2025-03-13 立M101. 矩阵论.

Hermite阵: $A^H=A$. 则称A为Hermite矩阵, $A\in C^{n\times n}$

{ 实对称矩阵是特殊的Hermite阵

Hermite阵的性质 ① 如果 $A^H=A\in C^{n\times n}$, 则对任意 $X\in C^n$

{ $X^HAX$ 必为实数.

证明: 只需要证明: $\overline{X^HAX}=X^HAX$ 一阶方阵的共轭,就是它的共轭转置

$$\overline{X^HAX}=(X^HAX)^H \xrightarrow{\text{共轭转置的性质}} = X^HA^HX \xrightarrow{A^H=A} = X^HAX$$ 得证.

② 若 $A^H=A\in C^{n\times n}$, 则A的特征值都是实数, 记为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$.

证明: 任取A的一个特征根 $\lambda$, 设 $X\neq 0$ 是与 $\lambda$ 对应的特征向量

则有 $AX=\lambda X$ 则 $X^HAX=\lambda X^HX=\lambda\cdot\|X\|^2$ 于是 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{\|X\|^2}$

由①可知 $X^HAX$ 是个实数, 故 $\lambda$ 为实数.

特有公式: 对任意方阵的特征值 $\lambda$, 都能表示成 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{\|X\|^2}$ 的形式

{ 其中X是 $\lambda$ 对应的特征向量. 特别地,若 $\|X\|=1$, 则 $\lambda=X^HAX$

注解: 若对任意 $X\in C^n$, 都有 $X^HAX$, 则有 $A^H=A$, 即A为Hermite矩阵.

{ $X^HAX$ 称为A产生的二次型, 本质上是个函数 记为 $Q(X)=X^HAX$, $X\in C^n$.

如果对一个二次型中有 $A^H=A$, 则称 $Q(X)$ 为标准二次型/Hermite二次型.

定义: 设 $A^H=A\in C^{n\times n}$, $f(X)=X^HAX$ 是A产生的二次型

{

① 若对任意 $X\in C^n$, $f(X)\geq 0$ 均成立, 则称 $f(X)=X^HAX$ 为半正定二次型, A为半正定Hermite阵

{ 记为 "$A\geq 0$" (通常是半正定)

② 若对任意 $X\neq 0$, $X\in C^n$, $f(X)>0$ 均成立, 则称 $f(X)=X^HAX$ 为正定二次型, A为正定Hermite阵

{ 记为 "$A>0$" (正定) 正定是半正定的特殊情况)

2025-03-13 主M101 矩阵论

③ 同理可定义半负定阵 $(A\le 0)$ 以及负定阵 $(A<0)$.

如果上述条件均不满足则 $A$ 为不定阵.

注解：对任意 $A\in C^{m\times n}$ 则 $A^HA\ge 0$ (半正定) 且 $AA^H\ge 0$ (半正定).

利用模平方公式：设 $X\in C^{n\times 1}$, $X^HA^HAX=\|AX\|^2\ge 0$.

设 $X\in C^{m\times 1}$ $X^HAA^HX=\|A^HX\|^2\ge 0$.

定理：设 $A\in C^{m\times n}$ 则 $(A^HA)X=0$. 与 $AX=0$ 具有相同的解空间

$(A^HA)X=0 \Rightarrow X^HA^HAX=0 \Rightarrow \|AX\|^2=0. \Rightarrow AX=0.$

$AX=0 \Rightarrow A^H(AX)=A^H\cdot 0=0$. 得证. 由于解空间维数 $=n-r(A)$.

故 $r(A^HA)=r(A)$ → 半正定矩阵的秩就是其正特征根的个数

推论：$r(A)=r(A^HA)=r(AA^H)=r(A^H)=r(\bar{A})$ ：等秩公式

秩公式：$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$ 一般而言.矩阵的秩就是其正奇异值的个数

定义：

设方阵 $A\in C^{n\times n}$ A的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ (含重根) 称为A的谱.

记为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ 注：并不是集合,因为可以有重复

2个基本公式：① $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=tr(A)=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$. 可以分别用求和公式

② $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=det(A)$ 即A的行列式

这两个性质对于任意方阵均成立.

有待证明：若 $A\in C^{n\times n}$, $B\in C^{n\times n}$, 则 $det(AB)=det(A)\cdot det(B)$

上三角矩阵/下三角矩阵的特征根就是对角线上的所有元素.

; 2025-03-13 3M101 矩阵论.

特征多项式分解: $T(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

引理:

设 $A\in C^{n\times p}$, $B\in C^{p\times n}$, (即AB和BA均为方阵, 但AB与BA常常不相等).

则 $|I_n-AB|$ 与 $|I_m-BA|$ 相等　　证明: 行变换不改变行列式, 分块行列式.

证明:
$$|I_n-AB|=\begin{vmatrix} I_n-AB & 0 \\ B & I_p\end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+(A)r_2]{\text{行变换}} \begin{vmatrix} I_n & A \\ B & I_p\end{vmatrix} \xrightarrow[r_2-(B)r_1]{\text{行变换}} \begin{vmatrix} I_n & A \\ 0 & I_p-BA\end{vmatrix}$$
$$=|I_p-BA|$$

同理: 用$-A$代替$A$, 可以证明 $|I_n+AB|=|I_p+BA|$.

特别地: $p=n$时 $|I_n-AB|=|I_n-BA|$.

推论式: ① $|\lambda I_n-AB|\cdot\lambda^p=|\lambda I_p-BA|\cdot\lambda^n$ 其中 $A\in C^{n\times p}$, $B\in C^{p\times n}$, 假定 $n\geq p$.

有 $|\lambda I_n-AB|=\lambda^{n-p}\cdot|\lambda I_p-BA|$.

证明: $\lambda\neq 0$时: $|\lambda I_n-AB|=\lambda^n\cdot|I_n-\frac{1}{\lambda}AB|=\lambda^n\cdot|I_n-(\frac{A}{\lambda})\cdot B|=\lambda^n\cdot|I_p-B(\frac{A}{\lambda})|$

$|\lambda I_p-BA|=\lambda^p|I_n-\frac{1}{\lambda}BA|=\lambda^p\cdot|I_p-B(\frac{A}{\lambda})|$

故 $\lambda^{-n}\cdot|\lambda I_n-AB|=|I_p-B(\frac{A}{\lambda})|=\lambda^{-p}\cdot|\lambda I_p-BA|$

故① $|\lambda I_n-AB|=\lambda^{n-p}\cdot|\lambda I_p-BA|$.

对于 $\lambda=0$时: 左右都是关于$\lambda$的$n$次多项式, 只要在 ~~n~~ $n+1$个不同点, 有相同的值

则说明两个多项式相同, 由于$\lambda\neq 0$成立, 故多项式有相同形式.

从而说明$\lambda=0$时亦相等

推论② $\lambda(AB)$与$\lambda(BA)$有所有非零特征值均相同

只差$n-p$个零根, 写作 $\lambda(AB)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-p个}\}$ 设$n\geq p$.

$\lambda(BA)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p\}$

③ $tr(AB)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=tr(BA)$. 当然也有更简单证法 $\sum_{ij}a_{ij}\cdot b_{ji}=tr(AB)=tr(BA)$.

2025-03-13 3M101 矩阵论.

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ 则 $\alpha\beta^T$ 为 $n\times n$ 矩阵 设 $A=\alpha\beta^T$

则 $tr(\beta^T\alpha)=tr(\alpha\beta^T)=tr(A)$. 由于 $\beta^T\alpha$ 与 $\alpha\beta^T$ 非零特征根相同.

故其至多有一个非零特征根. 即 $\lambda(\alpha\beta^T)=\{tr(A),\underbrace{0,\dots,0}_{n-1个}\}$.

证明: $A^2=tr(A)\cdot A$ $\quad A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\cdot tr(A)\cdot\beta^T=tr(A)\cdot\alpha\beta^T$.

作业: 回去看pdf中的额外内容.

许尔分解: 任何矩阵都相似于一个上三角阵. 回去整理n阶阵的情况
(三角化定理). 教材给了3阶阵的做法.