

# Solitoni ed applicazioni nei plasmi

Filippo Banti

1 Giugno 2002

## **Abstract**

Sono passati quasi trenta anni da quando per la prima volta ha fatto l'ingresso nell'ambito della terminologia scientifica il termine **solitone**. Da quel momento in poi grazie all'uso di macchine calcolatrici sempre più veloci e al maggior numero di studiosi che cominciarono ad indagare nel campo delle equazioni non lineari, gli sviluppi sono stati notevolissimi ed ancora oggi in atto.

In questo documento mostrerò le caratteristiche generali di un'onda solitonica, fornendo anche alcuni esempi. In seguito passerò ad analizzare alcune delle più recenti applicazioni di questa teoria nei plasmi.

# Contents

<b>1</b>	<b>Aspetti generali dei Solitoni</b>	<b>3</b>
1.1	La scoperta delle onde solitarie . . . . .	3
1.2	L'equazione di Korteweg-De Vries . . . . .	4
1.3	Interazioni solitoniche . . . . .	6
1.3.1	Il lavoro di Zabusky e Kruskal . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Esempi di equazioni non lineari aventi soluzioni solitoniche</b>	<b>8</b>
2.1	Soluzione esatta della KdV . . . . .	8
2.2	L'equazione di burges . . . . .	9
2.3	L'equazione di Sine-Gordon . . . . .	10
2.3.1	La teoria di De-Broglie della doppia soluzione . . . . .	10
2.4	L'equazione di Schroedinger non lineare (NSE) . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Leggi di conservazione</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Rilevamento di onde solitoniche in plasmi freddi</b>	<b>15</b>
4.1	Solitoni di superfice in un plasma semi-infinito completamente ionizzato . . . . .	16
4.2	"Envelope" Solitons in un plasma di elettroni-positroni . . . . .	17

# 1 Aspetti generali dei Solitoni

## 1.1 La scoperta delle onde solitarie

Un'onda solitaria, o grande onda di traslazione, fu osservata per la prima volta sul canale tra Edimburgo e Glasgow nel 1843 da J. Scott Russell.

Russel descrisse così la sua scoperta alla British Association nel 1844:

*"I believe I shall best introduce this phaenomenon by describing the circumstances of my first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped- not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity assuming the form of a large **solitary** elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel."*

Russel eseguì anche alcuni esperimenti in laboratorio; generò onde solitarie facendo cadere dei pesi in un piccolo canale d'acqua.

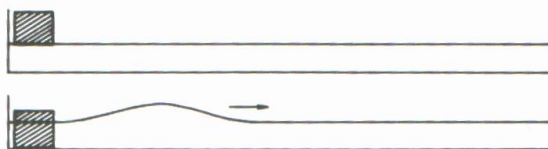


Figure 1: L'onda solitaria di Russel: un diagramma del suo sviluppo. (a) L'inizio. (b) In seguito. (After Russel 1844)

Egli dedusse empiricamente che il volume di acqua nell'onda era uguale a quello spostato dal peso, e che la velocità stabile  $c$  dell'onda era data da:

$$c^2 = g(h + a) \quad (1)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $a$  l'ampiezza dell'onda e  $h$  il livello dell'acqua non perturbata, come mostrato in (??). Osserviamo che un'onda più alta viaggia più velocemente di una bassa.

Russel provò anche a generare onde di depressione, sollevando un peso dall'acqua piuttosto che lasciandovelo cadere. Notò però che in tal modo si generavano dei treni d'onda la cui lunghezza aumentava col tempo, e l'ampiezza diminuiva. (??).

Matematicamente si definì quindi **onda solitaria** la soluzione  $u(x, t) \in R$  di una equazione alle derivate parziali tale che la sua dipendenza da  $x \in R$  e  $t \in R$  sia della forma  $u(x, t) = u(x - ct)$ ; con le proprietà che  $\forall t$  fissato  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = a$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} u = b$ , dove  $a$  e  $b$  sono due costanti che alcune volte in letteratura vengono richieste essere uguali a zero (ma ciò comporta soltanto una restrizione della classe di queste soluzioni).

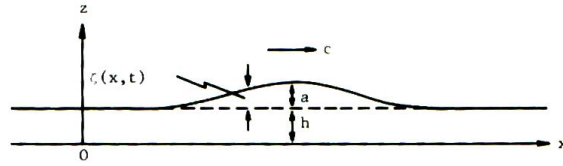


Figure 2: La configurazione ed i parametri per la descrizione di un'onda solitaria.

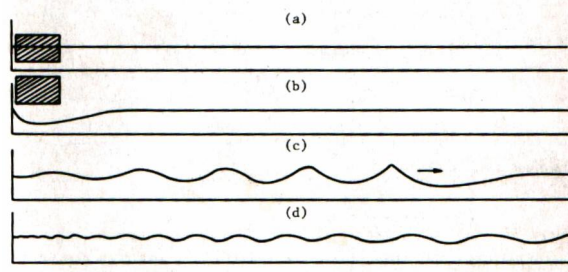


Figure 3: L'osservazione di Russel delle onde oscillanti: stadi successivi del loro sviluppo.

## 1.2 L'equazione di Korteweg-De Vries

Boussinesq (1871) e Rayleigh (1876) scoprirono indipendentemente che le onde solitarie erano di lunghezza molto superiore alla profondità dell'acqua, e dedussero la formula (1) che Russel aveva ottenuto empiricamente per la velocità  $c$  dalle equazioni del moto di un fluido incompressibile e non viscoso.

Nel 1895 Korteweg e De Vries svilupparono questa teoria, e trovarono una equazione che regolava il moto di un'onda lunga, debolmente non lineare:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left( \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{3} \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) \quad (2)$$

dove  $\alpha$  è una piccola costante arbitraria,  $\sigma = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{g\rho}$ , e  $T$  è la tensione superficiale del liquido di densità  $\rho$ . Questa è la forma originale dell'equazione di Korteweg-De Vries (KdV). Osserviamo che nell'approssimazione usata per derivare questa equazione l'onda è considerata propagarsi nel verso crescente delle  $x$ . Del resto è sufficiente cambiare il segno del termine a sinistra in  $-\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  per descrivere la propagazione nell'altro verso.

Prima di ricavare la soluzione esplicita di (2) facciamo qualche osservazione di carattere più generale. Innanzitutto riscriviamo tale equazione nella forma standard

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3)$$

e vediamo le proprietà di onde di piccola ampiezza. Per fare ciò linearizziamo la precedente ottenendo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (4)$$

Per questa equazione linearizzata la soluzione può essere rappresentata come sovrapposizione di componenti di Fourier. Dunque eseguiamo la sostituzione  $u \propto e^{i(kx-\omega t)}$ ; ne segue

$$\omega = k - k^3 \quad (5)$$

Questa è la relazione di dispersione, che lega la frequenza  $\omega$  al modulo del vettore d'onda  $k$ . Da essa si può dedurre la velocità di fase  $c$ ,

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \quad (6)$$

che ci dà la velocità del fronte d'onda di un singolo modo, e la velocità di gruppo  $c_g$ ,

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \quad (7)$$

che ci fornisce la velocità del pacchetto d'onde, ovvero di un gruppo di onde che hanno circa la stessa lunghezza  $\frac{2\pi}{k}$ .

Poichè la velocità di fase dipende da  $k$ , componenti di grande lunghezza d'onda viaggeranno più velocemente, causando una dispersione del pacchetto. Osservando la relazione di dispersione si capisce che il termine responsabile della dispersione è proprio quel  $k^3$ , e dunque il termine  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  nella KdV. Invece generalmente le nonlinearità conducono ad una concentrazione delle perturbazioni. Per vedere questo scriviamo la (3) senza la parte dispersiva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Basti sapere che utilizzando il metodo delle caratteristiche, (la cui trattazione matematica esula dallo scopo del testo), si può mostrare che la soluzione generale di (8) è data da:

$$u(x, t) = f [x - (1 + u)t] \quad (9)$$

con  $f$  funzione arbitraria determinata con l'assegnazione della condizione iniziale a  $t = 0$ .

Evidentemente questa non è un'espressione analitica esplicita della soluzione. Si può però notare che la velocità di propagazione dipende dall'ampiezza del profilo; di conseguenza i punti dove  $u$  ha valori più alti si muoveranno più velocemente. Ciò causerà l'aumento della perturbazione, fino a generare una discontinuità, o "Shock wave". (??)

Per concludere questa analisi qualitativa possiamo quindi anticipare l'idea di fondo; ovvero che gli effetti combinati di vari termini (dispersione, nonlinearità, dissipazione) possono bilanciarsi tra loro, dando luogo a profili che rimangono inalterati durante l'evoluzione temporale.

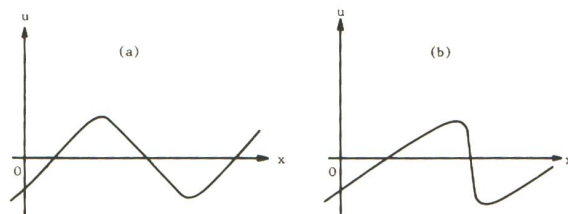


Figure 4: Schizzo dell'allargamento non lineare di un'onda mentre si sviluppa. (a)  $t=0$ . (b) Successivamente

### 1.3 Interazioni solitoniche

Nel 1955 E. Fermi, J. Pasta e S. Ulam affrontarono un problema legato alla fisica dello stato solido, che consisteva nel capire perchè la conducibilità termica nei solidi avesse un valore finito. Per far ciò essi pensarono di simulare numericamente, attraverso l'uso di un calcolatore, una catena unidimensionale di atomi tra i quali le forze oltre alla parte armonica avessero anche un contributo non lineare. Loro pensavano che proprio a causa della non-linearità delle forze interatomiche da loro simulate se si fosse partiti da una condizione in cui l'energia era concentrata in un solo modo, essa avrebbe dovuto ridistribuirsi anche su tutti gli altri. Con sorpresa invece le loro aspettative furono disattese. Cioè l'energia che inizialmente veniva fornita al modo più basso della catena lineare si distribuiva sugli altri senza tendere ad un equilibrio, e spesso volte si raccoglieva di nuovo sul modo di partenza. La conclusione era che il sistema non termalizzava.

### 1.3.1 Il lavoro di Zabusky e Kruskal

Esaminando il modello di Fermi-Pasta-Ulam di fononi in un reticolo anarmonico, Zabusky e Kruskal (1965) riuscirono a dedurre l'equazione KdV. Essi considerarono il seguente problema ai valori iniziali, in un dominio periodico:

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \quad (10)$$

dove  $u(2, t) = u(0, t)$ ,  $u_x(2, t) = u_x(0, t)$ ,  $u_{xx}(2, t) = u_{xx}(0, t)$  per tutti i  $t$ , e  $u(x, 0) = \cos(\pi x)$  per  $0 \leq x \leq 2$ .

La figura (??) mostra la soluzione a vari  $t$  fissati. Si nota come inizialmente i termini dominanti siano i primi due, per cui si nota il progressivo formarsi di una discontinuità. Successivamente però il peso del termine dispersivo  $u_{xxx}$  inizia ad avere il ruolo di stabilizzazione della soluzione, evitando la formazione di tale singolarità. Anzi iniziano a delinearsi dei profili sotto forma di impulsi localizzati simili a quelle che vedremo essere le soluzioni della KdV.

Scoprirono quindi che, dopo un certo tempo, la soluzione era costituita da un treno di otto onde solitarie (vedi ??), ognuna del tipo  $\text{sech}(x)^2$ , e che queste onde si muovevano le une attraverso le altre, fino a che lo stato iniziale, (o uno molto vicino ad esso) ritornava. L'unico effetto notato a seguito delle interazioni tra le varie onde era la comparsa di uno sfasamento. L'evidenza di una interazione non lineare derivava poi dal fatto che nella loro sovrapposizione l'ampiezza risultante era minore della somma dei singoli impulsi separati. Kruskal e Zabusky assegnarono a tali impulsi il nome di *solitoni*. Proprio questa scoperta che onde fortemente nonlineari possano interagire e poi proseguire come se non lo avessero mai fatto, portò ad un intenso studio delle proprietà analitiche e numeriche di molti tipi di solitoni.

Un **solitone** non è pertanto precisamente definito, ma è usato per descrivere ogni soluzione di equazione o sistema non lineare che (i) rappresenta un'onda di forma permanente; (ii) è localizzata, decadendo o diventando costante ad infinito; e (iii) può interagire fortemente con altri solitoni così che dopo l'interazione mantenga la sua forma, come se il principio di sovrapposizione fosse valido.

Infatti in greco la parola " $\omega\nu$ " significa ciò che esiste, solitario. Da quanto detto segue che un'onda solitaria può essere definita in maniera più generale che la soluzione della KdV; anzi, ogni soluzione di un sistema non lineare di forma permanente lo è, anche se non deve necessariamente avere caratteristiche solitoniche.

**Example 1** L'equazione  $u_{tt} - u_{xx} - u - u^3 = 0$  ammette come soluzioni onde solitarie del tipo:  $u(x - vt) = \pm \tanh[\gamma(x - vt)/\sqrt{2}]$ ; dove  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ .

Tuttavia esse non sono dei solitoni. Infatti se si fanno interagire due di esse dopo il processo di interazione non hanno più gli stessi profili iniziali.

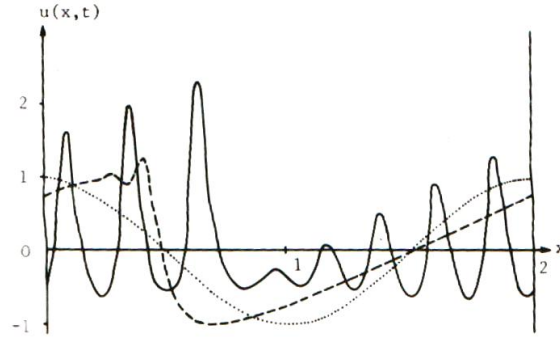


Figure 5: Evoluzione temporale del profilo ondoso, soluzione del problema con valori al bordo di Zabusky e Ruskal

## 2 Esempi di equazioni non lineari aventi soluzioni solitoniche

Le equazioni aventi la proprietà di possedere soluzioni solitoniche possono essere divise in due categorie: equazioni relativisticamente invarianti e *non* relativisticamente invarianti. Alla prima classe appartiene, per esempio, l'equazione di Sine-Gordon; alla seconda la KdV, l'equazione di Burges, etc...

### 2.1 Soluzione esatta della KdV

Partiamo dall'equazione KdV in forma standard

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (11)$$

e cerchiamo soluzioni che abbiano un profilo e una dimensione permanenti, cioè tali che:

$$u(x, t) = f(X) \quad (12)$$

per certe funzioni  $f$ , con velocità costante  $c$ . Sostituendo nella (3) otteniamo

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0 \quad (13)$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto ad  $X$ . Integrando ambo i membri:



$$f'' = 3f^2 + cf + A \quad (14)$$

con A costante di integrazione. Integrando una seconda volta, dopo aver moltiplicato per  $f'$  tutti i termini:

$$\frac{1}{2}f'^2 = f^3 + \frac{c}{2}f^2 + Af + B \quad (15)$$

dove B è un'altra costante di integrazione.

Per risolvere questa equazione imponiamo le condizioni al contorno  $f, f', f'' \rightarrow 0$  per  $X \rightarrow \pm\infty$ .

Deve perciò essere  $A = B = 0$  ; quindi risulta che:

$$\int \frac{df}{f\sqrt{(2f+v)}} = \pm X \quad (16)$$

dove si suppone  $2f + v > 0$  per ottenere soluzioni reali. Se calcoliamo l'integrale (16) otteniamo il profilo

$$u(x - vt) = f(x - vt) = -\frac{v}{2} \text{Sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - x_0) \right] \quad (17)$$

con  $v \geq 0$  ;  $X_0$  è una costante di integrazione che rappresenta la posizione della massima ampiezza dell'onda solitaria a  $t = 0$ .

Nella figura (??) è rappresentato il profilo (17)

Dal fatto che la velocità di propagazione dell'onda solitaria sia positiva ne segue che tali onde possono propagarsi solo in una direzione. L'altro aspetto importante da notare è che, come abbiamo già osservato in precedenza, la velocità cresce al crescere dell'ampiezza. Questo è un comportamento tipico di alcune equazioni non lineari e non ha un corrispondente nel caso lineare, in cui le velocità di propagazione sono del tutto indipendenti dall'ampiezza dell'onda.

## 2.2 L'equazione di burges

Ecco un altro esempio di equazione contenente non-linearità e dissipazione:

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \quad (18)$$

Se imponiamo le condizioni al contorno  $u \rightarrow u_0$  per  $x \rightarrow -\infty$  e  $u \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$  ammette come soluzione la seguente onda solitaria:

$$u(x) = \frac{u_0}{2} \left[ 1 - \text{Tanh} \left( \frac{u_0(x - vt)}{4} + x_0 \right) \right]$$

### 2.3 L'equazione di Sine-Gordon

Questa equazione storicamente molto importante è della forma

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0 \quad (19)$$

ed ammette le seguenti onde come soluzione

$$u(x, t) = u(x - vt) = 4 \operatorname{Arc} \tan \left[ \exp \left[ \pm \left( \frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right] \right] \quad (20)$$

dove quella col segno + è chiamata Kink, e quella col - Antikink.

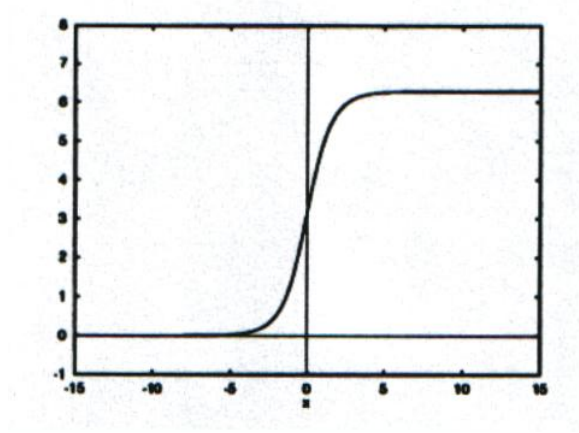


Figure 6: Profilo del Kink per  $t = 0$  e  $v = 0$ .

Oltre a queste due soluzioni, l'equazione di Sine-Gordon ne ammette altre, che descrivono i processi di interazione Kink-Kink o Kink-Antikink(Breather).

L'importanza consiste nel fatto che il Breather è interpretabile come uno stato legato solitone anti-solitone. Ne risulta una analogia piuttosto stringente tra il comportamento dinamico dei solitoni e le particelle elementari. Riguardo questo argomento può risultare interessante operare una piccola digressione.

#### 2.3.1 La teoria di De-Broglie della doppia soluzione

L'idea di fondo può così essere sintetizzata: lo stato di una particella elementare viene rappresentato da due funzioni

$$\varphi(x, y, z, t) = \exp[i\bar{\theta}(x, y, z, t)]\Phi(x, y, z, t) \quad (21)$$

$$\psi(x, y, z, t) = \exp[i\theta(x, y, z, t)]\Psi(x, y, z, t) \quad (22)$$

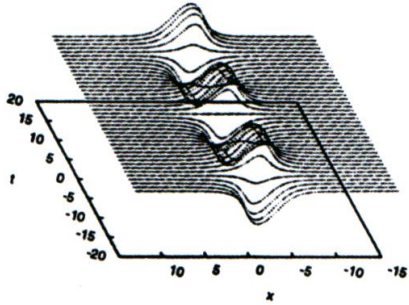


Figure 7: Breather

dove  $\varphi$  soddisfa una certa equazione di evoluzione non-lineare e  $\psi$  soddisfa l'equazione di Schroedinger. Inoltre De Broglie suppone che la relazione  $\theta = \bar{\theta}$  tra le fasi delle due onde sia valida in ogni punto dello spazio tranne che in una piccola regione di esso localizzabile in un'intorno sferico racchiudente la particella. Ovviamente l'equazione non-lineare a cui deve ubbidire  $\varphi$  deve essere tale che nella regione esterna al raggio della particella essa debba coincidere con l'equazione di Schroedinger. De Broglie riteneva che l'onda  $\varphi$  dovesse racchiudere le informazioni concernenti la struttura e le proprietà della particella in esame. Però egli non fu in grado di proporre l'equazione non-lineare a cui doveva ubbidire la  $\varphi$ . Queste idee hanno spinto molti studiosi a cercare delle equazioni nonlineari le quali rispondano alle richieste formulate dalla teoria di De-Broglie. Esempi in tale direzione sono stati proposti sulla base dell'equazione di Sine-Gordon. Possiamo riassumere dicendo che in molti concordano sul riconoscere il Breather, soluzione della S.G., come un esempio dell'onda  $\varphi$  di De-Broglie. Tuttavia i contenuti di tali modelli sono stati elaborati soltanto nel caso di una sola dimensione spaziale e perciò non sono direttamente applicabili. Comunque allo stato attuale tali problemi sono ancora aperti anche se non mancano, da diversi punti di vista, dei tentativi nella direzione di una migliore comprensione di questi aspetti legati alle equazioni nonlineari.

## 2.4 L'equazione di Schroedinger non lineare (NSE)

L'equazione NSE è definita da

$$iu_t + u_{xx} + k|u|^2 u = 0 \quad (23)$$

dove  $k$  è una costante assunta positiva. Poniamo  $u = \Phi(x, t)e^{i\theta(x, t)}$  con  $\theta$  e  $\Phi$  supposte entrambe reali. Sostituendo nella (23) ed eguagliando a zero la parte reale e quella immaginaria dell'equazione ottenuta si ha il sistema

$$\Phi_{xx} - \Phi\theta_x^2 - \Phi\theta_t + k\Phi^3 = 0 \quad (24)$$

$$\Phi\theta_{xx} + 2\Phi_x\theta_x + \Phi_t = 0 \quad (25)$$

Definiamo dunque due velocità; quella relativa all'involuppo  $\Phi$  della soluzione che chiameremo  $v$ , l'altra relativa alla funzione  $\theta$  che indichiamo con  $w$ .

Perciò, ponendo  $\Phi(x, t) = \Phi(x - vt)$  e  $\theta(x, t) = \theta(x - wt)$ , che sostituite nel sistema precedente ci danno:

$$\Phi_{xx} - \Phi\theta_\eta^2 + w\Phi\theta_\eta + k\Phi^3 = 0 \quad (26)$$

$$\Phi\theta_{\eta\eta} + 2\Phi_\xi\theta_\eta - v\Phi_\xi = 0 \quad (27)$$

con  $\xi = x - vt$  e  $\eta = x - wt$ . Ora moltiplicando (26) per  $\Phi$  e tenendo conto che  $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}$ , dopo aver integrato una volta otteniamo

$$\Phi^2(2\theta_\eta - v) = C \quad (28)$$

con  $C$  costante. Poniamo  $C=0$  e ricaviamo  $\theta_\eta = v/2$ . Sostituendo nella (26) dopo una ulteriore integrazione otteniamo

$$\int \frac{d\Phi}{\sqrt{-\frac{k}{2}\Phi^4 + \frac{1}{4}(v^2 - 2vw)\Phi^2 + D}} = x - vt \quad (29)$$

Per semplicità poniamo anche  $D=0$  ottenendo la soluzione più nota dell'equazione:

$$\Phi(x, t) = \sqrt{-\frac{a}{c}}(e^{i\frac{v}{2}\eta} \text{Sech}\sqrt{a}\xi) \quad (30)$$

dove  $c = -k/2$  ed  $a = (v^2 - 2vw)/4$ .

La soluzione trovata non ha la dipendenza tipica di un'onda solitaria. Comunque delle simulazioni hanno dimostrato che questa soluzione ha caratteristiche solitoniche. E' comunque possibile ricavare altre soluzioni della forma  $f(x-vt)$  seguendo un procedimento analogo a quanto fatto per la KdV. Il profilo della parte reale di (30) è mostrato in figura (??)

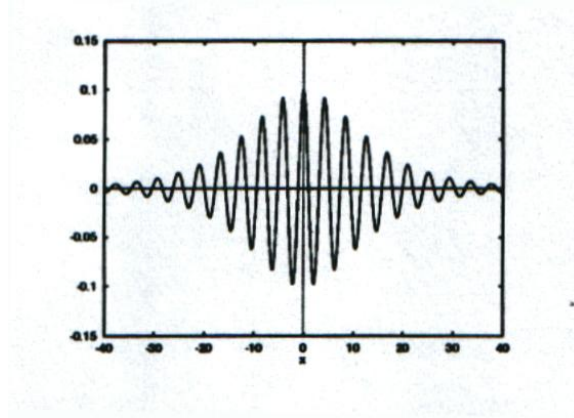


Figure 8: Profilo della parte reale della NSE; con  $a = 0.1$ ,  $c = -1$ ,  $v = 3$ .

### 3 Leggi di conservazione

Supponiamo che  $u(x,t)$  sia la soluzione di una certa equazione differenziale, e che  $T$  ed  $X$  siano delle funzioni di  $u$ , di  $u_x$ , di  $x$  e  $t$  tali che

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

La (31) è chiamata *legge di conservazione*, di **densità**  $T$ , e **flusso**  $X$ .

Un esempio notissimo è quello dell'equazione di continuità della corrente, che esprime in forma locale la conservazione della carica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (32)$$

Se  $T$  ed  $X$  sono due funzioni "buone", integrabili per  $-\infty < x < \infty$ , allora

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} T dx = -[X]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (33)$$

per cui segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} T dx = \text{cost.} \quad (34)$$

Questa idea si applica a molte equazioni, e rappresenta la conservazione di molte quantità fisiche.

Ad esempio nella KdV si può facilmente vedere che

$$\begin{aligned} 0 &= u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(-3u^2 + u_{xx}) \end{aligned} \quad (35)$$

Se quindi scegliamo come **densità** e come **flusso**:

$$T = u \quad e \quad X = u_{xx} - 3u^2$$

ne segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx = cost. \quad (36)$$

e ricordandoci che  $u(x, t)$  è la soluzione della Kdv e indica la profondità della superficie dell'acqua, ne consegue che la (36) rappresenta la conservazione della massa d'acqua.

## 4 Rilevamento di onde solitoniche in plasmi freddi

Data la complessità dell'argomento mi limiterò soltanto a mostrare i risultati di alcune ricerche eseguite negli ultimi anni.

Plasmi a bassa temperatura sono stati recentemente fonte di grande interesse per la loro maggior utilità in molte applicazioni tecnologiche. Al contrario dei plasmi caldi, che devono essere confinati da forti campi magnetici, la maggiorparte dei plasmi a bassa temperatura possono esser rinchiusi in contenitori con pareti metalliche o dielettriche. Lo spettro delle onde generate in questi plasmi include dei modi chiamati "onde di superficie" o Surface wave, intimamente legati alla presenza delle condizioni al contorno (e quindi alla forma delle pareti delimitanti il plasma). Una caratteristica peculiare di questi modi è l'attenuazione esponenziale della loro energia allontanandosi dai bordi. Pertanto esse possono essere considerate come onde che si propagano all'interfaccia di due mezzi, senza irradiare in alcuno di questi.

Le onde di superficie possono essere controllate facilmente modificando il mezzo che circonda il plasma, e possono agire come trasmettitrici di informazioni ed energia tra il plasma e il mondo esterno, in modo ad esempio da creare plasmi dalle caratteristiche specifiche. Esse ci forniscono informazioni sulla densità elettronica e l'effettiva frequenza di collisione.

Sono anche largamente utilizzate in ottica e nelle comunicazioni a fibre ottiche; grazie ad esse si possono scoprire lo spessore e le costanti ottiche di sottili film metallici, investigare fenomeni di scattering di luce ed elettroni con il mezzo esterno, e le caratteristiche di assorbimento etc dei nuovi materiali.

Anticipiamo intanto che sebbene le proprietà lineari siano ormai ben note, quelle non-lineari sono tutt'ora fonte di studio.

Una prima caratteristica di questo tipo di onde è la loro natura ibrida; esse non sono nè interamente trasversali, nè interamente longitudinali, anche se in particolari condizioni uno dei due effetti può dominare. Ad esempio nel limite di grandi lunghezze d'onda esse sono per lo più trasversali, nel limite opposto longitudinali.

Il modello più semplice utilizzato per studiare le Surface waves è quello di un piano di plasma semi-infinito, limitato da un lato da un dielettrico. Modelli analoghi includono sottili lamine o interfacce di plasma. Se la riflessione delle particelle di plasma dal contorno è perfettamente elastica si possono in principio ottenere le soluzioni delle onde senza grosse difficoltà. Il metodo standard consiste nell'adoperare un'opportuna espansione (in serie di Fourier o in armoniche sferiche) delle quantità fisiche per la particolare geometria del problema.

Ma Passiamo all'aspetto di maggior interesse nell'ambito di questa relazione: è stato dimostrato che in un plasma semi-infinito, come risultato di instabilità modulazionali dovute a perturbazioni della densità, si possono propagare nel plasma onde di superficie con caratteristiche **solitoniche**.

In pratica inviando un'onda elettrostatica e monocromatica detta "Pump Wave" si introduce una perturbazione in grado di interagire, a certe condizioni,

con le normali onde di superficie, a loro volta legate all'esistenza di correnti superficiali non lineari.

. L'apparizione di soluzioni solitoniche avviene a livello teorico solo quando si prendono in considerazione i termini non-lineari del secondo ordine, cosa che inizialmente era stata trascurata. Si scoprono allora soluzioni del tipo *KdV*, con velocità di propagazione superiore a quella della luce nel dielettrico di confinamento, e questo potrebbe essere di interesse nella trasmissione di informazioni in ottica nonlineare.

#### 4.1 Solitoni di superficie in un plasma semi-infinito completamente ionizzato

Tralasciando gran parte dell'apparato matematico alla base di questa teoria, supponiamo di poter ricavare dalle equazioni di Maxwell questa relazione tra la densità di corrente  $J$  ed il campo elettrico  $E$  (sviluppati fino al secondo ordine, e nell'approssimazione di ampiezza lentamente variabile).

$$i\omega\epsilon ZE^l = 4\pi \int (\alpha_p j_x^{nl} - ik j_z^{nl} + \frac{\alpha_p j_x^{nl} - ik j_z^{nl}}{\alpha_p + \alpha_{p,1} + \alpha_{p,2}}) d\Omega dk \quad (37)$$

dove  $Z$  è la legge di dispersione lineare dell'onda di superficie,  $\alpha_p = \sqrt{(k^2 - \omega^2\epsilon(\omega)/c^2)}$  e  $\alpha_d = \sqrt{[k^2 - \omega^2\epsilon_d/c^2]}$

Sostituendo le componenti di Fourier del secondo ordine della densità di corrente, e tralasciando i termini di ordine superiore si ottiene:

$$2mc^2 ZE^l = 3iek\epsilon_d \int \frac{E_1^l E_2^l}{k_1 k_2} d\Omega dk \quad (38)$$

equazione che può essere antitrasformata sostituendo

Definendo uno pseudopotenziale  $\varphi$  tale che  $E^l = -\partial_x \varphi$  abbiamo

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\varphi + \frac{1}{2}\epsilon_d(\frac{\partial^3}{\partial x^3})(\varphi + \varphi^2) = 0 \quad (39)$$

Questa equazione governa le **onde di superficie non lineari**. E' molto simile alla *KdV* vista in precedenza, ma qui il termine non lineare incorpora anche caratteristiche dispersive. Le sue soluzioni sono:

$$\varphi = -\frac{3}{4} \text{Sech}^2[\xi \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{3}\varphi + 1}] \quad \xi = (x - vt) \quad (40)$$

Questa soluzione è un solitone, ed il suo profilo somiglia molto a quello del tipo  $\text{Sech}^2(x)$  della Korteweg-De Vries, ma è più larga al centro a causa del termine addizionale  $\frac{3}{2}(\frac{4}{3}\varphi + 1)^{1/2}$  nell'argomento della  $\text{Sech}^2(x)$ .



## 4.2 "Envelope" Solitons in un plasma di elettroni-positroni

E' stato recentemente osservato che le onde non.lineari in un plasma di elettroni e positroni si comportano in maniera diversa che in uno di elettroni e ioni. I plasmi elettroni-positroni sono quelli che si suppone fossero presenti nelle prime fasi della formazione dell'universo. La loro peculiarità è che i costituenti hanno all'incirca la stessa massa.

Si è dunque studiata la formazione di Solitoni in questi ultimi.

Come punto di partenza si suppone l'esistenza di una opportuna relazione di dispersione non-lineare

$$\varepsilon(k, \omega, A) = 0 \quad (41)$$

$k$  essendo il vettore d'onda,  $\omega$  la frequenza ed  $A$  l'ampiezza.

Eseguendo una espansione di (41) in  $A^2$  e in  $\bar{k} = k - k_0$  si ottiene:

$$\varepsilon(k, \omega, A) = \varepsilon(k, \omega, 0) + A^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial A^2} + \dots = 0 \quad (42)$$

e per  $\omega$  abbiamo

$$\omega = \Omega(k) + MA^2 = \omega_0 + \Gamma \quad (43)$$

Le equazioni (41) e (42) sono state utilizzate da Fried e Ichikawa per dedurre l'equazione di Schroedinger non lineare NSE

$$i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{v_g^1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + q_1 \varphi |\varphi|^2 = 0 \quad (44)$$

Dove i tre coefficienti  $v_g, v_g^1$  e  $q_1$  si possono ricavati matematicamente.

E da quanto già mostrato sappiamo che anche questa equazione ha come soluzioni delle onde solitoniche.

### *Bibliografia*

- 1) P.G.Drazin, Solitons (1983);
- 2) P.G. Drazin and R.S. Jhonson, Solitons: an introduction (1990);
- 3) Tesi di dottorato sulle Onde Solitarie (2000);
- 4) S.V.Vladimirov, M.Y.Yu and V.N. Tsytovich (1994);
- 5) S.Burman and A.Roy Chowdhury, On the envelope solitons and modulational instability in an electron-positron plasma (1999).