2025-04-24 $\,$ 訓101 $\,$ 矩阵

定义：保内积的变换我们定义成正交变换

• 实内积空间 V 上正交变换：① 保内积：$(TX, TY) = (X, Y)$

$T: V \to V$ ② 保模长 $\|TX\|^2 = (TX, TX) = (X, X) = \|X\|^2$

③ 保正交组：若 $X \perp Y$，则 $TX \perp TY$ 也成立：把正交基变成另一组正交基。

正交变换在 $\mathbb{R}^3$ 中实际上是旋转和镜面反射阵的复合。

例：设 $A = A_{n\times n}$ 为实正交阵，则变换 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的正交变换

正交阵 $A^H = A^{-1}$ $(A^T = A^{-1})$

在这里很重要，真正交变换在一般基下对应变换不一定。

注：欧式空间 V 上正交变换 T 在正交基下的矩阵必为正交阵。

证明：设 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是 V 的一组标准正交基，则 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)$ 也是正交基。

于是可以写：$(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot P$ 其中 P 为过渡阵。

如何说明 P 是正交阵：任取 $\xi_1, \xi_2 \in V$.

其中 $\xi_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$

$\xi_2 = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_n\alpha_n$. 其中 $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

记作：$\xi_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\xi_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 其中 $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n)X$. $\qquad = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)Y$

于是 $T(\xi_1) = x_1T(\alpha_1) + \dots + y_nT(\alpha_n)$，$T(\xi_2) = y_1T(\alpha_1) + \dots + y_n \cdot T(\alpha_n)$.

故内积 $(\xi_1, \xi_2) = x_1y_1 + \dots + x_n \cdot y_n = (T(\xi_1), T(\xi_2))$. 其中 $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)$ 也是标准正交基.

此时：$T(\xi_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot PX$. $\quad T(\xi_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) P \cdot Y$.

内积：$(T(\xi_1), T(\xi_2)) \overset{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{为正交基}}{=} (PX, PY) \overset{T\text{作为正交变换的性质}}{=} (X, Y)$. 这说明矩阵 P 保内积.

证明 P 中列两两正交且长度为1：取 $X = e_i$，$Y = e_j$ 即可证明.

2025-04-24 3M101 矩阵

- 生成子空间 $\text{span}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)=\{x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k \mid x_1,\dots,x_k\in F\}$
- 像空间与核空间

设复矩阵 $A=A_{m\times n}\in\mathbb{C}^{m\times n}$：如像以下两集合.

① 像空间/值域：$R(A)=\{Ax \mid x\in\mathbb{C}^n\}$，写 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

则 $Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$ 即 $R(A)=\text{Span}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

即A的所有列向量生成的子空间，也称为列生成子空间

② 核空间 $N(A)=\{x\in\mathbb{C}^n \mid Ax=0\in\mathbb{C}^m\}$ 即齐次线性方程组的全部解.

备注：维数与秩的关系：$\dim R(A)=\text{rank}(A)=r(A)$.

$\dim N(A)=n-r(A)$ 故 $\dim R(A)+\dim N(A)=\dim\mathbb{C}^n=n$.

- 正交空间定理：$N(A)\oplus R(A^H)=\mathbb{C}^n$，$N(A^H)\oplus R(A)=\mathbb{C}^m$.

可以任取 $x_1\in N(A)$，$x_2\in R(A^H)$，可以证明 $(x_1,x_2)=0$.

$(x_1,x_2)=(x_1,A^Hy)=y^HAx_1=y^H(\underset{\sim}{\overset{0}{\overset{\|}{Ax_1}}})=0$

于是可以证明 $N(A)\cap R(A^H)=\{0\}$，再结合维数定理

$N(A)\oplus R(A^H)\subseteq\mathbb{C}^n$ 且维数 $\dim\{N(A)\oplus R(A^H)\}=n$

性质：设A,B为可乘矩阵 $R(AB)\subseteq R(A)$ 注：$\text{rank}(AB)\le\min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}$

$N(AB)\supseteq N(B)$ ：$BX=0\Rightarrow ABX=0$.

- 同时对角化定理：若 A,B为 Hermite阵 且 $AB=BA$，求证存在U阵Q使 $(Q^{-1}=Q^H)$

$Q^{-1}AQ$ 以及 $Q^{-1}BQ$ 都是对角阵. $A^H=A$，$B^H=B$.

$(AB)^H=B^HA^H=BA=AB$ 说明 AB为 Hermit.

推广：若 A,B为正规阵 $(A^HA=AA^H,\ B^HB=BB^H)$

且 $AB=BA$，求证存在U阵Q使 $Q^{-1}AQ$ 以及 $Q^{-1}BQ$ 都是对角阵.

推论：若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 都为正规阵 且 $\forall i \neq j$ $A_iA_j = A_jA_i$ 即两两可交换，
则存在一个U阵Q 同时对角化 即 $Q^{-1}A_1Q, Q^{-1}A_2Q, \dots, Q^{-1}A_kQ$ 均为对角阵。

推论：若A, B 都正规且 $AB=BA$，则存在一个U阵Q同时对角化A, B。

注：正规阵一定U相似于对角阵，U相似于对角阵的一定是正规阵。

注：设 V_1, V_2 为V的子空间 则 $V_1 \cap V_2$ 也是子空间，交空间的性质。
且 $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

结论：设 $V_1 = N(A) = \{X \mid AX = 0\}$，$V_2 = N(B) = \{X \mid BX = 0\}$
其中 $A = A_{m\times n}$，$B = B_{p\times n}$ $X \in \mathbb{C}^n$。 则 $V_1 \cap V_2 = \{x \mid Ax = 0 \text{ 且 } Bx = 0\}$
$= \{x \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0\}$
$= N\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 其中 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+p)\times n}$ 是上下叠起来的分块阵。

其中 $\dim(V_1 \cap V_2) = n - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$，而 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 比 $V_1 \cap V_2$ 更容易求解。

◦坐标代替法 例：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$，$\beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_1$ 无关，
求t的取值范围。

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_3 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关。

则 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$ 只有零解 故 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 满秩

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}.$$

故 $\det(A) = 1 + t \neq 0$，故 $t \neq -1$。