矩阵理论复习提纲:

① 共轭转置: 设 $A\in C^{n\times m}$, 则 $A^H=(\bar{A})^T\in C^{m\times n}$

性质: $\overline{(A\times B)}=\bar{A}\times\bar{B}$, $(A\times B)^H=B^H\times A^H$

$(A^H)^H=A$, $(A+B)^H=A^H+B^H$, $(kA)^H=\bar{k}\cdot A^H$ 用定义证.

② Hermite 阵: $A\in C^{n\times n}$, 若 $A=A^H$ 则称A ; 若A为Hermite 则 $x^HAx\in R$.

斜 Hermite阵: $A^H=-A$ $\Leftrightarrow$ iA是 Hermite阵 ; 若A为Hermite 则 $\lambda(A)\subseteq R$, $\lambda=\frac{x^HAx}{x^Hx}$

③ 模平方公式: $\|A\|_F^2=tr(A^HA)$: 注意: 其结果是 F范数的平方.

迹的性质: $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$, $tr(A\cdot B)=tr(BA)$ 若 $A\in C^{n\times p}$, $B\in C^{p\times n}$.

④ $tr(A\cdot A^H)=0 \Leftrightarrow A=0$; $A^HAx=0 \Leftrightarrow Ax=0$.

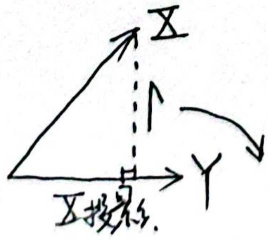
C^n上的标准内积公式: $(X,Y)=tr(Y^HX)$.

酉空间: 带有内积的复向量空间.

⑤ 模长的性质:
① 齐性: $\|kX\|=|k|\cdot\|X\|$ 注意k提出来要带绝对值
② 三角不等式: $\|X+Y\|\le\|X\|+\|Y\|$
~~③ 正性~~

⑥ 内积的性质:
① 正性: $(X|X)\geq 0$. 且 $(X|X)=0 \Leftrightarrow X=0$.
② 共轭性: $(X|Y)=\overline{(Y|X)}$ 注意这与实向量空间不同.
③ 齐性: $(kX|Y)=k\cdot(X|Y)$; $(X|kY)=\bar{k}\cdot(X|Y)$ 注意: $\bar{k}$ ※
④ 线性性(分配率): $(W|X+Y)=(W|X)+(W|Y)$
$(X+Y|W)=(X|W)+(Y|W)$.

柯西施瓦兹不等式: $|(X|Y)|^2\leq(X|X)\cdot(Y|Y)$: 证明: 投影法.(勾股定理).



X在Y上的投影为 $\frac{(X|Y)}{(Y|Y)}\cdot Y$

$$\left(X-\frac{(X|Y)}{(Y|Y)}\cdot Y\right)\cdot Y=(X|Y)-\frac{(X|Y)}{(Y|Y)}\cdot(Y|Y)=0.$$

由于复向量内积有顺序.所以要注意.

正交条件：$X \perp Y \Leftrightarrow (X|Y)=0 \Leftrightarrow (Y|X)=0$.

⑦ U阵：① 若 $A\in C^{n\times n}$ 满足 $(\alpha_i|\alpha_i)=1$, $(\alpha_i|\alpha_j)=0$ 计j 则A为U阵

α_i为A的各列

② 若 $A^HA=I_n$，则A为U阵

③ 若 A可逆且 $A^H=A^{-1}$，则A为U阵

A_i为A的各行

④ 若 $A\cdot A^H=I_n$，则A为U阵

以上四条都是U阵充要条件. A为U阵 $\Leftrightarrow A^H$为U阵 $\Leftrightarrow (A_i|A_i)=1$, $(A_i|A_j)=0$ 计j

若A,B为U阵 则AB也为U阵

⑧ 许尔公式：一切复方阵都可以相似上三角化（增强：U相似上三角化）. 一切复矩阵都可以.

即 $A=P^{-1}\cdot D\cdot P$ 其中D为上三角阵且D的对角线元素即A的特征值.

注：相似变换不改变特征值（但会改变特征向量）.

$A\sim B$ 的充要条件是A和B有相同的Jordan标准型.

⑨ 换位公式：设 $A\in C^{n\times p}$, $B\in C^{p\times n}$ 则关于λ的多项式有

$\det(\lambda I_n-AB)\cdot\lambda^p=\det(\lambda I_p-BA)\cdot\lambda^n$

由于该多项式对一切 $\lambda\in C$ 均成立. 故对 $\lambda\neq0$. 可以左右约掉 λ^{n-p} (若 $n>p$)

故AB与BA只差若干个零特征值.

⑩ 相似. $A\sim B \Leftrightarrow$ A与B有相同Jordan标准型 $\Rightarrow$ A与B有相同最小零化式

$\Downarrow$ $\Updownarrow$

A与B有相同特征值 $\Leftrightarrow$ A与B有相同特征多项式 | A与B有相同特征值集合且每个同特征值λ对应的最大Jordan块阶数对应相等.

$\Downarrow$ 特征多项式总是零化式

$tr(A)=tr(B)$ = 所有特征值之和.

⑪ U阵的性质：① 保向量长度：$\|AX\|=\|X\|$ 若A为U阵

② 保内积以及保正交：$(AX|AY)=Y^H\underbrace{A^HA}_{I_n}X=(X|Y)$

⑫ 镜面阵：

给一个向量 $\alpha\in C^n$. 则 $A=I_n-\dfrac{2\cdot\alpha\cdot\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ 称为α的镜面阵

① $\lambda(A)=\{-1,1,\dots\}$ ② $A\alpha=-\alpha$ 即α为−1对应特征向量

③ $A^2=I_n$ ④ $A^H=A$ 即A为Hermite阵 ⑤ A为U阵

⑥ $\det(A)=-1$

⑬ 特征值与等様(?)公式：① λ 是 A 的特征根 $\Rightarrow \exists x$. $\lambda = \frac{x^H A x}{x^H x}$.

② $rank(A^H A) = rank(A \cdot A^H) = rank(A) = rank(A^H)$

$Ax=0 \Leftrightarrow A^H A x = 0$

故解空间维数相同.

证明：$A^H A$ 是半正定阵 $rank(A^H A)$ = 正特征根个数.

取 λ 是特征根：$A^H A$ 的特征根是 A 的特征根的模长的平方. (为啥?)

$A^H A$ 的特征值 λ 则 $\sqrt{\lambda}$ 称为 A 的奇异值.

⑭ 行列式、迹与矩阵的谱：设 $A \in C^{n \times n}$，则 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 称为 A 的谱.

① $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ ：证明：许尔上三角化.

② $det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ ：证明：$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.

不满秩：两边均为零. 满秩写成行变换连乘.

⑮ Jordan 分解：一种双线上三角分解

每个约当小块对应一个特征向量.

约当标准型中某个特征值对应的最大约当块 → 决定 $(x-\lambda)$ 在最小多项式中的指数

⑯ 谱映射(?)公式：设 $f(x)$ 是多项式：设 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

则：$\lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$

⑰ 正规矩阵：$A^H A = A A^H$ 则 A 称为正规阵

说明所有约当小块都是1阶块

① 对角阵一定是正规阵 ② 所有正规阵都 U 相似于对角阵

③ Hermite 阵和斜 Hermite 阵都是正规阵 ④ U 阵是正规阵

⑤ 正规矩阵的任意多项式都是正规阵

⑥ 若 A 正规，则 A 与 A^H 具有相同的特征向量. 特征值模长都是1.

⑦ 严格三角阵一定不是正规阵，正规阵许尔三角化必然是对角阵

三角正规定理：若 A 为三角阵且 A 正规，则 A 必为对角阵 模长是1

⑧ 正规阵不同特征值对应特征向量间相互正交

因此可以使用特征向量组做施密特正交化得到对角化变换阵

不是值为1

⑱ 循环阵：① 基本循环阵：$\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ 是正规阵

② 所有循环阵都可以写成基本循环阵的多项式 (充要)

CamScanner

⑲ QR分解：将矩阵拆分成列U阵与上三角阵的乘积：做法.

① 对A的各列做施密特正交化，得到Q阵

② 通过 $R=Q^HA$ 得到R阵

注：α_2向α_1投影 $=\dfrac{(\alpha_2|\alpha_1)}{(\alpha_1|\alpha_1)}\cdot\alpha_1$，要注意在正交化后对Q做单位化.

⑳ 高低分解：$A=B\times C$ 其中B为高阵、C为低阵 $r(A)=p$. $B\in C^{n\times p}$, $C\in C^{p\times n}$

取A的一个最大列无关组做为B，再求C即可

常用于求解矩阵的全部特征根

㉑ 正规阵谱分解：设A为正规阵. 则 A 可以U相似对角化.

这意味着 A的Jordan标准型为对角阵. A有n个线性无关特征向量

设 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 是A的所有不同特征值.

则 $A=\lambda_1\cdot G_1+\lambda_2\cdot G_2+\cdots+\lambda_k\cdot G_k$，其中 $G_i^2=G_i$

设 $A=\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&&\\&&2&1\\&&0&2\end{pmatrix}$ 则 $f(A)=f(1)\cdot G_1+f(2)\cdot G_2+f'(1)\cdot D_1+f'(2)\cdot D_2$.

A的最小多项式为 $(x-1)^2(x-2)^2$.

$f(x)=x-1$: $A-I=G_2+D_1+D_2$ $\qquad (A-I)-(A-I)^2=D_1-D_2$.

$f(x)=x-2$: $A-2I=-G_1+D_1+D_2$. $\qquad (A-2I)+(A-2I)^2=D_2-D_1$

$f(x)=x^2-2x+1$ $(A-I)^2=G_2+2D_2$ $\qquad G_1+G_2=I$.

$f(x)=(x-2)^2$ $(A-2I)^2=G_1-2D_1$

$f(x)=x$ $A=G_1+2G_2+D_1+D_2$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&1&1\\&&0&1\end{pmatrix}\quad (A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&&\\&0&&\\&&1&2\\&&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow D_1-D_2=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&0&-1\\&&&0\end{pmatrix}$$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}\quad (A-2I)^2=\begin{pmatrix}1&-2&&\\&1&&\\&&0&0\\&&&0\end{pmatrix}\Rightarrow D_2-D_1=\begin{pmatrix}0&-1&&\\&0&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$$

$x^3=G_1+8G_2+3D_1+12D_2$ 解得 $D_1=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&&\\&&0&0\\&&&0\end{pmatrix}$ $D_2=\begin{pmatrix}0&0&&\\&0&&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}$

$G_1=\begin{pmatrix}1&0&&\\&1&&\\&&0&0\\&&&0\end{pmatrix}$ $G_2=\begin{pmatrix}0&0&&\\&0&&\\&&1&0\\&&&1\end{pmatrix}$

(22) e^A, $\sin A$, $\cos A$: ① e^A, $\sin A$, $\cos A$ 对任何复方阵A都收敛

② 交换公式：若 $AB=BA$ 则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$

对一般的A, B并不成立

③ $e^{iA}=\cos A+i\sin A$, $e^{-iA}=\cos A-i\sin A$

$\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$, $\sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$.

④ $\det(e^A)=e^{tr(A)}$：用谱分解公式证明

⑤ 若 $A^2=A$ 且 A有谱分解：则 $e^{tA}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\cdot(tA)^i$

$=1+A\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}=1+(e^t-1)\cdot A$

特别地：e^A 在 $A^2=A$ 且A有谱分解：$e^A=1+(e-1)\cdot A$.

(23) 范数(向量)：① C^n 上的范数满足：正性，齐性，三角不等式

② 常见范数：1-范数，2-范数，∞-范数

③ 加权范数 $(a_1,\dots,a_n)$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i\|x_i\|^2}$ $a_i>0$. 称为加权范数

④ 所有范数都等价：总存在 $k_1,k_2>0$ 使 $k_1\|x\|_a\le\|x\|_b\le k_2\|x\|_a$

(24) 矩阵范数：① $C^{n\times n}$ 上矩阵范数满足正性，齐性，三角性，相容性.

② 常见范数：1-范数(列范数)，2-范数(谱半径)

F-范数(二次范数)，∞-范数(行范数)

M-范数(总和范数)，G-范数(n倍最大绝对值)

乘以n才能保证相容性.

③ 幂公式：$\|A^k\|\le\|A\|^k$，特别地 $\rho(A^k)=(\rho(A))^k$.

④ 矩阵范数可以生成向量范数：$\varphi_a(X)=\|X\cdot a^T\|$ $a\in C^n$.

与 $\|\cdot\|$ 相容.

⑤ 谱范不等式：谱半径是所有范数的下界 $\rho(A)\le\|A\|$

推论 $1\le\rho(I_n)$

⑥ 小范数定理：固定 $A\in C^{n\times n}$ 总能找到 $\rho(A)<\|A\|_\varepsilon\le\rho(A)+\varepsilon$

其中 $\|A\|_\varepsilon=\|P^{-1}AP\|$

任意范数

㉕ 矩阵的级数敛散性：
- ① $\rho(A)<R$：绝对收敛
- ② $\rho(A)>R$：发散
- ③ $\rho(A)=R$：条件收敛或发散

㉖ 如何计算收敛半径：
- ① 比值审敛法：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
- ② 根值审敛法 $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

㉗ 盖尔圆盘与对角占优：略。
- 对角占优：原点不在任何一个盖尔圆内.

㉘ 线性空间：※欧氏空间中的正交变换 在标准正交基下的矩阵是正交变换.
- $\dim(N(T))+\dim(R(T))=n$ 其中 $T: C^n \to C^n$.