0 化式定义：A 为方阵， 若多项式 $f(x)$ 适合 $f(A)=0$

称 $f(x)$ 为 A 的一个 0 化式

备注：若 $\mathbf{f}(x)$ 为 A 的一个 0 化式，任取多项式 $\mathbf{h}(x)$

则 $\mathbf{f}(x)\mathbf{h}(x)$ 也是 A 的 0 化式。

因为 $\mathbf{f}(\mathbf{A})\mathbf{h}(\mathbf{A})=\mathbf{0}\mathbf{h}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$

备注：若 $\mathbf{f}(x)$ 为 A 的一个 0 化式，则 **A 有无穷多“0 个化式”！**

且，“0 个化式” $\mathbf{f}(x)\mathbf{h}(x)$ **的次数可以任意增大!!!**

定义：方阵 A 的 0 化式集合中“次数最小的 0 化式”叫 A 的极小 0 化式简称“极小式”，

极小式记为 $\mathbf{m}_A(x)$----通常取首系数为**1**

例如，A=I=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，满足$A^2=I$，即$A^2-I=0$,

可知　f(x)=x^2-1为A的0化式，

又$A-I=0$，即$x-1$也是A的0化式，且$x-1$具有最小次数

故，A的极小式为 $m(x)=x-1$

又例如，A=$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，满足$A^2=I$，即$A^2-I=0$,

可知　f(x)=$x^2-1=(x-1)(x+1)$为A的0化式，

因为$A-I\neq 0$，且$A+I\neq 0$，即$x-1$，$x+1$都不是0化式！

故，　A的极小式为 $m(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$

备注：2 介方阵的 0 化式!

利用已知定理：“A 的全体不同根都是 0 化式的根”(见前面文件)

可设 A 的全体不同根 $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_k$ 都是 0 化式化式 $f(x)$ 的根，

备注：2 介方阵的 0 化式!

开来Cayley定理：设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 特征式为 $T(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}$.

展开后 $T(x)=(x-a)(x-d)-bc$,

则 $T(\mathrm{A})=0$(零阵)

即 $T(\mathrm{A})=(\mathrm{A}-aI)(A-dI)-bcI=0$

Pf：$T(\mathrm{A})=(\mathrm{A}-aI)(A-dI)-bcI=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}-bcI$

$=\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}=0$, 故 $T(\mathrm{A})=0$

备注：2 介方阵的特征多项式 $T(x)=|xI-A|$ 也是它的一个 **0 化式!**

即有 $T(A)=0$

开来定理：**n 介方阵的特征多项式** $T(x)=|xI-A|$ 也是它的一个 **0 化式!**

即有 $T(A)=0$ （略证）

开来定理分解公式：设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 特征式为 $T(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

则 $T(\mathrm{A})=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=0$

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，特式为 $T(x)=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

可验证：$T(x)=(A-I)(A-4I)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

即，分解式 $T(x)=(x-1)(x-4)$ 也是A的0化式

补充题： $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，特式为 $T(x)=(x-1)(x-4)$

验证 $T(\mathrm{A})=(A-I)(A-4I)=0$,

且，$(A-I)$ 的列都是特征根4的特征向量；

$(A-4I)$ 的列都是特征根1的特征向量