2025-03-06 主M101 矩阵理论与应用

回顾：$\|A\|_F^2 = tr(A^H A) = tr(A \cdot A^H)$ 称为模平方公式

$\|A\|_F^2 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2$ 其中 $a_{ij} \in C$ 因此需要取绝对值

例：已知 A 是矩阵 $A \cdot A^H = 0$（零矩阵）则 $A = 0$.

证明：$tr(A \cdot A^H) = tr(0) = 0 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2$

由于 $|a_{ij}|^2 \geq 0$ 故 可以证明 $a_{ij} = 0$.

该性质可用于证明矩阵相关等式

$A = 0 \Leftrightarrow A \cdot A^H = 0$

教材公式：$tr(AB^T) = tr(B^T A) = \sum_{ij} a_{ij} \cdot b_{ij}$ 其中 AB 为同型矩阵 证明方法去.

补充公式 1：$tr(A \cdot B^H) = tr(B^H A) = \sum_{ij} a_{ij} \cdot \overline{b_{ij}}$ 证明：代入 $B = \overline{C}$ 用上式

补充 2：

设 X Y 为 N 维向量 则 $tr(X \cdot Y^H) = tr(Y^H X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$ 但愿将来有用

$(X \in C^N, Y \in C^N)$ 这老师我猜是个工人

C^n 上的标准内积（定义）(X, Y) 或 $(X|Y)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$ 如果是实向量则 $y_i = \overline{y_i}$ 符合传统定义.

$= tr(X \cdot Y^H) = tr(Y^H X)$ 即补充公式 2.

内积公式：$(X|Y) = tr(X \cdot Y^H) = tr(Y^H X)$ 是 C^n 上的内积计算方式

Unitary space：酉空间：带有内积的复向量空间，内积就是这个

模长的性质 ① 齐性：$\|kX\| = |k| \cdot \|X\|$ 说明可以单位化.

② 三角不等式（暂时用不到）

2025-03-06 主M101 矩阵理论与应用

单位化公式：$\dfrac{X}{\|X\|}$ 为单位向量（其中 $X \neq 0$），证明：齐性

引入空间 $C^{m\times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \;\middle|\; \begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix} \; a_{ij}\in C \right\}$

- 加法、数乘，以及标准内积 $(A|B) = tr(AB^H) = \sum_{ij} a_{ij}\overline{b_{ij}}$
- $C^{m\times n}$ 中的模长平方：$\|A\|_F^2 = (A|A) = tr(A^HA) = tr(A\cdot A^H)$.

内积的性质：（有时也称作内积公理，标准内积只是一种内积）

- ① 正性：$(X|X) \ge 0$ 且 $\{(X|X)=0 \Leftrightarrow X=\vec{0}\}$ 对列向量而言.
- ② 共轭性：$(Y|X) = \overline{(X|Y)}$ 又叫做共轭交换或共轭对称. $X^HY = \overline{(X|Y)}$ 是一个复数.
- ③ 齐性：$(kX|Y) = k(X|Y)$；$(X|kY) = \bar{k}(X|Y)$.
- ④ 线性性（分配律）$\begin{cases}(X+Y|W) = (X|W)+(Y|W) \\ (W|X+Y) = (W|X)+(W|Y)\end{cases}$

注：使用正性以及分配律，可以证明 $|(X|Y)|^2 \le (X|X)\cdot(Y|Y)$. X,Y 成比例时等号成立

柯西施瓦兹不等式（急记）

$0 \le (X+Y|X+Y) = (X|X)+(X|Y)+(Y|X)+(Y|Y)$

列内积公式：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ 则 $A^HA = \left(\overline{(\alpha_i|\alpha_j)}\right)_{p\times p} = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \overline{(\alpha_1|\alpha_2)} & \cdots & \overline{(\alpha_1|\alpha_p)} \\ \overline{(\alpha_2|\alpha_1)} & |\alpha_2|^2 & \cdots & \overline{(\alpha_2|\alpha_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(\alpha_p|\alpha_1)} & \overline{(\alpha_p|\alpha_2)} & \cdots & |\alpha_p|^2 \end{pmatrix}$

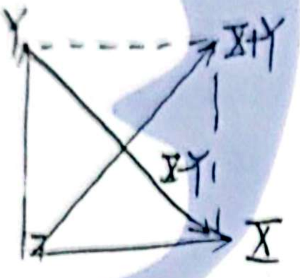
$A^H = \begin{pmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_p^H \end{pmatrix}$

列列内积. 第 i 行第 j 列是 α_i 和 α_j 的内积的共轭

AA^H 为行行内积

正交/垂直. $(X|Y)=0 \Leftrightarrow (Y|X)=0$.

C^n 中正交的条件: $X\perp Y \Leftrightarrow X^HY=0=Y^HX$.



$X\perp Y \Rightarrow$

勾股定理: $(X|X)+(Y|Y)=(X+Y|X+Y)$

$=(X-Y|X-Y)$.

例子: 若 $X\perp Y$ 则 $aX\perp bY$. 使用内积齐性即可证明.

推广: 若. X,Y,W 两两正交, 则 aX, bY, cW 两两正交 记作 $aX\perp bY\perp cW$.

$X\perp Y\perp W \Rightarrow |aX\pm bY\pm cW|^2=|aX|^2+|bY|^2+|cW|^2$.

证明思路: cW 与 $aX+bY$ 亦垂直.

正交组: $X_1\perp X_2\perp\cdots\perp X_p$ (注: 两两正交). 且 $X_1\ldots X_p$ 不含零向量

则称 $X_1\ldots X_p$ 称为一个正交组. ($P=1$时认为一个向量也构成正交组).

预U阵: 若 $A=A_{n\times p}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ 中 $\alpha_1\ldots\alpha_p$ 是正交组(注:不含零向量).

则称A为预U阵.

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)$.

预U阵的相关判定: $A=A_{n\times p}$ $(p\le n)$ A为预U阵 $\Leftrightarrow$ 列列正交 $\Leftrightarrow$ A^HA 为对角阵

且主对角元均不为零.

$$A^HA=\begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & & 0 \\ & |\alpha_2|^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & |\alpha_p|^2 \end{pmatrix}$$

2025-03-06 主M101 矩阵理论与应用.

特别地：当 $A=A_{n\times n}$ 时 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，A为正交U ⇔ A^HA 为对角阵
并且对角线元素均非零.

若 $p<n$ 也称 $A_{n\times p}$ 为半正交U阵

U阵 ①若方阵 $A=A_{n\times n}$ 为正交U阵，且各列模长为1，则A为U阵

②若方阵 $A=A_{n\times n}$ 且 $A^HA=I_n$，则A为U阵（也是个充要条件）.

③由②可知，若A为U阵，则A可逆且 $A^H=A^{-1}$ 即 $AA^H=A^HA=I_n$.

④若 $AA^H=I_n$ 则 A为U阵

课后自己去看半U阵的定义，以及U阵的其他性质.