2025-04-10 jM101 矩阵

C^n中常用的范数：
$$\begin{cases}\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\\ \|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\\ \|x\|_\infty=\max_{i=1}^{n}\{|x_i|\}\end{cases}$$

性质 范数的三个条件
① 正性：$\varphi(x)\geq 0$，$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
② 齐性：$\varphi(kx)=|k|\cdot\varphi(x)$
③ 三角不等式：$\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$

加权范数：设 $A=diag(p_1,\ldots,p_n)$ 其中 $p_1>0,\ldots,p_n>0$.
则 $\sqrt{x^HAx}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_i|x_i|^2}$ 称为加权范数

范数等价性：设 C^n上（有限维线性空间）有两个范数 $\|x\|_a$ $\|x\|_b$ 则 存在 $k_1>0,k_2>0$ 使得
$k_1\|x\|_b\leq\|x\|_a\leq k_2\|x\|_b$ 对任意 $x\in C^n$ 都成立.（证明略）.
证明方式：求 $\left(\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}\right)$ 的最值即可，可写 $\|\cdot\|_a\approx\|\cdot\|_b$（啥玩意？）

连续函数在有界闭集上有最大最小值.

例如：$1\leq\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}\leq\sqrt{n}$， $1\leq\frac{\|x\|_1}{\|x\|_\infty}\leq n$，其中 $x\in C^n$. 可以自己用柯西不等式证明.

收敛性：
$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$ $a=(a_1,\ldots,a_n)^T$
若 $x_i^{(k)}\to a_i$ 对 $i=1,2,\ldots,n$ 成立，则 $\lim x^{(k)}=a$.
$x^{(k)}\to a \Leftrightarrow \|x^{(k)}-a\|\to 0$.

矩阵范数：设在$C^{n\times n}$上 矩阵范数 $\varphi(A)=\|A\|$. 适合四个条件
① 正性：$\forall A\in C^{n\times n}$，$\varphi(A)\geq 0$ 且 $\varphi(A)=0\Leftrightarrow A=0$.
② 齐性：$\varphi(kA)=|k|\cdot\varphi(A)$，$k\in C$.
③ 三角性：$\varphi(A+B)\leq\varphi(A)+\varphi(B)$.
④ 次乘性（相容性）$\varphi(AB)\leq\varphi(A)\cdot\varphi(B)$，乘积的范数不大于范数的乘积.

常用矩阵范数：列范数 $\|A\|_1=\max\{\|\alpha_1\|_1,\ldots,\|\alpha_n\|_1\}$ 其中 α_i为A的第i列，$\|\alpha_i\|_1$为 α_i中1范数
行范数 $\|A\|_\infty=\|A^H\|_1$ 即A的最大行和.

2025-04-10 SM 101 矩阵

谱范数：$\|A\|_2 = (\lambda_1(A^HA))^{\frac{1}{2}}$ 其中 $\lambda_1(A^HA)$ 表示 A^HA 的最大特征根 → $\lambda_{max}(A^HA)$

A^HA 的所有特征根都是非负实数

需要验证谱范数满足①②③④，主要是验证次乘性

总和范数：$\|A\|_M = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ 即所有元素的绝对值之和。

F-范数（欧式范数）$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^HA)}$

G-范数 $\|A\|_G = n \cdot \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$ 不乘以 n 倍次乘性不成立。

补充结论：① 设 U, V 为酉阵 则 $\|A\|_F = \|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F$

② $A \in C^{n\times n}$，$x \in C^n$ 则 $\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \cdot \|x\|_2$ 验证柯西不等式

证明 $\|A_i x\|_2 = \|a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n\|_2 \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2} = \|A_i^H\|_2 \cdot \|x\|_2$.

大新范数公式：若 $\|\cdot\|$ 是矩阵范数，则 $\varphi_P(A) = \|P^{-1}AP\|$ 也是矩阵范数

需要验证①～④

多项三角与相容：① 多项三角：$\|A_1 \pm A_2 \cdots \pm A_k\| \le \|A_1\| + \cdots + \|A_k\|$

② 多项相容：$\|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k\| \le \|A_1\| \cdots \|A_k\|$

推论：幂公式 $\|A^k\| \le \|A\|^k$. 特别得 $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$.

矩阵范数可以推得一个向量范数：$C^{n\times n}$ 上矩阵范数 $\|\cdot\|$ 可以生成一个 C^n 上向量范数

且有 $\varphi(A\cdot X) \le \|A\| \cdot \varphi(X)$. 记为 $\varphi(X) = \|X\|_v$.

即 $\|A\cdot X\|_v \le \|A\| \cdot \|X\|_v$. 一般这个 $\varphi(x)$ 不唯一. 给出一个：

生成方式 ① $\varphi(X) \triangleq \|(X, \ldots, X)_{n\times n}\|$ 是一种生成方式

② $\varphi(X) \triangleq \|(X, 0, \ldots, 0)_{n\times n}\|$ 也是一种生成方式 $a = 1$

③ 取 $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$：$\varphi(X) \triangleq \|X a^T\|$ $a = e_1$.

2025-04-10 主M101 矩阵

例：令 $\varphi(X) = \|(X, X, \ldots, X)_{n\times n}\|$ $X \in C^n$. 验证 $\varphi(AX) \le \|A\| \cdot \varphi(X)$

$\varphi(AX) = \|(AX, AX, \ldots, AX)\| \le \|A\| \cdot \underbrace{\|(X, X, \ldots, X)\|}_{\varphi(X)} = \|A\| \cdot \varphi(X)$.

例如：矩阵F范数生成的向量范数是2范数.

备注："适合"：若 $\forall A \in C^{n\times n}$, $X \in C^n$. $\|AX\|_v \le \|A\| \|X\|_v$. 则称 $\|\cdot\|_v$ 与 $\|\cdot\|$ 相适合.

※谱范不等式：设 $\|\cdot\|$ 为任意的矩阵范数. 则 $\rho(A) \le \|A\|$ 总成立. 证明：

设 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 其中 $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ 则 $\rho(A) = |\lambda_1|$

设 x 为特征向量：即 $Ax = \lambda_1 \cdot x$. 设 $B = (X, \ldots, X)$.

故 $AB = (AX, \ldots, AX) = \lambda_1(X, \ldots, X) = \lambda_1 B$. 于是由齐次性与次乘性

$|\lambda_1| \cdot \|B\| = \|\lambda_1 B\| = \|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ 且 $\|B\| > 0$.

故 $\|A\| \ge |\lambda_1| = \rho(A)$

推论 $\|I\| \ge \rho(I) = 1$ 单位阵范数不小于1.

另一种解释 $\|I \cdot A\| = \|A\| \le \|I\| \cdot \|A\|$ 对A成立.

故 $\|I\| \ge 1$.

若A正规：则 $\rho(A) = \|A\|_2$. 可以使用范数估计谱半径.

※小范数定理：设 $A \in C^{n\times n}$ 固定. 任取 $\varepsilon > 0$. 则总能找到一个 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使.

$\|A\|_\varepsilon \le \rho(A) + \varepsilon$ 且 $\|A\|_\varepsilon > \rho(A)$ （我自己加的）.

证明 设 $D = \begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & t^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t^n \end{pmatrix}$ 设 U 为上三角阵 则 当 $t \to 0$ 时 $D^{-1}UD \to$ 对角阵.