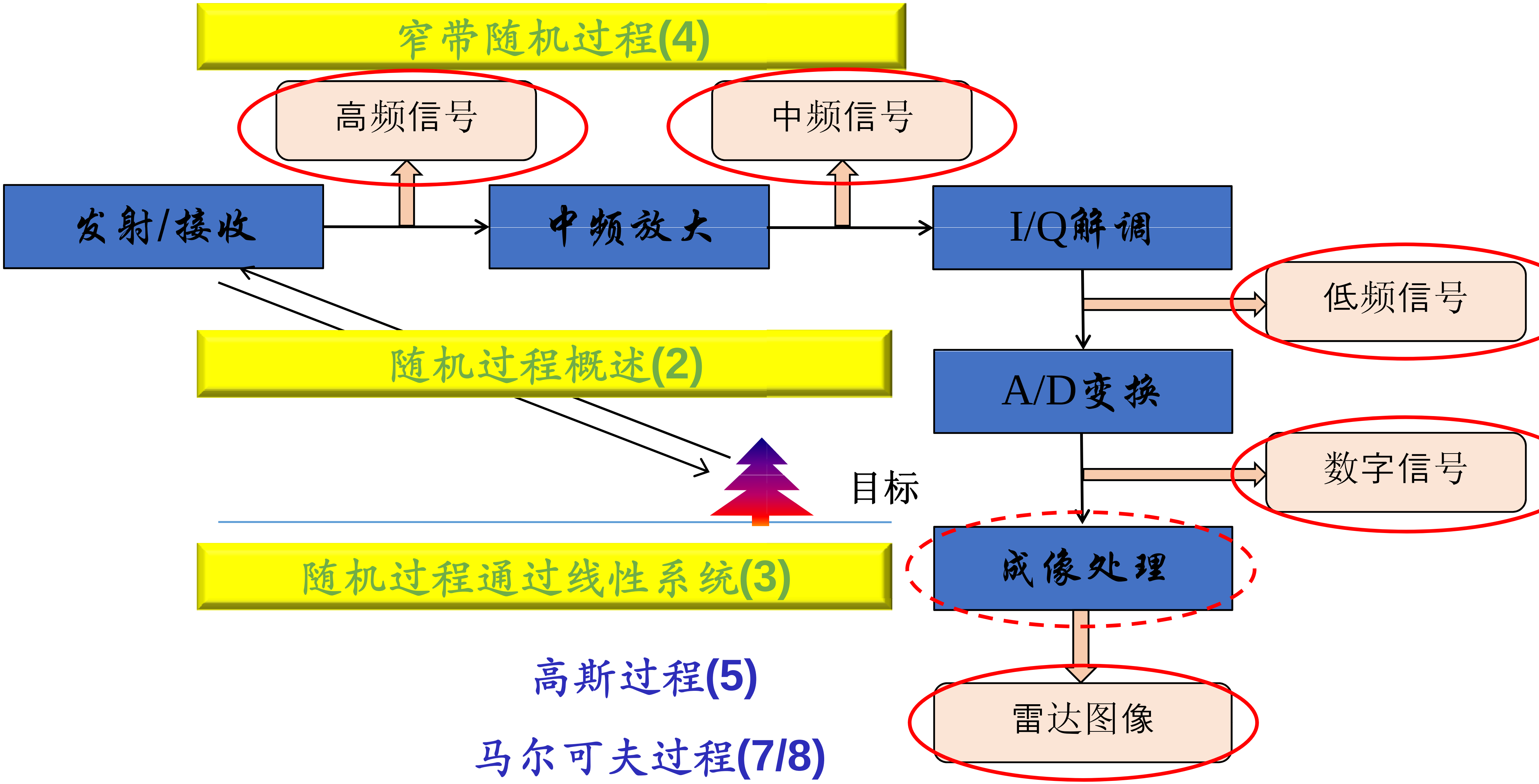
随机过程理论

Stochastic process theory

授课教师：李春升教授、徐华平教授

微波成像雷达获取与处理



第四章 窄带随机过程

Narrowband random process

目录

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

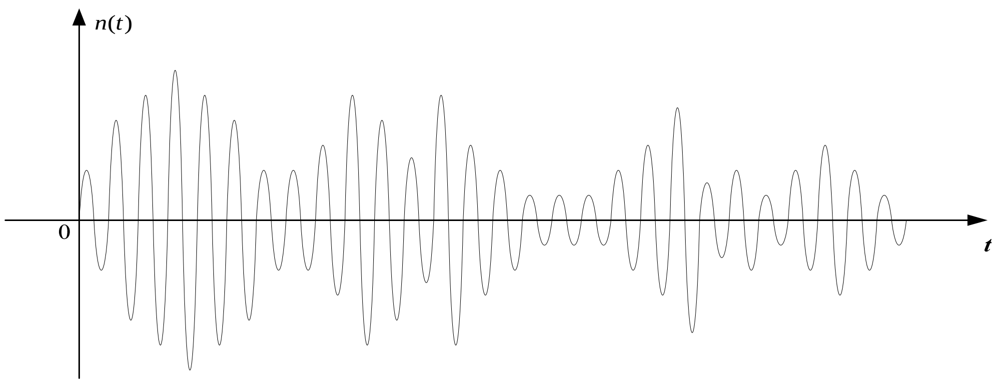
4.1 窄带随机过程的基本概念

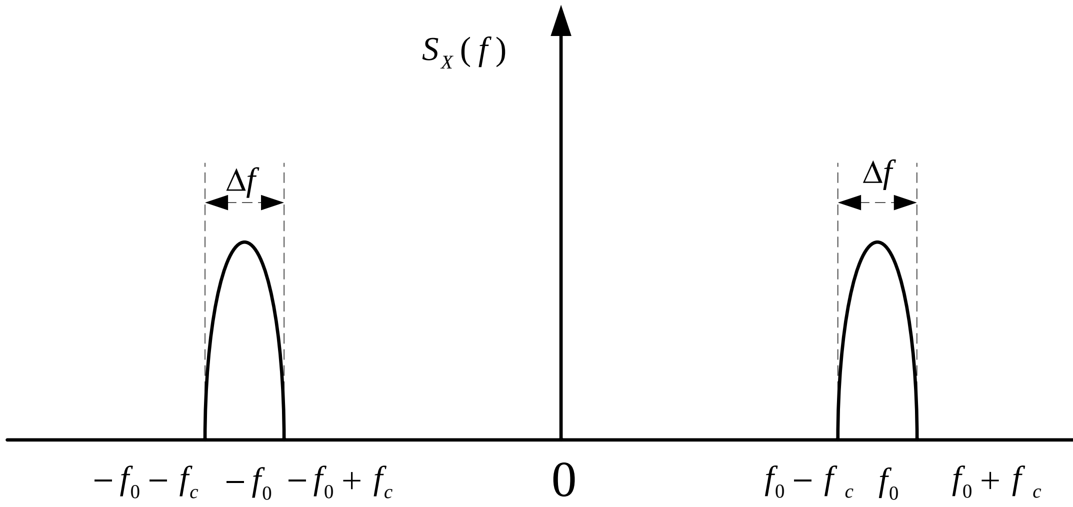
Basic concepts of narrowband random processes

4.1 窄带随机过程的基本概念

1、窄带过程的描述

$$B \ll f_0 (10倍以上)$$

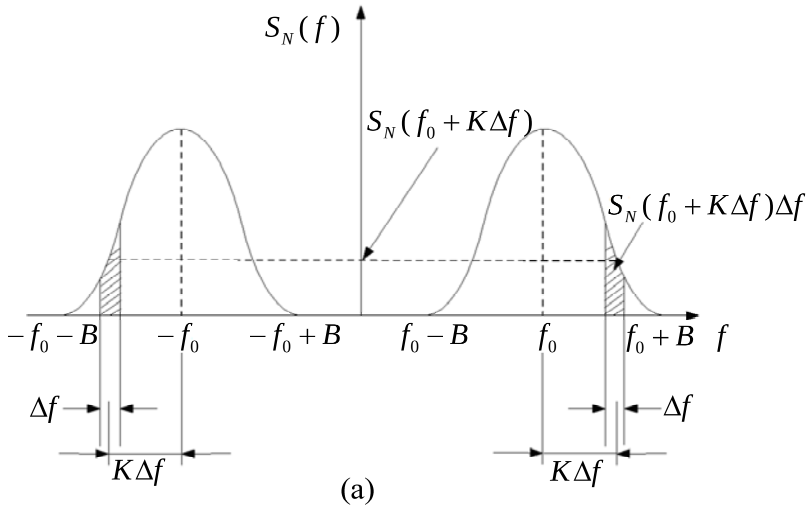




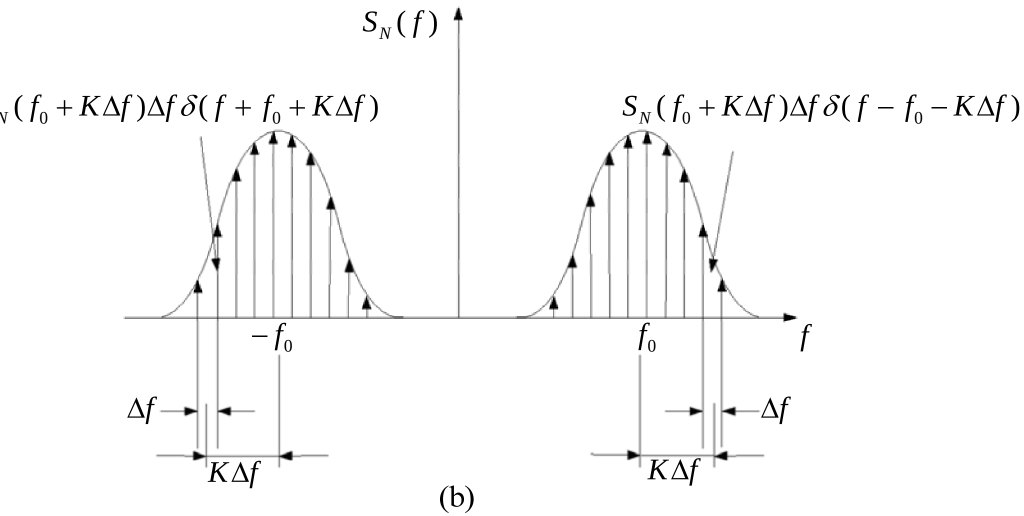
4.1 窄带随机过程的基本概念

1、窄带过程的描述

$$S_N(f)=\lim_{\Delta f\to 0}\sum_k S_N(f_0+k\cdot\Delta f)\cdot\left[\delta(f+f_0+k\cdot\Delta f)+\delta(f-f_0-k\cdot\Delta f)\right]\cdot\Delta f$$



(a)



(b)

$$\begin{cases} X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Theta) \\ S_X(f)=\dfrac{A^2}{2\times 2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \end{cases}$$

$$A_k=\sqrt{4S_N(f_0+k\cdot\Delta f)\Delta f}$$

$$n(t)=\lim_{\Delta f\to 0}\sum_k A_k\cos(2\pi(f_0+k\Delta f)t+\Theta_k)$$

$$=\lim_{\Delta f\to 0}\sum_k A_k\cos(2\pi k\Delta f t+\Theta_k)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$-\lim_{\Delta f\to 0}\sum_k A_k\sin(2\pi k\Delta f t+\Theta_k)\sin(2\pi f_0 t)$$

4.1 窄带随机过程的基本概念

1、窄带过程的描述

$$S_N(\omega)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k S_N(\omega_0+k\cdot\Delta\omega)\cdot\left[\delta(\omega+\omega_0+k\cdot\Delta\omega)+\delta(\omega-\omega_0-k\cdot\Delta\omega)\right]\cdot\Delta\omega$$

$$X(t)=A\cos[\omega_0 t+\Theta]\to R_X(\tau)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau$$

$$S_X(\omega)=A^2\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]/2$$

因此，窄带噪声表示成:

$$n(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cos[(\omega_0+k\Delta\omega)t+\Theta_k]$$

其中 $A_k=[\frac{2S_N(\omega_0+k\Delta\omega)\Delta\omega}{\pi}]^{1/2}$

4.1 窄带随机过程的基本概念

1、窄带过程的描述

$$n(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cos[(\omega_0+k\Delta\omega)t+\Theta_k]$$

展开为

$$n(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k[\cos(k\Delta\omega t+\Theta_k)\cos\omega_0 t-\sin(k\Delta\omega t+\Theta_k)\sin\omega_0 t]$$

$$=\boxed{n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t}$$

这里

$$\boxed{n_c(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cos(k\Delta\omega t+\Theta_k)} \longleftarrow \text{同相分量}$$

$$\boxed{n_s(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\sin(k\Delta\omega t+\Theta_k)} \longleftarrow \text{正交分量}$$

4.1 窄带随机过程的基本概念

1、窄带过程的描述

$$n_c(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cos(k\Delta\omega t+\Theta_k)$$

$$n_s(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\sin(k\Delta\omega t+\Theta_k)$$

显然有:

$$\sigma_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_N(\omega)d\omega=R_n(0)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k\frac{A_k^2}{2}$$

$$\sigma_{n_c}^2=\sigma_{n_s}^2=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k\frac{A_k^2}{2}=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k\frac{S(\omega_0+k\cdot\Delta\omega)}{\pi}\cdot\Delta\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_N(\omega)d\omega=R_n(0)$$

2、两正交分量 $n_c(t)$、$n_s(t)$ 的性质

- ✓ 具有低频特性
- ✓ $E[n_c(t)] = E[n_s(t)] = 0$
- ✓ $\sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2 = \sigma_n^2$
- ✓ $S_{n_c}(\omega) = S_{n_s}(\omega) = \begin{cases} S(\omega+\omega_0) + S(\omega-\omega_0) & |\omega| < B \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$
- ✓ $E[n_c(t)n_s(t)] = 0$

4.1 窄带随机过程的基本概念

2、两正交分量 $n_c(t)$、$n_s(t)$ 的性质

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t$$
$$= A(t)\cos\left[\omega_0 t + \Theta(t)\right]$$

$$\begin{cases} A(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} & \text{—— 瑞利分布} \\ \Theta(t) = \arctan\dfrac{n_s(t)}{n_c(t)} & \text{—— 均匀分布} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_c(t) = A(t)\cos\Theta(t) \\ n_s(t) = A(t)\sin\Theta(t) \end{cases}$$

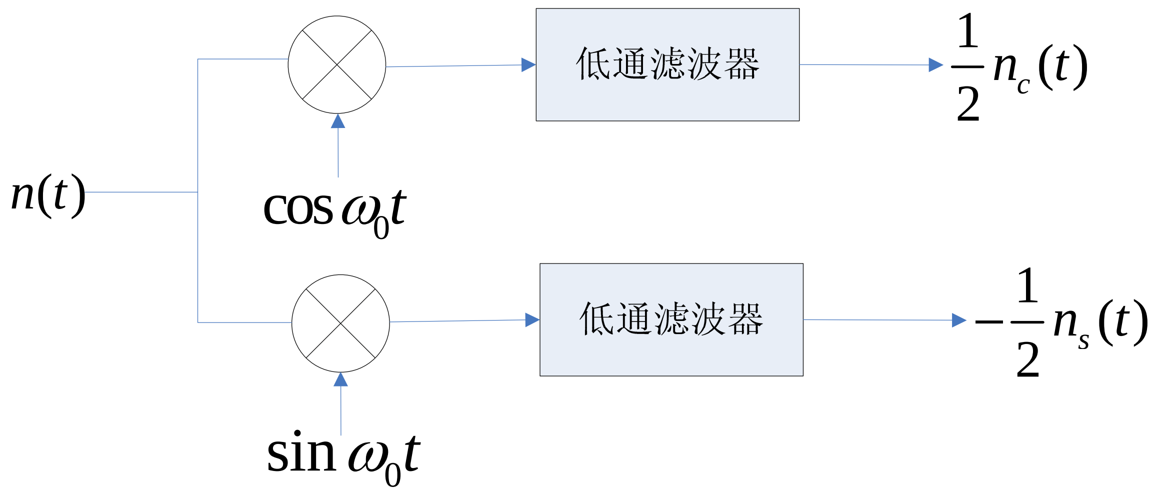
4.1 窄带随机过程的基本概念

2、两正交分量 $n_c(t)$、$n_s(t)$ 的性质

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t$$

同相分量 $n_c(t)$ 和正交分量 $n_s(t)$ 的获取

$$\begin{cases} L[n(t)\cos\omega_0 t]=\dfrac{1}{2}n_c(t) \\ L[n(t)\sin\omega_0 t]=-\dfrac{1}{2}n_s(t) \end{cases}$$



4.2 确定性信号的复表示

Complex representation of deterministic signals

4.2 确定性信号的复表示

1、余弦信号的复信号表示

$$s(t) = a\cos[\omega_0 t + \varphi] \qquad \hat{s}(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\tilde{s}(t) = a \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = a \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + j \cdot a \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

$\tilde{a} = ae^{j\varphi}$ 　则有

$$S(\omega) = \pi[\tilde{a}\delta(\omega - \omega_0) + \tilde{a}^*\delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\hat{S}(\omega) = -j\pi[\tilde{a}\delta(\omega - \omega_0) - \tilde{a}^*\delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\tilde{S}(\omega) = S(\omega) + j\hat{S}(\omega) = 2\pi\tilde{a}\delta(\omega - \omega_0) = \boxed{2S(\omega) \cdot U(\omega)} = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega > \\ 0 & \omega < \end{cases}$$

其频谱只在正频域存在，具有单边谱

4.2 确定性信号的复表示

2、高频窄带信号 $f_0 >> \Delta f$

$$s(t) = a(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$= \frac{1}{2}[\tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t} + \tilde{a}^*(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\tilde{a}(t) = a(t)\cdot e^{j\varphi(t)}$$

$$\tilde{s}(t) = a(t)e^{j[\omega_0 t+\phi(t)]} = \tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}$$

由 $\tilde{a}(t) \leftrightarrow \tilde{A}(\omega)$

则

$$S(\omega) = \frac{1}{2}[\tilde{A}(\omega-\omega_0) + \tilde{A}^*(-\omega-\omega_0)]$$

$$\tilde{S}(\omega) = \tilde{A}(\omega-\omega_0) = \boxed{2S(\omega)\cdot U(\omega)}$$

4.2 确定性信号的复表示

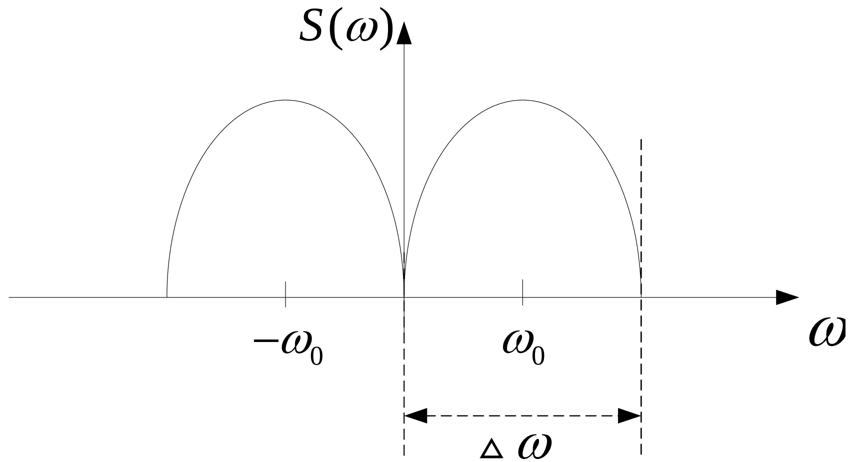
3、任意信号的复表示

设 $x(t)$ 为任意实信号，其复信号表达式为

$$\boxed{\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)}$$

其与实信号的频谱关系为

$$\boxed{\tilde{X}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)}$$



$$\omega_0 > \frac{1}{2}\Delta\omega$$

4.2 确定性信号的复表示

3、任意信号的复表示

$$\tilde{X}(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)$$

$$2U(\omega) \Leftrightarrow \delta(t) + \frac{1}{-j\pi t}$$

利用傅里叶变换的相乘性质，可得

$$\tilde{x}(t) = x(t) * [\delta(t) + \frac{j}{\pi t}]$$

$$= x(t) + jx(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}}$$

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases}$$

$\hat{x}(t)$ 的频谱为

$$\boxed{\hat{X}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) X(\omega)}$$

4.2 确定性信号的复表示

推荐一篇关于本部分内容的论文：

北京大学 程乾生 “希尔伯特变换与信号的包络、瞬时相位和瞬时频率”

4.3 希尔伯特变换

Hilbert transform

4.3 希尔伯特变换

✓ 好处：数据率不变，采样率减半

若在区间 $t \in R$ 中，给定实值函数 $x(t)$ ，则其复形式为

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$\hat{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的希尔伯特变换，有

$$\boxed{\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}}$$

则 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[\tilde{x}(t)] = 2X(\omega)U(\omega)$$

4.3 希尔伯特变换

✓ 希尔伯特正变换

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

✓ 希尔伯特反变换

$$x(t) * \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega)\ [-j\,\mathrm{sgn}(\omega)] = F[\hat{x}(t)]$$

$$\therefore\ X(\omega) = F[\hat{x}(t)]\ \frac{1}{-j\,\mathrm{sgn}(\omega)} = F[\hat{x}(t)]\ j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

可得， $x(t) = \hat{x}(t) * (-\frac{1}{\pi t})$

4.3 希尔伯特变换

✓ 希尔伯特变换性质

➢性质1 $\boxed{F[\hat{x}(t)] = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)}$

➢性质2 $\boxed{H[\hat{x}(t)] = -x(t)}$

➢性质3 若$y(t) = x(t) * v(t)$

则 $\hat{y}(t) = \hat{x}(t) * v(t) = x(t) * \hat{v}(t)$

4.3 希尔伯特变换

✓希尔伯特变换性质（续）

➢性质4　设实信号 $a(t)$ 傅里叶变换为 $A(\omega)$

$$A(\omega)=\begin{cases} A(\omega) & |\omega|\le B \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

则

$$\mathrm{H}[a(t)\cos\omega_c t]=a(t)\sin\omega_c t$$

$$\mathrm{H}[a(t)\sin\omega_c t]=-a(t)\cos\omega_c t$$

式中 $\omega_c > B$

4.3 希尔伯特变换

✓希尔伯特变换性质（续）

➢性质5

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\hat{x}^2(t)dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left|F(\omega,T)\right|^2 \qquad \left|F(\omega,T)\cdot[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)]\right|^2$$

➢性质6

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\hat{x}(t)dt=0$$

即 $x(t)$和$\hat{x}(t)$是正交的

4.4 复随机过程

Complex random process

1、复随机变量

✓定义　　如果X、Y为实随机变量，则Z=X+jY为复随机变量。

✓均值　　$$m_Z = E[Z] = E[X] + jE[Y] = m_X + jm_Y$$

✓方差

$$\begin{aligned} D(Z) &= E[(Z - m_Z)(Z - m_Z)^*] = E[|Z - m_Z|^2] \\ &= E\left\{ |(X - m_X) + j(Y - m_Y)|^2 \right\} \\ &= E[(X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2] \\ &= D[X] + D[Y] \\ &= E[|Z|^2] - |m_Z|^2 \end{aligned}$$

4.4 复随机过程

1、复随机变量

✓互相关 $E(Z_1 Z_2^*)$

✓协方差
$$C_{Z_1 Z_2} = \operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = E\left\{(Z_1 - m_{Z_1})(Z_2 - m_{Z_2})^*\right\} = E(Z_1 Z_2^*) - m_{Z_1} m_{Z_2}^*$$

4.4 复随机过程

1、复随机变量

✓正交 $$E(Z_1 Z_2^*) = 0$$

✓互不相关 $$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = E\left\{(Z_1 - m_{Z_1})(Z_2 - m_{Z_2})^*\right\}$$

$$= 0$$

或有 $$E[Z_1 Z_2^*] = E[Z_1]E[Z_2^*]$$

✓相互独立

$$f_{Z_1 Z_2}(x_1, y_1; x_2, y_2) = f_{Z_1}(x_1, y_1) f_{Z_2}(x_2, y_2)$$

2、复随机过程

设复随机过程为$Z(t)=X(t)+jY(t)$，

✓均值

$$\boxed{m_Z(t)=E[Z(t)]}=m_X(t)+jm_Y(t)$$

✓方差 $$\boxed{\sigma_Z{}^2(t)=E[|Z(t)-m_Z(t)|^2]}=\sigma_X{}^2(t)+\sigma_Y{}^2(t)$$

$$=E[|Z(t)|^2]-|m_Z(t)|^2$$

✓均方值 $$\boxed{\psi_Z{}^2(t)=E[|Z(t)|^2]=E[Z(t)Z^*(t)]}$$

2、复随机过程

✓自相关函数

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$
$$=E\{[X(t_1)+jY(t_1)][X(t_2)-jY(t_2)]\}$$
$$=R_X(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)+j[R_{YX}(t_1,t_2)-R_{XY}(t_1,t_2)]$$

✓自协方差函数

$$C_Z(t_1,t_2)=\mathrm{cov}[Z(t_1),Z(t_2)]$$
$$=E\{[Z(t_1)-m_Z(t_1)][Z(t_2)-m_Z(t_2)]^*\}$$
$$=E[Z(t_1)Z^*(t_2)]-m_Z(t_1)m_Z^*(t_2)$$

4.4 复随机过程

2、复随机过程

✓互不相关、正交、相互独立

✓广义平稳

$$E[|Z(t)|^2] < \infty$$

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = m_Z$$

$$R_Z(t, t-\tau) = R_Z(\tau)$$

$$= E[Z(t)Z^*(t-\tau)]$$

2、复随机过程

✓ R(τ)的性质

(1) $R_z(-\tau) = R_z^*(\tau)$

(2) $R_z(0) \geq 0$

(3) $\left|R_z(\tau)\right| \leq R_z(0)$

(4) R(τ)为非负定的

即 $$\sum_{i,j=1}^{n} R_i(\tau_i - \tau_j) z_i z_j^* \geq 0$$

4.4 复随机过程

3、实随机过程复表示

利用希尔伯特变换可以把实随机过程表示成复随机过程

即 $$\boxed{\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)}$$

✓若 $X(t)$ 为平稳过程，$R_X(\tau)$ 存在

$$R_{\hat{X}}(\tau) = E[\hat{X}(t)\hat{X}(t-\tau)]$$

$$= R_X(\tau)$$

4.4 复随机过程

3、实随机过程复表示

$$✓\ R_{\hat{X}X}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{1}{\pi\tau}=\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{-1}{\pi\tau}=-\hat{R}_X(\tau)$$

$$\because R_{X\hat{X}}(0)=-\hat{R}_X(0)\text{，}R_{\hat{X}X}(0)=\hat{R}_X(0)$$

$$\therefore \hat{R}_X(0)=-\hat{R}_X(0)=0$$

所以，实部，虚部在同一时刻是正交的

3、实随机过程复表示

✓ $$\begin{aligned} R_{\tilde{X}}(\tau) &= E\{[X(t)+j\hat{X}(t)][X(t-\tau)-j\hat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau)+R_{\hat{X}}(\tau)+j[R_{\hat{X}X}(\tau)-R_{X\hat{X}}(\tau)] \\ &= 2R_X(\tau)+j2\hat{R}_X(\tau) \end{aligned}$$

因为$R_X(\tau)$偶函数，$\hat{R}_X(\tau)$为奇函数，故有

$$R_{\tilde{X}}(-\tau)=2[R_X(\tau)-j\hat{R}_X(\tau)] = R_{\tilde{X}}^{*}(\tau)$$

3、实随机过程复表示

✓ $$F[\hat{R}_X(\tau)] = -j\,\mathrm{sgn}\,S_X(\omega)$$

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = 2S(\omega)[1+\mathrm{sgn}(\omega)]$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega < 0 \\ 2S_X(\omega) & \omega = 0 \\ 4S_X(\omega) & \omega > 0 \end{cases}$$

由于 $\Delta\omega \ll \omega_0$

$$\therefore S_{\tilde{X}}(\omega) = 4S_X(\omega)U(\omega)$$

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征

Numerical characteristics of real - time stationary random processes in narrow band

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征

窄带过程 $\omega_0 \gg B$

$$n(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$
$$= n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\sin\omega_0 t$$

$n_c(t) = A(t)\cos\phi(t)$ ， $n_s(t) = A(t)\sin\phi(t)$

$A(t) = \sqrt{n_c^{\,2}(t) + n_s^{\,2}(t)}$ ， $\phi(t) = \tan^{-1}\dfrac{n_s(t)}{n_c(t)}$

$$\hat{n}(t) = n_c(t)\sin\omega_0 t + n_s(t)\cos\omega_0 t$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_c(t) &= n(t)\cos\omega_0 t + \hat{n}(t)\sin\omega_0 t \\ n_s(t) &= \hat{n}(t)\cos\omega_0 t - n(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}}$$

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征

1、 $R_{n_c}(\tau)$和$R_{n_s}(\tau)$

$$R_{n_c}(\tau)=E\{[n(t)\cos\omega_0 t+\hat{n}(t)\sin\omega_0 t][n(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)$$

$$+\hat{n}(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}$$

$$=R_n(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+R_{\hat{n}}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)$$

$$+R_{n\hat{n}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)+R_{\hat{n}n}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)$$

$$\boxed{=R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau}$$

类似，可得 $\boxed{R_{n_s}(\tau)=R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau=R_{n_c}(\tau)}$

$$R_{n_s}(0)=R_{n_c}(0)=R_n(0)$$

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征

2、互相关函数 $R_{n_c n_s}(\tau)$

$$R_{n_c n_s}(\tau) = E[n_c(t)n_s(t-\tau)] = E\{[n(t)\cos\omega_0 t + \hat{n}(t)\sin\omega_0 t][\hat{n}(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)$$

$$-n(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}$$

$$= E[n(t)\hat{n}(t-\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)] - E[n(t)n(t-\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]$$

$$-E[\hat{n}(t)n(t-\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)] + E[\hat{n}(t)\hat{n}(t-\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)]$$

$$= -\hat{R}_n(\tau)[\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]$$

$$+R_n(\tau)[-\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + \sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)]$$

$$= R_n(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_n(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$$R_{n_s n_c}(\tau) = -R_n(\tau)\sin\omega_0\tau + \hat{R}_n(\tau)\cos\omega_0\tau = -R_{n_c n_s}(\tau) = R_{n_c n_s}(-\tau)$$

$$\boxed{R_{n_c n_s}(0) = 0}$$

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征

3、 $R_n(\tau)$

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t$$

$$\begin{aligned}
R_n(\tau)&=E[n(t)n(t-\tau)]=E\{[n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t]\\
&\quad[n_c(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau)-n_s(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\}\\
&=E[n_c(t)n_c(t-\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)]-E[n_c(t)n_s(t-\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)\\
&\quad-E[n_s(t)n_c(t-\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)]+E[n_s(t)n_s(t-\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]\\
&=R_{n_c}(\tau)[\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)+\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)]+\\
&\quad-R_{n_cn_s}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)-R_{n_sn_c}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau)\\
&\boxed{=R_{n_c}(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{n_cn_s}(\tau)\sin\omega_0\tau}
\end{aligned}$$

4、功率谱

$$S_{n_c}(\omega)=F[R_{n_c}(\tau)]=F[R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau]$$

$$=\begin{cases} S_n(\omega-\omega_0)+S_n(\omega+\omega_0) & |\omega|\le B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$S_{n_cn_s}(\tau)=F[R_{n_cn_s}(\tau)]=F[R_n(\tau)\sin\omega_0\tau-\hat{R}_n(\tau)\cos\omega_0\tau]$$

$$=\frac{1}{2j}[S_n(\omega-\omega_0)-S_n(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2}[j\,\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)S_n(\omega-\omega_0)+j\,\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)S_n(\omega+\omega_0)]$$

$$=\begin{cases} -j[S_n(\omega-\omega_0)-S_n(\omega+\omega_0)] & |\omega|\le B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

作业

- 4.5，4.6，4.7，4.8
- 4.9，4.11，4.13，4.19，4.22