特向观察法

补充定理： 若 $(A-\lambda_1 I)P=0$，则 P 中列都是 λ_1 的特向

证明：$(A-\lambda_1 I)P=0 \Leftrightarrow AP=\lambda_1 P$，令 $P=(X_1,\cdots,X_n)$ ---按列分块

则 $A(X_1,\cdots,X_n)=\lambda_1(X_1,\cdots,X_n) \Rightarrow AX_1=\lambda_1 X_1,\cdots,AX_n=\lambda_1 X_n$　　证毕

方法 1： 若 $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=0$，则

$(A-\lambda_2 I)$ 的列都是 λ_1 的特向，$(A-\lambda_1 I)$ 的列都是 λ_2 的特向

证明：因为 $0=(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_1 I)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)$（可交换！）

由补充定理可知，$(A-\lambda_2 I)$ 的列都是 λ_1 的特向，且 $(A-\lambda_1 I)$ 的列都是 λ_2 的特向

例 1： $A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$（正规阵单阵！），全体根 $\lambda(A)=\{5,0,0\}$，不同根为 $\lambda_1=5,\lambda_2=0$

由于 A 为单阵！必有 $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=0$，即 $(A-5)(A-0)=0$

可知，$A-0=\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$ 中取一非0列 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_1=5$ 的**特向**

$A\text{-}5=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ 中取2列 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 都是 $\lambda_2=0$ 的**特向！**

例 2. $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$，可知 $\lambda(\mathrm{A})=\{1,\ 4\}$，由 Cayley 公式得 $(A-1)(A-4)=0$

且 $A-4=\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-2\end{pmatrix}$，$A-1=\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$，可知

A 有 2 个特向 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$（分别属于 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4$）不唯一

例 3 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\lambda(\mathrm{A})=\{i,\ -i\}$，由 Cayley 公式得 $(A-i)(A+i)=0$

且 $\mathbf{A}+i=\begin{pmatrix}i&-1\\1&i\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}-i=\begin{pmatrix}-i&-1\\1&-i\end{pmatrix}$，可知

A有 2 个特向$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$（分别属于$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$）不唯一.

例 4: $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda(A) = \{-2,1,1\}$

验：$(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 0$

观察$(A-I)$，$(A+2I)$中各列，可知有 3 个特向$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$不唯一

分别属于特根-2, 1, 1

特别，若有幂等阵：$A^2 = A$，必有$(A-1)A = 0$，则A中列都是$\lambda_1 = 1$的特向，

例如，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$为幂等

则A中非 0 列$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是是$\lambda_1 = 1$的特向

方法 2: 若$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I) = 0$，则

$(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)$中非 0 列都是$\lambda_1$的特向，

$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)$中非 0 列都是$\lambda_2$的特向，

$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)$中非 0 列都是$\lambda_3$的特向.

证：因 $0=(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)(A-\lambda_3) = (A-\lambda_2)(A-\lambda_3)(A-\lambda_1) = (A-\lambda_3)(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)$可交换，

由补充定理 1 可知，方法 2 结论成立

例 $A = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$ **hermit 正规阵!，求 3 个特征向量**

解 用平移法可知$\lambda(A) = \{1,\ \ -2,\ \ -1\}$？？？

有 3 个不同特征根：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2.$

利用 Cayley 公式，或正规阵单阵，必有$(A-1)(A+1)(A+2)$=0

分别计算$(A+1)(A+2)$，$(A-1)(A+2)$，$(A-1)(A+1)$中**第 1 列**，可知

$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$的 3 个特征向量如下

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}$$ (正规阵的特向互正交！)

可令优阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{\begin{pmatrix}1\\-2i\\1\end{pmatrix}}{\sqrt6} & \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt2} & \frac{\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，必有$Q^{-1}AQ=D=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$

……………………………………………………………………………

方法 3：**若**$(A-\lambda_1 I)^2=0$，则$(A-\lambda_1 I)$中非 0 列都是λ_1的特向

特别，若$A^2=0$，则A中非 0 列都是$\lambda_1=0$的特向

例如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=0$，

则A中非 0 列$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是$\lambda_1=0$的特向

例：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$根为$\lambda(A)=\{2,2,2\}$，特式$|xI-A|=(x-2)^3$

验：$\because (A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=0$，且$(A-2I)\neq 0$，A不是单阵！

可知$A-2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$中的列$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是特征根 2 的一个特征向量

……………………………………………………………………

利用上面备注 1，2，3 可观测求出下面例子中的特征向量

,

…………………………………………………………………………………………..

其它观察法：

引理：若方阵 A 中各行元素之和==常数 a，则 $x=a$ 是一个特根，对应的特向为

全 1 向量 $\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$.

（利用转置公式可知：各列元素之和为常数 a 时 $x=a$ **也是一个特根**）

证：$\mathbf{AX}=\mathbf{A}(1,1,\cdots,1)^T=(a,a,\cdots,a)^T=a(1,1,\cdots,1)^T=a\mathbf{X}$.

例：n 阶全 1 方阵 $\mathbf{A}$，其各行元素之和为常数 n，则 $\lambda_1=n$ 是一个特根，其特向为**全 1 向量** $\mathbf{X}=(1,1,\cdots,1)^T$

例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ 的各行元素的和为 4，则 $\lambda_1=4$ 为一特根，其特向为**全 1 向量** $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

另一个根为 $\lambda_2=5\text{-}4=1$，特向为 $\mathbf{A}\text{-}4=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ 中的列 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

补充题：用平移法求根 $\lambda(A)$，用观察法写出特征向量

注：记号 "$A\pm c$" 表示 $A\pm cI$，例如 $(A-2)(A-1)$ 表示 $(A-2I)(A-I)$

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$，(2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，(3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，$A-1=?$，(5) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，$A-1=?$

其它结论:

定理**1**：若**n**方阵 $A=(a_{ij})$ 中"行和≡常数**k**"，则常数**k**为A的一个特征根，

且全**1**向量 $\mathbf{X=(1,1,\cdots,1)}^T$ 为**A**的一个特向，使得 $A\mathbf{X}=\mathbf{kX}$

推论**1**：若**n**方阵 $A=(a_{ij})$ 中"列和≡常数**k**"，则常数**k**为A^{T}的一个特根，

且全**1**向量 $\mathbf{X=(1,1,\cdots,1)}^T$ 为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量，使得 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X=kX}$

证明：由条件可知转置A^{T}的"行和≡常数**k**"

由定理**1**可得推论**1**成立.

备注：A^{T}的特征根与**A**特征根相同！

但A^{T}的特征向量不一定是**A**的特征向量.

其它例子:

例1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$；$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3}\\ -1 & \mathbf{-1} & -1\\ -1 & -1 & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ 可知**A**，**B**的列和≡常数**1**，令 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$

则**A**，**B**都有特征根 $\lambda_1=\mathbf{1}$，可知**X**不是**A**，**B**的特向！！

可知，$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X=X}$，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X=X}$，即**X**是$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$的特向

例：已知2介阵$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$有2个特向X=$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，Y=$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$且无关！

令P=(X, Y)=$\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$(P可逆), 证明 $AP=PD$, $D=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$为对角阵

且 $P^{-1}AP=D$对角阵，即A为单阵！

解 $\because AX=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$=4X， $AY=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$=1Y

令P=(X, Y)， 则AP=(AX, AY)=(4X,1Y)=(X, Y)$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$=PD

其中，D=$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$，即 $AP=PD$

由于X, Y无关，故P=(X, Y)可逆，且$AP=PD$

故$\Rightarrow$ $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$对角阵

. . . .

补充题：A=$\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$(列和=？)，$\lambda$(A)={4,1}观察A的2个特向X=?，Y=?

使得AX=4X，AY=Y，令P=(X,Y),验证$P^{-1}AP$=D为对角阵