2025-04-20. SY2406410 郭冠男

补充题1:

$$A=\begin{pmatrix}0&c&c\\c&0&c\\c&c&0\end{pmatrix}$$ 求$\rho(A)$ 并求实数c的范围使 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛.
并求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 的值.

$A+cI=\begin{pmatrix}c\\c\\c\end{pmatrix}\cdot(1,1,1)$ 故 $\lambda(cI+A)=\{3c,0,0\}$.

故. $\lambda(A)=\{2c,-c,-c\}$. 故 $\rho(A)=2|c|$ 当 $|c|<\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛.

检查A是否是单阵. $f(x)=(x-2c)(x+c)$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-2c&c&c\\c&-2c&c\\c&c&-2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&c&c\\c&c&c\\c&c&c\end{pmatrix}=0$$ 说明A是单阵.

设 $A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2$ 其中 $\lambda_1=2c,\ \lambda_2=-c$.

$$G_1=\frac{(A-(-c))}{(2c)-(-c)}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad G_2=\frac{A-2c}{(-c)-2c}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots=\frac{1}{1-x}$

$$\text{故}\ \sum_{k=0}^{\infty}A^k=f(A)=f(\lambda_1)\cdot G_1+f(\lambda_2)\cdot G_2=\frac{1}{1-2c}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

2025-04-20 SY2406410 郭[illegible]

Ex2：求 $(I-A)^{-2}=\sum_{1}^{\infty}k\cdot A^{k-1}$ 绝对收敛的条件

Ex3：求 $A(I-A)^{-2}=\sum_{1}^{\infty}kA^{k}$ 绝对收敛的条件.

求收敛半径即可：$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{k}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|1+\frac{1}{k}\right|=1$ 故 Ex2与E3 收敛半径均为1.

故 $\begin{cases}\text{对Ex2. 绝对收敛条件为 } \rho(A)<1 \\ \text{对Ex3. 绝对收敛条件也为 } \rho(A)<1.\end{cases}$

Ex2：(我怀疑题目中 $\frac{2}{n}$ 应为 $\frac{1}{n}$，否则矩阵规律不明.)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 4 & 1/n & \cdots & 1/n \\ 1/n & 1/n & 6 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

可以看到 A 的盖尔圆盘由 n 个孤立的半径为 $\frac{n-1}{n}<1$ 的盖尔圆盘组成. 中心为 $2,4,\cdots,2n$.

故其必有 n 个互不相同实特征根.

其中 $\lambda_1\in(1,3)$，$\lambda_2\in(3,5)$，$\cdots$ $\lambda_k\in(2k-1,2k+1)$，$\cdots$ $\lambda_n\in(2n-1,2n+1)$.

是 A 的 n 个互不相同实特征根取值范围.

故 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$.