2025-04-15 三M101 矩阵

小范数定理：给定范数$\|\cdot\|$，总能找到 $\|A\|_\varepsilon < \rho(A)+\varepsilon$.

其中 $\|A\|_\varepsilon = \|P^{-1}A\cdot P\|$，P为指定可逆阵、可以用许尔公式证明.

推论：若 $\rho(A)<1$，则存在小范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使 $\|A\|_\varepsilon<1$

证明：取 $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$ 即可. 利用小范数定理证明.

谱半径 $<1 \Leftrightarrow$ 某个范数 <1：$\rho(A)<1$ 等价于存在一个范数$\|\cdot\|$使 $\|A\|<1$

定理（考试题）：若某个范数$\|\cdot\|$有 $\|A\|<1$，则 $I-A$ 非奇异.

$$且 \|(I-A)^{-1}\| \le \frac{\|I\|}{1-\|A\|}$$

① 若 $I-A$ 奇异，则 $(I-A)x_0=0$ $x_0\neq 0$ 故 $Ax_0=Ix_0$ 于是 $1\in\lambda(A)$. 故 $\rho(A)\geq 1$ 矛盾.

- 收敛阵：若 $\underset{(k\to\infty)}{A^k\to 0}$. 则称A为收敛阵，$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

  即总合范数 $\|A^k\|_M=\sum|a_{ij}^{(k)}| \to 0\ (k\to\infty)$

- 引理：A为收敛阵 $\Leftrightarrow$ $\|A^k\|_M \to 0\ (k\to\infty)$.

  根据范数的等价性. 对任意范数$\|\cdot\|$，$\|A^k\|\to 0\ (k\to\infty)$ 总成立.

注：A收敛 $(A^k\to 0) \Leftrightarrow$. 某个范数 $\|A\|<1 \Leftrightarrow \rho(A)<1 \Leftrightarrow$ 任意范数 $\|A^k\|\to 0$.

收敛条件

~~$\frac{A}{\|A\|+\varepsilon}$~~ ~~$A\to 0$.~~

$\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$ 总收敛.

举例：$\rho(A)<1$

$I+A+\cdots+A^k=(I-A)^{-1}(I-A^{k+1})$ 令 $k\to\infty$.

若 $A^k\to 0$. 则 $I+A+\cdots+A^k=(I-A)^{-1}$.

Rk：若 $\|I-A\|<1$，则有 ① $A^{-1}=I+(I-A)+(I-A)^2+\cdots+(I-A)^k+\cdots$

牛曼公式

可写 $A=I-(I-A)$ ② 若 $\|A\|<1$ 则有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}$ （存在）

同理 $\sum(-A)^k=(I+A)^{-1}$

2025-04-15 讠M 1-1 矩阵

特别地：$\|A\| \ll 1$ 则 $\begin{cases} (I-A)^{-1} \approx I+A \\ (I+A)^{-1} \approx I-A. \end{cases}$ 根据精度需要可以再多写几项也行

Rk：若 $\rho(A) \geq 1$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 发散（无意义）.

反证法：① 若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛，则 $A^k \to 0$，$(k \to \infty)$ 于是 $\rho(A) < 1$，矛盾.

例：$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，求 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$. $\rho(A) = 1$ 发散.

$$A^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ & (-1)^k \end{pmatrix}$$ 不收敛 故 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 不可能收敛

$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum \nearrow$ 不收敛.

例：$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 判定 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k^2}$ 的收敛性.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} \cdot (-1)^k & \frac{1}{k}(-1)^{k-1} \\ 0 & \frac{1}{k^2}(-1)^k \end{pmatrix}$$ $= \ln 2.$ 收敛.（是否$\underbrace{\text{条件收敛}}_{\text{是}}$）.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 于是

$$\int \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \frac{1}{k}x^k + \cdots + \cancel{C} \nearrow 0.$$

$$-\int \frac{1}{x-1} d(x-1) = -\ln|x-1|$$

↓ 代入 $x = -1$

故 $\frac{-\ln|x-1|}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots + \frac{1}{k} \cdot x^{k-1} + \cdots$

$$\int \frac{-\ln|x-1|}{x} dx = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \cdots + \frac{1}{k^2}x^k + \cdots + C.$$

2025-04-15 3M101 矩阵

算子范数：由向量范数生成矩阵范数，给定 $\mathbb{C}^n$ 上向量范数 $\|X\|_v$

可产生一个 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数.

$$\|A\| \triangleq \max_{x\neq 0}\left\{\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}\right\} \quad x\in\mathbb{C}^n.$$

$$\|A\| \triangleq \max_{\|y\|_v=1}\{\|Ay\|_v\} \quad y\in\mathbb{C}^n. \left(y=\frac{x}{\|x\|_v}\right)$$

且有 $\|AX\|_v \le \|A\|\cdot\|X\|_v$ 相容不等式成立.

这种范数称为诱导范数. 或算子范数

验证三角不等式：设 $A+B$ 在 x_0 取最大值 $\|(A+B)x_0\|_v$. 且 $\|x_0\|=1$

$$\|A+B\| = \|(A+B)x_0\|_v \le \|Ax_0\|_v+\|Bx_0\|_v \le \|A\|+\|B\|$$

几种特殊的算子范数

$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ (列范数). ⟷ 对应向量范数 $\|x\|_1$

$\boxed{\|A\|_2 = \cancel{\max}\sqrt{\lambda_M} = \rho(A).}$ ⟷ 对应欧式范数 $\|x\|_2$.

$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (行范数) ⟷ 对应切比雪夫范数 $\|x\|_\infty$.

要会证明.

特别
- 对任意范数 $\|\cdot\|$，$\|I\|\ge 1$.
- 对算子范数，$\|I\|=1$ 总成立. ⇒ 例如 $\|A\|_F$ 和 $\|A\|_m$ 不是算子范数

（$\|A\|_F$ 上方：欧式 ↓；$\|A\|_m$ 上方：总和 ↓）

。一般矩阵级数. 收敛定理：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 收敛半径 R. ⟶ $\sin x$, $\cos x$, e^x 的收敛半径都是 $+\infty$

① $\rho(A)<R$ ⇒ 绝对收敛

② $\rho(A)>R$. ⇒ 发散

③ $\rho(A)=R$ ⇒ 条件收敛 或发散.