

补充结论与公式----平方根公式

特商公式: $\lambda_1 = \frac{x^H A x}{|x|^2},$

其中 $Ax = \lambda_1 x$, λ_1 是 A 的任一特征根, 且 $x \neq 0$ 是特征向量

正定阵定义: 设 A 是 Hermite ($A^H = A$) $x \in C^n$ 是复向量, 若 $f(x) = x^H A x > 0$ 对一切非 0 向量 $x \neq 0$ 成立, 则称 A 为正定 (Hermite) 阵. “ $A > 0$ ” 代表正定阵 A

半正定定义: 设 A 是 Hermite ($A^H = A$) $x \in C^n$ 是复向量, 若 $f(x) = x^H A x \geq 0$ 对一切非 0 向量 x 成立, 则称 A 为半正定 (Hermite). “ $A \geq 0$ ” 代表半正定阵 A

备注: 半正阵定义中包含正定阵, 正定阵是特殊的半正定阵

正定等价条件: 设 A 为 Hermite ($A^H = A$) 则下列条件等价

(1) A 为正定 ($A > 0$) \Leftrightarrow (2) A 有分解 $A = P^H P$, 或 $A = P P^H$, P 可逆 \Leftrightarrow

(3) 特根 $\lambda(A) = \{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0\}$ 为正—用**特商公式证**(1) \Rightarrow (3)

证: (2)用 **Hermite 分解:** 若 A 是 Hermite ($A^H = A$), 则存在优阵 Q ,

$$\text{使 } A = Q D Q^H, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 为对角阵}$$

且 A 正定 ($A > 0$), 则特根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都为正数

$$\text{令 } C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \text{ 则 } C^H = C, \text{ 且 } C^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

故 $A = Q D Q^H = Q C C^H Q^H = Q C (Q C)^H$, 令 $P = Q C$, 必可逆

则 $A = P P^H$, 或 $A = (P^H)^H P^H$, 即 (1) \Rightarrow (2)

另外, 若有 $A = P^H P$, P 可逆,

因为 $x \neq 0$ 时 $Px \neq 0 \Rightarrow$ 二次形 $x^H A x = (Px)^H (Px) = |Px|^2 > 0$

故 A 正定 ($A > 0$) 即 (1) \Leftrightarrow (2) 证毕

也有半正定等价条件: 设 A 为 Hermite ($A^H = A$) 则下列条件等价

(1) A 为半正定 \Leftrightarrow (2) A 有分解 $A = P^H P$, 或 $A = PP^H \Leftrightarrow$

(3) 全根 $\lambda(A) = \{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$ 都非负

定理: 设 $A = A_{m \times n}$ 则 $A^H A, AA^H$ 都半正定, 且 $A^H A, AA^H$ 的根为非负

证明: 因为二次形 $f = x^H (A^H A)x = (Ax)^H (Ax) = |Ax|^2 \geq 0$ (长度平方公式)

同样, $f = x^H (AA^H)x = (A^H x)^H (A^H x) = |A^H x|^2 \geq 0$ 证毕

备注: 若 $A = A_{m \times n}$ 为高阵(列满秩), 或 $A = A_{n \times n}$ 可逆 ($\det(A) = |A| \neq 0$) 则 $A^H A$ 正定

因为 $x \neq 0$ 时 $Ax \neq 0 \Rightarrow$ 二次形 $x^H (AA^H)x = (Ax)^H (Ax) = |Ax|^2 > 0$

备注: 若 $A = A_{n \times n}$ 是 Hermite 阵, 则 A 的根 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 都为实数。

平方根公式: 若 A 为半正定, 或 A 为正定 ($A > 0$), 则有分解

$A = B^2$, 且 $B^H = B$ 为 Hermite 半正定 ($B \geq 0$)

B 叫 A 的平方根, 记为 $B = \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$

可写公式 $A = (\sqrt{A})^2$, 或 $A = A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$ 都为合理写法!

证: 用 Hermit 分解: 若 A 是 Hermite ($A^H = A$), 存在优阵 Q ,

$$\text{使 } A = QDQ^H, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 为对角阵}$$

且 A 半正定, 则根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都为非负(或正数)

$$\text{令 } C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \text{ 则 } C^H = C \geq 0 \text{ 半正, 且 } C^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$\text{再令 } B = QCQ^H = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^H,$$

则 $B^H = (QCQ^H)^H = QCQ^H = B$ 为 Hermite

且 $B = QCQ^H = QCQ^{-1}$ 与 C 相似, 故

$\lambda(B) = \lambda(C) = \{\sqrt{\lambda_1} \geq 0, \dots, \sqrt{\lambda_n} \geq 0\}$ 非负, 即 $B^H = B \geq 0$ 半正定

可验: $B^2 = (QCQ^{-1})^2 = QC^2Q^{-1} = QDQ^H = A$ 证毕

备注: 可知平方根公式: $B = \sqrt{A} = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^H$

其中 Q 为优阵, Q 中列都是 A 的特征向量(互正交!)

例 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ 为 Hermit 半正定, $\lambda(A) = \{\lambda_1=2, \lambda_2=0\}$ 非负

求平方根 $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} = ?$

可知 2 个特向 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ 互正交, 使 $AX_1 = 2X_1$, $AX_2 = 0X_2 = 0$

令 $Q = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ |X_1| & |X_2| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ 为优阵, $Q^{-1} = Q^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} &= Q \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{0} \end{pmatrix} Q^H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{可验 } (\sqrt{A})^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}^2 = A$$

也可验本题的 Hermit 分解:

$$Q^{-1}AQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

补充习题 Ex

1 求平方根 $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} = ?$

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 为 Hermit 半正定, $\lambda(A) = \{\lambda_1=4, \lambda_2=0\}$ 非负

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 为 Hermit 正定, $\lambda(A) = \{\lambda_1=4, \lambda_2=2\}$

(3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ 为 **Hermit 正定**, $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1=3, \lambda_2=1\}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 求 \sqrt{A}