2025-03-11 矩阵论习题 SY2401410 郭冠男

习题1: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in C^{2\times2}$ 其特征多项式为 $T(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$

证明 $T(A)\triangleq(A-aI)(A-dI)-bcI=0$

证明 设A的特征值为 λ_1,λ_2. 则有 $T(\lambda_1)=T(\lambda_2)=0$

由舒尔公式可知, A一定相似于一上三角阵, 则不妨设 P为二阶可逆阵

有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ 其中 $\alpha\in C$ 记 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

则有 $A=PBP^{-1}$

于是: $T(A)=T(PBP^{-1})=(PBP^{-1}-a\cdot P\cdot P^{-1})(PBP^{-1}-d\cdot P\cdot P^{-1})-bc\cdot P\cdot P^{-1}$

$$=P\cdot(B-aI)\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{=I_2}\cdot(B-dI)\cdot P^{-1}-bc\cdot P\cdot P^{-1}$$

$$=P\{(B-aI)(B-dI)-bcI\}\cdot P^{-1}=P\cdot T(B)\cdot P^{-1}$$

其中 $T(B)=\begin{pmatrix}\lambda_1-a&\alpha\\0&\lambda_2-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1-d&\alpha\\0&\lambda_2-d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}bc&0\\0&bc\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}(\lambda_1-a)(\lambda_1-d)&\alpha(\lambda_1+\lambda_2-a-d)\\0&(\lambda_2-a)(\lambda_2-d)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}bc&0\\0&bc\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}T(\lambda_1)&0\\0&T(\lambda_2)\end{pmatrix}$$ 其中 $\lambda_1+\lambda_2=a+d=tr(A)$ (迹公式)

故 $T(B)=0$. 因此 $T(A)=0$亦成立.

2025-03-11 矩阵论习题 SY2406410 郭冠男

习题2：设 $X, Y \in \mathbb{C}^n$，$\|X\| = \|Y\|$ 且内积 $(X|Y)$ 为实数，即有 $(X|Y) = \overline{(X|Y)}$

证明 $(X+Y) \perp (X-Y)$

证明：$(X+Y) \perp (X-Y) \Leftrightarrow (X+Y|X-Y) = 0$

$$(X+Y|X-Y) = (X-Y)^H(X+Y) = (X^H - Y^H)(X+Y)$$

$$= X^H X + X^H Y - Y^H X - Y^H Y$$

$$= \|X\|^2 + (Y|X) - (X|Y) - \|Y\|^2$$

由于 $(Y|X) = \overline{(X|Y)} = (X|Y)$

故 $=0$，因此 $(X+Y) \perp (X-Y)$

习题3：证明 $Y - \frac{(Y|X)}{\|X\|^2} \cdot X$ 与 X 正交，其中 $X \neq \vec{0}$，$X, Y \in \mathbb{C}^n$.

证明：$\left(Y - \frac{(Y|X)}{\|X\|^2} \cdot X\right) \perp X \Leftrightarrow \left(Y - \frac{(Y|X)}{\|X\|^2} \cdot X \,\middle|\, X\right) = 0.$

$$\left(Y - \underbrace{\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}}_{t} \cdot X \,\middle|\, X\right) = (Y|X) - \frac{(Y|X)}{\|X\|^2} \cdot \underbrace{(X|X)}_{=\|X\|^2} = 0.\ \text{得证}$$

$t = \frac{(Y|X)}{\|X\|^2}$ 为复系数

2025-03-11 矩阵论习题 SY2406410 郭冠男

习题4：对下列 α 计算 $A(\alpha)=I-\frac{2\alpha\cdot\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ ① $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ② $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

① $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

② $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$