北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

矩 阵 理 论

教材与参考书

课程教材:

《矩阵基本理论与应用》王磊编著

北京航天航天大学出版社，2021.

参考书:

[1] Matrix Analysis 2nd Edition, R.A. Horn, C.R. Johnson, Cambridge University Press, 2013.

[2] 矩阵论教程（第二版）张邵飞、赵迪, 机械工业出版社, 2012.

考试成绩

- **平时作业+智慧教育平台MOOC　　30%**

  要求: 观看MOOC视频, 做习题，系统自动记录

- **期末考试（闭卷）　　70%**

研究生教育：

https://www.gradsmartedu.cn/course/buaa08101A02619

学堂在线：

https://degreecourse.xuetangx.com/course/buaaP08111008076_ME/

课程章节

第一章 线性空间引论

第二章 线性映射与矩阵

第三章 矩阵分解

第四章 矩阵分析

第一章 线性空间引论——线性空间

定义1.1.2（数域） 设F是非空数集，若F中任意两个数的和、差、积、商（除数不为0）仍在该数集，即**对四则运算封闭**，称该数集F为一个数域.

- 数域是对加减乘除四则运算封闭的非空数集

例如： 有理数集$\mathbb{Q}$、实数集$\mathbb{R}$、复数集$\mathbb{C}$是数域；

自然数集$\mathbb{N}$、整数集$\mathbb{Z}$不是数域.

例 线性空间

（1）向量空间:$\mathbb{R}^n(n \geq 1)$是$\mathbb{R}$上的线性空间.

（2）矩阵空间: 设V为$\mathbb{C}$上所有$m \times n$矩阵构成的集合, 即$V = \{(a_{ij})_{m \times n} | a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 在矩阵加法和数乘运算下, 集合$V$构成$\mathbb{C}$上的线性空间, 称为复矩阵空间, 记为$\mathbb{C}^{m \times n}$.

类似地可定义实矩阵空间$\mathbb{R}^{m \times n}$.

第一章 线性空间引论——线性空间

向量→向量组→向量集合（引入线性运算、满足八条算律）→向量空间

矩阵→矩阵组→矩阵集合（引入线性运算、满足八条算律）→矩阵空间

元素→元素组→元素集合（引入线性运算、满足八条算律）→线性空间

定义1.1.3（加群）在非空集合V上定义一种代数运算，称之为**加法**（记为“+”），使得$\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$都有$V$中唯一元素$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与之对应，该元素称为$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和，且满足如下性质：

（1）交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

（3）存在零元素：$\exists\boldsymbol{\theta}\in V$使得$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$；

（4）存在负元素：$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\exists-\boldsymbol{\alpha}$使得$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$；

称V在加法运算下构成一个**加群**，记为$(V,+)$.

例如：

1）$(\mathbb{Z},+)$、$(\mathbb{Q},+)$、$(\mathbb{R},+)$、$(\mathbb{C},+)$在通常的加法运算下构成加群？

2）$(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\times)$、$(\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$、$(\mathbb{C}\backslash\{0\},\times)$在通常的乘法运算下构成加群？

例如：

1）$(\mathbb{Z},+)$、$(\mathbb{Q},+)$、$(\mathbb{R},+)$、$(\mathbb{C},+)$在通常的加法运算下构成加群？

2）$(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\times)$、$(\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$、$(\mathbb{C}\backslash\{0\},\times)$在通常的乘法运算下构成加群？

思考：其中的零元是什么？负元是什么？

定义1.1.4（线性空间） 设$(V,+)$是一个加群，F是一个数域. 定义了F中的数与V中元素的一种代数运算，称为**数乘**，使得$\forall \lambda \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$，有$V$中唯一元素$\lambda\boldsymbol{\alpha}$与之对应，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$称为$\lambda$与$\boldsymbol{\alpha}$的积，且满足以下性质：

（1）$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$， 数乘对加法分配律

（2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$， 数乘对数的加法分配律

（3）$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$， 数乘结合律

（4）$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$， 数乘的初始条件(单位元)

此时，V称为数域F上的线性空间，记为$(V,+,\cdot)$，V中元素称为**向量**，F中元素称为**标量**.

当$F=\mathbb{R}$时，称为实线性空间；当$F=\mathbb{C}$时，称为复线性空间.

注1. 这里的加法运算“+”和数乘运算“·”都是广义的运算法则，可以自己定义，不限于普通的加法和数乘.

注2. 证明是线性空间：集合V非空+两种运算封闭+八条判据

第一章 线性空间引论——线性空间

例 正弦函数的集合

$$S[x]=\{a\sin(x+b)\mid a,b\in\mathrm{R}\}.$$

对于通常的函数加法及数与函数的乘法构成线性空.

$$\because s_1+s_2=A_1\sin(x+B_1)+A_2\sin(x+B_2)$$

$$=(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos x+b_2\sin x)$$

$$=(a_1+a_2)\cos x+(b_1+b_2)\sin x$$

$$=A\sin(x+B)\in S[x].$$

$$\lambda s_1=\lambda A_1\sin(x+B_1)=(\lambda A_1)\sin(x+B_1)\in S[x]$$

$\therefore S[x]$ 是一个线性空间.

第一章 线性空间引论——线性空间

例 设$\mathbb{R}^+$为所有正实数组成的数集，其加法与乘法运算分别定义为

$$m \oplus n = mn,\ k \circ m = m^k$$

证明$\mathbb{R}^+$是$\mathbb{R}$上的线性空间.

第一章 线性空间引论——线性空间

证明 $(1)\ a\oplus b=ab=ba=b\oplus a;$

$(2)(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a\oplus(b\oplus c);$

(3) $\mathbb{R}^{+}$中存在零元素 **1**,对任何$a\in\mathbb{R}^{+}$,有

$$a\oplus 1=a\cdot 1=a;$$

(4) $\forall a\in\mathbb{R}^{+}$,有负元素$a^{-1}\in\mathbb{R}^{+}$,使

$$a\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1;$$

第一章 线性空间引论——线性空间

$$(5)\ 1\circ a=a^{1}=a;$$

$$(6)\ \lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^{\mu}=\left(a^{\mu}\right)^{\lambda}=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a;$$

$$(7)\ (\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu}=a^{\lambda}\oplus a^{\mu}$$
$$=\lambda\circ a\oplus\mu\circ a;$$

$$(8)\ \lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ(ab)=(ab)^{\lambda}=a^{\lambda}b^{\lambda}$$
$$=a^{\lambda}\oplus b^{\lambda}=\lambda\circ a\oplus\lambda\circ b.$$

所以 $\mathbb{R}^{+}$ 对所定义的运算构成线性空间.

线性空间性质：设V是数域F上的线性空间, 有

（1）零向量是唯一的;

（2）任一向量的负向量是唯一的;

（3）对任意$k \in F$和$\boldsymbol{\alpha} \in V$,

$$0\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta},\ (-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha},\ k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta};$$

（4）若$k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$, 则$k = 0$或$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$.