2025-03-25 SY2406410 郭冠男 第二次习题

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ 求特征根、特征多项式和一个特征向量

$$A-I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 6\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\times(1\ \ 1\ \ -3)$$ 是个秩1矩阵

故 $\lambda(A-I)=\{tr(A-I),0,0\}=\{0,0,0\}$ 并有一个特征向量 $\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$

于是根据平移法则

$\lambda(A)=\{1,1,1\}$ 故特式 $det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3$，$\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$ 是A的一个特向

验证特征向量：

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}}\overset{\alpha}{\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}}=\overset{\lambda_1}{1}\cdot\overset{\alpha}{\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}}$$

2025-03-25 SY2406410 郭冠男 第二次习题

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 求特征根，特征多项式 和一个特征向量

$$A-3I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times (4\ 4\ -1)$$ 是一个秩1矩阵

故 $\lambda(A-3I) = \{tr(A-3I), 0, 0\} = \{9, 0, 0\}$ 并有一个特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

于是 根据平移法则

$\lambda(A) = \{12, 3, 3\}$ 故特式 $det(\lambda I - A) = (\lambda-12)\cdot(\lambda-3)^2$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是个特向

验证特征向量：

$$\begin{array}{ccccccc} A & & \alpha & & & \lambda_1 & \alpha \\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} & = & 12\times & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2025-03-25 SY2406410 郭冠男 第二次习题

3. $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ 求特征根、特征多项式和一个特征向量

$A+2I=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times(3\ \ 3\ \ 3)$ 是一个秩1矩阵

故 $\lambda(A+2I)=\{tr(A+2I),0,0\}=\{9,0,0\}$ 并有一个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

根据平移法则 $\lambda(A)=\{+7,-2,-2\}$ 故特式为 $|\lambda I-A|=(\lambda-7)(\lambda+2)^2$ 并有特向 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

验证特征向量:

$$\begin{array}{cccc} A & \alpha & \lambda_1 & \alpha \\ \begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&3\\3&3&1\end{pmatrix} \cdot & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = & 7\cdot & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

4.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$ 求特征值、特征多项式和1个特征向量

$$A-I=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}$$ 是个秩1

故 $\lambda(A-I)=\{tr(A-I),0,0\}=\{0,0,0\}$ 并有一个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

根据平移法则

$\lambda(A)=\{1,1,1\}$ 故特征多项式 $det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3$ 并有一个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

验证特征向量

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}}_{A}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\alpha}=\underbrace{1}_{\lambda_1}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{\alpha}$$

2023-03-25 SY2406410 郭冠男 第二次习题

思考题 设实的列向量 $\alpha=(a_1,\dots,a_n)^T\neq 0\in\mathbb{R}^n$

令 $A=I-\frac{2\alpha\alpha^T}{\|\alpha\|^2}$. 其中 $\|\alpha\|^2=\alpha^T\alpha$.

① 求 A^T-A 和 $A\alpha+\alpha$. ~~以及 $\lambda(A)$~~

$$A^T-A=\left(I-\frac{2\alpha\alpha^T}{\|\alpha\|^2}\right)^T-A=\left(I-\frac{2\alpha\alpha^T}{\|\alpha\|^2}\right)-A=0$$ 说明A为实对称矩阵

$$A\alpha+\alpha=\left(I-\frac{2\alpha\alpha^T}{\|\alpha\|^2}\right)\alpha+\alpha=2\alpha-\frac{2\alpha\alpha^T\alpha}{\|\alpha\|^2}=2\alpha-2\alpha=0.$$ 说明 α 为特征向量 $\lambda_1=-1$.

② 求 $\lambda(A)$

$A-I=-\frac{2}{\|\alpha\|^2}\cdot\alpha\cdot\alpha^T$ 是个秩1矩阵 故 $\lambda(A-I)=\{tr(A-I),\underbrace{0,\dots,0}_{n个}\}$

即 $\lambda(A-I)=\{-2,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1个}\}$ 根据平移法则

$\lambda(A)=\{-1,\underbrace{1,\dots,1}_{n个}\}$ 且 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$ 为特征多项式