（主要内容：许尔公式 1）

补充公式：设n可逆阵$P = P_{n\times n}$，可写$P=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$---按列分块

则有 $P^{-1}\alpha_1=e_1$，$P^{-1}\alpha_2=e_2, \cdots$，$P^{-1}\alpha_n=e_n$

$$\text{其中} e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \text{为} R^n \text{中自然基}$$

证：$\because P^{-1}P=P^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=(P^{-1}\alpha_1, P^{-1}\alpha_2, \cdots, P^{-1}\alpha_n)$，且

$P^{-1}P=I_n=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，可知$P^{-1}\alpha_1=e_1$，$P^{-1}\alpha_2=e_2, \cdots$，$P^{-1}\alpha_n=e_n$

引理 1：若 A 为 2 阶方阵，则存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \text{为上三角}$$

证：任取一个特征根λ_1与特征向量$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\neq 0$，使$AX=\lambda_1 X$，

把X扩大为2阶可逆阵$P=(X|Y)_{2\times 2}$，可知$P^{-1}X=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$P^{-1}Y=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

计算可知$AP=(AX|AY)=(\lambda_1 X|AY)$，

$$P^{-1}AP=(\lambda_1 P^{-1}X|P^{-1}AY)=(\lambda_1 e_1|P^{-1}AY)\overset{\text{记为}}{=}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & a\end{pmatrix}\text{为上三角.}$$

$\because$ A相似于上三角$\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & a\end{pmatrix}$，它们必有相同特征根！

$$\text{可写} P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$ 证毕

引理 2：若 A 为 3 阶方阵，则存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\text{为上三角，其中}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\text{的次序任意给定}$$

证：任取一个特根λ_1与特向$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\neq 0$，使$AX=\lambda_1 X$,

把X扩大为3阶可逆阵$P=(X|X_2,X_3)_{3\times3}$，可知$P^{-1}X=e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

计算可知$AP=(AX|AX_2,AX_3)=(\lambda_1 X|AX_2,AX_3)$,

$P^{-1}AP=(\lambda_1 P^{-1}X|\cdots)=(\lambda_1 e_1|\cdots)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\hat{A}} \end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}$, $\hat{A}$为2阶方阵.

$\because$ A相似于$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}$，必有相同特征根，可写$\hat{A}$的特根为$\lambda_2$，$\lambda_3$

利用引理1，存在2阶可逆阵Q，使 $Q^{-1}\hat{A}Q=\begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

令$W=P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$,则W为3阶可逆阵，且$W^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$，可知

$$W^{-1}AW=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}\hat{A}Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ 为上三角.　证毕

例 1：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

取$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$，可知

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\0&-1\end{pmatrix}$为上三角

再取$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，可知 $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，可得

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&5\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&2\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\0&-1\end{pmatrix}$为上三角

例 2：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2+i&1\\1&2-i\end{pmatrix}$，令 $P=\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}$，有 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i&1\\1&-i\end{pmatrix}$，

$P^{-1}\mathbf{AP}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i&1\\1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2+i&1\\1&2-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-2i&2-2i\\2&-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$为上三角

…………………………………………………………………………………………

许尔公式： 每个 n 阶方阵 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$， 存在可逆阵 $\mathbf{P}$

$$\text{使 } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&*\\&\ddots&\vdots\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}\text{为上三角}$$

备注：许尔公式(Schur) 又叫做 “三角化定理”，即有

三角化定理：每个方阵都相似于上三角阵!!!

证：任取一个特根λ_1与特向$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\neq 0$，使$AX=\lambda_1 X$,

把X扩大为n阶可逆阵$P=(X|,X_2,\cdots,X_n)\in C^{n\times n}$，可知$P^{-1}X=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

计算可知$AP==(AX|\cdots)=(\lambda_1 X|\cdots)$

$P^{-1}AP=(\lambda_1 P^{-1}X|\cdots)=(\lambda_1 e_1|\cdots)\overset{\text{记为}}{=}\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&\hat{A}\end{pmatrix}$，$\hat{A}$为n−1阶方阵.

$\because$ A相似于$\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&\hat{A}\end{pmatrix}$，必有相同特征根，可写$\hat{A}$的特根为$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

利用归纳法，可设存在n-1阶可逆阵Q，使得

$$Q^{-1}\hat{A}Q=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{为上三角阵}$$

令$W=P\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$,则W为n阶可逆阵，且$W^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}$，可知

$$W^{-1}AW=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \hat{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}\hat{A}Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{为上三角. 证毕}$$

补充例子……