Funzione di Green

Gabriele Filosofi

Maggio 2006

1 Introduzione

Consideriamo l'equazione lineare ordinaria non omogenea unidimensionale

$$L_t u(t) = f(t) \qquad t \in I \tag{1.0.1}$$

dove $L_t = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}$ è un operatore differenziale lineare, con $a_n(t) \neq 0$ e $a_k(t)$ continue su I. $f(t)$ è la funzione forzante, continua su I. Cerchiamo soluzioni $u(t)$ al problema di Cauchy definito dalla 1.0.1 e dalle condizioni iniziali (BCs, *Boundary Conditions*) del problema, $B_k = 0$ ($k = 1, \ldots, n$). Le BCs sono estremamente importanti, e possono assumere forme diverse. Tipicamente le BCs fissano il valore di u e/o delle sue derivate agli estremi, o a un solo estremo, dell'intervallo I. Può capitare di avere delle situazioni miste, come ad esempio $\alpha u(a) + \beta u(b) = 1$ (dove $I \equiv [a, b]$). Inoltre le BCs possono essere omogenee (valori a zero) o nonomogenee. L'intervallo I può essere finito o infinito.

Assumiamo per il nostro problema una soluzione generale del tipo

$$u(t) = u_{(o)}(t) + u_{(p)}(t) \tag{1.0.2}$$

dove $u_{(o)}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(t)$ è la soluzione del problema omogeneo ($f(t) \equiv 0$) con annesse BCs in generale nonomogenee e $u_{(p)}$ una soluzione particolare del problema non omogeneo, con BCs omogenee. I metodi standard per determinare $u_{(p)}$ sono il *metodo della variazione dei parametri* e il *metodo dei coefficienti indeterminati*. Introduciamo qui il metodo alternativo della funzione di Green. Formalmente

$$u_{(p)}(t) = L_t^{-1} f(t) \tag{1.0.3}$$

Se L_t è un operatore differenziale lineare, L_t^{-1} sarà un operatore integrale lineare, del tipo

$$L_t^{-1} f(t) \equiv \int_I G(t, \xi) f(\xi) d\xi \tag{1.0.4}$$

dove G è la funzione di Green associata al problema di Cauchy posto. Deve essere

$$f(t) = L_t L_t^{-1} f(t) = \int_I L_t G(t, \xi) f(\xi) d\xi \tag{1.0.5}$$

che, per le proprietà note della delta di Dirac, è verificata solo se

$$L_t G(t, \xi) = \delta(t - \xi) \qquad t, \xi \in I \tag{1.0.6}$$

Un teorema stabilisce che la 1.0.6 è soddisfatta sse

1. $L_t G(t, \xi) = 0 \quad \text{per} \quad t \neq \xi$
2. G è $n - 2$ volte differenziabile rispetto a t con derivate continue in $t = \xi$
3. $\frac{\partial^{(n-1)} G(t,\xi)}{\partial t^{(n-1)}} |_{t=\xi^-}^{t=\xi^+} = \frac{1}{a_n(\xi)}$

La prima condizione ci permette di utilizzare direttamente la soluzione omogenea $u_{(o)}$ per stabilire la forma che G deve avere per $t \neq \xi$

$$G(t, \xi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C1_k(\xi) u_k(t) & per\ t < \xi \\ \sum_{k=1}^{n} C2_k(\xi) u_k(t) & per\ t > \xi \end{cases}$$

Notiamo che le costanti di integrazione della soluzione omogenea sono state sostituite da funzioni incognite del parametro ξ.

L'ultima condizione (3) è detta condizione di salto (*jump condition*). In pratica sta a significare che essendo $\frac{\partial^n G}{\partial t^n}$ a sua volta una delta di Dirac, $\frac{\partial^{(n-1)} G}{\partial t^{(n-1)}}$ deve essere una funzione a gradino (da cui il salto).

Le BCs omogenee, valide per $u(t)$ agli estremi di I, possono essere applicate direttamente a $G(t, \xi)$ e devono essere utilizzate, insieme alle condizioni di continuità (2) e di salto (3) per determinare univocamente le funzioni incognite $C1_k$ e $C2_k$.

La funzione di Green dipende da L_t e dalle BCs, non dalla funzione forzante $f(t)$. In ciò sta la potenza del metodo. Fisicamente il senso di $G(t, \xi)$ è quello della funzione che trasferisce su $u(t)$ l'azione prodotta dalla forza f agente in ξ (ξ può avere il significato di un punto dello spazio o di un istante di tempo). Il problema allora si sposta sulla determinazione di G. Il metodo di Green si applica anche ai problemi multidimensionali, dove l'operatore L può essere un operatore differenziale alle derivate parziali (PDEs).

2 Equazioni del primo ordine

Consideriamo l'equazione ODE lineare del primo ordine

$$\dot{u} + a_0(t)u = f(t) \tag{2.0.7}$$
$$u(0) = 0 \tag{2.0.8}$$

L'operatore L_t è in questo caso $\frac{d}{dt} + a_0(t)$, con $a_0(t)$ continua. Notare che il coefficiente della derivata massima è assunto pari a 1. Ciò comporterà che la discontinuità di salto in G sarà uguale a 1.

2.1 Esempio I

Risolvere

$$\begin{cases} \dot{u} + tu = te^{-\frac{t^2}{2}} \qquad 0 \leq t < \infty \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea si integra per parti

$$\frac{du}{u} = tdt \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

La condizione (1) $L_t G(t,\xi) = 0 \quad \text{per} \quad t \neq \xi$ sta a indicare che G ha la stessa forma della soluzione omogenea

$$G(t,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} & per\ t < \xi \\ C_2(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} & per\ t > \xi \end{cases}$$

Usando la condizione iniziale

$$G(0,\xi) = u(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1(\xi) \equiv 0$$

quindi

$$G(t,\xi) = \begin{cases} 0 \quad per\ t < \xi \\ C_2(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad per\ t > \xi \end{cases}$$

Dato che L_t è del primo ordine la condizione (2) di continuità non può essere mantenuta, mentre vale la condizione di salto (3) che produce

$$G(t,\xi)|_{t=\xi^-}^{t=\xi^+} = 1 \quad \Rightarrow C_2(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

In definitiva,

$$G(t,\xi) = \begin{cases} 0 \quad per\ t < \xi \\ e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{\xi^2}{2}} \quad per\ t \geq \xi \end{cases}$$

La soluzione particolare cercata è

$$u(t) = \int_0^\infty G(t,\xi)f(\xi)d\xi = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{\xi^2}{2}} \xi e^{\frac{-\xi^2}{2}} d\xi = \frac{1}{2}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{2.1.1}$$

Ricordiamo di straforo che la soluzione generale del problema assegnato (la quale non contempla il vincolo della condizione iniziale) è somma della soluzione omogenea e della soluzione particolare

$$u(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{2}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{2.1.2}$$

3 Equazioni del secondo ordine

Consideriamo l'equazione ODE lineare del secondo ordine

$$\ddot{u} + a_1(t)\dot{u} + a_0(t)u = f(t) \tag{3.0.3}$$

L'operatore L_t è in questo caso $\frac{d^2}{dt^2}+a_1(t)\frac{d}{dt}+a_0(t)$, con $a_1(t)$ e $a_0(t)$ continue. Ancora una volta il coefficiente della derivata massima è assunto pari a 1, sicchè 1 è la discontinuità di salto in $\frac{\partial G}{\partial t}$.

3.1 Esempio I

Risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = f(t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ u(0) = u(2\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea ha soluzione $u(t) = at + b$.
La condizione (1) $L_t G(t,\xi) = 0 \quad \text{per} \quad t \neq \xi$ produce

$$G(t,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)t + b_1(\xi) & per\ t < \xi \\ a_2(\xi)t + b_2(\xi) & per\ t > \xi \end{cases}$$

Usando le BCs

$$G(0,\xi) = u(0) \quad \Rightarrow b_1 \equiv 0$$

$$G(2\pi,\xi) = u(2\pi) = 0 \quad \Rightarrow a_2(\xi)2\pi + b_2(\xi) = 0 \quad \Rightarrow b_2 \equiv -2\pi a_2$$

quindi

$$G(t,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)t & per\ t < \xi \\ a_2(\xi)(t-2\pi) & per\ t > \xi \end{cases}$$

La condizione (2) di continuità di $G(t,\xi)$ in $t = \xi$ produce

$$a_1(\xi)\xi = a_2(\xi)(\xi - 2\pi) \quad \Rightarrow a_1(\xi) = a_2(\xi)(1 - \tfrac{2\pi}{\xi})$$

La condizione di salto (3) produce

$$G'(t)\big|_{\xi^-}^{\xi^+} = 1 \quad \Rightarrow a_2(\xi) = a_1(\xi)$$

che, combinata con le relazioni precedenti, dà

$$\begin{cases} a_1(\xi) = \frac{\xi}{2\pi} - 1 \\ a_2(\xi) = \frac{\xi}{2\pi} \end{cases}$$

In definitiva,

$$G(t,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\xi-\pi)t & per\ t \le \xi \\ \frac{1}{2\pi}(t-\pi)\xi & per\ t \ge \xi \end{cases}$$

La soluzione particolare cercata è

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t,\xi)f(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^t (t-\pi)\xi f(\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_t^{2\pi}(\xi-\pi)tf(\xi)d\xi \quad (3.1.1)$$

Osserviamo che $G(t,\xi) \equiv G(\xi,t)$, cioè il kernel è simmetrico.

3.2 Esempio II

Risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} - u = f(t) & -\infty < t < +\infty \\ \lim_{t\to\pm\infty} u(t) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea ha soluzione $u(t) = ae^t + be^{-t}$.
La condizione (1) $L_t G(t,\xi) = 0$ per $t \ne \xi$ produce

$$G(t,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)e^t + b_1(\xi)e^{-t} & per\ t < \xi \\ a_2(\xi)e^t + b_2(\xi)e^{-t} & per\ t > \xi \end{cases}$$

Usando le BCs

$$\lim_{t\to-\infty} G = 0 \quad \Rightarrow b_1 \equiv 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} G = 0 \quad \Rightarrow a_2 \equiv 0$$

quindi

$$G(t,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)e^t & for\ t < \xi \\ b_2(\xi)e^{-t} & for\ t > \xi \end{cases}$$

Le condizioni di continuità in $t = \xi$ (2) e di salto (3) sono

$$G(\xi^+,\xi) = G(\xi^+,\xi) \quad \Rightarrow \quad b_2 e^{-\xi} = a_1 e^{\xi}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{\xi^-}^{\xi^+} = 1 \quad \Rightarrow \quad -b_2 e^{-\xi} - a_1 e^{\xi} = 1$$

da cui

$$\begin{cases} a_1(\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\xi} \\ b_2(\xi) = -\frac{1}{2}e^{\xi} \end{cases}$$

In definitiva,

$$G(t,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{t-\xi} & per\ t \le \xi \\ -\frac{1}{2}e^{-t+\xi} & per\ t \ge \xi \end{cases} = -\frac{1}{2}e^{-|t-\xi|}$$

La soluzione particolare cercata è

$$u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\xi} f(\xi)d\xi - \frac{1}{2}e^{t}\int_{t}^{\infty} e^{-\xi} f(\xi)d\xi \tag{3.2.1}$$