补充：遗传公式

复习根遗传公式： 设 n 方阵 A 特征根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$， 则 $f(A)$ 的特根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$$

其中 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$

$f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 为任一多项式(或解析函数)

特别推论：（记住）

(1)平移公式： $A\pm cI$ 的根为 $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$

(2)倍法公式： kA 的根为 $\lambda(kA)=\{k\lambda_1,\cdots,k\lambda_n\}$， $\lambda(-A)=\{-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n\}$

(3)幂公式 ： A^p 根公式为 $\lambda(A^p)=\{\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p\}$, $p=0,1,2,\cdots$

……………………………………………………………………………..

遗传定理： A 的特向 $X_1\cdots\cdots X_n$ 也是 $f(A)$ 的特向

其中 $f(x)$ 为任一多项式(或解析函数)

引理 1(遗传公式)： 若 $A=A_{n\times n}$ 有特向： $AX_1=\lambda_1X_1,\cdots,\ AX_n=\lambda_nX_n$

则 $f(A)$ 也有特向： $f(A)X_1=f(\lambda_1)X_1,\cdots,\ f(A)X_n=f(\lambda_n)X_n$

其中 $f(x)$ 为任一多项式(或解析函数)

Pf. 证法 1：设 $AX_1=\lambda_1X_1$，其中 λ_1 为特根， X_1 为特向

必有 $A^kX_1=\lambda_1^kX_1$， $k=0,1,2,\cdots$， 任取多项式 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$

则有 $f(A)X_1=(c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k)X_1=(c_0+c_1\lambda_1+\cdots\cdots+c_k\lambda_1^k)X_1$

即有 $f(A)X_1=f(\lambda_1)X_1$

同理 $f(A)X_2=f(\lambda_2)X_2,\ \cdots,\ f(A)X_n=f(\lambda_n)X_n$ 证毕

Pf. 证法 2：若 $A=A_{n\times n}$ 为单阵，即存在可逆 P

使 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ (对角形)， $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$

其中 $P=(X_1\cdots\cdots X_n)$ 可逆，P 的列 $X_1\cdots\cdots X_n$ 都是 A 的特向：

使 $AX_1=\lambda_1 X_1,\cdots,\ AX_n=\lambda_n X_n$

利用公式 $\mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})$

$$\Longrightarrow \mathbf{P}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{P}=f(\mathbf{D})=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix} \text{（对角形），}$$

$\Longrightarrow f(A)$ 特根为 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$

且， P 的列 $X_1\cdots\cdots X_n$ 都是 $f(A)$ 的特向:

$f(A)X_2=f(\lambda_2)X_2,\ \cdots,\ f(A)X_n=f(\lambda_n)X_n$ 证毕

根据**引理 1 ，可得**

遗传定理： A 的特向 $X_1\cdots\cdots X_n$ 也是 $f(A)$ 的特向

其中 $f(x)$ **为任一多项式**

即， $f(A)$ 继承了 A 的全体特征向量 $X_1\cdots\cdots X_n$

…………………………………………………………………………..

备注：若 A 可逆（ A^{-1} 存在），可取解析函数 $f(x)=x^{-1}$ 可写 $f(A)=A^{-1}$

逆公式：若 A 可逆， A^{-1} 的根为 $\lambda(A^{-1})=\{\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\}=\{\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\ \frac{1}{\lambda_n}\}$

且 A 与 A^{-1} 有**相同特向** $X_1,\cdots\cdots,X_n$ ！

备注：可写解析函数 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kx^k$ 幂级数

可写 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kA^k$ **叫** A 幂级数

推广的**根与特向遗传**公式：

备注： 设 n 方阵 A **特根为** $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，**特向为** $X_1,\cdots\cdots,X_n$

则 $f(A)$ **特根为** $\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$ **且有特向** $X_1,\cdots\cdots,X_n$

其中 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kx^k$ **为任一解析**函数

$$f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k+\cdots\cdots=\sum_0^{\infty}c_kA^k$$

特别例子：令指数函数 $f(x)=e^x$ 展开后

$$f(x)=e^x=\sum\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

可写 $f(A)=e^A=\sum\frac{A^k}{k!}=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots$

注意： e^A 对任一方阵 A 都有如上定义

备注 e^A **根与特向公式：**

设方阵 A 特根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ **特向为** $X_1,\cdots\cdots,X_n$

则 e^A 特根为 $\lambda(e^A)=\{e^{\lambda_1},\ \cdots,\ e^{\lambda n}\}$ **且有相同特向** $X_1,\cdots\cdots,X_n$

……………………………………………………………………………….

常见遗传法：（记住）

(1) 平移法： A 与 $A\pm cI$ **有相同特向** $X_1,\cdots\cdots,X_n$!!!

且 $A\pm cI$ 的根为 $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$

(2) 倍法： A 与 kA **有相同特向** $X_1,\cdots\cdots,X_n$

特别， A 与 $-A$ **有相同特向**

(3) 幂法 ： A 与 A^p **有相同特向**， $p=0,1,2,\cdots$

复习秩 1 阵公式：秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 必有秩 1 分解 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 可取 $\mathbf{A}$ 中任一非 0 列！

且有迹公式： $\boldsymbol{\beta\alpha}=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ **，且** $\lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}$

定理：秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 全体根为 $\lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}$， $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A}),\ \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

备注：若方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 为秩 1（比例阵），必有秩 1 分解 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times1}\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$,

记为 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$， 其中 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times1}$ 为 1 列, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$ 为 1 行

则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times1}$ 是 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 的特征向量.

证：$\because$ $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 为秩 1 分解，$\therefore$ $\boldsymbol{\beta\alpha}=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$

则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{A})\boldsymbol{\alpha}$，$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha}$ 是特根 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 的特征向量.

备注：秩 1 方阵 $\mathbf{A}$ 必有高低分解 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 可取 $\mathbf{A}$ 中任一非 0 列！

定理：秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 中任一非零列 $\boldsymbol{\alpha}$ 都是 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 的特征向量！

引理 1：方程 $\boldsymbol{\beta}X=0$ 的非 0 解 X 都是**秩 1 方阵** $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 的特征向量(属于 0 根)

$\because$ $\boldsymbol{\beta}X=0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{A}X=(\boldsymbol{\alpha\beta})X=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}X)=\vec{0}=0X$，故 X 是特征向量(属于 0 根)

备注：设秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，令 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)\neq 0$，则 $\boldsymbol{\beta}X=\vec{0}$

必有 $n-1$ 个无关特解 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

证明：$\because$ 齐次**方程** $\boldsymbol{\beta}X=0$ 系数阵 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)\neq 0$ 的秩：$rank(\boldsymbol{\beta})=1$

故 $\boldsymbol{\beta}X=\vec{0}$ 必有 $n-rank(\boldsymbol{\beta})=n-1$ 个无关特解 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ **(基本解)**

定理：秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 的 0 根 $\lambda_2=0$ 恰有 $n-1$ 个无关特征向量 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

其中 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 满足方程 $\boldsymbol{\beta}X=b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)$

备注(观察法)：秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 令 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)$

观察方程 $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$

可写出 $n-1$ 无关特解 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ (可以互正交 $\boldsymbol{Y}_1\perp\cdots\perp\boldsymbol{Y}_{n-1}$)

小结：秩 1 阵有分解 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 可取 $\mathbf{A}$ 任一非 0 列，令 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)$

则 $\lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 的特征向量；

且 $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ ($\boldsymbol{\beta}X=0$) 的 $n-1$ 无关特解 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

(可互正交 $\boldsymbol{Y}_1\perp\cdots\perp\boldsymbol{Y}_{n-1}$) 都是 0 根 $\lambda=0$ 的 $n-1$ 个特向

备注(2 种情况)：设**秩 1 方阵** $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 全体根为 $\lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}$，$\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$

Case1. 设秩 1 方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 且 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})\neq 0$，**且有分解** $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，令 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)$

$\boldsymbol{\alpha}$ 可取 $\mathbf{A}$ 中任一非 0 列！

则 $\mathbf{A}$ 恰有 n 个无关特征向量：α，$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

其中 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 是 $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ 无关特解(**基本解**)

Case2. **设秩 1 方阵** $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$ 且 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=0$，其中 $\lambda(A)=\{\mathrm{tr}(A),0,\cdots,0\}=\{0,0,\cdots,0\}$

($\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 为 n 重 0 根)

令 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots b_n)$

则 $\mathbf{A}$ 只有 $n-1$ 个无关特征向量：$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

其中 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 是 $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ 无关特解(**基本解**)

证明：$\because$ $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=0$，$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$ 可知 $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\boldsymbol{\beta\alpha}=0$，可知 $\boldsymbol{\beta\alpha}=0$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是**方程** $\boldsymbol{\beta}X=0$ 一个特解($\boldsymbol{\beta\alpha}=0$)，故 α，$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 线性相关！

备注：利用以上结论与平移法： A 与 $A\pm cI$ **有相同特向** $\boldsymbol{X}_1,\cdots\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 可得

一些方阵**特征向量观察法**

注：在一些文献里记号"$A\pm c$"表示$A\pm cI$，例如 $(A-2)(A-1)$表示$(A-2I)(A-I)$

例　用平移法与“秩 1 公式”求根 $\lambda(A)$ **,写出几个特向** $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ (无关)

$$(1)A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix},\ (2)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad (3)A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix},\ (4)A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$$

$$(5)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

解： $(1)A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow A-1=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(2,\ 1)=\alpha\beta$ 为秩 **1** $\Rightarrow$必有特向$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

观察方程 $\boldsymbol{\beta}X=0$ 即 $2x_1+1x_2=0$ 可得另一个特向$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$(不唯一)

且 $\lambda(A-1)=\{tr(A-1),0\}=\{3,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{4,1\}$

因为 $A-1$ **与** A 有相同**特向，故** A 有 2 个**特向**$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$(不唯一)

备注： $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$ 为非正规阵，有 2 个**特向** $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ （非正交）

令可逆阵 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$, 则有 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$

解： $(2)A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A-1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(0,\ 1,\ 0)=\alpha\beta$ 为**秩 1** $\Rightarrow$

必有特向 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

观察 $\boldsymbol{\beta}X=0$ 即 $0x_1+1x_2+0x_3=0$ 可得 2 个特向 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (不唯一)

且 $\lambda(A-1)=\{tr(A-1),0,0\}=\{1,0,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{2,1,1\}$

且 $A-1$ **与** A 有相同**特向，故** A 有 3 个**特向** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (不唯一)

分别属于特征根 $\{2,1,1\}$

解： $(3)A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$， $A-1=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}(1,\ 2,\ 0)=\alpha\beta$ 为**秩 1** $\Rightarrow$

必有 1 个特向 $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

观察 $\boldsymbol{\beta}X=0$ 即 $1x_1+2x_2+0x_3=0$ 可得 2 个特向 $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (不唯一)

且 $\lambda(A-1)=\{tr(A-1),0,0\}=\{-3,0,0\}\Rightarrow\ \lambda(A)=\{-2,1,1\}$

且 $A-1$ **与** A 有相同**特向，故** A 有 3 个**特向** $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (不唯一)

分别属于特征根$\{-2,1,1\}$

解： $(4)A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}(4,\ 4,-1)=\alpha\beta$ 秩 1

$\Longrightarrow$ 必有 1 个特向$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

观察$\boldsymbol{\beta}X=0$即$4x_1+4x_2-1x_3=0$可得 2 个特向$\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ (不唯一)

且$\lambda(A-3)=\{tr(A-1),0,0\}=\{9,0,0\}\Rightarrow\lambda(A)=\{12,3,3\}$

且 A 有 3 个**特向**$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ (不唯一)

分别属于根$\{12,3,3\}$

解： $(5)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A-i=\begin{pmatrix}i&-1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}(1,\ \mathrm{i})=\alpha\beta$ 为秩 **1** $\Rightarrow$必有特向$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

观察方程$\boldsymbol{\beta}X=0$即$1x_1+ix_2=0$可得另一个特向$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$(不唯一)

且$\lambda(A-i)=\{tr(A-i),0\}=\{2i,0\}\Rightarrow\lambda(A)=\{i,-i\}$

且 A 有 2 个**特向**$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ (不唯一)

备注： $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$为正规阵(优阵)，故有 2 个正交**特向**$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\ \lambda(A)=\{i,-i\}$

可令优阵 $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}$， 得正规分解$Q^HAQ=D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix},\ A-2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(1,\ 1)=\alpha\beta$ **为秩 1，且** $\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A}-2)=0$

根据备注 Case2 可知，只要观察$1x_1+1x_2=0$，故 A 只有一个特向$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

例　用平移法求特向 $X_1,\cdots,X_n$ 且求可逆阵 P　使 $P^{-1}AP$　为对角形

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},,\quad (2)A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},\quad (3)A=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$$

解: $(1)A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A-2=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1,-1)$ 为秩 **1**

必有特向 $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，且 $1x_1-1x_2-1x_3-1x_4=0$ 有特解 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 不唯一

且 $\lambda(A-2)=\{tr(A-2),0,0,0\}=\{-4,0,0,0\}\Rightarrow\lambda(A)=\{-2,2,2,2\}$

可知 A 有 4 个**特向** $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，令 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$ 可逆

则有 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}-2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$

备注：本题 A 为 hermite 阵(正规)，可取优阵 $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$ 不唯一

使得 $Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}-2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$

解: $(2)A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},A-1=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}(1,-1,-1,1)$ 为秩 **1**

且 $\lambda(A-1)=\{tr(A-1),0,0,0\}=\{-4,0,0,0\}\Rightarrow\lambda(A)=\{-3,1,1,1\}$

$A-1$ 必有特向 $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，且 $1x_1-1x_2-1x_3+1x_4=0$ 有特解 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 不唯一

可知 A **有 4 个特向** $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，令 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\-1&1&-1&-1\end{pmatrix}$ 可逆

则 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}-3&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

备注：本题 A 为 hermite 阵(正规)，可取优阵 $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\-1&1&-1&-1\end{pmatrix}$ 不唯一

使得 $Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}-3&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

解: (3) $A=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix},A+4=\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\-3\end{pmatrix}(1,-1,1,-1)$ **秩 1**

且 $\lambda(A+4)=\{tr(A+4),0,0,0\}=\{12,0,0,0\}\Rightarrow\lambda(A)=\{8,-4,-4,-4\}$

$A+4$ 必有特向 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，且 $1x_1-1x_2+1x_3-1x_4=0$ 有特解 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 不唯一

可知 A **有 4 个特向** $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$ 可逆

则 $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}8&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&-4\end{pmatrix}$

备注：本题 A 为 hermite 阵(正规)，可得优阵 $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$ 不唯一

使 $Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}8&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&-4\end{pmatrix}$

备注： **镜面阵** $A=I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$， $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T\neq 0$，其中 $|\alpha|^2=\alpha^H\alpha$

或令镜面阵 $A=I-2\varepsilon\varepsilon^H$**，（**$\varepsilon=\frac{\alpha}{|\alpha|}$，$\varepsilon^H\varepsilon=|\varepsilon|^2=1$）**满足**

1. $A^H=A$(hermite阵), $A^2=I$, 即$A^{-1}=A$，且 $A^{-1}=A=A^H$， A 为优阵

2. $\lambda(A)=\{-1,\ 1,\ 1,\cdots,\ 1\}$, 行列式$\det(A)=-1$

补充定理：镜面阵 $A=I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$ 恰有 n 个无关特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

使 $A\alpha=-\alpha$，且 $\boldsymbol{AY}_1=\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{AY}_{n-1}=\boldsymbol{Y}_{n-1}$

其中 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 为方程 $\alpha^H X=0$ 的 $n-1$ 无关特解（可互正交）

（$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 为 $\lambda=1$ 的 $n-1$ 个特向）

证明：因为 $A-I=-\frac{2}{|\alpha|^2}\alpha\alpha^H$ **为秩 1 阵，故** α 为 $A-I$ 的特征向量，

且 $\alpha^H X=0$ 的 $n-1$ 无关特解 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$ 也是 $A-I$ 的特征向量

故，$A=I-\frac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$ 恰有 n 个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{n-1}$

验证可知：$A\alpha=-\alpha$， $\boldsymbol{AY}_1=\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{AY}_{n-1}=\boldsymbol{Y}_{n-1}$

（自己验证：由$\alpha^H Y_1=0$可知$AY_1=Y_1$）

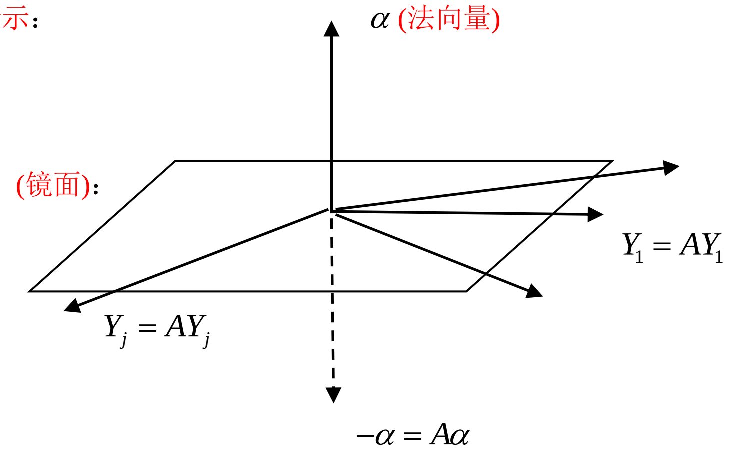
备注：由内积可知$\alpha^H X=(X,\alpha)=0$特解$\boldsymbol{Y_1,\cdots,Y_{n-1}}$都与向量$\alpha$正交！

即 $\alpha\perp Y_1,\cdots,\alpha\perp Y_{n-1}$，且$\boldsymbol{AY_1=Y_1,\cdots,AY_{n-1}=Y_{n-1}}$

结论：**镜面阵**$A=I-\dfrac{2\alpha\alpha^H}{|\alpha|^2}$恰有$n-1$个特向$\boldsymbol{Y_1,\cdots,Y_{n-1}}$都位于

与特向α正交的"超平面$\alpha^H X=0$"上.

如图所示：



…………………………………………………………………………………………..

例：求 3-循环阵** $A=[a_0,a_1,a_2]=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix}$的 3 个正交特征向量

解 令基阵Ω=$(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，可知$\Omega^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{I}$

可知特根$\lambda(\Omega)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$就是$\lambda^3=1$的 3 个根(复平面上单位圆周的 3 等分点)，

满足$\lambda_1^3=\lambda_2^3=\lambda_3^3=1$

可记$\lambda_j=e^{i\frac{2j\pi}{3}}=\cos\frac{2j\pi}{3}+i\sin\frac{2j\pi}{3}, j=1,2,3$，特别 $\lambda_3=1$，且$\lambda_j=\lambda_1^{\,j}$

令$X_j=\begin{pmatrix}\lambda_j\\ \lambda_j^2\\ \lambda_j^3\end{pmatrix}$可知$\Omega X_j=\Omega\begin{pmatrix}\lambda_j\\ \lambda_j^2\\ \lambda_j^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_j^2\\ \lambda_j^3\\ \lambda_j\end{pmatrix}=\lambda_j\begin{pmatrix}\lambda_j\\ \lambda_j^2\\ 1\end{pmatrix}=\lambda_j\begin{pmatrix}\lambda_j\\ \lambda_j^2\\ \lambda_j^3\end{pmatrix}=\lambda_j X_j$

即X_j就是Ω的特向(属于根λ_j)，故Ω恰有 3 个特征向量X_1,X_2,X_3

可知 $X_1\perp X_2\perp X_3$(互正交)，且$|X_1|=\cdots=|X_3|=\sqrt{3}$

注： $X_1 \perp X_2 \perp X_3$ 的一个简单证明是用已知定理“正规阵不同根的特征向量互正交”，

因为基阵 Ω 恰有 3 个不同根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$， 故它的 3 个特向互正交 $X_1 \perp X_2 \perp X_3$

令优阵 $Q=(q_1,q_2,q_3)=(\frac{X_1}{|X_1|},\frac{X_2}{|X_2|},\frac{X_3}{|X_3|})=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3\end{pmatrix}$ **(傅里叶优阵)**

可得**分解**： $Q^{-1}\Omega Q=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$， 其中 $\Omega=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

由于特征向量可相差非 0 倍数，也可改写**优阵 Q 如下**

$$Q=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{pmatrix} \text{ 使得 } Q^{-1}\Omega Q=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

可知 $\Omega=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有 3 个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\\ \lambda_2^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \lambda_3\\ \lambda_3^2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^2\\ \lambda_1^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_2^2\\ \lambda_2^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_3\\ \lambda_3^2\\ \lambda_3^3\end{pmatrix}$

可写 **3-循环阵** $A=[a_0,a_1,a_2]=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\a_2&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_0\end{pmatrix}=a_0\mathbf{I}+a_1\Omega+a_2\Omega^2=f(\Omega)$

其中 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$， 根据遗传公式可知

循环阵 $A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2\\a_2&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_0\end{pmatrix}$ 也有特征向量 $\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\\ \lambda_2^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ \lambda_3\\ \lambda_3^2\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^2\\ \lambda_1^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_2^2\\ \lambda_2^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_3\\ \lambda_3^2\\ \lambda_3^3\end{pmatrix}$

....

复习单阵定义： $A=A_{n\times n}$ **为单阵，即有可逆 P 使**

$$P^{-1}AP=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ (对角形)，} \lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$$

复习单阵谱公式： 若 $A=A_{n\times n}$ **单阵，互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$， **则有**谱公式

$$A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots\cdots+\lambda_kG_k,$$

$$\text{且 } f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$$

其中 $f(x)=\mathbf{c}_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 为任一多项式

备注(习题)： 若 $A=A_{n\times n}$ **单阵，互异根为** $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，则 $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\cdots\cdots(A-\lambda_kI)=0$

证明：令多项式 $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots\cdots(x-\lambda_k)$

则有 $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)=\cdots=f(\lambda_k)=0$，且 $f(A)=(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\cdots\cdots(A-\lambda_kI)$

代入谱公式：$f(A)=f(\lambda_1)G_1+\cdots\cdots+f(\lambda_k)G_k$，可知

$$f(A)=0G_1+0G_2+\cdots+0G_k=0$$

即 $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)\cdots\cdots(A-\lambda_kI)=0$ 证毕

……………………………………………………………………………………

补充引理： 若 $(A-\lambda_1I)P=0$，则 P 中非 0 列都是 λ_1 的特向

证明：$(A-\lambda_1I)P=0\Leftrightarrow AP=\lambda_1P$，令 $P=(X_1,\cdots,X_n)$ ---按列分块

则 $A(X_1,\cdots,X_n)=\lambda_1(X_1,\cdots,X_n)\Rightarrow AX_1=\lambda_1X_1,\cdots,AX_n=\lambda_1X_n$ 证毕

备注 1： 若 $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)=0$，则

$(A-\lambda_2I)$ 中非 0 列都是 λ_1 的特向，$(A-\lambda_1I)$ 中非 0 列都是 λ_2 的特向

证明：因为 $(A-\lambda_2I)(A-\lambda_1I)=(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)$ 可交换.

备注 2： 若 $(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)(A-\lambda_3I)=0$，则

$(A-\lambda_2I)(A-\lambda_3I)$ 中非 0 列都是 λ_1 的特向,

$(A-\lambda_1I)(A-\lambda_3I)$ 中非 0 列都是 λ_2 的特向,

$(A-\lambda_1I)(A-\lambda_2I)$ 中非 0 列都是 λ_3 的特向.

证：因为 $(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)(A-\lambda_3)=(A-\lambda_2)(A-\lambda_3)(A-\lambda_1)=(A-\lambda_3)(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)$ 可交换

备注 3： 若 $(A-\lambda_1I)^2=0$，则 $(A-\lambda_1I)$ 中非 0 列都是 λ_1 的特向

特别，若 $A^2=0$，则 A 中非 0 列都是 $\lambda_1=0$ 的特向

特别，幂等阵 $A^2=A$，A 中非 0 列都是 $\lambda_1=1$ 的特向

例如 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=0$，

则 A 中非 0 列 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是 $\lambda_1=0$ 的特向

再例如，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=A$ 幂等

则 A 中非 0 列 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是是 $\lambda_1=1$ 的特向

....

利用上面备注 1，2，3 可观测求出下面例子中的特征向量

例. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，可知 $\lambda(\mathrm{A})=\{1,\ 4\}$，由 **Cayley 公式可得** $(A-1)(A-4)=0$

且 $A-4=\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}, A-1=\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，可知

A 有 2 个**特向** $\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$（分别属于 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4$）不唯一

例 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\lambda(\mathrm{A})=\{i,\ -i\}$，由 **Cayley 公式可得** $(A-i)(A+i)=0$

且 $\mathbf{A}+i=\begin{pmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}, \mathbf{A}-i=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}$，可知

A 有 2 个**特向** $\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$（分别属于 $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$）不唯一

例： $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，$\lambda(A)=\{-2,1,1\}$

验：$(A-I)(A+2I)=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ -3 & -6 & 3\end{pmatrix}=0$

观察$(A-I)$， $(A+2I)$中各列，可知有 3 个特向$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$不唯一

分别属于特根$-2,\ 1,\ 1$

例：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$可知$\lambda(A)=\{2,2,2\}$

$\because (A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=0$，

可知$A-2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$中的列$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是特征根 2 的一个特征向量

例 $A=\begin{pmatrix}-1&i&0\\-i&0&-i\\0&i&-1\end{pmatrix}$hermit 正规阵， 用**备注 1，2，3 求出 3 个特征向量**

解 用平移法可知$\lambda(A)=\{1,\ \ -2,\ \ -1\}\Rightarrow \det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$

有 3 个不同特征根： $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2.$

Cayley 公式 $\Rightarrow(A-1)(A+1)(A+2)=0$

分别计算$(A+1)(A+2)$，$(A-1)(A+2)$，$(A-1)(A+1)$**的第 1 列**，可知

$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$的 3 个特征向量如下

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}\text{(互相正交)}$$

可令优阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix}}{\sqrt6} & \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt2} & \frac{\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，使得$Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$

…………………………………………………………………………………………..

备注:其它特向观察法

引理：若方阵 A 中各行元素之和为常数a，则$x=a$是一个特根，对应的特向为

全 1 向量 $\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$.

（利用转置公式可知：各列元素之和为常数 a 时 $x=a$ **也是一个特根**）

证：$\mathbf{AX}=\mathbf{A}(1,1,\cdots,1)^T=(a,a,\cdots,a)^T=a(1,1,\cdots,1)^T=a\mathbf{X}$.

例：n 阶全 1 方阵 $\mathbf{A}$，其各行元素之和为常数 n，则 $\lambda_1=n$ 是一个特根，其特向为**全 1 向量** $\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$

例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$ 的各行元素的和为 4，则 $\lambda_1=4$ 为一特根，其特向为**全 1 向量**

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；另一个根为 $\lambda_2=5-4=1$，特向为 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

补充习题：用平移法求根 $\lambda(A)$，用观察法写出几个无关的特征向量

注：记号"$A\pm c$"表示 $A\pm cI$，例如 $(A-2)(A-1)$ 表示 $(A-2I)(A-I)$

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&2\\3&3\end{pmatrix}$，(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，(3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}-3&4&2\\-2&3&1\\-2&2&2\end{pmatrix}$, $A-1=?$ ，(5) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&3&-1\\0&2&0\end{pmatrix}$，$A-1=?$

(6) $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$，$A-2=?$ (7) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A-2=?$

(8) $A=\begin{pmatrix}0&c&c\\c&0&c\\c&c&0\end{pmatrix}$, c 为复数　　(9) $A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&-1\\6&3&4\end{pmatrix}$

……………………………………………………………………………………