2025-04-22 SM101.

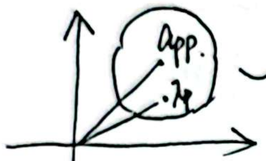
例：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{pp}|>R_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{pi}|\right)-|a_{pp}|$，则称A"对角占优".

对 $p=1,2,\dots,n$ 均成立.

结论：若A对角占优，则 $|\det(A)|\geq(|a_{11}|-R_1)\cdot(|a_{22}|-R_2)\cdots(|a_{nn}|-R_n)>0$.

Pf(?) 有人给了一个所谓证明．设 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ 由条件推出：

$|\lambda_p|\in[|a_{pp}|-R_p,\ |a_{pp}|+R_p]$ ←（我认为这一步不对，因为盖尔圆可能不孤立）.



于是 $|\det(A)|=|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|\cdots|\lambda_n|\geq(|a_{11}|-R_1)\cdot(|a_{22}|-R_2)\cdots(|a_{nn}|-R_n)$.

当然这种证明是不对的．不能说明有n个连通分支.

但我更想知道这个命题是否正确，以及如何证明/证伪.

正确的证明方式：令 $b_1=|a_{11}|-R_1,\ b_2=|b_{22}|-R_2,\dots,\ b_n=|b_{nn}|-R_n$.

则 $b_1>0,\ b_2>0,\ b_3>0,\dots,b_n>0$.

设 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{a_{11}}{b_1}&\frac{a_{12}}{b_1}&\cdots&\frac{a_{1n}}{b_1}\\ \frac{a_{21}}{b_2}&\frac{a_{22}}{b_2}&\cdots&\frac{a_{2n}}{b_2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{a_{n1}}{b_n}&\frac{a_{n2}}{b_n}&\cdots&\frac{a_{nn}}{b_n}\end{pmatrix}\overset{记}{=}(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 其中 $\tilde{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{b_i}$

$\tilde{A}$ 的第p个盖尔圆 $\tilde{G}_p$ 的半径 $\tilde{R}_p=\frac{R_p}{b_p}=\frac{1}{b_p}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{pi}|\right)-|a_{pp}|\right)$

$=\frac{R_p}{|a_{pp}|-R_p}$.

圆心的模长 $\left|\frac{a_{pp}}{b_p}\right|=\frac{|a_{pp}|}{|a_{pp}|-R_p}>1$

$=1+\frac{R_p}{|a_{pp}|-R_p}=1+\tilde{R}_p$

而这说明所有特征根的模长均 ≥1

每个盖尔圆盘都与单位圆外切.

于是 $|\det(\tilde{A})|\geq1^n=1$.

而 $|\det(A)|=b_1\cdot b_2\cdots b_n\cdot|\det(\tilde{A})|\geq b_1\cdot b_2\cdots b_n=(|a_{11}|-R_1)\cdots(|a_{nn}|-R_n)$.

得证.

2025-04-22 第10讲 矩阵

线性映射：$\left\{\begin{array}{ll}\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) & ① \ \alpha,\beta\in V.\\ \varphi(k\cdot\alpha)=k\cdot\varphi(\alpha). & ② \ \alpha\in V,\ k\in F.\end{array}\right.$ 线性空间

性质：保持线性组合：$\varphi(k_1\cdot\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\varphi(\alpha_1)+k_2\varphi(\alpha_2)$.

保持坐标原点不动：$\varphi(0_{V_1})=0_{V_2}$. 由①②可以证明.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ 线性相关，则 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\dots,\varphi(\alpha_p)$ 也线性相关

逆否命题：若 $\varphi(\alpha_1),\dots,\varphi(\alpha_n)$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ 线性无关

① 矩阵乘法是线性映射：$\varphi(X)=AX$ $\quad \varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $\quad A=A_{m\times n}$

② 线性变换：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的线性映射称为线性变换

任意线性空间之间的线性映射总可以表示成矩阵乘法的形式

求：线性变换 $V\to V$ $(V=\mathbb{R}^n)$ 在基 $[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]$ 下的矩阵 A. ※

适合 $T[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]=[T\varepsilon_1,\dots,T\varepsilon_n]=[\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n]A$.

对简单的例子直接使用观察法写出来即可，困难的就列方程解一下.

Eg：$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 适合 $T(\alpha_1)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},T(\alpha_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},T(\alpha_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

第1维：$\alpha_2-\alpha_3$

第3维：$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

第2维：$\alpha_3 \cancel{-\alpha_2+\alpha_3}$

$-\alpha_1+\cancel{\alpha_2}\cancel{-\alpha_3}$

$=\alpha_3-\alpha_1$.

其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

且任意 $X=x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+x_3\cdot\alpha_3\in\mathbb{R}^3$. 使 $T(X)=x_1\cdot T(\alpha_1)+x_2\cdot T(\alpha_2)+x_3 T(\alpha_3)$.

$(\alpha_2-\alpha_3)+2(\alpha_3-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$

$T(\alpha_1)=-\alpha_2+2\alpha_3$ $\quad T(\alpha_2)=-\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$、$T(\alpha_3)=-\alpha_1+2\alpha_3$

① 证明 T 为线性变换：显然. $T(X_1+X_2)=T(X_1)+T(X_2)$, $T(kX)=k\cdot T(X)$. $\forall k\in F$. $X\in\mathbb{R}^3$

② 求 T 在基 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的矩阵 A

$$T[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&-1&0\\2&2&2\end{bmatrix}$$

求逆阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&3&2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&1&-3&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&-1&1&-3&1\end{array}\right)$$

2025-04-22 3M101 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & 1 & -1 \\ & 1 & & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{验证}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　令 $W = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot A^k, \forall a_k \in \mathbb{R} \right\}$ 问W是否为空间.

若W是空间. 求 $\dim(W) = ?$

纠正 ① 只有有限次系数不为零. (一般取这个).

② 或者只取W中收敛的项

(两种都行).

答案：W是线性空间 求 $\dim(W)$.

由 $\lambda(A) = \{1,1,1\}$　$(\lambda I - A)^3 = 0$. ⇐ 凯莱定理. ※.

故 $\underbrace{A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0}$. 即 $A^3 = 3A^2 - 3A + I$. 这说明 $\forall k$.

$A(A^2 - 3A + 3I) = I$　故 $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

A^k 可表示成 I, A, A^2 的线性组合.

故 $W = \{ a_0 \cdot I + a_1 A + a_2 \cdot A^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ 故 $\dim(W) = 3$.

需要验证 I, A, A^2 线性无关.