2025-04-07 第三次作业 SY2406410 郭冠男

Ex4：计算 A^{100} 的谱分解，并写出三个特征向量，其中 $A=\begin{pmatrix}4&-3&-3\\6&-5&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A-I=\begin{pmatrix}3&-3&-3\\6&-6&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}(3\ \ -3\ \ -3).$$

于是 $\lambda(A-I)=\{tr(A-I),0,0\}=\{-3,0,0\}$ 其中 -3 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

根据平移法则 $\lambda(A)=\{-2,1,1\}$ 且其中 -2 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

验证：$\begin{pmatrix}4&-3&-3\\6&-5&-6\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 成立.

要求 1 对应的特征向量，只需求解 $A\alpha=\alpha$ 即 $(A-I)\alpha=0$ 的两个解 α_1,α_2.

可以观察得到 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程的两个线性无关的解

这说明 A 有三个线性无关的特征向量，因此，A 可以相似对角化.

设 $G_1=\dfrac{(A-I)}{-2-1}$，$G_2=\dfrac{(A+2I)}{1+2}$ 则有 $A=-2G_1+1\cdot G_2$.

其中 $G_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ $G_2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 其中 G_1、G_2 满足幂等律.

于是 $A^{100}=(-2)^{100}\cdot G_1+(1)^{100}\cdot G_2=2^{100}\cdot G_1+G_2$.

2025-04-08 第三次作业 SY2406410 郭[illegible]

Ex5：求 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的谱分解. 由于A为上三角阵，故A的特征值为主对角元

即 $\lambda(A)=\{1,2,3\}$ 设 $G_1=\dfrac{(A-2I)(A-3I)}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

设 $G_2=\dfrac{(A-I)(A-3I)}{(2-1)(\cancel{2-1})}$ $2-3$ $=-1\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

设

$G_3=\dfrac{(A-I)(A-2I)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$

于是 $A=1\cdot G_1+2G_2+3G_3$

$=1\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为 A的谱分解

2025-04-08 第三次作业 SY2406410 郭冠男

Ex: 用幂级数求 e^{tA} 和 e^{A}.

$$e^{tA} = I + (tA) + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots$$ 若 $A^2 = A$，则 $$e^{tA} = I + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)\cdot A = I + (e^t - 1)\cdot A$$

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$ 于是 $e^{tA} = I + (e^t - 1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & -2e^t + 2 \\ e^t - 1 & -e^t + 2 \end{pmatrix}$

代入 $t=1$ 得到 $e^{A} = \begin{pmatrix} 2e-1 & -2e+2 \\ e-1 & -e+2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$ 于是 $e^{tA} = I + (e^t - 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & -2e^t + 2 \\ 3e^t - 3 & -2e^t + 3 \end{pmatrix}$

代入 $t=1$ 得到 $e^{A} = \begin{pmatrix} 3e-2 & -2e+2 \\ 3e-3 & -2e+3 \end{pmatrix}$

2025-04-08 第三次作业 SY2406410 郭冠男

2. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 求 e^A, e^B, e^{A+B} 验证 $e^A\cdot e^B\neq e^{A+B}\neq e^B\cdot e^A$

$A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=A$. 于是 $e^{tA}=I+(e^t-1)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&e^t-1\\0&1\end{pmatrix}$

代入 $t=1$ 得到 $e^A=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}$

$B\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=B$ 于是 $e^{tB}=I+(e^t-1)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&-e^t+1\\ &1\end{pmatrix}$

代入 $t=1$ 得到 $e^B=\begin{pmatrix}e&1-e\\0&1\end{pmatrix}$

$$e^A\cdot e^B=\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e&1-e\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^2&-e^2+2e-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$e^B\cdot e^A=\begin{pmatrix}e&1-e\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e&e-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^2&e^2-2e+1\\0&1\end{pmatrix}.$$

$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 其中 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 为幂等阵.

设 $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 由于 $C^2=C$ 所以 $e^{tC}=I+(e^t-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&0\\0&1\end{pmatrix}$

故 $e^{2C}=\begin{pmatrix}e^2&0\\0&1\end{pmatrix}$ 由此可知 $e^Ae^B\neq e^{2C}\neq e^Be^A$.