2025-03-20 引M101 矩阵论.

镜面阵: $A(\alpha)=I-\frac{2\cdot\alpha\cdot\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ 是个Hermite阵 ($\alpha\neq0$).

秩1阵对角线之和就是它的特征根.

$\lambda(A-I)=\{tr(-\frac{2\alpha\cdot\alpha^H}{\|\alpha\|^2}),0,\dots,0\}=\{-2,0,\dots,0\}$

故 $\lambda(A)=\{-1,\underbrace{1,\dots,1}_{n-1个}\}$

镜面阵的性质: ① $\lambda(A)=\{\overbrace{-1,1,\dots,1}^{n个}\}$ 法向量α是-1对应的特征向量

② 若 $\alpha\perp Y$ 则 $AY=Y$ 即Y在镜面上

③ $\det(A)=-1=-1\times1\times\cdots\times1$

④ $A^2=I$: 几何解释: 镜面变换做用两次即还原回初始状态

即 $A^2X=X$ 对任意 $X\in\mathbb{C}^n$ 均成立

即 $A^{-1}=A$ 由于A是Hermite, 故 $A^H=A$ 所以 $A^{-1}=A^H$ 得到A为U阵

U阵条件 $\begin{cases}A^HA=I\\ AA^H=I\end{cases}$

↓ 常用于化简其他矩阵 计算QR分解

Hermite阵分解定理: 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A^H=A$, 则存在U阵P使得

$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ 且 $\lambda_i\in\mathbb{R}$: P的每一列是A特征向量.

定理: A^HA 和 AA^H 总是半正定的Hermite矩阵

对任意矩阵A, 都能找到U阵Q, 使得 $Q^{-1}(A^HA)Q=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

由于 A^HA 与 AA^H 有相同的正特征根, 设 $r=rank(A^HA)=rank(AA^H)=rank(A)$.

则 $\lambda(A^HA)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r,\underbrace{0,\dots,0}_{n-r个零特征根}\}$

现我们称 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\dots,\sqrt{\lambda_r}$ 为A的正奇异值, 任何矩阵总有正奇异值

正奇异值的个数等于A的秩

"奇异值": 正奇异值+零奇异值 ⇒ 全体奇异值

定义: 正规矩阵: 设 $A\in C^{n\times n}$, 若 $A^HA=A\cdot A^H$ 则 A为"正规矩阵"

注: 正规矩阵一定是方阵. A为正规矩阵 iff A^H 也为正规矩阵

常见的正规矩阵: ① 对角阵一定是正规矩阵

② 所有正规矩阵可以U相似于对角矩阵.

③ Hermite阵 和 斜Hermite矩 都是正规矩阵

④ U矩阵一定是正规矩阵

⑤ 若A正规, 则 kA 也正规

⑥ 若A正规, 则 $A\pm cI$ 也正规.

平移法则

实对称 $\xrightarrow{\text{是}}$ Hermite阵 $\xrightarrow{\text{是}}$ 正规矩阵

实反对称 $\xrightarrow{\text{是}}$ 斜Hermite阵 $\xrightarrow{\text{是}}$ 正规矩阵 平移法, 倍数法, k次方, 多项式

实正交阵 $\xrightarrow{\text{是}}$ U矩阵 $\xrightarrow{\text{是}}$ 正规矩阵

验证正规平移 $(A+cI)^H(A+cI) = (A^H+\bar cI)\cdot(A+cI) = \underbrace{A^HA}_{\text{Hermite阵}} + \underbrace{\bar cA + c\cdot A^H}_{\text{正规阵}} + \underbrace{\bar c cI}_{\text{对角阵}}$

引理: 若A正规, 则 A与A^H有相同的特征向量

$AX=\lambda X$ 则 $A^HX=\bar\lambda X$

自己写的证明.

∵ $AX=\lambda X$ ∴ $A^HAX=\lambda\cdot A^HX$ 故 $A(A^H\cdot X)=\lambda(A^HX)$

$AX=\lambda X \Leftrightarrow (A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)^H(A-\lambda I)X=0 \Leftrightarrow (A-\lambda I)(A-\lambda I)^HX=0$

$\Leftrightarrow (A-\lambda I)^HX=0 \Leftrightarrow A^HX=\bar\lambda X$

老师写的证明: 设A正规且 $AX=cX$ 其中 $X\in C^n$, 要证明 $A^HX=\bar cX$

$A^HX=\bar cX \Leftrightarrow (A^H-\bar cI)X=0 \Leftrightarrow \|\underbrace{(A^H-\bar cI)X}_{\text{列向量}}\|_F^2=0 \Leftrightarrow X^H(A^H-\bar cI)^H(A^H-\bar cI)X=0.$

由于A^H也正规, 故 $A^H-\bar cI$ 正规, 故 $(A^H-\bar cI)^H(A^H-\bar cI)=(A^H-\bar cI)(A^H-\bar cI)^H$

故 $X^H(A^H-\bar cI)\cdot(A^H-\bar cI)^HX=0 \Leftrightarrow X^H(A-cI)^H(A-cI)X=0 \Leftrightarrow \|(A-cI)X\|_F^2=0.$

$\Leftrightarrow AX=cX$

2025-03-20 3M101 矩阵论

备注：若 A 的所有特征向量 X 都是 A^H 的特征向量

则 A 为正规　$\boxed{\text{思考}}$：分析 = 而正规阵的充要条件

例：设 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 一定正规：证明 $A=aI+b\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　斜 Hermite 阵 正规阵

引理：若 A 为正规 则对任意 U阵 Q. Q^HAQ 仍正规（充要条件）

$A^HA=AA^H$ ：U阵 $Q^H=Q^{-1}$　$(Q^HAQ)^H(Q^HAQ)=Q^HA^HQ\cdot Q^HAQ$

$=Q^HA^HAQ=Q^HAA^HQ$

$(Q^HAQ)(Q^HAQ)^H=Q^HA\underbrace{Q\cdot Q^H}_{=I}A^HQ$ $=$

即任何正规阵的U相似也定是正规阵

设 A 为正规阵，则 A^k 也是正规阵，如何证明？

或 三角正规定理：若 A 为三角阵且 A 正规，则 A 为对角阵

(分块正规)引理：设 $A=\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ 是分块矩阵，其中 B,D 为方阵

A 正规，则 $C=0$ 且 B 与 D 均为正规矩阵（充要）.

$$A^HA=\begin{pmatrix} B^H & 0 \\ C^H & D^H \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{B^HB} & B^HC \\ C^HB & C^HC+D^HD \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$AA^H=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B^H & 0 \\ C^H & D^H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{BB^H+C\cdot C^H} & C\cdot D^H \\ DC^H & D\cdot D^H \end{pmatrix}$$

这说明 ① $B^HB=BB^H+C\cdot C^H$　故 $tr(B^HB)=tr(BB^H)+tr(C\cdot C^H)$

故 $tr(C\cdot C^H)=0$ 说明 $\|C\|_F^2=0$ 即 $C=0$.

② $B^HB=BB^H$ 且 $D^HD=DD^H$ 即 B 与 D 均为正规矩阵

2025-03-20 训101 矩阵论

三角正规定理：若A为三角阵且A为正规阵，则A为对角阵

定理 { 使用三角正规引理进行数学归纳即可

设 $A=\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & b_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 & C_{n-1} \\ 0 & B_{n-1} \end{pmatrix}$ 正规 $\Leftrightarrow C_{n-1}=0$ 且 B_{n-1} 正规

推论：所有严格三角阵一定都不是正规矩阵

{ 上三角阵和下三角阵互为共轭转置.

许尔U推论：① 设A为正规阵，则A一定U相似为一个对角阵

{ 证明：A一定可以U相似上三角化，而U相似保正规

{ 故目标上三角阵一定是个对角阵

② 设A为正规阵，A一定不相似于任何一个严格三角阵