2025-04-11 第四次作业 SY2406410 郭冠男.

1. 求下述矩阵的 $e^{tA}$ 和约当标准形.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 为单阵，先计算A的谱分解

$A-I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ 降秩，说明 1是A的特征值. 对 $(A-I)$ 做满秩分解.

$A-I=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 交换满秩阵非零特征值不变

$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$ $B+2I=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\alpha}\underbrace{(2\ 1)}_{\beta^T}$

故 $\lambda(B+2I)=\{tr(B+2I),0\}=\{3,0\}$

故 $\lambda(B)=\{1,-2\}$ 故 $\lambda(A-I)=\{1,-2,0\}$ 故 $\lambda(A)=\{2,1,-1\}$

检验:

$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}$ 降秩；$A+I=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 降秩. 故 $\lambda(A)=\{2,1,-1\}$

设 $A=2G_1+1\cdot G_2+(-1)\cdot G_3$

其中 $A^2=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

其中 $G_1=\dfrac{(A-1)(A+1)}{(2-1)(2+1)}=\frac{1}{3}(A^2-I)=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^2-A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$G_2=\dfrac{(A-2)(A+1)}{(1-2)(1+1)}=-\frac{1}{2}(A^2-A-2)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2025-04-11 第四次作业 SY2406410 郭昭男

$$G_3=\frac{(A-2)(A-1)}{(-1-2)(-1-1)}=\frac{1}{6}(A^2-3A+2).\qquad A^2-3A=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\0&1&-3\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

验证：① $G_1+G_2+G_3=I$.

$$\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

② $G_1^2=G_1,\ G_2^2=G_2,\ G_3^2=G_3$

$$G_1^2=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ G_2^2=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ G_3^2=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故 $e^{tA}=e^{2t}\cdot G_1+e^{t}\cdot G_2+e^{-t}\cdot G_3$. 由于A是单阵 A的Jordan标准型为 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}&\frac{2}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-t}&\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-t}\\0&\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}&\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\0&\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}&\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

2025-04-11 第四次作业 SY2406410 郭冠男

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 设 $f(A)=f(1)G_1+f(2)G_2+f'(2)\cdot D_1$

① 代入 $f(x)=(x-1)$ 则 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}=G_2+D_1=A-I$

② 代入 $f(x)=(x-2)$ 则 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}=-G_1+D_1=A-2I$.

③ 代入 $f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$. 则 $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=D_1$

$f'(x)=2x-3$

$f'(2)=1$

解得: $G_1=\begin{pmatrix} 0 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $G_2=\begin{pmatrix} 1 & -12 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1=\begin{pmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

对 $f(x)=e^{tx}$ 而言:

$$f(A)=e^{tA}=e^{t}\cdot G_1+e^{2t}\cdot G_2+te^{2t}\cdot D_1$$

$$=\begin{pmatrix} e^{2t} & 12e^{t}-12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^{t}+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

(2) 求 $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 的约当标准型. 观察到 $\lambda(A)=\{2,2,1\}$

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&4\\0&0&0\\0&3&-1\end{pmatrix}$$ ; $\text{rank}(A-2I)=2$. 这说明 $\lambda=2$ 只有一个线性无关特征向量与之对应

故 A 的约当标准型为 $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&(1)\end{pmatrix}$

补充题1: 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. A正定. $A^H=A$, 设 $\|x\|=\sqrt{x^HAx}$ 其中 $x\in\mathbb{C}^n$.
求证 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的范数

① 正性: 由于A正定, 所以对 $\forall\, x\neq0$. $x^HAx>0$.

故 $x^HAx=0\Leftrightarrow x=0$.

② 齐性: $\|kx\|=\sqrt{\bar{k}\cdot x^HA\cdot kx}=\sqrt{\bar{k}\cdot k}\cdot\sqrt{x^HAx}=|k|\cdot\|x\|$

③ 三角不等式: 由于 $A>0$ 且Hermite. 故存在 $A=B^HB$. 现 $\|x\|=\sqrt{x^HB^HBx}=\|Bx\|_2$.

故 $\|x+y\|=\|B(x+y)\|_2\le\|Bx\|_2+\|By\|_2=\|x\|+\|y\|$ 得证.