2025-03-25 H定理

复习2个许尔公式：

- 许尔公式1：任何方阵 $A\in C^{n\times n}$ 都存在可逆阵P使 $P^{-1}AP$ 为上三角阵
- 许尔公式2：任何方阵都存在U阵Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为上三角阵

证明过程：

- 许尔公式1：对n做数学归纳
- 许尔公式2：利用 $P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 则 $P^{-1}\alpha_i=e_i$，证明过程类似。

Hermit分解：若A为Hermite阵，则存在U阵Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵

证明：A为Hermite阵，故 $A^H=A$

根据许尔公式2，存在U阵Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为上三角阵，其中 $Q^H=Q^{-1}$

考虑 $(Q^{-1}AQ)^H=(Q^HAQ)^H=Q^HA^HQ=Q^HAQ=Q^{-1}AQ$，为下三角阵

这说明 $Q^{-1}AQ$ 既是上三角阵又是下三角阵，即 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵

推论：A^HA 定理：

- 对任意矩阵A，A^HA 和 AA^H 一定U相似于某个对角阵
- 对角阵的对角线元素为原 A^HA 或 AA^H 的特征值

秩公式：

- A^HA 和 AA^H 具有相同数目的非零特征值且均为半正
- 故 $r(A^HA)=r(A\cdot A^H)=r(A)$

正奇异值：

- 设 $\lambda(A^HA)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r,0,\dots,0\}$
- 则 $\sqrt{\lambda_1}\geq\sqrt{\lambda_2}\geq\dots\geq\sqrt{\lambda_r}$ 称为A的全体正奇异值

补充：

- 若 $(A-\lambda_1 I)P=0$，则P的列向量都是A的特征向量
- 若 $A^2=A$，则 $(A-I)A=0$，故A的非零列向量都是自身的特征向量

0化式：设 $f(x)$ 为多项式：使 $f(A)=0$，则 $f(x)$ 为A的0化式

- 次数最小的0化式称为极小零化式
- 开莱定理：任意方阵的特征多项式都是其零化式：可得到特征向量

2025-03-25 3M101 矩阵

正规分解定理：若 A 为正规矩阵，则 A 可U相似于一个对角阵 ※

{ 正规矩阵：即 $A^HA=AA^H$ 成立的方阵A.
换言之，正规矩阵既可以相似对角化，也可以合同对角化.

正规的三角阵一定是对角阵

本科结论：若 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵，则 Q 的各列均为 A 的特征向量.

{ 设 $Q=(q_1,\dots,q_n)$ $\quad Q^{-1}AQ \overset{diag}{=} \{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$
$Q^{-1}Q=(Q^{-1}q_1,\dots,Q^{-1}q_n)=(e_1,\dots,e_n)$ $\quad AQ=\{\lambda_1 q_1,\dots \lambda_n q_n\}$

推论：正规矩阵一定有n个相互正交的特征向量

推论：如果一个矩阵有n个相互正交的特征向量，则该矩阵一定正规

○ 正规阵分解方法：设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵

{ ① 求出A的特征根 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$
② 求出各个特征根对应的特征向量，并进行单位正交化：$X_1\perp X_2\perp\cdots\perp X_n$.
③ 令 $Q=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 则有 Q 为U阵

此时有 $Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ 为对角阵

隐含结论：对正规阵而言，不同特征根对应的特征向量正交 ※

{ 但对一般矩阵而言，不同特征根对应的特征向量线性无关但未必正交

证明方法式：方阵 A 与 A^H 一定有完全相同的特征向量

特征向量的遗传性：f(A) 具有 A 的所有特征向量. 设 Q 为 U阵

{ 若 $Q^{-1}AQ=diag\{\dots\}$，则 $Q^{-1}f(A)Q$ 也是对角阵

例：Hermite阵的特征向量全是实数

{ 斜 Hermite阵的特征向量要么是0，要么是纯虚数

分解定理逆定理：与正规矩阵相似的矩阵一定也是正规阵

{ 故 U相似可对角化是A正规的充要条件

2025-03-25 3M101 矩阵

- 若A为正规阵，$f(x)$为多项式，则$f(A)$一定是正规矩阵

只需证明 A^k 都是正规阵（对$k\geq 0$）

证明：设 $A=Q^{-1}DQ$ 其中Q为U阵，D为对角阵

则 $A^k=Q^{-1}D^kQ$ 其中D^k为对角阵，故A^k也是正规阵

例：n-循环阵一定是正规阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

基本循环阵 Ω_n：取 $a_1=1, a_i=0 (i\neq 1)$

所有循环阵都是基本循环阵的多项式

由于基本循环阵是U阵，故为正规阵

于是可以证明一切循环阵都是正规阵

$$A=a_0\cdot I+a_1\cdot\Omega_n+a_2\cdot\Omega_n^2+\cdots+a_{n-1}\cdot\Omega_n^{n-1}$$

循环阵 $\Leftrightarrow$ Ω_n的多项式；故循环阵的乘积仍然是循环阵

设Q为U阵且 $Q^{-1}\Omega Q$ 为对角阵，则Q称为"傅里叶变换矩阵".

注：设A为U阵，则 $A^HA=I=AA^H$ 故A为特殊的正规矩阵

因而必然存在U阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^HAQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

而且对于这些复特征根：$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_n|=1$

证明：$\underbrace{Q^HAQ}_{=D}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 必为U阵，即 $D^HD=I$

而 $D^HD=diag(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)=diag(1,\cdots,1)$.

于是这说明 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_n|=1$

简而言之，U阵的所有特征根的模长都是1.

2025-03-25 正规矩阵 作业2

Ex1：若A正规，且 $AX=aX$，$AY=bY$ 且 $a\neq b$，证明内积 $(X,Y)=0$ 即 $X\perp Y$.

（利用结论：正规阵A与 A^H 必有相同的特征值）

Ex2：若 $A=-A^H\in C^{n\times n}$，则 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 均为纯虚数（或0）

即可写 $\lambda_1=it_1,\dots,\lambda_n=it_n$ 其中 $t_1,\dots,t_n$ 均为实数

（提示：$A=i\cdot\left(\frac{A}{i}\right)$ 且 $\left(\frac{A}{i}\right)$ 为Hermite阵）.

证明U阵的特征根模长等于1的另一种方法.

设A为U阵且 $AX=\lambda X$ 则 $\|AX\|^2=\|\lambda X\|^2$

左侧 $=X^H\underbrace{A^HA}_{=I}X$　右侧：$\|\lambda X\|^2=|\lambda|^2\cdot X^HX$　故 $|\lambda|^2=1$

○ 模长为1的复数的代数形式：$\begin{cases}\lambda=\cos\theta+i\sin\theta\\ \lambda=e^{i\theta}\end{cases}$　若 $|\lambda|=1$

注：若 $A=A_{n\times n}$ 为U阵，则特征根为 $\lambda_1=e^{i\theta_1},\dots,\lambda_n=e^{i\theta_n}$．其中 $\theta_1,\dots,\theta_n\in[0,2\pi)$

且有U阵Q使得 $Q^{-1}AQ=D=diag(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})$

即 $A=QDQ^{-1}=Q\cdot diag(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})\cdot Q^{-1}$

列满秩.

○ QR分解（也称为UR分解）：若 $A=A_{n\times p}$ $(n\geq p)$ 为列无关（列满秩）矩阵 或高阵

则存在列优阵（半U阵）$Q=Q_{n\times p}$ 与上三角阵 $R=R_{p\times p}$，使得 $A=Q_{n\times p}\cdot R_{p\times p}$.

$$A=\overbrace{\begin{pmatrix}q_1 & \cdots & q_p\end{pmatrix}_{n\times p}}^{Q}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}t_1 & & * \\ & t_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_p\end{pmatrix}_{p\times p}}^{R}$$

其中 $t_1\neq0,t_2\neq0,\dots,t_p\neq0$.

亦可做到 $t_1>0,t_2>0,\dots,t_p>0$.

此时称R为正线上三角.

$q_1\perp\cdots\perp q_p$ 且 $\|q_1\|=\|q_2\|=\cdots=\|q_p\|=1$

并且当要求R为正线上三角时，Q，R唯一.

且有 $R=Q^HA$（用于计算R）

证明过程：如何得到Q：对A的各列 $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ 做施密特正交化.

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\beta_j)}{\|\beta_j\|^2}\cdot\beta_j$$ 再对 β_k 单位化即可

注：若 $A=QR$，Q半优，则 $R=Q^HA$