)$$

*Oss.* 2.4.2.  $\Omega$  ha cardinalità infinita. Su  $\Omega$  è pure definita l'applicazione biunivoca che associa a ciascun suo elemento  $\underline{\omega}$  il coefficiente che compare nell'argomento del coseno,  $\frac{2m+1}{2n+1}$ . Questi numeri formano un sottoinsieme proprio dei numeri razionali, sicché  $\Omega$  è infinito numerabile.

**Definizione 2.4.3.** Sia l'insieme delle risonanze proibite

$$\bar{\Omega} \equiv \mathbb{R}^+ - \Omega \quad (2.4.4)$$

*Oss.* 2.4.4. Una frequenza proibita in  $\bar{\Omega}$  è  $\bar{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ . Infatti si ricava facilmente che  $l = 1$ ,  $\mathcal{A} = -j$ ,  $|\Gamma_N| = 1$  per ogni  $N$ .

Ma quante sono le frequenze proibite?

Si ha

$$\bar{\Omega} = [0, \frac{\omega_0}{2}] \cup \Omega_C \quad (2.4.5)$$

dove

$$\Omega_C \equiv (\frac{\omega_0}{2}, \infty) - \Omega \quad (2.4.6)$$

*Oss.* 2.4.5. Possiamo considerare il compatto  $[0, \frac{\omega_0}{2}]$  una vera e propria *gap di risonanze proibite*.

*Oss.* 2.4.6. Per quanto detto sulla cardinalità dell'insieme  $\Omega$  risulta che  $\Omega_C$  non solo è infinito, ma ha la potenza del continuo, anche se si tratta di un continuo del tutto particolare, in quanto privato di un'infinità numerabile di punti.

In figura 2.4 è riportata la distribuzione dell'inverso delle pulsazioni di risonanza normalizzate  $\frac{\omega_0}{\underline{\omega}}$ , nell'intervallo  $\underline{\omega} \in (\frac{\omega_0}{2}, \infty)$ , ottenuta sui reticoli di lunghezza  $1 \leq N \leq 100$ . L'involuppo di questa distribuzione ha massimi e minimi locali. Particolarmente evidente è il minimo nell'intorno della risonanza proibita  $\bar{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ . Alcune risonanze discrete ad elevata densità compaiono nel mezzo di un intorno a bassa densità, come p.es.  $\underline{\omega} = \omega_0$ .

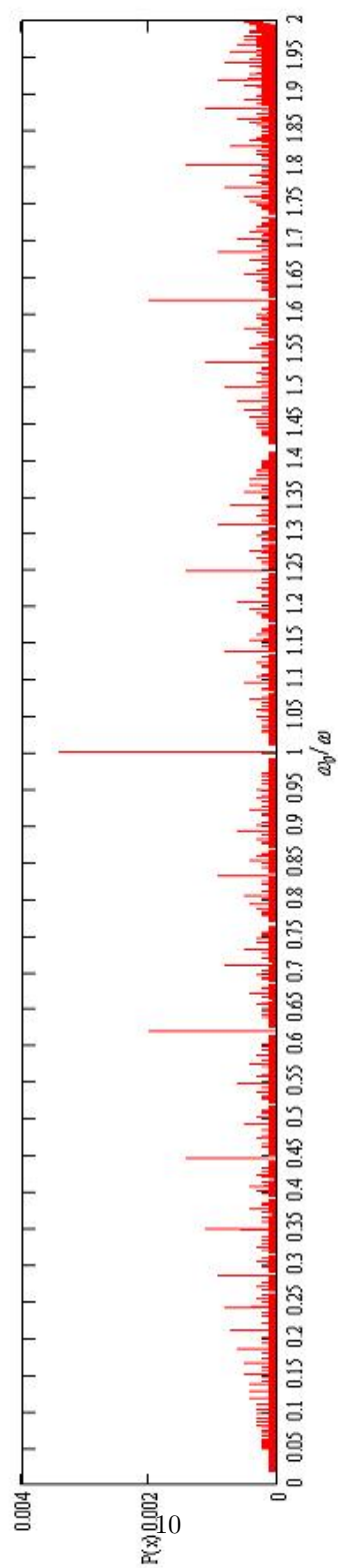


Figure 4: distribuzione delle frequenze di risonanza per  $1 \leq N \leq 100$

### 3 Caso bidimensionale

In questo paragrafo risolviamo il problema bidimensionale.

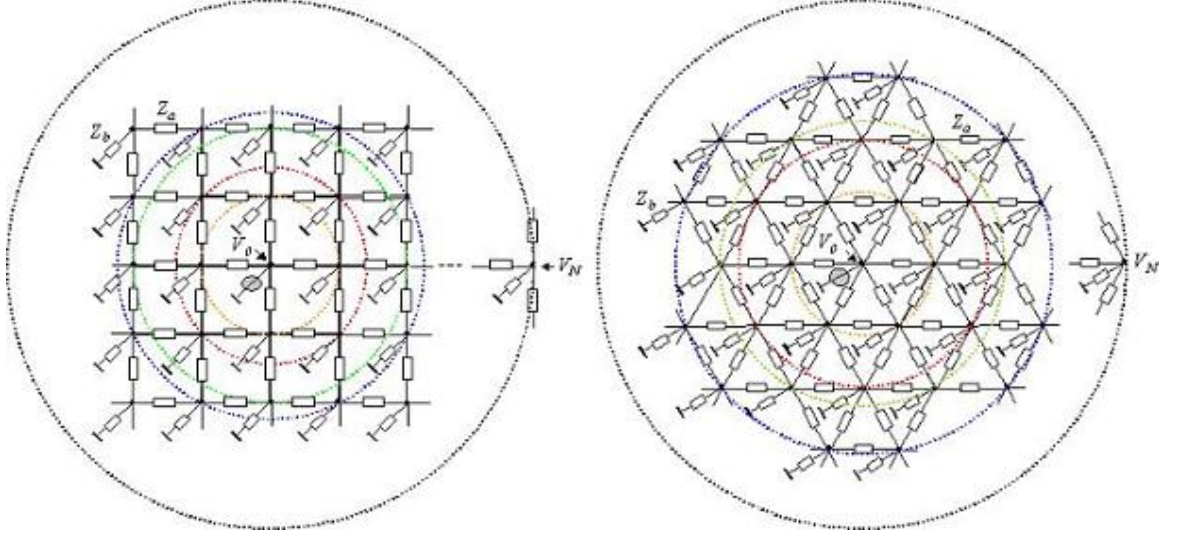


Figure 5: reticoli a cella quadrata e a cella esagonale

A differenza del caso unidimensionale il rapporto tra il numero di impedenze longitudinali ( $N_a$ ) e il numero di impedenze trasversali ( $N_b$ ) è diverso da 1. Per il reticolo unidimensionale era infatti  $N_a = N_b = N$ , ma in un reticolo bidimensionale a celle quadrate, come quello di figura 3, è  $N_a = 2N(N+1)$  e  $N_b = 2N(\frac{N}{2}+1)$ . In generale in un reticolo a più dimensioni è sempre  $N_a > N_b$ , sicché nel caso di una rete LC, è  $|\Omega_N| = N_b$ .

Osserviamo che per un reticolo LC, puramente reattivo, le frequenze di risonanza sono i poli della funzione di trasferimento, e sono invarianti rispetto alla definizione delle porte di ingresso e di uscita alla rete. Lo stesso è ovviamente vero per l'insieme delle frequenze proibite. Quindi, se per un certo reticolo vorremo determinare  $\Omega$ , o  $\bar{\Omega}$ , potremo definire a piacere le porte di ingresso e di uscita.

La rete bidimensionale da prendere in esame potrebbe essere una di quelle mostrate in Figura 3. Si nota che la scelta del nodo di ingresso nel centro del reticolo introduce delle utili relazioni di simmetria nel potenziale ai nodi. Ma la cosa più semplice è iniziare dal reticolo di Figura 3, per il quale  $N_a = N(N+1) - 1$ ,  $N_b = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 2$ .

E' inutile che il nodo di ingresso abbia collegata un'impedenza  $Z_b$  verso massa.

...work in progress.

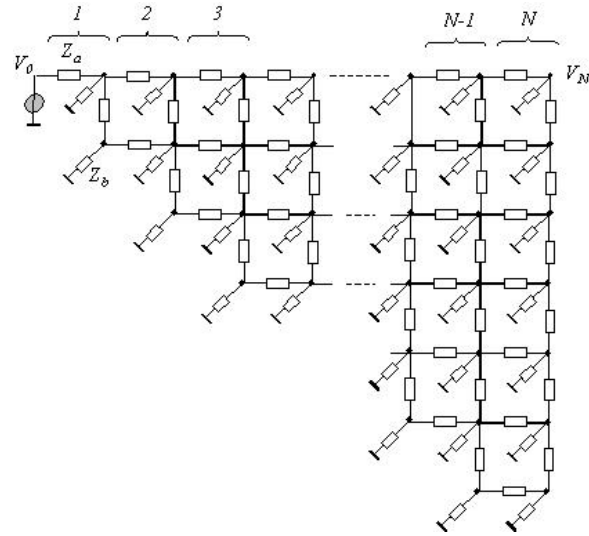


Figure 6: reticolo a cella quadrata

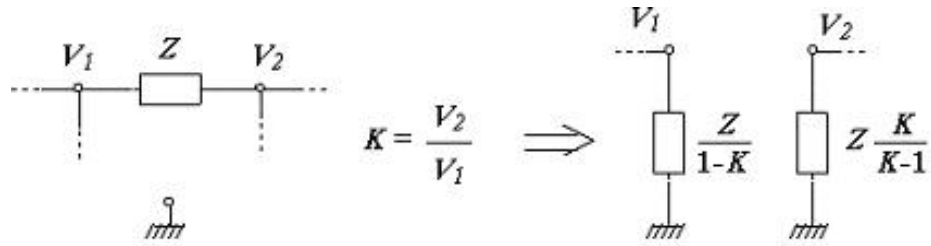


Figure 7: teorema di Miller

## Ringraziamenti

I miei ringraziamenti al prof. A.D'Amico.