随机过程理论

Stochastic process theory

授课教师：李春升教授、徐华平教授

第五章 高斯随机过程

Gauss stochastic process

目录

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

第五章　高斯随机过程

高斯随机过程的特点

✓最常见

- 由中心极限定理，诸多随机过程为高斯随机过程

  电阻热噪声、晶体管噪声、大气湍流、宇宙噪声

✓最易处理

✓数学上的优点

- 完全由均值和协方差决定
- 广义平稳 ⇨ 狭义平稳
- 线性变换仍为高斯随机过程

5.1 多维高斯随机变量

Multidimensional Gauss random variable

5.1 多维高斯随机变量

1、一维高斯分布

$$X \sim N(a,\sigma^2) \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}$$

✓均值 $$m_X = E(X) = a$$

✓方差 $$\sigma_X{}^2 = D(X) = \sigma^2$$

5.1 多维高斯随机变量

1、一维高斯分布

✓ 特征函数

$$\varphi(v) = E[e^{jvX}]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvx} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \exp\{jav - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2\}$$

$$\varphi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvx} f(x) dx \Longleftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvx} \varphi(v) dv$$

5.1 多维高斯随机变量

1、一维高斯分布

✓特点总结

➢概率密度函数完全由均值和方差确定

✓ 应用：归一化（标准化）

$$Y = \frac{X - a}{\sigma} \sim N(0,1) \qquad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{y^2}{2}\}$$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

$$(X_1, X_2) \sim N(a_1, a_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, r)$$

$$\boxed{f\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}}$$

$$X_1 \sim N(a_1, \sigma_1{}^2) \qquad X_2 \sim N(a_2, \sigma_2{}^2)$$

r为X_1和X_2的相关系数 $\qquad r = \dfrac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}$

✓协方差 $\quad \operatorname{cov}(X_1, X_2) = r\sigma_1\sigma_2$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

r=0

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$$

互不相关与相互独立等价

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-j(x_1v_1+x_2v_2)\}\cdot\varphi(v_1,v_2)dv_1dv_2$$

若 $\varphi(v_1,v_2)=\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-j(x_1v_1+x_2v_2)\}\cdot\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)dv_1dv_2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-j(x_1v_1)\}\varphi_1(v_1)dv_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-j(x_2v_2)\}\varphi_2(v_2)dv_2$$

$$=f_1(x_1)f_2(x_2)$$

2、二维高斯分布

$$\varphi(v_1,v_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\left(v_1x_1+v_2x_2\right)\right\}\cdot f\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2$$

若 $f\left(x_1,x_2\right)=f_1\left(x_1\right)f_2\left(x_2\right)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\left(v_1x_1+v_2x_2\right)\right\}\cdot f_1\left(x_1\right)f_2\left(x_2\right)dx_1dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\left(v_1x_1\right)\right\}f_1\left(x_1\right)dx_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\left(v_2x_2\right)\right\}f_2\left(x_2\right)dx_2$$

$$=\varphi_1\left(v_1\right)\varphi_2\left(v_2\right)$$

特征函数可分与概率密度可分等价

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

✓ **特点总结**

➢ **概率密度函数完全由均值、方差以及协方差（相关系数）确定**

➢ **互不相关与相互独立等价**

✓ 应用：归一化（标准化）

$$Y_1 = \frac{X_1 - a_1}{\sigma_1} \sim N(0,1) \qquad Y_2 = \frac{X_2 - a_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$$

$$\boxed{f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[y_1^2 - 2ry_1y_2 + y_1^2\right]\right\}}$$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

✓矩阵表示

令 $$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵 $$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^{\ 2} & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^{\ 2} \end{bmatrix}$$

相关系数 $$r=\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}$$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

$$|\mathbf{C}| = \sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-r^2\right)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{C}|}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a}) = \frac{1}{|\mathbf{C}|}\begin{bmatrix} x_1-a_1 & x_2-a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{1\text{-}r^2}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 \text{-}2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

$$f\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$\left|\mathbf{C}\right|=\sigma_1^{\ 2}\sigma_2^{\ 2}\left(1-r^2\right)\qquad \left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)^T\mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)=\frac{1}{1-r^2}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})=\frac{1}{\left(2\pi\right)\left|\mathbf{C}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}$$

5.1 多维高斯随机变量

2、二维高斯分布

✓特征函数

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \int_{R^2} \exp\left\{ j\mathbf{x}^T \mathbf{v} \right\} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \exp\left\{ j\mathbf{a}^T \mathbf{v} - \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \right\}$$

其中 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

5.1 多维高斯随机变量

3、***n*维高斯分布**

***n*维随机矢量**

$$\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]^T$$

均值矢量

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$$

协方差矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = r_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$C_{ii} = \mathrm{cov}(X_i, X_i) = \sigma_i^2$$

5.1 多维高斯随机变量

3、 n维高斯分布

$$\mathbf{X} \sim N(\mathbf{a}, \mathbf{C})$$

n维高斯分布的概率密度为

$$\boxed{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{a}) \right\}}$$

$\mathbf{C}$ 正定

3、 ***n*维高斯分布**

✓ 互不相关与相互独立等价—相互独立与两两不相关等价

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & 0\\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sigma_1^2 & & & 0\\ & 1/\sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\sigma_n^2\end{pmatrix}\quad |\mathbf{C}|^{1/2}=\prod_{i=1}^{n}\sigma_i$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}=\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(2\pi\sigma_i^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i)$$

✓ 互不相关与相互独立等价—两个子矢量相互独立与互不相关等价

5.1 多维高斯随机变量

3、 n维高斯分布

- ✓ 多维高斯分布的边沿分布仍是高斯的
- ✓ 多维高斯分布的条件分布仍是高斯的
- ✓ 多维高斯矢量的线性变换仍是高斯的

5.1 多维高斯随机变量

3、 n维高斯分布

✓特点总结

- 概率密度函数完全由均值、方差以及协方差确定
- 互不相关与相互独立等价
- 边沿分布、条件分布仍然服从高斯分布
- 线性变换仍然是高斯分布

5.1 多维高斯随机变量

✓例5.1-1 定义 $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}$，式中$\mathbf{X}$是一个k维高斯随机矢量，$\mathbf{A}$是一个$n\times k$矩阵。证明$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是联合高斯的随机矢量。

➢证明构造新随机矢量

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \\ \mathbf{AX}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \\ \mathbf{A}\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{BX}\qquad \text{定义}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \vdots\\ \mathbf{A}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}$是高斯矢量, $\mathbf{B}$是线性变换

$\Rightarrow\mathbf{Z}$是高斯矢量$\Rightarrow\mathbf{Y}$和$\mathbf{X}$是联合高斯的

5.2 高斯随机过程

Gaussian random process

5.2 高斯随机过程

✓ 定义

如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的任意有限维分布都是高斯分布，则称它为高斯随机过程。

高斯过程是二阶矩过程的一个重要子类。

5.2 高斯随机过程

✓ 高斯过程$X(t)$的n维联合概率密度函数

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathrm{cov}[X(t_1),X(t_1)] & \cdots & \mathrm{cov}[X(t_1),X(t_n)]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{cov}[X(t_n),X(t_1)] & \cdots & \mathrm{cov}[X(t_n),X(t_n)]\end{bmatrix}$$

5.2 高斯随机过程

✓高斯过程为二阶矩过程

概率密度仅取决于一、二阶矩

$$E[X^2(t)] < \infty$$

✓特征函数

$$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \exp\left\{ j\sum_{i=1}^{n} a_i v_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_X(t_i, t_k) v_i v_k \right\}$$

$$C_X(t_i, t_k) = \sigma_i \sigma_k r_{ik}$$

5.2 高斯随机过程

✓平稳高斯过程

广义平稳

若 $\{X(t), t\in T\}$ 平稳，则

$\forall t_i, a_i = E[X(t_i)]=a,\ \ \sigma_i^2 = D[X(t_i)] = \sigma^2$，**C**与起始时刻无关

$$f\left(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n\right) = f\left(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau\right)$$

广义平稳 $\Rightarrow$ 严格平稳

$E[X^2(t)]<\infty$

严格平稳 $\Rightarrow$ 广义平稳

广义平稳与严格平稳等价

5.2 高斯随机过程

✓总结

➢高斯过程是二阶矩过程，统计特性由前两阶矩确定

➢狭义平稳和广义平稳等价

➢相互独立和互不相关等价

➢线性变换仍是高斯过程

5.2 高斯随机过程

✓例1

试说明高斯随机过程在任意一组时间$t_1,t_2,\cdots,t_n$的集合所组成的样本都是联合高斯矢量。

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

The stability of narrow-band flat Gauss stochastic process

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

0、基本问题

一个零均值的窄带实平稳随机过程

$$X(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$= X_c(t)\cos\omega_0 t - X_s(t)\sin\omega_0 t$$

$$X_c(t) = X(t)\cos\omega_0 t + \hat{X}(t)\sin\omega_0 t$$

$$\hat{X}(t) = X_s(t)\sin\omega_0 t + X_c(t)\cos\omega_0 t$$

$$X_s(t) = -X(t)\sin\omega_0 t + \hat{X}(t)\cos\omega_0 t$$

$$R_{X_s}(\tau) = R_{X_c}(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$R_{X_sX_c}(\tau) = -R_{X_cX_s}(\tau) = -R_X(\tau)\sin\omega_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$$R_{X_cX_s}(0) = 0$$

$X(t)$ 高斯窄带随机过程	$m_X(t) = 0$ $D[X(t)] = \sigma_X^2$	求：$X_c(t), X_s(t)$ 的概率密度函数

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

1、单个时刻的分布特性 $X_c(t)$,$X_s(t)$

由于互相关函数 $R_{X_cX_s}(0)=E[X_c(t)\,X_s(t)]=0$

$X_c(t)$ 与 $X_s(t)$互不相关 $\Rightarrow$ $X_c(t)$ 与 $X_s(t)$相互独立

且 $E[X_c(t)\,]=E[X_s(t)\,]=0$

$$D[X_c(t)\,]=D[X_s(t)\,]=D[X(t)]=\sigma_X{}^2$$

则两正交分量 $X_c(t)$和 $X_s(t)$ 的联合概率密度函数为

$$f_{X_cX_s}(x_c,x_s)=\frac{1}{2\pi\sigma_X{}^2}\exp\{-\frac{x_c{}^2+x_s{}^2}{2\sigma_X{}^2}\}$$

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

1、单个时刻的分布特性——幅度和相位

$$由 A(t)=\sqrt{X_c^{2}(t)+X_s^{2}(t)}\ ,A(t)\geq 0$$

$$\psi(t)=\tan^{-1}\frac{X_s(t)}{X_c(t)},0\leq\psi(t)\leq 2\pi$$

可得，二维随机变量的函数的联合分布为

$$f_{A\psi}(a,\varphi)=f_{X_cX_s}(x_c,x_s)\left|J\right|=f_{X_cX_s}(a\cos\varphi,a\sin\varphi)\left|J\right|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{2\pi\sigma_X^{2}}\exp\{-\dfrac{a^{2}}{2\sigma_X^{2}}\} & a\geq 0,0\leq\varphi\leq 2\pi\\ 0 & 其他\end{cases}$$

1、单个时刻的分布特性——幅度和相位

$${}_A(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A\psi}(a,\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi\sigma_X^2}\exp\{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\}d\varphi = \frac{a}{\sigma_X^2}\exp\{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\} \qquad a$$

$${}_\psi(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A\psi}(a,\varphi)da = \int_0^{\infty} \frac{a}{2\pi\sigma_X^2}\exp\{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\}da = \frac{1}{2\pi} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$f_{A\psi}(a,\varphi) = f_A(a)\, f_\psi(\varphi)$$

✓均值 $E[A(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_X$

✓方差 $D[A(t)] = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma_X^2$

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

2、两个时刻的分布特性　　$X_c(t_1)$，$X_s(t_1)$，$X_c(t_2)$，$X_s(t_2)$

令 $\mathbf{X}=\left[X_c(t_1)\quad X_c(t_2)\quad X_s(t_1)\quad X_s(t_2)\right]^T$，有　$\mathbf{m}_\mathbf{X}=[0\quad 0\quad 0$

$$f_\mathbf{x}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^2\left|\mathbf{C}_\mathbf{X}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}_\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}\right\}$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{X}=E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T]=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & R_{X_c}(\tau) & 0 & 0\\ R_{X_c}(\tau) & \sigma_X^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_X^2 & R_{X_c}(\tau)\\ 0 & 0 & R_{X_c}(\tau) & \sigma_X^2\end{pmatrix}$$

其中 $R_{X_c}(\tau)=R_{X_s}(\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau\qquad \tau=t_1-t_2$

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

2、两个时刻的分布特性——幅度和相位

$$X_c(t_1) = A(t_1)\cos\psi(t_1) \quad , \quad X_s(t_1) = A(t_1)\sin\psi(t_1)$$

$$X_c(t_2) = A(t_2)\cos\psi(t_2) \quad , \quad X_s(t_2) = A(t_2)\sin\psi(t_2)$$

$$A(t_1) = \sqrt{X_c^{\,2}(t_1) + X_s^{\,2}(t_1)} \ , \ \psi(t_1) = \tan^{-1}\frac{X_s(t_1)}{X_c(t_1)}$$

$$A(t_2) = \sqrt{X_c^{\,2}(t_2) + X_s^{\,2}(t_2)} \ , \ \psi(t_2) = \tan^{-1}\frac{X_s(t_2)}{X_c(t_2)}$$

2、两个时刻的分布特性——幅度和相位

可得二维联合概率密度为

$$f_{\mathbf{A\psi}}(a_1,a_2;\varphi_1,\varphi_2)=\begin{cases}\dfrac{a_1a_2}{4\pi^2\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}\exp\{-\dfrac{1}{2\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}[\sigma_X{}^2(a_1{}^2+a_2{}^2)-2R_{X_c}(\tau)a_1a_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)]\} \\ \qquad\qquad a_1,a_2\geq 0,0\leq\varphi_1,\varphi_2\leq 2\pi \\ 0 \qquad\qquad \text{其他}\end{cases}$$

5.3 窄带平稳实高斯随机过程

2、两个时刻的分布特性——幅度和相位

$$f_{\mathbf{A}}(a_1,a_2)=\frac{a_1a_2}{4\pi^2\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}I_0\left[\frac{a_1a_2}{\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}R_{X_c}(\tau)\right]\exp\{-\frac{\sigma_X{}^2(a_1{}^2+a_2{}^2)}{2\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}\}\quad a_1,a_2\geq 0$$

式中 $I_0(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\exp\{x\cos\varphi\}d\varphi$

$$f_{\boldsymbol{\psi}}(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{\left|\mathbf{C_X}\right|^{1/2}}{4\pi^2\sigma_X{}^2}\left[\frac{(1-\cos^2\varphi)^{1/2}-\varphi\cos\varphi}{(1-\cos^2\varphi)^{3/2}}\right]\quad 0\leq\varphi_1,\varphi_2\leq 2\pi$$

式中 $\varphi=\cos^{-1}\left[-\dfrac{R_{X_c}(\tau)}{\sigma_X{}^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right]$

$$f_{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}}(a_1,a_2;\varphi_1,\varphi_2)\neq f_{\mathbf{A}}\left(a_1,a_2\right)f_{\boldsymbol{\psi}}\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$$

5.4 随机相位正弦波加窄带平稳高斯随机过程之和

The sum of random phase sine wave plus narrowband stationary Gauss random process

5.4 随机相位正弦波加窄带平稳高斯随机过程之和

随机相位正弦波加窄带平稳高斯过程之和

$$Y(t) = s(t) + N(t)$$

$s(t) \longrightarrow$ 随机相位正弦波

$N(t) \longrightarrow$ 窄带噪声，窄带平稳高斯随机过

$$s(t) = B\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

在 $[0,2\pi]$内均匀分布

$$= B\cos\Theta\cos\omega_0 t - B\sin\Theta\sin\omega_0 t$$

$$N(t) = A_n(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi_n(t)\right]$$

$$= N_c(t)\cos\omega_0 t - N_s(t)\sin$$

$$Y(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$$

$$= A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Phi(t)\right]$$

$$A_c(t) = B\cos\Theta + N_c(t)$$

$$A_s(t) = B\sin\Theta + N_s(t)$$

$$A(t) = \left[A_c^2(t) + A_s^2(t)\right]^{1/2} \qquad \Phi(t) = tg^{-1}\frac{A_s(t)}{A_c(t)}$$

5.4 随机相位正弦波加窄带平稳高斯随机过程之和

1、单个时刻包络的概率密度函数

$$f(a|\theta)=\frac{a}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{a^2+B^2}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(\frac{aB}{\sigma^2}\right)\qquad a\geq 0$$

信号 $s(t)$ 的相位分布对信号加噪声的合成包络分布无影响。

$$f(a)$$

广义瑞利分布，又称莱斯分布

5.4 随机相位正弦波加窄带平稳高斯随机过程之和

1、单个时刻包络的概率密度函数

（1）小信噪比时，包络趋于瑞利分布

归一化变量

$$f(v) = v\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} \qquad v \geq 0$$

（2）大信噪比时，包络趋于高斯分布

$$p(v) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(v-b)^2}{2}\right\}$$

5.4 随机相位正弦波加窄带平稳高斯随机过程之和

2、相位的概率密度函数

$$f(\varphi|\theta)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{B^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$+\frac{B\cos(\varphi-\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{B^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi-\theta)\right\}\left\{\frac{1}{2}+\Psi\left[\frac{1}{\sigma}B\cos(\varphi-\theta)\right]\right\}$$

（1）小信噪比时，θ给定情况下相位服从均匀分布

（2）大信噪比时 ，θ给定情况下相位概率 密度函数是 $(\varphi-\theta)$ 的偶函数。 相位分布密度主要集中在 θ的附近。

5.5 X^2分布及非X^2中心分布

X2 distribution and non X2 center distribution

5.5 X2分布及非X2中心分布

1、 χ^2分布

✓ 定义

设有**n**个统计独立的高斯随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ，它们都具有零均值和单位方差。将这些随机变量的平方和表示为

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

则 S 称为具有**n**个自由度的 χ^2 变量，其概率分布称为 χ^2 分布。

✓ χ^2分布密度

$$f_S(s) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}} \qquad s \ge 0$$

n —— 自由度

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

5.5 X2分布及非X2中心分布

1、χ^2分布

✓ 推论

（1）如果统计独立变量 X_i均值为零，方差为 σ^2，令

$S_1=\sigma^2 S$　　则 $f(s_1)=\dfrac{1}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}s_1^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{s_1}{2\sigma^2}}$

（2）两个统计独立的自由度分别为**n**和**m**的 χ^2变量之和

仍为χ^2 随机变量，自由度为**n+m**。

（3） $E\left[\chi^2\right]=n \quad D\left[\chi^2\right]=2n$

5.5 X2分布及非X2中心分布

2、非中心 χ^2分布

✓ 定义

设有**n**个统计独立的高斯随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ，其均值皆为零，方差均为 σ^2，将这些随机变量的平方和表示为

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i + B_i\right)^2$$

则 S 称为具有**n**个自由度的非中心 χ^2变量，其中 B_i 为非随机量

✓ 具有**n**个自由度的非中心 χ^2分布密度

$$f_s(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left\{-\frac{\lambda + s}{2}\right\} I_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt{s\lambda}\right)$$

$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} B_i^2$ $\longrightarrow$ 非中心参量 $\longrightarrow$ 积累后的功率信噪比

5.5 X2分布及非X2中心分布

2、非中心 χ^2分布

✓ 推论

（1）两个统计独立的自由度分别为**n**和**m**，非中心参量分别为 λ_1,λ_2 的非中心χ^2变量之和仍为非中心 χ^2 随机变量，自由度为$\boldsymbol{n+m}$，非中心参量为 $\lambda_1+\lambda_2$。

（2）非中心变量 χ^2 的均值和方差为

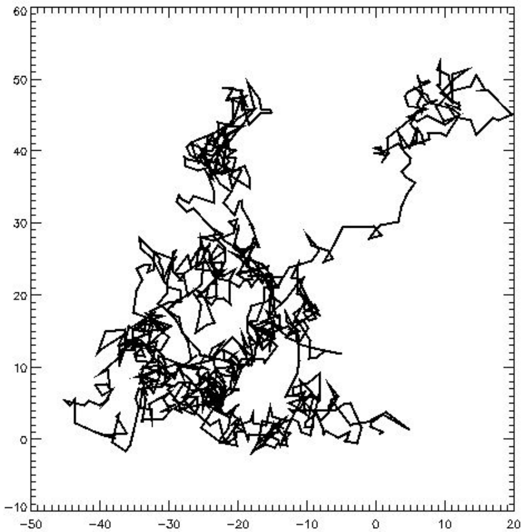
$$E[S]=\lambda+n \qquad D[S]=4\lambda+2n$$

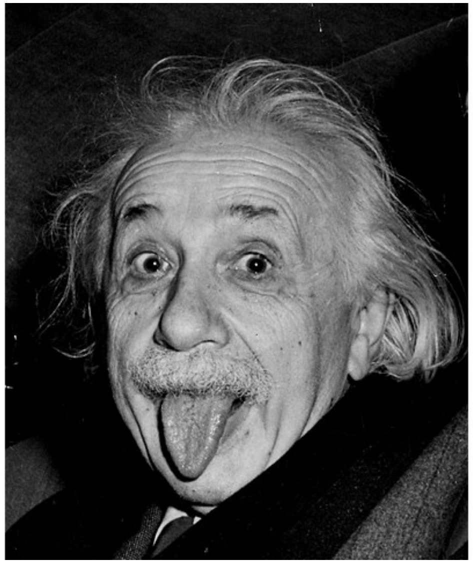
5.6 维纳过程

Wiener process

5.6 维纳过程

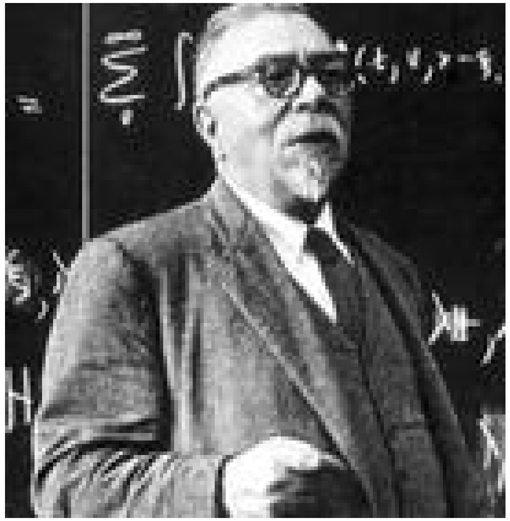
1828年，英国植物学家布朗发现了布朗运动





1905年，德国物理学家爱因斯坦给出了布朗运动的数学描述

1923年，美国数学家维纳研究了布朗运动的概率定律，揭示了布朗运动的数学理论



实验研究 → **理性分析** → **严格推理**

5.6 维纳过程

1、独立增量过程

- ➢ 定义
  - ✓ 任意正整数，任意时刻
  - ✓ 恒有增量独立
- ➢ 理解
  - ✓ 增量之间独立
  - ✓ 增量值只与当前有关，与过去无关
  - ✓ 第n个时刻的随机过程的取值是独立增量之和
- ➢ 举例
  - ✓ 液体分子的无规则运动
  - ✓ 晶体管热噪声等

5.6 维纳过程

2、维纳过程的定义

若随机过程满足以下4个条件：

（1） $P[X(0)=0]=1$

（2） 独立增量过程

（3） 平稳增量，相同时间间隔的增量具有同分布

（4） 增量服从均值为零的高斯分布

则称为维纳过程

5.6 维纳过程

3、维纳过程的统计特性——数字特征

✓ 增量的数字特征

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = 0$$

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_1 - t_2|$$

✓ 过程的数字特征

$$E[X(t)] = 0$$

$$D[X(t)] = \sigma^2 t$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$$

5.6 维纳过程

3、维纳过程的统计特性——概率密度函数

✓ 1维概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma t^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\}$$

✓ n维概率密度函数

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n, t_1, t_2 \ldots t_n) = f(x_1 - x_0) \cdots f(x_n - x_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma (t_i - t_{i-1})^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2\sigma^2 (t_i - t_{i-1})}\}$$

5.6 维纳过程

4、维纳过程的性质

⟶ 非平稳的高斯过程

⟶ 独立增量过程，且是齐次的

⟶ 增量的分布服从高斯分布

⟶ 均方连续，非均方可微

⟶ 零均值、平稳高斯白噪声通过理想积分器可以获得维纳过程

作业

- 5.5-5.8
- 5.13, 5.15-5.16, 5.18, 5.20-5.21