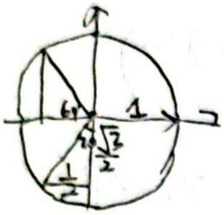
令 $\lambda^3-a_1a_2a_3=0$. 解得 $|\lambda|=(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}$



于是 $\begin{cases}\lambda_1=(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}\\ \lambda_2=(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ \lambda_3=(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\end{cases}$

由①

于是 $3(a_1a_2a_3)^{\frac{2}{3}}\le a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 即 $(a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2)^{\frac{1}{3}}\le\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=a_3$.

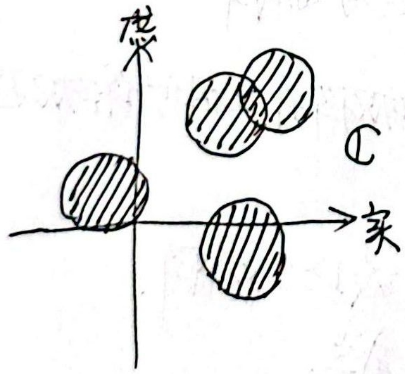
可用 $\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\sqrt{a_3}$ 代替 a_1^2,a_2^2,a_3^2 可由均值不等式给出证明

这种思路能够用于证明：几何平均 ≤ 算术平均.（均值不等式的矩阵证明）.

· 盖尔圆盘：

盖尔行 $R_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{pj}|\right)-|a_{pp}|$. 故以 a_{pp} 为中心在 $\mathbb{C}$ 中画 R_p 半径圆

可以证明：这些闭集圆的并能包含全体特征根（可高精度的特征根估计方法）



连通分支：理解成道路连通即可.

如果一个连通分支中有 k 个特征圆.

则这个区域中必恰有 k 个特征根.

重合圆不是孤立圆.

可以用于分析实矩阵实特征根的个数.

可以估计谱半径.

例：证明 $\begin{pmatrix}9&1&-2&1\\0&8&1&1\\1&0&4&0\\1&0&0.&1\end{pmatrix}$ 至少有 2 个实根.

$|a_{pp}|>R_p$ 对所成立.

· 如果原点在所有盖尔圆盘外，则矩阵也是可逆阵. 称为行对角占优

由于转置和原矩阵特征值不变. 列对角占优也一定可逆.