2025-03-09 许尔公式

设 P 是 n 阶可逆矩阵，将其按列分块得到 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

则有 $P^{-1}\alpha_1=e_1$，$P^{-1}\alpha_2=e_2$，…，$P^{-1}\alpha_n=e_n$ 其中 $e_i=(\underbrace{0,0,\dots,}_{i-1\text{个零}}1\dots,0,0)^T$

证明：

$P^{-1}P=P^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(P^{-1}\alpha_1,P^{-1}\alpha_2,\dots,P^{-1}\alpha_n)=I_n$.

故 $P^{-1}\alpha_1$ 为 I_n 的第一列，$P^{-1}\alpha_2$ 为 I_n 的第二列，…，$P^{-1}\alpha_n$ 为 I_n 的第 n 列

由于 I_n 的第 i 列为 e_i，因而得证

总结：可逆矩阵的逆矩阵恰能将原矩阵的第 i 列映射成第 i 个标准基向量.

schur
许尔公式：每个方阵都相似于一个上三角阵，且这个上三角阵的对角线元素
为原矩阵的所有特征值

注：三角阵的对角线元素即为自身的所有特征值

若存在非零向量 X 使 $AX=\lambda X$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$. 则称 λ 是 A 的特征值

则 $(A-\lambda I_n)\cdot X=0$ 有非零解 X. $\Leftrightarrow$ λ 是 A 的特征值

而 $(A-\lambda I_n)X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $A-\lambda I_n$ 不满秩，即 $\det(A-\lambda I_n)=0$.

故 $\det(A-\lambda I_n)=0$ 这个 n 次方程的 n 个解，即为 A 的所有特征值.

可以说明：三角阵的行列式为主对角线元素之积
于是 三角阵的所有特征值就是其主对角线元素.

2025-03-09 换位公式

设 $n \geq p$. 且 $A=A_{n\times p}$. $B=B_{p\times n}$，则

$$\underbrace{\det(\lambda I_n - AB)}_{\text{AB 特征多项式}} = \underbrace{\lambda^{n-p}\cdot\det(\lambda I_p - BA)}_{\text{BA 特征多项式}}.$$

注：$(AB)_{n\times n}$. $(BA)_{p\times p}$

取 $n+p$ 阶方阵 $C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n & p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_p \end{pmatrix}_{n+p} & \begin{array}{l} \}n \\ \}p \end{array} \end{array}$ 和 $D = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n & p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}_{n+p} & \begin{array}{l} \}n \\ \}p \end{array} \end{array}$

设 $P = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}_{n+p}$ 验证 P 为可逆矩阵 且 $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$

$P\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}_{n+p}$ 再验证 $CP=PD$

$CP = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B. & BA \end{pmatrix}$ $PD = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$ 这说明 $P^{-1}CP=D$.

即 C 相似于 D，相似矩阵一定具有相同的特征多项式. 现有

$\det(\lambda I_{n+p} - C) = \det(\lambda I_{n+p} - D)$ 成立， 代入分块矩阵的内容.

$$\det(\lambda I_{n+p} - C) = \det\begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & 0 \\ -B & \lambda I_p \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n - AB)\cdot\det(\lambda I_p)$$

$$= \lambda^p\cdot\det(\lambda I_n - AB)$$

$$\det(\lambda I_{n+p} - D) = \det\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -B & \lambda I_p - BA \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n)\cdot\det(\lambda I_p - BA)$$

$$= \lambda^n\cdot\det(\lambda I_p - BA)$$

于是 $\lambda^p\cdot\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n\cdot\det(\lambda I_p - BA)$ 得证.

2025-03-09 换位公式

推论0：设 $n=p$，则 $\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$

因此说明 AB 和 BA 具有完全相同的特征值

推论1：设 $A=A_{n\times p}$, $B=B_{p\times n}$ 则 AB 与 BA 所有非零特征值相同

$\lambda(AB)$ 仅比 $\lambda(BA)$ 多 $n-p$ 个零特征值

推论2：$tr(AB)=tr(BA)$ 其中 $A=A_{n\times p}$, $B=B_{p\times n}$. 先有这个

前提 $tr(X)$ 为 X 的所有特征值之和.

$tr(P^{-1}\Lambda P) = tr(\Lambda P^{-1}P) = tr(\Lambda)$

证明 $tr(X)$ 为 X 的所有特征值之和.

$\det(I_n\lambda - X) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

其中 λ^{n-1} 系数为 $-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$.

所有相似矩阵具有相同的迹.

※ 相似 ⇒ 特征值相同. ⇏ 相似.

相似 ⇔ 约当小块对应相同, 具有相同的约当标准型.