2025-04-03 3M101 矩阵

- 设A正规，则存在 $Q^{-1}=Q^H$ 使 $A=QDQ^{-1}=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}$

  设 $f(x)$ 为多项式：则 $f(A)=Q\cdot f(D)\cdot Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}Q^{-1}$

若记A的互异特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$，于是有

$\exists\ A=\lambda_1G_1+\cdots+\lambda_kG_k$ 对 $\forall f(x)$ 有 $f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots+f(\lambda_k)G_k$

若构造 $f_i(\lambda_i)=1$，$f_i(\lambda_j)=0$ $i\neq j$，则有

$f_i(A)=G_i$，其中 $f_i(x)=\dfrac{\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}$. 类似拉格朗日插值

- 谱阵 $G_1,\dots,G_k$ 的性质：

① $G_1+\cdots+G_k=I$ ② $G_i\times G_j=0$，$\forall i\neq j$ (正交性).

③ $G_1^2=G_1,\dots,G_k^2=G_k$ 且 $\underbrace{G_1^H=G_1,\dots,G_k^H=G_k}_{\text{来自于A正规}}$，推论 $G_i^HG_j\neq 0$. $\forall i\neq j$. 即 G_i 的列与 G_j 的列正交

- 其他性质：

① $AG_1=\lambda_1G_1,\dots,AG_k=\lambda_kG_k$，该性质与A的正规性无关

② $AG_1=G_1A,\dots,AG_k=G_kA$. 与A可换

③ 谱阵G的列都是A的特征向量.

- 注：若 $(A-\lambda_1I)P=0$，或 $AP=\lambda_1P$

则 $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ 中所有非零列都是A的特征向量.

故取 $G_1,\dots,G_k$ 中的所有列，可以找到 A的 n个线性无关的特征向量

2025-04-03 矩阵

放弃 $G_1^H=G_1,\dots,G_k^H=G_k$，则可对所有单纯阵进行谱分解 → Hermite对称性.

则线性质只对正规阵成立.

不给证明，直接给出单纯阵判别法.（教材）

设 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 为A的互异特征值. $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\dots(A-\lambda_k I)\neq 0$ 则 A不是单纯阵.

也可以利用分块对角阵的方法，求矩阵A的k次方

设A为可逆阵且有谱分解. $A=\lambda_1 G_1+\dots+\lambda_k G_k$

则 $A^{-1}=\frac{1}{\lambda_1}\cdot G_1+\dots+\frac{1}{\lambda_k}G_k$（由于A可逆，故 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\neq 0$）.

若A半正定 设 $B=\sqrt{A}=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\cdot Q^{-1}$，其中 $Q^H=Q^{-1}$

则 $B^2=A$，（其中A为正规阵）.

$B=\sqrt{\lambda_1}\cdot G_1+\dots+\sqrt{\lambda_k}\cdot G_k$. 其中 B 也是半正定矩阵

可以验证 $G_1\sim G_k$ 也都是半正定.

给定解析函数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cdot x^k$ 其中 给出幂级数展开

$=C_0+C_1x^k+C_2x^2+\dots+C_kx^k+\dots$

若A为方阵，规定 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cdot A^k=C_0\cdot I+C_1\cdot A+C_2\cdot A^2+\dots+C_k\cdot A^k+\dots$

注：$A^0=I$. 如何计算 $f(A)$ 的值.

例：设 $f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\dots$

于是 $f(A)=e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\dots+\frac{1}{k!}A^k+\dots$. 如何求解.

例. $A=0$ 时 $\exp(A)=I$. 欧拉公式：$e^{iA}=\cos A+i\sin A$，$e^{-iA}=\cos A-i\sin A$ ⇒ $\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$，$\sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$

交换公式：若 $AB=BA$ 则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$.

2025-04-03 习10 矩阵.

特别地 $e^A\cdot e^{-A}=e^{-A}\cdot e^A=I$. 推论. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ e^A 一定可逆. $(e^A)^{-1}=e^{-A}$.

同理: $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $\cos^2 A+\sin^2 A=I$

迹使公式: 设 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 故 $\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}\}$

故 $\det(e^A)=e^{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}=e^{tr(A)}$. $\because$ A的特征向量都是 e^A 的特征向.

① 若 $A^2=A$, 则A为单纯阵且 $e^{tA}=I+(e^t-1)\cdot A$.

特别地 $e^A=I+(e-1)A$.