2025-03-04 主M101 矩阵理论

过去只讲一个学期，现在改革之后分出了上下两个部分

教材 { 矩阵基本理论与应用 ; … ; … } 见图片

平时作业 + MOOC 30% ; 期末考试闭卷 70%

课程章节：{ ① 线性空间引论 ② 线性映射与矩阵 ; ③ 矩阵分解 ④ 矩阵分析 }

预备知识：$tr(A)$ 以及 $A^H = \bar{A}^T$

记号：

$$\begin{cases} C^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_j \in C\,(\text{复数}),\ 1 \le j \le n \right\} & \text{即 } n \text{ 维复向量空间，约定为列向量} \\ R^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_j \in R\,(\text{实数}),\ 1 \le j \le n \right\} & \text{即 } n \text{ 维实向量空间} \end{cases}$$

可以认为 $R^n \subset C^n$ 成立。

矩阵

$$\begin{cases} C^{m\times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \middle| \; a_{ij} \in C,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \right\} & \text{全体 } m\times n \text{ 复矩阵} \\ R^{m\times n} = \left\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \middle| \; a_{ij} \in R,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \right\} & \text{全体 } m\times n \text{ 实矩阵} \end{cases}$$

其中 $R^{m\times n} \subset C^{m\times n}$ 成立

2025-03-04 3M101 矩阵理论

当$m=n$时，矩阵称为方阵 记为$C^{n\times n}$，$R^{n\times n}$

特别地，我们记为 $C^{n\times 1}=C^n$，$R^{n\times 1}=R^n$ 是所有n维列向量构成的空间

使用 $C_n=C^{1\times n}$，$R_n=R^{1\times n}$ 表示所有的行向量构成的空间

书写时，列向量也写作 $X=(x_1,x_2,\dots x_n)^T$，便于书写，T为转置记号。

对矩阵进行分块时通常按列分块：$A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in C^{m\times n}$

其中 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{im})^T\in C^m$ 是m维列向量

按行分块 $A=A_{m\times n}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}\in C^{m\times n}$ 其中 $A_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})\in C_n$。是$n$维行向量

复数：$w=a+ib$ 其中 $a\in R, b\in R$ $(i=\sqrt{-1}, i^2=-1)$

复数可以与二维平面中的点一一对应 (a,b) $\overset{对应}{=}$ $a+bi$

也可以把复数看作从原点到(a,b)的一个向量

复数的共轭：求点关于x轴对称的点：$\bar{w}=a-bi$ $(\bar{i}=-i)$。

复数的模长公式

$w\cdot\bar{w}=\bar{w}\cdot w=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in R$，且$\geq 0$。

$=|w|^2$ 其中 $|w|$ 叫w的模长/绝对值 $=\sqrt{a^2+b^2}$

显然有 $|w|=|\bar{w}|$

~~向量的模长~~：矩阵的共轭：$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$。

其中 $a_{ij}\in C$，$\bar{a}_{ij}$ 是a_{ij}的共轭

共轭转置：$A^H=(\bar{A})^T=(\overline{a_{ij}})^T_{m\times n}\in C^{n\times m}$ 形状可能发生改变

性质：$A^H=(\bar{A})^T=\overline{(A^T)}$，共轭与转置可换

"H"表示共轭转置，即 Hermite，个别材料记为 A^*

但 A^* 与伴随矩阵重名，故记为 A^H

性质：$\overline{(AB)}=\bar{A}\cdot\bar{B}$ 只要 A,B 可乘，该性质总是成立的。

$(AB)^T=B^T\cdot A^T$（证明 $a,b\in C$ 有 $\overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b}$，$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$）。

故：$(AB)^H=B^H\cdot A^H$ 证明：$(AB)^H=(\overline{AB})^T=(\bar{A}\cdot\bar{B})^T=(\bar{B})^T\cdot(\bar{A})^T=B^H\cdot A^H$

特别地若 $A\in R^{m\times n}$ 则 $\bar{A}=A$，故 $A^H=(\bar{A})^T=A^T$

一个复数可以被理解为一阶方阵 $a\in C$，则 $(a)=(a)^T$ 故 $(a)^H=(\bar{a})^T=\bar{a}$

对复数 a：$a^H=\bar{a}$ 故 $|w|^2=w^Hw=w\cdot w^H$

故 $a\in C$ 时 $a\in R\Leftrightarrow a^H=a^T=a$ ← 判定一个数是否是实数

$A\in C^{m\times n}$ 时 $A\in R^{m\times n}\Leftrightarrow A^H=A^T$

① $(A^H)^H=A$，$(A+B)^H=A^H+B^H$ ② $(kA)^H=\bar{k}\cdot A^H$ ③ $(A_1\cdots A_n)^H=A_n^H\cdots A_1^H$

Hermite 矩阵：$A^H=A$ 则称 A 为 Hermite 矩阵

是实对称矩阵的推广，实对称阵一定是 Hermite 矩阵

Hermite 阵对角线元素一定为实数

关于对角线对称的元素互为共轭复数 } 判定

2025-03-04 主M101 矩阵理论.

斜 Hermite 矩阵. $A^H=-A$ 则称 A 为斜 Hermite 矩阵.

若 $A^H=-A$, 则 (iA) 为 Hermite 矩阵

证明: $(iA)^H=\overline{(i)}\cdot A^H=-i\cdot(-A)=iA$.

结论: 设 A 为任意矩阵. A^HA 和 AA^H 总是 Hermite 矩阵

证明: $(A^HA)^H=A^H\cdot(A^H)^H=A^H\cdot A$; $(AA^H)^H=(A^H)^H\cdot A^H=A\cdot A^H$

规定: 复向量 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in C^n$ 的模长

$\|X\|=|X|=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2}=\sqrt{X^HX}\geq 0.$

性质: $\|X\|=0\iff X=0$

$\|kX\|=|k|\cdot\|X\|$, $k\neq 0$ 时 $\left|\frac{X}{k}\right|=\frac{|X|}{|k|}$ 可用于得到单位向量

模平方公式: $X^HX=|X|^2$ 其中 X 为列向量, 即 $X\in C^n$.

同理: $|X|=\sqrt{X^HX}$ 对列向量而言 XX^H 不总等于 $|X|^2$.

矩阵的迹: tr(A) 即 A 的主对角线元素之和.

但有: $tr(XX^H)=tr(X^HX)=|X|^2$. 无论行向量还是列向量总成立.

$$XX^H=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})=\begin{pmatrix}x_1\cdot\overline{x_1} & & * \\ & x_2\cdot\overline{x_2} & \\ & & \ddots \\ \overline{*} & & & x_n\cdot\overline{x_n}\end{pmatrix}$$ 故 $tr(XX^H)=|X|^2$.

2023-03-04 主M101 矩阵理论

对列向量: $X \in C^n$ 有 $|X|^2 = X^H X = tr(XX^H)$

对行向量: $X \in C_n$ 有 $|X|^2 = XX^H = tr(X^H X)$.

对任意向量: $X \in C_n$ 或 $X \in C^n$ 有 $|X|^2 = tr(X^H X) = tr(XX^H)$

(向量)模平方公式

推广

复矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n} \in C^{m\times n}$ 规定模长为 $\|A\|_F$

$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = tr(A^H A)$ (矩阵)模平方公式.(迹公式)

证明方式: 使用分块矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$A^H = (\alpha_1^H, \alpha_2^H, \dots, \alpha_n^H)^T$ 故 $A \cdot A^H = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cdot \alpha_i^H)$ 不是个数.

其中 $tr(\alpha_i \cdot \alpha_i^H) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ij}^H) = \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{ij}|^2$ 故 $tr(A \cdot A^H) = \|A\|_F^2$

$$A^H A = \begin{pmatrix} \alpha_1^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^H \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2$$

迹的性质: $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$: 要求 A与B 可加.

$tr(AB) = tr(BA)$: 要求 $A \in C^{m\times n}$ $B \in C^{n\times m}$

若A和B具有相同形态 则 $tr(AB^T) = tr(B^T A) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ 点乘积.

也可以这样推导 $tr(X \cdot X^H) = tr((X^H)^H \cdot X^H) = \|X^H\|^2 = \|X\|^2$