Curvatura ed evoluta di curve parametriche

Gabriele Filosofi

Aprile 2005

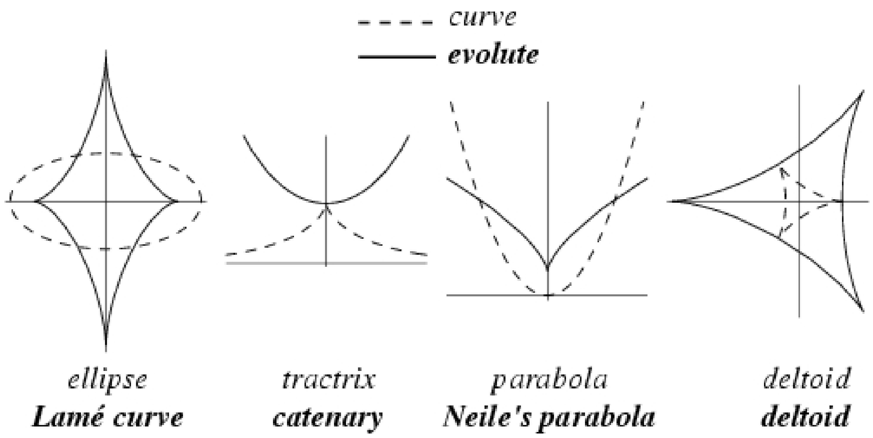

Figure 1: Evolute di curve piane

Contents

1 Introduzione

Il concetto di curvatura apparve nel V libro delle coniche di Apollonius (262-190 a.C.). Newton calcolò la formula del raggio di curvatura per diverse curve, compresa la cicloide e la spirale di archimede. Nel farlo riprodusse il risultato già ottenuto da Huygens (1673), che il luogo del centro di curvatura (evoluta) di una cicloide è una cicloide. Naturalmente il metodo di Newton fu analitico, mentre quello di Huygens era geometrico.

2 Definizioni

Sia dato il compatto $I \equiv [a, b]$ e nel piano x-y la curva parametrica $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$, con $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t)$ continui su I. Su I sono allora definite le seguenti quantità

- La **lunghezza di arco** di $\mathcal{C}$

$$s(t) = \int_a^t [(\dot{x}(\tau))^2 + (\dot{y}(\tau))^2]^{\frac{1}{2}} d\tau \tag{2.0.1}$$

- L'**inclinazione della tangente** di $\mathcal{C}$

$$\Phi(t) = arctan(\frac{dy}{dx}) = arctan(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}) \tag{2.0.2}$$

- La **curvatura** di $\mathcal{C}$

$$\kappa(t) = |\frac{d\Phi}{ds}| = \frac{|\frac{d^2y}{dx^2}|}{[1 + (\frac{d^2y}{dx^2})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.0.3}$$

- Il **raggio di curvtura** di $\mathcal{C}$

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \tag{2.0.4}$$

Considerato su $\mathcal{C}$ un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \equiv (x(t_0), y(t_0))$, se $\dot{x}(t_0) \neq 0$ la retta tangente è

$$y - y_0 = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x_0) \tag{2.0.5}$$

Se $\dot{y}(t_0) \neq 0$ la retta ortogonale è

$$y - y_0 = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x_0) \tag{2.0.6}$$

Su questa retta, a distanza $R(t_0)$ da P_0, nella direzione in cui $\mathcal{C}$ volge la sua concavità, giace il centro (x_C, y_C) del **cerchio osculatore** di $\mathcal{C}$ in P_0. In equazioni,

$$y_C - y_0 = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x_C - x_0) \tag{2.0.7}$$

$$(x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2 = R(t_0)^2 \tag{2.0.8}$$

Quindi

$$|x_C - x_0| = \frac{R(t_0)}{\sqrt{1 + (\frac{\dot{x}}{\dot{y}})^2}} \tag{2.0.9}$$

$$|y_C - y_0| = \frac{R(t_0)}{\sqrt{1 + (\frac{\dot{y}}{\dot{x}})^2}} \tag{2.0.10}$$

Esplicitando R abbiamo

$$|x_C - x_0| = |\dot{y}|\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} \tag{2.0.11}$$

$$|y_C - y_0| = |\dot{x}|\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} \tag{2.0.12}$$

Le derivate si intendono ovviamente calcolate in t_0.

Al variare di $t \in I$, il centro del cerchio osculatore di $\mathcal{C}$ nel punto $(x(t), y(t))$ (*centro di curvatura*) descrive una curva $\mathcal{C}'$ nel piano x-y, avente coordinate parametriche $(\overline{x}(t), \overline{y}(t))$, legate alle $(x(t), y(t))$ dalle relazioni precedenti. Se nelle espressioni precedenti si valuta il segno delle quantità in modulo, in tutti i possibili casi di concavità e verso di parametrizzazione, si riesce a rimuovere le operazioni di modulo, ottenendo

$$\overline{x} = x - \dot{y}\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \tag{2.0.13}$$

$$\overline{y} = y + \dot{x}\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \tag{2.0.14}$$

$\mathcal{C}'$ è detta **evoluta** di $\mathcal{C}$. Ci si può chiedere se esista una curva la cui evoluta è esattamente la stessa curva, o una versione traslata. Esistono due curve che hanno questa proprietà, la cicloide e la spirale logaritmica.

Se $\mathcal{C}'$ è l' evoluta di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ è l'**involuta** (o **evolvente**) di $\mathcal{C}'$. Ogni curva parallela a $\mathcal{C}$ è anche una involuta di $\mathcal{C}'$. Quindi una curva ha un'unica evoluta ma infinite involute.

La definizione dell'evoluta è indipendente dalla parametrizzazione della curva originale (Gray 1997).

3 Esempi

3.1 Ellisse

Come primo esempio di curva $\mathcal{C}$ consideriamo un'ellisse centrata in $(0,0)$, avente semiassi a e b, orientati secondo x e y. L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1.1}$$

Per esprimere $\mathcal{C}$ in forma parametrica è sufficiente porre

$$x(t) = a \cdot cos(t) \tag{3.1.2}$$
$$y(t) = b \cdot sin(t) \tag{3.1.3}$$
$$0 \leq t < 2\pi \tag{3.1.4}$$

essendo t il parametro. Si ricavano facilmente le coordinate parametriche di $\mathcal{C}'$

$$\overline{x}(t) = a \cdot cos(t) - cos(t)\frac{a^2 sin^2(t) + b^2 cos^2(t)}{a} = (a - \frac{b^2}{a}) \cdot cos^3(t) \tag{3.1.5}$$
$$\overline{y}(t) = b \cdot sin(t) - sin(t)\frac{a^2 sin^2(t) + b^2 cos^2(t)}{b} = (b - \frac{a^2}{b}) \cdot sin^3(t) \tag{3.1.6}$$

Eliminando il parametro t, determiniamo l'equazione di $\mathcal{C}'$ in coordinate cartesiane

$$(\frac{\overline{x}}{b})^{\frac{2}{3}} + (\frac{\overline{y}}{a})^{\frac{2}{3}} = (\frac{a^2 - b^2}{ab})^{\frac{2}{3}} \tag{3.1.7}$$

L'evoluta dell'ellisse è una ipocicloide a 4-cuspidi, o asteroide.

3.2 Asteroide

L'asteroide è una ipocicloide a 4-cuspidi, anche chiamata tetracuspide, cubocicloide, o paraciclo. L'equazione cartesiana dell'asteroide è

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \tag{3.2.1}$$

L'astreroide in forma parametrica è

$$x(t) = a \cdot cos^3(t) \tag{3.2.2}$$
$$y(t) = a \cdot sin^3(t) \tag{3.2.3}$$
$$0 \leq t < 2\pi \tag{3.2.4}$$

Troviamo che

$$s(t) = \frac{3}{2} sin^2(t), \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$$

$$\kappa(t) = -\frac{2}{3} |csc(2t)|$$

$$\Phi(t) = -t$$

L'evoluta dell'asteroide è un asteroide di dimensioni doppie

$$\overline{x}(t) = \frac{a}{2}[3cos(t) - cos(3t)] \tag{3.2.5}$$

$$\overline{y}(t) = \frac{a}{2}[3sin(t) + sin(3t)] \tag{3.2.6}$$

3.3 Cicloide

La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza di un cerchio di raggio a che rotola, senza strisciare, su una retta fissata. La cicloide non può essere espressa in forma cartesiana $y = f(x)$ mediante funzioni elementari, in altre parole la cicloide è una curva trascendentale. Le equazioni parametriche della cicloide sono

$$x(t) = a[t - sin(t)] \tag{3.3.1}$$

$$y(t) = a[1 - cos(t)] \tag{3.3.2}$$

Si trova facilmente

$$\overline{x}(t) = a[t + sin(t)] \tag{3.3.3}$$

$$\overline{y}(t) = -a[1 - cos(t)] \tag{3.3.4}$$

L'evoluta della cicloide è la stessa cicloide che ha subito una traslazione di $-\pi a$ nel senso dell'asse x e una traslazione $-2a$ nel senso dell'asse y.

3.4 Epicicloide

La epicicloide è la curva descritta da un punto della circonferenza di un cerchio che rotola, senza strisciare, sulla circonferenza di un cerchio più grande. Il rotolamento avviene sul lato esterno del cerchio più grande. Se b è il raggio del cerchio minore e a il raggio del cerchio maggiore, le equazioni parametriche della epicicloide sono

$$x(t) = (a + b)\cos(t) - b\cos(\tfrac{a+b}{b}t) \tag{3.4.1}$$

$$y(t) = (a + b)\sin(t) - b\sin(\tfrac{a+b}{b}t) \tag{3.4.2}$$

$$t \geq 0 \tag{3.4.3}$$

L'evoluta della epicicloide è la stessa epicicloide più piccola ruotata di $\frac{b\pi}{a}$.

L'epicicloide fu studiata da Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), de L'Hôpital (1690), Jacob Bernoulli (1690), la Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725), Euler (1745, 1781). Se $a = (n+1)b$, con n intero, la epicicloide è una curva chiusa senza nodi, di lunghezza $8(n+2)b$ e area $\pi b^2((n+2)^2 + n + 2)$.

Casi particolari sono quelli in cui $a = b$ (cardioide) $a = 2b$ (nefroide).

3.5 Ipocicloide

La ipocicloide è la curva descritta da un punto della circonferenza di un cerchio che rotola, senza strisciare, sulla circonferenza di un cerchio più grande. Il rotolamento avviene sul lato interno del cerchio più grande. Se b è il raggio del cerchio minore e a il raggio del cerchio maggiore, le equazioni parametriche della epicicloide sono

$$x(t) = (a-b)\cos(t) + b\cos(\tfrac{a-b}{b}t) \tag{3.5.1}$$

$$y(t) = (a-b)\sin(t) - b\sin(\tfrac{a-b}{b}t) \tag{3.5.2}$$

$$t \geq 0 \tag{3.5.3}$$

L'evoluta della ipocicloide è la stessa ipocicloide più grande ruotata di $\frac{b\pi}{a}$. Se $a = (n+1)b$, con n intero, la ipocicloide è una curva chiusa senza nodi, di lunghezza $8nb$ e area $b^2(n^2 - n)$. Casi particolari sono quelli in cui $a = 3b$ (tricuspide) $a = 4b$ (astroide).

3.6 MATLAB files

```
function [t,x,y] = ellipse(a,b)
%ELLIPSE.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%This function gives a cartesian set for an ellipse
%with hor axis 2a and vert axis 2b.
%Mode of use:
% [t,x,y] = ellipse(2,4)
t = [0:pi/1000:2*pi]; x = a*cos(t); y = b*sin(t); plot(x,y)

function [t,x,y] = star(n)
%STAR.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%Mode of use:
% [t,x,y] = star(4)
a = 1; t = [0:pi/1000:2*pi]; x = a*cos(t) + a*sin(n*t)./n; y =
a*sin(t) + a*cos(n*t)./n;
plot(x,y)

function [t,x,y] = cycloid(a)
%CICLOID.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%This function gives a cartesian set for a cycloid with parameter a.
%Parameter t is also outputted.
%Mode of use:
% [t,x,y] = cycloid(2)
t = [0:pi/1000:5*pi]; x = a*(t - sin(t)); y = a*(1 - cos(t));
plot(x,y)

function [t,x,y] = epicycloid(a,b)
%EPICYCLOID.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%This function gives a cartesian set for an epicycloid
%Mode of use:
% [t,x,y] = epicycloid(5,1)
t = [0:pi/1000:20*pi]; x = (a+b)*cos(t)-b*cos(((a+b)/b)*t); y =
(a+b)*sin(t)-b*sin(((a+b)/b)*t); plot(x,y)

function [t,x,y] = logspiral(a,b)
%LOGSPIRAL.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%The logarithmic spiral is also known as the growth spiral,
%equiangular spiral, and spira mirabilis
%This function gives a cartesian set for a logarithmic spiral with parameters a
```

```
%Parameter t is also outputted.
%Mode of use:
% [t,x,y] = logspiral(0.01,0.1)
t = [0:pi/1000:10*pi]; x = a*exp(b*t).*cos(t); y =
a*exp(b*t).*sin(t);
plot(x,y)

function [X,Y] = evolute(t,x,y)
%EVOLUTE.M - author: G.Filosofi - Jan 2005
%An evolute is the locus of centers of curvature of a plane curve.
%The original curve is then said to be the Involute of its evolute
%This function computes and plots the evolute of a parametric curve
%defined by (x,y) and parameter t
%Mode of use:
% [t,x,y] = ellipse(2,4)
% evolute(t,x,y)

%first and second derivatives of parametric equations
x1 = diff(x)./diff(t); x1 = [x1(1) x1]; y1 = diff(y)./diff(t); y1
= [y1(1) y1]; x2 = diff(x1)./diff(t); x2 = [x2 0]; y2 =
diff(y1)./diff(t); y2 = [y2 0];
%The radius of curvature is
%R = (x1.^2 + y1.^2).^(1.5)./abs(x1.*y2 - y1.*x2);
%The centre of curvature is
%X = x - R.*y1./sqrt(x1.^2 + y1.^2);
%Y = y + R.*x1./sqrt(x1.^2 + y1.^2);
%But a more compact form is
X = x - y1.*(x1.^2 + y1.^2)./(x1.*y2 - y1.*x2); Y = y + x1.*(x1.^2
+ y1.^2)./(x1.*y2 - y1.*x2);
plot(x,y,X,Y) xlabel('x') ylabel('y')
title('Plot of a curve and its evolute')
```

3.7 Figure

Nelle seguenti figure, ottenute con MATLAB, la curva verde è l'evoluta della curva blu.

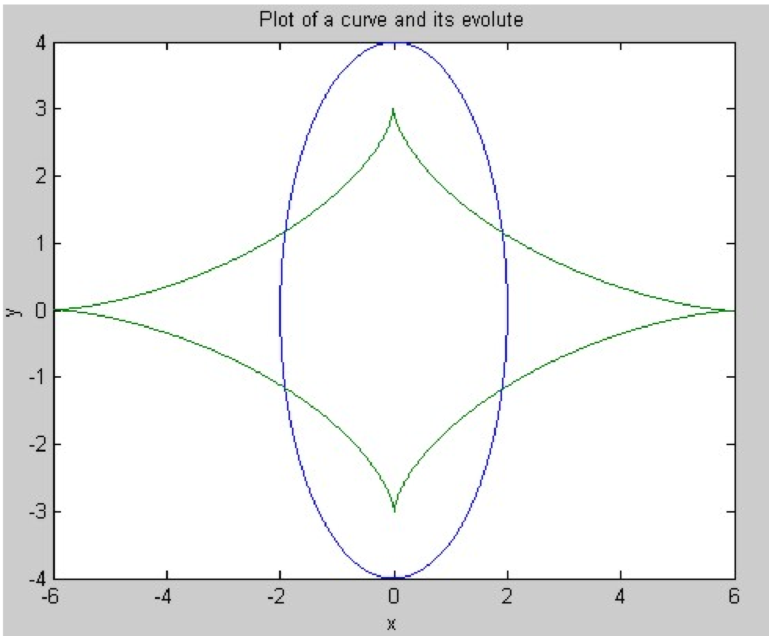

Figure 2: Ellisse

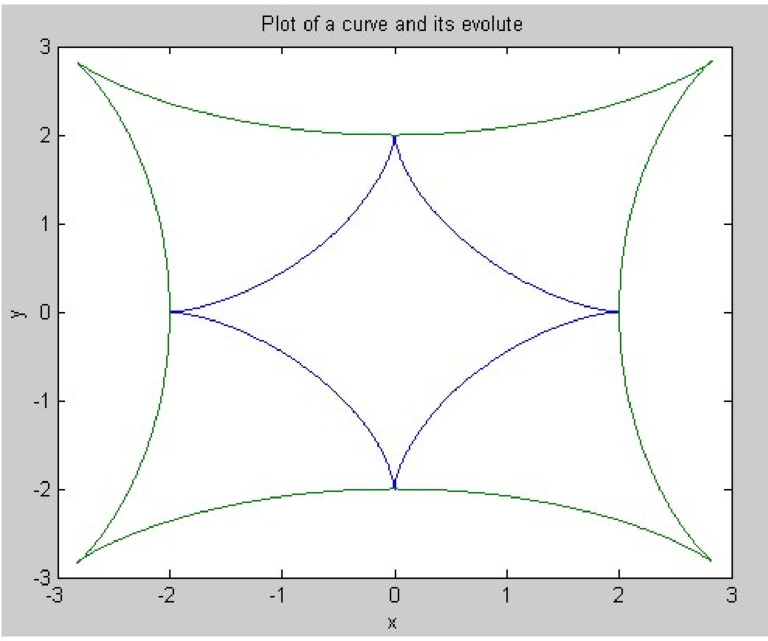

Figure 3: Asteroide

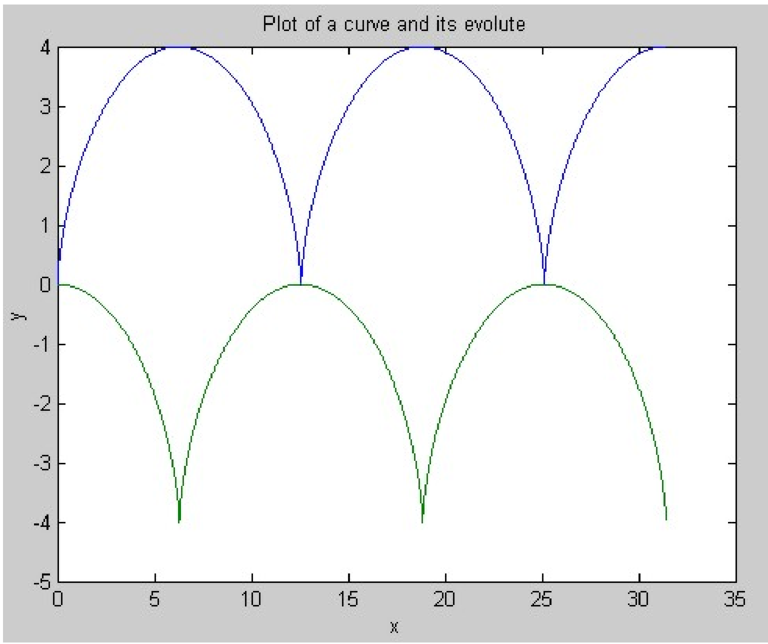

Figure 4: Cicloide

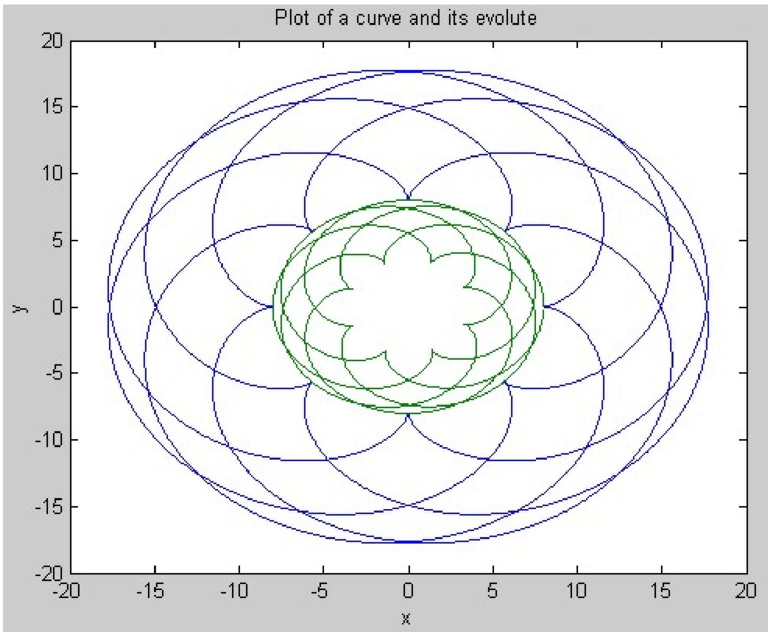

Figure 5: Epicicloide. a=8; b=3

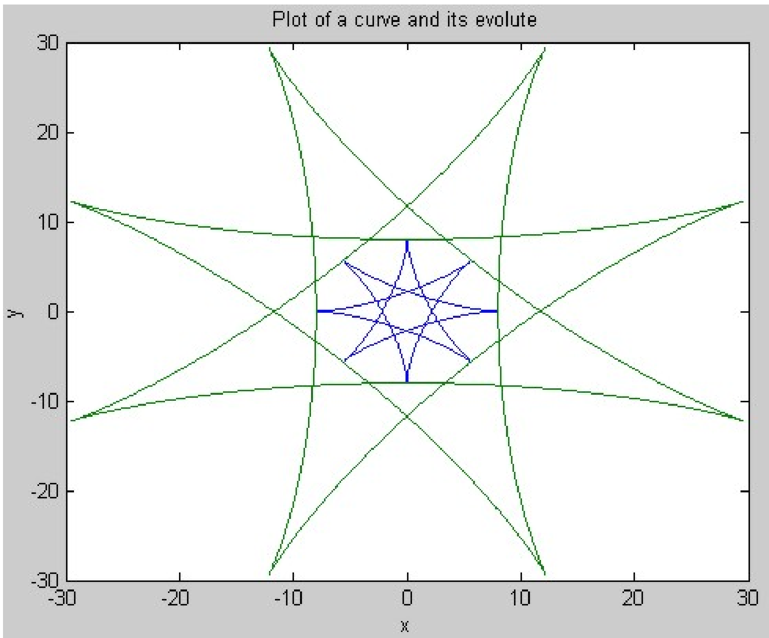

Figure 6: Ipocicloide. a=8; b=3

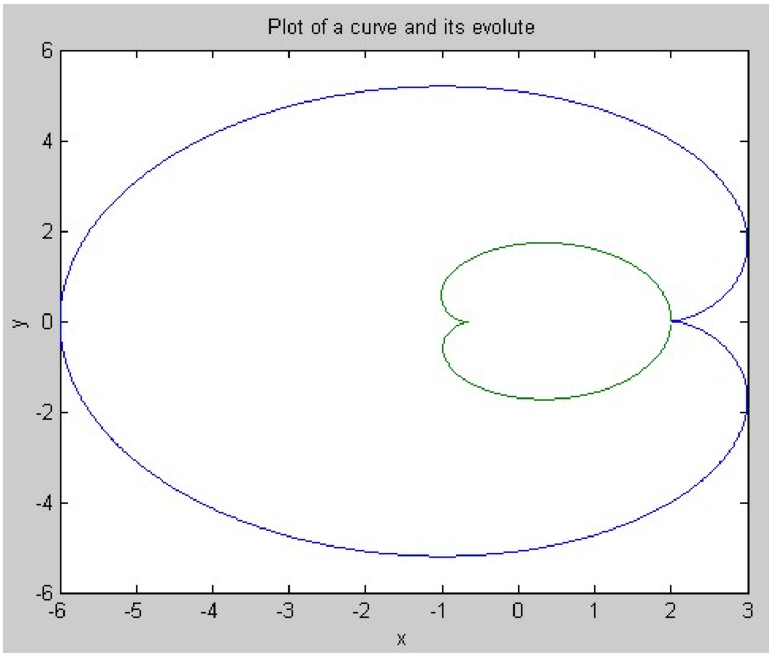

Figure 7: Cardioide