2025-03-27 ANR 训101 矩阵

所有列向量线性无关

$A=QR \Rightarrow R=Q^H A$ 其中 A 为高阵，Q 为单位列U阵，R 为上三角阵（正线上三角）

原理：先对 A 进行施密特正交化，得到 Q，再对 Q 做各列的单位化即可

注意：$(X_1,X_2)=X_2^H X_1$ 注意顺序

正交化算法：$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1$$ 即 α_2 在 α_1 上的投影

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{\|\beta_2\|^2}\beta_2$$

特殊地 ① 若 A 为方阵，则要求 A 为可逆阵 ② 若列已经两两正交 则只需对 A 单位化.

如果 A 有线性相关的列组，也可以进行QR分解，但施密特的做法可能失效

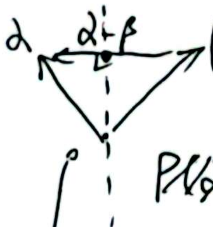
有的教材采用了对 $A+\varepsilon I$ 进行QR分解再让 $\varepsilon\to 0$ 求极限的算法.

这种方法时常用于证明QR分解的存在性，但不提供算法.

注解：如果 $A=A_{n\times n}$ 为方阵，但 A 不可逆，则 $A=QR$ 的分解仍然存在

方法：使用镜面阵的方法.

引理：设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|\alpha\|=\|\beta\|$，其中 $\alpha\neq\beta$，则有镜面阵 P，使得 $\begin{cases}P\alpha=\beta\\ P\beta=\alpha\end{cases}$



取 $n=\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}$ 则 $P=I-\frac{2nn^T}{\|n\|^2}$ 试证明 $P\alpha=\beta$. $P\beta=\alpha$

$P(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$, $P(\frac{\alpha-\beta}{2})=\frac{\beta-\alpha}{2}$ 即可证明

注：若 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ 且 $\|\alpha\|=\|\beta\|$ $(\alpha\neq\beta)$ 且内积 (α,β) 为实数，则有镜面阵 P 使 $P\alpha=\beta$.

使用时一般将 β 取为一个 $(1,0,\dots 0)^T$ 之类的基向量

其中 $P=I-\frac{2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^H}{\|\alpha-\beta\|^2}$ 为所需要的镜面阵

2025-03-27 3M101 矩阵

如何将镜面阵进行 QR 分解：

引理：设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\neq 0\in \mathbb{R}^n$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=b_1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}}_{e_1}$ 其中 $|b_1|=\|\alpha\|$ 且 $b_1\in\mathbb{R}$.

则有镜面 P 使得 $P\alpha=\beta=b_1\cdot e_1$ 且 $P\beta=\alpha$.

注解：$\because P\beta=P(b_1e_1)=b_1Pe_1=\alpha$ $\therefore Pe_1=\frac{\alpha}{b_1}$ 若取 $b_1=\|\alpha\|$

则 Pe_1 就是 α 单位化的结果（在 $b_1\in\mathbb{R}$ 条件下还可以取 $b_1=-\|\alpha\|$）

这说明 P 的第一列就是 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 这种方法可用于快速将非零向量扩充为 U 阵.

注解：对于 $\alpha\in\mathbb{C}^n$ 的情况：$\alpha\neq 0$，设 $\beta=\frac{\overline{a_1}}{\|a_1\|}\cdot\|\alpha\|\cdot e_1$.

则 (α,β) 为实数且 $\|\alpha\|=\|\beta\|$ 则能找到 P 使 $P\alpha=\beta$，$P\beta=\alpha$.

改化方法：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则有镜面阵 P 使

$PA=(P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots P\alpha_n)=(\beta_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n)$ 其中 $\beta_1=b_1\cdot e_1$.

$$\left(\begin{array}{c|c} b_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

找 P_2A_2 即可.

同理 对 $P\alpha_2$ 也可以再找镜面阵？

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} b_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} b_1 & * \\ \hline 0 & P_2A_2 \end{array}\right)$$

若第一列为 0 取 $P=I$ 即可

高阶分解（RU）：设 $A=A_{m\times n}$，$r(A)=r>0$. 则有 $A=B_{m\times r}\cdot C_{r\times n}$. 分解通常不唯一.

其中 B 为列满秩，C 为行满秩阵 一般来说只有 $r<\min(n,m)$ 才有意义

分解方法.

$A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}I_r & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 假 A 的前 r 列线性无关.

则令 $B=(a_1,\cdots,a_r)_{m\times r}$ $C=(I_r,*)$

若 A 得到的行阶梯 前 r 个非零行起始位置所在的列不在前 r 列

则令 B 为这些列，C 是对应列为单位向量，其他列可表示？

2025-03-27 301 矩阵

本质上相当于在A中找一个极大列线性无关组描述B，而不可以使用列变换 → 注意只可以使用行变换

再利用C线性组合得到其他列的信息。

为什么这些矩阵的位置不唯一：① 极大列无关组不唯一
② 顺序不唯一。

特殊情况：秩1阵：直接取第一列做为基本列（前提第一列非零）

注：设方阵 $A=A_{n\times n}$，$\mathrm{rank}(A)=r<n$.

则有 $A=B_{n\times r}\cdot C_{r\times n}$. 因而 CB 为 r 阶方阵且 $\lambda(BC)=\{\lambda_1,\dots\lambda_r\}$

则 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,\underbrace{0,\dots 0}_{n-r\text{个零}}\}$ 根据换位公式

例：$A=\begin{pmatrix}-1 & i & 0\\ -i & 0 & -i\\ 0 & i & -1\end{pmatrix}$ $(i^2=-1)$ 求 $\lambda(A)$ 的元素

$A+I=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 1 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$ 利用观察法分解即可 $\overset{B}{\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 1\\ 0 & i\end{pmatrix}}\overset{C}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$

$\triangleq CB=\begin{pmatrix}0 & 2i\\ -i & 1\end{pmatrix}$ $CB+I=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ -i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(1\ \ 2i)$

故 $\lambda(CB+I)=\{tr(3),0\}$ 故 $\lambda(CB)=\{2,-1\}=\lambda(A+I)$

故 $\lambda(A+I)=\{2,-1,0\}$ 故 $\lambda(A)=\{1,-2,-1\}$

这说明 LU 分解可以用于计算矩阵的所有特征根.