AMS-03-2 | 第二次作业 SY2401410 高冠男

Ex1. 若A正规 且 $aX=AX$, $bY=AY$ 且 $a\neq b$. 证明 $(X,Y)=0$.

$$aY^HX=Y^H(AX)=(A^HY)^HX=(\bar{b}Y)^HX=bY^HX.$$

故 $(a-b)Y^HX=0$ ∵ $a-b\neq0$ ∴ $Y^HX=0$. 故 $(X,Y)=0$ 原特征值的S.

其中 $A^HY=\bar{b}Y$ 由于A为正规阵. 故Y亦为A^H特征向量. 且特征值为共轭复数

Ex2. 若 $A=-A^H\in C^{n\times n}$, 则A的特征值均为纯虚数或零.

设 $B=-iA$ 证明B是 Hermite阵

$B^H=(-iA)^H=iA^H=-iA=B$ 因此B的所有特征向量均为实数

设 $\lambda(B)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 故 $\lambda(A)=\lambda(iB)=\{i\lambda_1,\dots,i\lambda_n\}$

故A的所有特征向量均为纯虚数或零.

2025-04-01 SY2406410 郭冠男 第二次作业（补充）

Ex1. $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 求 $A=I-\frac{2XX^H}{\|X\|^2}=?$ $AX=?$ 用平移法求 $\lambda(A)$，A是否为优阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$AX=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda(A-I)=\lambda\left(-\frac{2XX^H}{\|X\|^2}\right)=\left\{tr\left(-\frac{2XX^H}{\|X\|^2}\right),0,0\right\}=\{-2,0,0\}$$

~~根据平移法则~~ $\lambda(A)=\{-1,1,1\}$

$$A^HA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$，故A为优阵

Ex2. 对以下矩阵计算QR分解

① $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{正交化}}$ $Q_0=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{单位化}}$ $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$$R=Q^HA=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt2&\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$

于是 $A=QR=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2&\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ 是A的QR分解

2025-04-01 SY2401410 郭宛男 第二次作业（补充）

Ex2（续）对以下矩阵计算QR分解

② $A=\begin{pmatrix}1&2\\i&i\end{pmatrix}$ 正交化 $Q_0=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\i&-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$ 单位化 $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}i&-\frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}$

$$R=Q^HA=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}i\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\i&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt2&\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$

故 $A=QR=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}i&-\frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt2&\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ 是A的QR分解

③ $A=\begin{pmatrix}i&i\\-1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 正交化 $Q_0=\begin{pmatrix}i&\frac{1}{2}i\\-1&\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 单位化 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{i}{2\sqrt3}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}$

$$R=Q^HA=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}i&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt3}{6}i&\frac{\sqrt3}{2}&\frac{\sqrt3}{6}&\frac{\sqrt3}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i&i\\-1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt3\end{pmatrix}$$

故 $A=QR=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i&\frac{1}{2\sqrt3}i\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&\sqrt3\end{pmatrix}$ 是A的QR分解。

2020-04-01 SY2406410 郭冠男 第二次作业（补充）

高低分解：习题

$$A=\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\1&1&4&0&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_2\\ r_4-4r_2}]{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}0&-1&-2&1&0\\1&1&4&0&0\\0&1&2&-1&3\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&4&0&0\\0&-1&-2&1&0\\0&1&2&-1&3\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&4&0&0\\0&-1&-2&1&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3+3r_4}\begin{pmatrix}1&1&4&0&0\\0&-1&-2&1&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_2\\ -r_3}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 这说明 $\mathrm{rank}(A)=3$，取第1,2,5列为代表列

$$A=\underset{B}{\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\2&3&3\\4&4&-1\end{pmatrix}}\times\underset{C}{\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2&1&6&1&0\\3&2&10&1&0\\2&3&10&-1&3\\4&4&16&0&-1\end{pmatrix}$$

得 $A=BC$ 为A的高低分解