北航研究生 2025 春季矩阵论期末复习

GGN_2015

1 声明

本答案由学生 GGN_2015 自制，正确性并无保证。如果出现了谬误，欢迎联系 premierbob@qq.com 更正。本文题目为 2024 春季期末考试试题与考点分析，欢迎同学们一同分享学习的心得体会。本项目的 github 地址为：https://github.com/GGN-2015/matrix-theory-final-exam

目录

2　判断题

2.1　T1

设 $V=\{A\in\mathbb{R}^{3\times3}|\det(A)=0\}$，则 V 在 $\mathbb{R}$ 上定义的普通矩阵加法和数乘下构成线性空间。

答案：错误

理由：两个奇异矩阵（$\det(A)=0,\det(b)=0$）的加和可能非奇异（$\det(A+B)\neq 0$），因此在 V 上的普通矩阵加法，不满足运算的封闭性。

2.2　T2

在有限维线性空间中，同一个向量在不同的基下的坐标可能相同。

答案：正确

理由：例如，如果 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基，那么 $\{e_1,-e_2\}$ 也一定是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基。那些与 e_1 平行的向量，在两组基底下一定具有相同的坐标。

2.3　T3

设 n 阶复方阵 A、B 具有相同的特征多项式和最小多项式，则 A 和 B 一定相似。

答案：错误

理由：两个矩阵特征多项式相同，说明两个矩阵具有相同的特征值，且各个特征值的重数对应相等。两个矩阵具有相同的最小多项式，这说明两个矩阵各自的约当标准形中，每个特征值 λ_i 的最大 Jordan 块的阶数相同。由于相似的充要条件是，两个矩阵具有相同的约当标准型，但以上的两个条件仅仅限制了约当标准型中每个特征值的总次数和最大块阶数，因此并不能说明两个矩阵相似。

例子：

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

但他们的特征多项式都是 $(x-1)^4$ 最小多项式都是 $(x-1)^2$，矩形框圈出了上述两个矩阵的约当小块。

2.4 T4

设 A B 均为 n 阶段复方阵，则 $R(AB) \subseteq R(A), N(B) \subseteq N(AB)$。

答案：正确

理由：首先，$R(A)$ 表示线性映射 A 的值域（range），$N(A)$ 表示线性映射 A 的核（kernel）。从概念上讲 $R(A) = \{Ax | x \in \mathbb{C}^n\}, N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = 0\}$。不难验证上面的包含关系。

2.5 T5

若 A 是 n 阶可逆复方阵，则 $\sin A$ 一定可逆。

答案: 错误

理由:n 阶段复方阵可逆当且仅当不存在零特征值。设 $\lambda(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，则根据特征值的遗传公式 $\lambda(\sin A) = \{\sin \lambda_1, \cdots, \sin \lambda_n\}$。即使 λ_i 中没有零，但当某个 $\lambda_i = k\pi\ (k \neq 0)$ 时，$\sin A$ 也不可逆。

2.6 T6

设 T 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，则 T 对应的矩阵一定是正交矩阵。

答案：正确

理由：正交矩阵的定义是 $AA^T = A^T A = I_n$。正交变换的定义是 $\forall x, y \in V, (A(x), A(y)) = (x, y)$ 即保内积，即 $(Ay)^T(Ax) = y^T(A^T A)x = y^T x$，总成立。由于 x, y 的任意性，所以得到 $A^T A = I_n$。

2.7 T7

设 A B 均是正规复矩阵，且 $AB = BA$，则 AB 和 BA 也均是正规矩阵。

答案：正确

理由：留坑待补...

2.8 T8

设 A 是 n 阶复方阵，则 $\|A\|_2 \le \|A\|_F$。

答案：正确

理由：$\|A\|_2$ 是矩阵 A 的谱半径，即 $\sqrt{\sigma_{\max}(A^H A)}$，可以证明，对于 n 阶复方阵，谱半径是所有范数的下界。

2.9 T9

设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A^k$ 不绝对收敛。

答案：正确

理由：矩阵级数绝对收敛的条件是，谱半径小于级数收敛半径。A 的谱半径为 1, 级数的收敛半径也为 1，因此不绝对收敛。

2.10 T10

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}, x \in \mathbb{C}^n$，若向量范数 $\|x\|_v$ 与矩阵范数 $\|A\|_m$ 满足不等式 $\|Ax\|_v \ge \|A\|_m \|x\|_v$ 则称矩阵范数 $\|A\|_m$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容。

答案：错误

理由：不等号方向不对，应当是 $\|Ax\|_v \le \|A\|_m \|x\|_v$。

3 填空题

3.1 T1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$，$V_1, V_2$ 分别是齐次方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的解空间，则 $\dim(V_1 \cap V_2) =$ __________。

答案：1

理由：本质上就是求以下方程的解空间的维数：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

通过高斯消元,可以证明矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ 的秩为 3, 因此 $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$。

3.2 T2

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，若向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + k\alpha_1$ 也线性无关，则 k 应当满足 __________。

答案：$k \neq -1$

理由：只需要保证 $a(\alpha_1 + \alpha_2) + b(\alpha_2 + \alpha_3) + c(\alpha_1 + k\alpha_3) = 0$ 当且仅当 $a = b = c = 0$。整理得到 $(a + ck)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2 + (b + c)\alpha_3 = 0$ 当且仅当 $a = b = c = 0$。由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，因此得到 $(a + ck)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2 + (b + c)\alpha_3 = 0$ 等价于 $a + ck = 0$ 且 $a + b = 0$ 且 $b + c = 0$，因此我们只需要保证以下方程有唯一解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

保证上述矩阵满秩即可。

3.3 T3

设 $M = I_n - ww^T, w = \frac{1}{\sqrt{n}}[1, 1, \cdots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$，则 M 的行列式等于 __________。

答案：0

理由：换位公式对任意 $A_{n\times p}, B_{p\times n}$ 总有关于 λ 的两个多项式 $\det(\lambda I_n - AB) \cdot \lambda^p \equiv \det(\lambda I_p - BA) \cdot \lambda^n$。带入 $\lambda = 1$ 得到 $\det(I_n - AB) = \det(I_p - BA)$，令 $A = w, B = w^T, p = 1$，得到 $\det(I_n - ww^T) = 1 - w^T w = 0$。