QR 公式证明

QR 公式：若 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)_{n\times p}$ 为列无关（高阵，列满秩，$r(A)=$列数 p）

则有 $A=QR$，$Q=Q_{n\times p}$ 为半优阵（$Q^HQ=I_p$），R 为上三角

$$R=\begin{pmatrix} t_1 & & & * \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & t_p \end{pmatrix}_{p\times p}$$ 为上三角，且对角元为正：$t_j>0.$

且有公式：$R=Q^HA$

特别，**若** $A=A_{n\times n}$ 为可逆阵，则有 $A=QR$；$Q=Q_{n\times n}$ 为优阵'（$Q^{-1}=Q^H$）

要点：先把 A 的列正交化，得 Q，

备注：许米正交公式在复空间 C^n 中成立

证 Pf：由许米（Schmidt）正交公式 ，可写

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\left(\alpha_2,\beta_1\right)}{\left|\beta_1\right|^2}\beta_1$$

$$\vdots$$

$$\beta_p=\alpha_p-\frac{\left(\alpha_p,\beta_1\right)}{\left|\beta_1\right|^2}\beta_1-\frac{\left(\alpha_p,\beta_2\right)}{\left|\beta_2\right|^2}\beta_2-\cdots-\frac{\left(\alpha_p,\beta_{p-1}\right)}{\left|\beta_{p-1}\right|^2}\beta_{p-1}$$

则 $\beta_1\perp\beta_2\perp\cdots\perp\beta_p$（互正交）

可知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 互相表示如下

$$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1\\ \alpha_2=(*)\beta_1+\beta_2\\ \vdots\\ \alpha_s=(*)\beta_1+(*)\beta_2+\cdots+\beta_p\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_p\right)=\left(\beta_1,\cdots,\beta_p\right)\begin{pmatrix}1 & * & \cdots & *\\ 0 & 1 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

可写公式：$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\right)\begin{pmatrix}1 & * & \cdots & *\\ 0 & 1 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ ………… **(1)**

单位化：令 $\varepsilon_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|},\varepsilon_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\varepsilon_p=\dfrac{\beta_p}{|\beta_p|}$

即 $\beta_1=|\beta_1|\varepsilon_1,\beta_2=|\beta_2|\varepsilon_2,\cdots,\beta_p=|\beta_p|\varepsilon_p$，

可知

$$\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\right)=\left(|\beta_1|\varepsilon_1,|\beta_2|\varepsilon_2,\cdots,|\beta_p|\varepsilon_p\right)$$

$$=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\right)\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & O\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ O & & & |\beta_p|\end{pmatrix}$$

代入上面公式**(1)，** 可知

$$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\right)=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p\right)\begin{pmatrix}1 & * & \cdots & *\\ 0 & 1 & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\right)\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & 0\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |\beta_p|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & (*)\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{记为}}{=}\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\right)R$$

其中 $R=\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & 0\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |\beta_p|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & (*)\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\beta_1| & & & (*)'\\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |\beta_p|\end{pmatrix}$ 为上三角

令 $Q=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\right)_{n\times p}$ 为半优阵，代入上式，可得

$$A=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\right)R=QR$$ 证毕.

……………………………………………………………………………..

备注 $R=Q^HA$ 证明： $\because Q^HQ=I$， 且 $A=QR$

$$\Rightarrow Q^HA=Q^HQR \quad \Rightarrow Q^HA=R,$$ 可得 $R=Q^HA$.