2025-03-18 SM101 矩阵

许尔公式：任何n阶复矩阵都可以相似三角化

三角化使用的正交矩阵的第一列是A的某个特征向量：证明与非U阵类似。

U阵

注解：如n阶矩阵有n个互异的特征根（两两互不相同）⇒要求比较高，有更弱的条件

则A必有n个线性无关的特征向量 $X_1,\dots,X_n \in C^n$

令 $P=(X_1,X_2,\dots X_n)\in C^{n\times n}$，则有 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

此时称A可以相似对角化，对角化是三角化的特殊情况

许尔分解中可以找到足够好的可逆阵P。

使得 $P^{-1}AP$ 形式上更简单，具体而言就是所谓约当分解

约当分解：给定方阵 $A\in C^{n\times n}$，存在一个可逆阵P使得

$$P^{-1}AP=J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & ⊛ & & 0\\ & \lambda_2 & ⊛ & \\ & & \ddots & ⊛\\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 即非零元素仅存在于双线上三角当中

这种形式的矩阵称为双线上三角阵，其中⊛处只有0/1两种形式

且重复的根一定彼此相邻。

（证明自学）

约当小块：一个约当块中特征向量相同

相同的特征向量可能分布在多个约当小块中 ⊛=1只存在于

不同特征根之间相邻的⊛一定为零，换言之相同的λ之间。

许尔公式的第二个版本：任何n阶复矩阵可以U相似对角化。

Q为U阵的前提下 $Q^{-1}=Q^H$ 故 $Q^{-1}AQ=Q^HAQ$

即U相似等价于U合同，于是证明任何复矩阵可以U合同于三角阵

Hermite分解定理：设A为Hermite矩阵，即 $A=A^H\in C^{n\times n}$，则存在U阵Q

使得 $Q^{-1}AQ=Q^HAQ=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

即Hermite矩阵必然可以U相似对角化。

2025-03-18 ？？？矩阵

证明：由舒尔公式可知 A 可以优相似上三角化即

$$Q^H A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \circledast \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$$ 对两侧同时进行 Hermite 转置

$$(Q^H A Q)^H = Q^H A^H Q \xlongequal{A^H=A} Q^H A Q = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & \\ \circledast & & \ddots \ \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

这说明：① $\circledast = 0$，即本质上是对角化

② $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$，即 A 的所有特征向量都是实数

总结：Hermite 阵的特征根都是实数，且一定可以 U 相似对角化

U 相似对角化 即是相似变换，也是合同变换，且 Hermite 阵必有 n 个正交特征向量

推论 ① 若 A 为 Hermite 阵，则 A 恰有 n 个互相正交的特征向量 $X_1 \perp X_2 \perp \cdots \perp X_n$.

使得 $AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，…，$AX_n = \lambda X_n$. 令 $Q = \left(\frac{X_1}{\|X_1\|}, \frac{X_2}{\|X_2\|}, \cdots, \frac{X_n}{\|X_n\|}\right)$

则必有 $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 即 U 相似于对角阵

② U 相似于对角阵的矩阵一定是 Hermite 阵.

常见的 Hermite 阵：$A^H A$，$AA^H$，这两个矩阵都一定是半正定的.

而且 $A^H A$ 和 $AA^H$ 具有相同的非零特征值

秩为 1 矩阵的特征向量信息：秩为 1 矩阵一定能写成 $A = \alpha\beta^T$ 的形式

考虑方阵 A：则 $\lambda(A) = \{\beta^T\alpha = tr(A), 0 \cdots\}$ 证明：换位公式.

有 $A^2 = \lambda A$ 故 A 的各列都是特征向量.

求 A 的零根的特征向量（有 $n-1$ 个线性无关的 0 零根对应的特征向量）

$$Ax = 0 \Leftrightarrow A^H A x = 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta^T)^H(\alpha\beta^T)x = 0$$

即 $\bar{\beta}\alpha^H\alpha\beta^T x = 0 \Leftrightarrow \|\alpha\|^2 \cdot \bar{\beta} \cdot \beta^T x = 0 \Leftrightarrow \beta^T x = 0$. 设 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则 $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n = 0$ 由于 $rank(A) = 1$ 故 $\beta \neq 0$. 故 $x$ 有 $n-1$ 个线性无关的解

2025-03-18 3M101 矩阵

遗传公式：记号：使用常数 "c" 代替 $cI$.（例如：$c\cdot A = cI\cdot A$）

若矩阵A的谱为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ → 在计算特征向量时常用

① 平移公式：则 $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\dots,\lambda_n\pm c\}$ } 特征向量保持不变

② 倍公式： $\lambda(kA)=\{k\lambda_1,\dots,k\cdot\lambda_n\}$

③ 幂公式 $\lambda(A^k)=\{\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k\}$

④ 逆公式 $\lambda(A^{-1})=\{\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1}\}$ 若A可逆

} A的特征向量仍是 $f(A)$ 的特征向量，但 $f(A)$ 可能有新增的特征向量

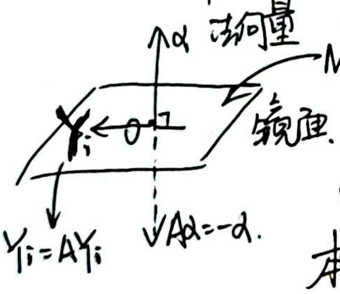
设 $A\alpha=\lambda\alpha$ 则 $(A+cI)\alpha = A\alpha + c\alpha = (\lambda+c)\alpha$.

如何使用平移法：一般都是构造秩1矩阵

- 同时秩1矩阵各列都是特征向量
- 这是特征值好计算、得到特征值后特征向量可以解出来.

遗传定理：设 $f(x)$ 是多项式，则 $f(A)$ 继承了A的所有特征向量.（证明?）

补充定理：镜面阵：$A=I-\frac{2\alpha\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ 恰有n个无关特征向量 $\alpha,\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}$.




n-1维分界面 ⇒ 基本构成 n-1个特征值1对应的特征向量.

$A\alpha=-\alpha$. 是 -1对应的特征向量

本质是平移后的秩1矩阵

首先 $\frac{\alpha\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ 的特征值为 $\{tr(\frac{\alpha\alpha^H}{\|\alpha\|^2}),0,\dots,0\}=\{1,0,\dots,0\}$

$f(\lambda_i)$.

$I+\frac{-2\alpha\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ 的特征值为 $\{-1,1,\dots,1\}$