202[illegible]-03-11 主M101. 矩阵论.

设 $A\in C^{n\times n}$, 则以下~~[illegible]~~等价
$$\begin{cases} ① \text{ 各列均为单位向量 且两两相互正交} \\ ② \ A^HA=I_n \qquad ④ \ A^{-1}=A^H \\ ③ \ A\cdot A^H=I_n \qquad ⑤ \ A\text{是 U 矩阵} \end{cases}$$

注解: U矩阵的性质: 设 A 和 B 均为 n 阶方阵

若 A 与 B 均为 U矩阵, 则 AB 也为 U矩阵

$$(AB)^HAB=B^H\underbrace{A^HA}_{I_n}B=B^HB=I_n.$$ 故 AB 也为 U矩阵

证明几何解释见后面.

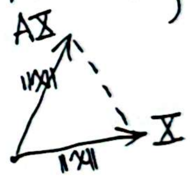
U矩阵的性质: 从几何形式和线性变换的角度介绍.

① 若 A 为 U阵, 则 $\|AX\|^2=\|X\|^2$. 证明: $\underbrace{tr\{(AX)^HAX\}}_{\|AX\|^2}=tr\{X^HA^HAX\}=\underbrace{tr\{X^HX\}}_{\|X\|^2}$.

(保长性)

等距性.

换言之: U变换保长度



矩阵作为一种变换: 设 $A\in C^{n\times n}$, 则 A 可以理解为 $C^n\to C^n$ 的映射.

这种变换, 当 A 为 U矩阵, 则 称为 U变换

② 正交保持性: 若 A 为 U阵, 已知 $X\perp Y$, 则有 $AX\perp AY$

证明: $(AX,AY)=tr\{~~[illegible]~~(AY)^HAX\}=tr\{Y\underbrace{A^HA}_{I_n}X\}=(X,Y)$.

$X\perp Y \Leftrightarrow (X,Y)=0 \Leftrightarrow (AX,AY)=0$.

④ 对②的推广: U阵保持任意正交组. 若 A 为 U阵

$X_1\perp X_2\perp\cdots\perp X_p$ 是一个相互正交的非零向量, 其中 $X_i\in C^n$

则 $AX_1\perp AX_2\perp\cdots\perp AX_p$ 仍然构成正交组 $\begin{cases}\text{保长} \Rightarrow \text{非零向量} \\ \text{保正交} \Rightarrow \text{相互正交}\end{cases}$

③ 内积保持性: 若 A 是 U矩阵, 则 $(AX,AY)=(X,Y)$

证明详见②证明

CS CamScanner

2025-03-11 三M101 矩阵论.

预U阵的单位化：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in C^{n\times n}$ 为预U阵
则 $\left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\dots,\frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}\right)$ 是U阵.

补充：U阵中各个行向量也是相互正交的
证明：$A\cdot A^H=I_n$ 即可证明

定义：(半)优阵/列优阵/次优阵：设 $A=A_{n\times p}\in C^{n\times p}$ 其中 $p\le n$.
CU阵
建议的名称.
若 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_p)$ 且 $\alpha_1\perp\alpha_2\perp\dots\perp\alpha_p$ 为一组非零正交组
则 A 为半优阵

半优阵：设 $p\le n$. $A=A_{n\times p}$ A半优 $\Leftrightarrow A^HA=I_p$ (唯一条件).

U阵 $\xleftarrow{p=n}$ 半优阵

U阵 $\xleftarrow{\|\alpha_i\|=1}$ 预优阵：$A^HA=diag(l_1,l_2,\dots,l_n)$ 且 $l_i\neq0\Leftrightarrow$ A预优.

其中 $A=A_{n\times p}\in C^{n\times p}$ 可以理解为 $C^p\to C^n$ 的线性映射.

CU阵的性质.

① 保长性：若 A为CU. $A\in C^{n\times p}$, 则对任意 $X\in C^p$ $\|AX\|^2=\|X\|^2$

② 保正交性仍然成立. ③ 保内积仍然成立.

一个几何化证明：设 A.B为n阶 U矩阵 不妨设 $B=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$. 为B各列相互正交
且长度均为"1"

而 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\dots,A\beta_n)$ 由(A的)正交保持性可知. $A\beta_1\perp A\beta_2\perp\dots\perp A\beta_n$
由A的模长保持性 $\|A\beta_1\|=\|A\beta_2\|=\dots=\|A\beta_n\|=1$

这说明 AB的各列仍为相互正交的单位长度. 故 AB为U阵

CamScanner

2025-03-11 3M101 矩阵论.

作业1 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in C^{2\times2}$ 特征式为 $T(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}$

即 $T(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$

~~试求T(A)=?~~

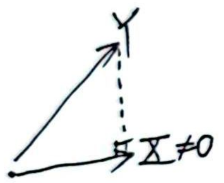
证明: $T(A)\triangleq(A-aI)(A-dI)-bcI=O_{2\times2}$ 即二阶零矩阵

作业2: 设 $X,Y\in C^n$: $\|X\|=\|Y\|$，且内积 (X,Y) 为实数，即 $\overline{(X,Y)}=(X,Y)$

证明 $(X+Y)\perp(X-Y)$

作业3: 证明 $Y-\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}\cdot X$ 与X正交，其中 $X\neq\vec{0}$，$X,Y\in C^n$.

正交投影与正交化: 给定非零向量X，求Y在X上的投影向量，记为



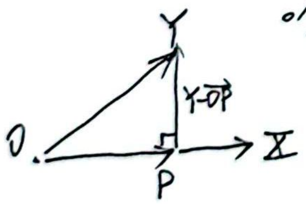
$X,Y\in C^n$.

$$(Y)_X=\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}\cdot X=\frac{(Y|X)}{\|X\|}\cdot\frac{X}{\|X\|}=\left(Y\middle|\frac{X}{\|X\|}\right)\frac{X}{\|X\|}$$

要使用这种形式

一切内积空间中都可以如此定义.

$\frac{X}{\|X\|}$ 是X方向上单位向量.



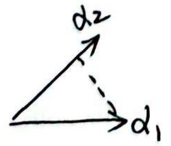
分析: 设 $\vec{OP}$ 为Y的正交投影，则 $(Y-\vec{OP})\perp X$.

设 $\vec{OP}=tX$，其中 $t\in C$ 是个待定的系数，解方程得到t

$$(Y-tX)\perp X\Leftrightarrow(Y-tX|X)=0\Leftrightarrow(Y|X)-t(X|X)=0.$$

由于 $(X|X)\neq0$ 故解得: $t=\frac{(Y|X)}{(X|X)}=\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}$ 故 $\vec{OP}=\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}\cdot X$

两个向量的正交化方法: 设 $\alpha_1,\alpha_2\in C^n$ 且 α_1,α_2 线性无关.



令 $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\cdot\beta_1$ 则有 $\beta_1\perp\beta_2$.

同理可以得到任意多个向量的正交化做法(至多可数个).

CS CamScanner

2025-03-11 三M101 矩阵论

利用正交化可以得到一个句股公式.

设 $X\neq\vec{0}$, $t=\frac{(Y|X)}{\|X\|^2}$, 则有 $\|Y-tX\|^2+\|tX\|^2=\|Y\|^2$

推论: 同样条件下: $\|tX\|^2\leq\|Y\|^2$ 等号成立条件为 $Y=tX$.

即 $|t|^2\cdot\|X\|^2\leq\|Y\|^2$ 即 $\left(\frac{|(Y|X)|}{\|X\|^2}\right)^2\cdot\|X\|^2\leq\|Y\|^2$.

$\Rightarrow |(Y|X)|^2\leq\|X\|^2\cdot\|Y\|^2$ 在 $X\neq 0$ 时成立 (即柯西-施瓦茨不等式).

利用一个非零向量如何快速构造个 U阵.

任取 $\alpha\in C^n$ $(\alpha\neq 0)$ 令 $A=I_n-\frac{2(\alpha\cdot\alpha^H)}{\|\alpha\|^2}$ 则 A为U矩阵, 且具有一些性质

其中 $\alpha\cdot\alpha^H$ 是一个 $n\times n$ 矩阵

① $A\alpha=-\alpha$ ② $A^H=A$ 即 Hermite阵 ③ $A^2=I_n$ 即 $A^{-1}=A$. 其余性质之后再补充

证明这些性质

本质上是镜面反射矩阵

① $A\alpha=-\alpha$: $A\alpha=\left(I_n-\frac{2(\alpha\cdot\alpha^H)}{\|\alpha\|^2}\right)\cdot\alpha=\underbrace{I_n\cdot\alpha}_{=\alpha}-\frac{2(\alpha\cdot\alpha^H)}{\|\alpha\|^2}\cdot\alpha$.

$=\alpha-\frac{2\alpha\underbrace{(\alpha^H\alpha)}_{\|\alpha\|^2}}{\|\alpha\|^2}=-\alpha$.

实数系数

② $A^H=I_n^H-\left(\frac{2\cdot\alpha\cdot\alpha^H}{\|\alpha\|^2}\right)^H=I_n-\frac{2}{\|\alpha\|^2}\cdot\underbrace{(\alpha\cdot\alpha^H)^H}_{=\alpha\cdot\alpha^H}=A$.

相等.

③ $A^2=I_n^2-\frac{4}{\|\alpha\|^2}(\alpha\alpha^H)+\underbrace{\frac{4}{\|\alpha\|^4}\cdot((\alpha\alpha^H))^2}_{=\frac{4}{\|\alpha\|^4}\cdot\alpha\underbrace{\alpha^H\alpha}_{=\|\alpha\|^2}\alpha^H}=I_n$

利用②和③可以证明 A是U阵: $A^H\cdot A=A\cdot A=I$ 故 A为U阵.

2025-0311 3M101 矩阵论.

习题4：对下列 α 计算 $A = I - \frac{2\alpha\alpha^H}{\|\alpha\|^2}$ ① $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ② $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.