

11-03-2 第一次作业 SY240410 高冠男

Ex1. 若  $A$  正规且  $aX = AX$ ,  $bY = AY$  且  $a \neq b$ , 证明  $(X, Y) = 0$ .

$$aY^H X = Y^H (AX) = (A^H Y)^H X = (bY)^H X = bY^H X.$$

故  $(a-b)Y^H X = 0 \because a-b \neq 0 \therefore Y^H X = 0$ . 故  $(X, Y) = 0$ . 原命题得证.

其中  $A^H Y = bY$  由于  $A$  为正规阵, 故  $Y$  亦为  $A^H$  特征向量, 且特征值为实数.

Ex2. 若  $A = -A^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 则  $A$  的特征值均为纯虚数或零.

设  $B = -iA$  证明  $B$  是 Hermite 阵

$$B^H = (-iA)^H = iA^H = -iA = B \text{ 因此 } B \text{ 的所有特征向量均为实数}$$

$$\text{设 } \lambda(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ 故 } \lambda(A) = \lambda(iB) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_n\}$$

故  $A$  的所有特征向量均为纯虚数或零.