换位公式：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，且 $n\geq p$，则

$$|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=\lambda^{n-p}|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|$$

即 $\det(\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB})=\lambda^{n-p}\det(\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA})$

备注：$(\mathbf{AB})_{n\times n}$ 为n介方阵，$(\mathbf{BA})_{p\times p}$ 为p介方阵

Pf: 取$n+p$阶方阵：$C=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_p \end{pmatrix}_{n+p}$ 与$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}_{n+p}$

令$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$，则$\mathbf{P}$可逆，且$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$，计算可知：

$$\mathbf{CP}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{PD}=\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

可知$\mathbf{CP}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}=\mathbf{PD}$，故 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{CP}=\mathbf{D}$，即$\mathbf{C}$与$\mathbf{D}$相似！

$\mathbf{C}$与$\mathbf{D}$相似必有相同特式，故 $\left|\lambda\mathbf{I}_{n+p}-\mathbf{C}\right|=\left|\lambda\mathbf{I}_{n+p}-\mathbf{D}\right|$

分块可知：

$$\left|\lambda\mathbf{I}_{n+p}-\mathbf{C}\right|=\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB} & 0 \\ -\mathbf{B} & \lambda\mathbf{I}_p \end{vmatrix}=|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}||\lambda\mathbf{I}_p|=\lambda^p\left|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}\right|$$

$$\left|\lambda\mathbf{I}_{n+p}-\mathbf{D}\right|=\begin{vmatrix} \lambda\mathbf{I}_n & 0 \\ -\mathbf{B} & \lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA} \end{vmatrix}=|\lambda\mathbf{I}_n||\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{AB}|=\lambda^n\left|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}\right|$$

即有 $\lambda^p\left|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}\right|=\lambda^n\left|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}\right|$，

可得$\left|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}\right|=\lambda^{n-p}\left|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}\right|$，证毕

注：若n=p，$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{n\times n}$，则有

$$|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|,\quad \text{即}\quad \det(\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB})=\det(\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{BA})$$

注：若n=p，$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{n\times n}$，则**AB**与**BA**有相同特征根

$$\lambda(\mathbf{AB})=\lambda(\mathbf{BA})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$$

推论1：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，$n\geq p$，则

AB与**BA**的非0特征根相同！（只差$n-p$个0根）

若**BA**的特根为$\lambda(\mathbf{BA})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$，

则$\lambda(\mathbf{AB})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p,0,\cdots,0\}$（含有$n-p$个0根）

证：设**BA**特根为$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$，必有分解$|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_p)$

代入换位公式 $|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=\lambda^{n-p}|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|$可得

$$|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=\lambda^{n-p}(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_p)$$

可知**AB**的根为 $\lambda(\mathbf{AB})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p,0,\cdots,0\}$（含有$n-p$个0根）

即，**AB**与**BA**的非0特征根相同！（只差$n-p$个0根）

....

推论2：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，$n\geq p$，则**AB**与**BA**的迹相同

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB})=\mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

证： 因为$\lambda(\mathbf{AB})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p,0,\cdots,0\}$

则**AB**的迹$\mathrm{tr}(\mathbf{AB})=\lambda_1+\cdots+\lambda_p+0+\cdots+0=\lambda_1+\cdots+\lambda_p=\mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

推论3：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，$n\geq p$，则

$$|\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|,\text{且}|\mathbf{I}_n+\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p+\mathbf{BA}|$$

证： 令$\lambda=1$代入公式：$|\lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=\lambda^{n-p}|\lambda\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|$ 可得$|\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|$

再用(-**A**)代替**A**可得 $|\mathbf{I}_n-(-\mathbf{A})\mathbf{B}|=|\mathbf{I}_p-\mathbf{B}(-\mathbf{A})|$

故 $|\mathbf{I}_n+\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p+\mathbf{BA}|$

备注：$n>p$时，可得行列式降阶公式如下

$$|\mathbf{I}_n-\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p-\mathbf{BA}|\text{ 且 }|\mathbf{I}_n+\mathbf{AB}|=|\mathbf{I}_p+\mathbf{BA}|$$

记住结论：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，$n\ge p$，则

$$\mathbf{AB}\text{与}\mathbf{BA}\text{的非0特根相同（只差}n-p\text{个0根）}$$

$$\text{记为}\ \lambda(\mathbf{AB})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p,0,\cdots,0\},\ \text{且}\lambda(\mathbf{BA})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$$

备注：$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$必有相同非0根.

例如，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}_{3\times 2}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}_{2\times 3}$

$\Rightarrow \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$可知$\lambda(\mathbf{BA})=\{1,2\}$

且$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$只差$3-2=1$个0根，故$\lambda(\mathbf{AB})=\{1,\ 2,\ 0\}$

…………………………………………………………………………….

换位公式与秩 1 阵公式

***秩1阵（又叫比例阵），设方阵$\mathbf{A}$的秩$\operatorname{rank}(\mathbf{A})=1$,可写

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2\cdots,b_n)\overset{\text{记为}}{=}\boldsymbol{\alpha}\beta$$

$$\text{其中}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times 1},\ \beta=(b_1,b_2\cdots,b_n)_{1\times n}$$

则特征根为 $\lambda(\mathbf{A})=\{\operatorname{tr}(\mathbf{A}),0,\cdots,0\}$，可令$\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

且$\boldsymbol{\alpha}$为一个特向使 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$

且有$\mathbf{A}^2=\lambda_1\mathbf{A}$

证：先证$\mathbf{A}$有特式 $|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{n-1}\left[x-\operatorname{tr}(\mathbf{A})\right]$

可写$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2\cdots,b_n)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\beta\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$，即，$\boldsymbol{\beta\alpha}=\operatorname{tr}(\mathbf{A})=$ A的迹！

$\because \mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times1}\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$，利用换位公式，可得

$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{I}_n-\boldsymbol{\alpha\beta}|=\lambda^{n-1}\det(\lambda\mathbf{I}_1-\boldsymbol{\beta\alpha})=\lambda^{n-1}\left[\lambda-\operatorname{tr}(\mathbf{A})\right]$

故，全体特根为$\lambda(\mathbf{A})=\{\operatorname{tr}(\mathbf{A}),0,\cdots,0\}$，可令$\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

再证$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$：利用$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{\beta\alpha}=\operatorname{tr}(\mathbf{A})=\lambda_1$可知

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\lambda_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$$

且有，$\mathbf{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\beta})(\boldsymbol{\alpha\beta})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\alpha})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}(\lambda_1)\boldsymbol{\beta}=\lambda_1(\boldsymbol{\alpha\beta})=\lambda_1\mathbf{A}$，

即$\mathbf{A}^2=\lambda_1\mathbf{A}$ ，$\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$.　　　　证毕

....

备注：若方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2=\lambda_1\mathbf{A}$，则$\mathbf{A}$中各列（非0时）都是特征向量！

证明：设$\mathbf{A}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n)$--按列分块，则有

$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=\mathbf{A}(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n)=(\mathbf{A}\alpha_1,\ \cdots,\ \mathbf{A}\alpha_n)$

且$\lambda_1\mathbf{A}=\lambda_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n)\ =(\lambda_1\alpha_1,\ ,\cdots,\ \lambda_1\alpha_n)$

可知 $\mathbf{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$ ，$,\cdots,$ $\mathbf{A}\alpha_n=\lambda_1\alpha_n$

即 ，$\mathbf{A}$中各列$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$都是特征向量

记住（秩1公式）：设$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times n}$为秩1阵，则

全体根为 $\lambda(\mathbf{A})=\{\operatorname{tr}(\mathbf{A}),0,\cdots,0\}$，$\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$

且$\mathbf{A}^2=\lambda_1\mathbf{A}$

且$\mathbf{A}$中各列都是λ_1的特征向量！

备注：秩1方阵$\mathbf{A}$必有分解$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}=\boldsymbol{\alpha}_{n\times1}\boldsymbol{\beta}_{1\times n}$

且 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda_1=\operatorname{tr}(\mathbf{A})$

例. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}$ 求全体特征根$\lambda(\mathbf{A})$，$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$，且求1个特向

解：可知$\mathbf{A}$为秩1(比例阵)，全体根$\lambda(\mathbf{A})=\{\mathrm{tr}(\mathbf{A}),0,\quad 0\}=\{-2,0,0\}$

可知$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^2(x+2)$，其中$\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=1+1-4=-2$

可取$\mathbf{A}$中列$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$为1个特向量：$A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}$ 求全体根$\lambda(\mathbf{A})$，$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$，且求1个特向

解：$\mathbf{A}$为秩1(比例阵)，全体根$\lambda(\mathbf{A})=\{\mathrm{tr}(\mathbf{A}),0,\quad 0\}=\{9,0,0\}$

可知$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\lambda^2(\lambda-9)$，其中$\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=4+4+1=9$

可取$\mathbf{A}$中列$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$为1个特向量：$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

………………………………………………………………..

例. 设全1方阵：$\mathbf{A}=(1)_{n\times n}$，求全体特根$\lambda(\mathbf{A})$，$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|$，且求1个特向

解：$\mathbf{A}$为秩1阵，全体根$\lambda(\mathbf{A})=\{\mathrm{tr}(\mathbf{A}),0,\cdots\quad 0\}=\{n,0,\cdots\quad 0\}$

可知$|x\mathbf{I}-\mathbf{A}|=x^{n-1}(x-n)$，其中$\lambda_1=\mathrm{tr}(\mathbf{A})=1+\cdots+1=n$

可取$\mathbf{A}$中列$\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$为1个特向量：$A\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

备注：本例也可写分解$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,\quad 1\quad\cdots\quad 1)$

可知$\boldsymbol{\alpha}$为1个特向量：$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$，其中$\lambda_1=\mathrm{tr}(A)=n$

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

补充复习：遗传公式

根遗传公式 $\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$

根公式： 设 n 方阵 A 特征根为 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则 $f(A)$ 的特根为

$$\lambda[f(A)]=\{f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n)\}$$

其中 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_kx^k$ 为任一多项式

且 $f(A)=c_0I+c_1A+\cdots\cdots+c_kA^k$

主要结论. 设 $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,

(1) 平移公式: $A\pm cI$ 的根为 $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$

(2) 倍公式: kA 的根为 $\lambda(kA)=\{k\lambda_1,\cdots,k\lambda_n\}$, 特别 $\lambda(-A)=\{-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n\}$

(3) 幂公式 : A^p 的根为 $\lambda(A^p)=\{\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p\},\ p=0,1,2,\cdots$

(4) 逆公式: A^{-1} 的根为 $\lambda(A^{-1})=\{\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}\}$, 若 A 可逆

向量遗传定理:

"A的特征向量 X_1, $X_2,\cdots$, X_n 也是 $f(A)$ 的特征向量"

即"A与 $f(A)$ 有相同特征向量 X_1, $X_2,\cdots$, X_n"

记住平移公式(平移法)!

牢记"平移法": $\lambda(A)=\{\lambda_1,\cdots\lambda_n\}\Leftrightarrow\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$

且 $A\pm cI$ 与 A 有相同特向 X_1, $X_2,\cdots$, X_n

例 用"平移法"与"秩 1 公式"求特征根 $\lambda(A)$, 特式 $|\lambda I-A|$, 且求1个特向X

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, (2) $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$, (3) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$

解: (1) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, 平移可知 $A-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ 为秩1

,由秩 1 公式 $\Rightarrow$ $\lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{1,0,0\}$

且 $A=(A-I)+I$, 由平移公式: $\lambda(A\pm cI)=\{\lambda_1\pm c,\cdots,\lambda_n\pm c\}$ 可知

$$\lambda(A)=\{1+1,0+1,0+1\}=\{2,1,1\}$$

可得 $|\lambda \mathrm{I}-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

且知$A-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$中列$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$必是A的特向量：使$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

解：(2)$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，$\because A-I=\begin{pmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}$为秩1

由秩 1 公式 $\Rightarrow\ \lambda(A-I)=\{\mathrm{tr}(A-I),0,0\}=\{-3,0,0\}$

由**平移公式** $\Rightarrow\ \lambda(A)=\{-3+1,0+1,0+1\}=\{-2,1,1\}$

可得 $|\lambda \mathrm{I}-A|=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

可知$A-I$中列$\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$必是A的特向量：使$A\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

解：(3)$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ $\because A-2I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$为秩1

由秩 1 公式 $\Rightarrow\ \lambda(A-2I)=\{\mathrm{tr}(A-2I),0,0\}=\{0,0,0\}$

由**平移公式** $\Rightarrow\ \lambda(A)=\{0+2,0+2,0+2\}=\{2,2,2\}$

可得 $|\lambda \mathrm{I}-A|=(\lambda-2)^3$

可知$A-2I$中列$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$必是A的特向量：使$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

例. $A=\begin{pmatrix}-1&-3&3&-3\\-3&-1&-3&3\\3&-3&-1&-3\\-3&3&-3&-1\end{pmatrix}$求$\lambda(A)$，特式$|\lambda \mathrm{I}-\mathrm{A}|$，求1个特向X

解$\because \mathrm{A}+4\mathbf{I}=\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}$为秩$1\Rightarrow\lambda(\mathrm{A}+4\mathbf{I})=\{12,0,0,0\}$

$\lambda(\mathrm{A})=\{12-4,0\text{-}4,0\text{-}4,0\text{-}4\}=\{8,\text{-}4,\text{-}4,\text{-}4\}$，可得

$$|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}|=(\lambda-8)(\lambda+4)^3$$

可取$A+4I$中列$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\-3\end{pmatrix}$或$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$必是A的特向量：使$A\mathrm{X}=8\mathrm{X}$

备注：“平移法”可知 **A与A+4I** 必有相同特征向量!

本例中，特根8对应1个特向$\mathrm{X}=(1\quad -1\quad 1\quad -1)^{\mathrm{T}}$

补充题：用“平移法”与“秩1公式”求特征根$\lambda(A)$，特式$|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}|$，且求1个特向X

1. $A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$提示$A-I=\begin{pmatrix}-2&-2&6\\-1&-1&3\\-1&-1&3\end{pmatrix}$(秩为1)

2. $A=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}$ 提示$A-3I=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&1\end{pmatrix}$秩为1

3. $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ 提示$A-3I=?$; 4. $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 提示$A-I=?$

思考题：.设实的列向量$\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T\neq 0\in\mathrm{R}^n$，令$A=I-\dfrac{2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{|\alpha|^2}$，其中$|\alpha|^2=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$.

求$A^{\mathrm{T}}-A$与$A\alpha+\alpha$；$\lambda(A)=?$提示$A\text{-}\mathbf{I}=-\dfrac{2\alpha\alpha^{\mathbf{T}}}{|\alpha|^2}=\frac{-2}{|\alpha|^2}(\alpha\alpha^{\mathbf{T}})$秩为**1**

。。

1个补充定理

定理：若$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{n\times p}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{p\times n}$，且$n>p$，则$|\mathbf{AB}|=0$

证明：可知$\mathbf{AB}=(\mathbf{AB})_{n\times n}$为n介方阵，且

秩$r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}_{n\times p})\le p<n$，即 $r(\mathbf{AB})<n$

由方阵定理“$r(\mathbf{A})<n\Leftrightarrow|\mathbf{A}|=0$”可知$|\mathbf{AB}|=0$.

例1：若$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{3\times 2}$，$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{2\times 3}$，则$|\mathbf{AB}|=0$（因为$3>2$）

例2 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\end{pmatrix}_{3\times 2}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}_{2\times 3}$ $\Rightarrow \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$,

$(3>2$必有$|\mathbf{AB}|=0)$，验证也可知$|\mathbf{AB}|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=0$

例2 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&a_1-b_3\\a_2-b_1&a_2-b_2&a_2-b_3\\a_3-b_1&a_3-b_2&a_3-b_3\end{pmatrix}$，求$|\mathbf{A}|=?$

显然可写$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1&-1\\a_2&-1\\a_3&-1\end{pmatrix}_{3\times 2}\begin{pmatrix}1&1&1\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}_{2\times 3}$ $3>2$必有$|\mathbf{A}|=0$

备注：本例可推广为$n(>2)$介方阵$\mathbf{A}=(a_i-b_j)_{n\times n}$必有$|\mathbf{A}|=0$