随机过程理论

习题课

泊松随机过程

- 计数过程：在时间[0,∞]内出现时间A的总数所组成的过程{N(t),t≥0}称为计数过程。对于任一个计数过程，满足以下条件：N(t)是一个非负整数；N(0)=0;时间s<t,则N(t)≥N(s)； N(t)-N(s)代表时间[s,t]内事件A发生的次数。
- 独立增量过程： [s,t]内事件发生的次数N(t)-N(s)，与[s+Δt，t+ Δt]内事件发生的次数N(t +Δt)-N(s +Δt)相互统计独立；
- **平稳增量计数过程**：在[t，t+ Δt]内出现事件A的次数仅和时间差有关，与时间起点无关。
- 泊松计数过程：零初始值性；平稳增量；独立增量；单跳跃性；随机性
- 泊松过程的定理：随机过程{N（t），t≥0}位泊松过程，则在时间间隔[t0，t0+t]事件A出现k次的概率为 $P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad k=0,1,2,\cdots$

泊松随机过程

- **统计特性：**

$$E[N(t_0+t,t_0)]=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k(t_0+t,t_0)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}=\lambda t e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda t$$

$$D[N(t_0+t,t_0)]=E[N^2(t_0+t,t_0)]-\{E[N(t_0+t,t_0)]\}^2=\lambda t$$

$$R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$$

- **泊松脉冲序列统计特性：** $X(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)=\sum_i\delta(t-t_i)$

$$E[X(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[N(t)]=\lambda$$

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_N(t_1,t_2)$$

$$R_X(t_1,t_2)=\lambda^2\qquad t_1\neq t_2$$

泊松随机过程

- **到达时间：观测区间中出现第k个事件的发生时刻tk 为第k个事件的到达时间**

- **到达时间的分布函数：** $F_{T_k}(t)=P(T_k\leqslant t)$

$$P(T_k\leqslant t)=P[N(t)>k-1]=1-P[N(t)\leqslant k-1]$$

$$P[N(t)=j]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

$$F_{N(t)}(k-1)=\sum_{j=0}^{k-1}P[N(t)=j]=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

$$F_{T_k}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases},\quad k\geqslant 1$$

求导

$$f_{T_k}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t\geqslant 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$E[T_k]=\frac{k}{\lambda}\qquad D[T_k]=\frac{k}{\lambda^2}$$

伽马分布

$$P(Z_k>z)=1-P(Z_k\leqslant z)=1-F_{Z_k}(z)$$

- **到达时间间隔：逐次到达的时间长度** $[Z_k>z]=[(T_k-t_{k-1})>z]=[T_k>T_{k-1}+z]$

$$F_{Z_k}=1-P\{N(z)=0\}$$

$$[T_k>T_{k-1}+z\mid T_{k-1}=t_{k-1}]=[N(t_{k-1}+z)-N(t_{k-1})=0]$$

$$P[N(z)=0]=\frac{e^{-\lambda z}(\lambda z)^0}{0!}=e^{-\lambda z}\qquad z\geqslant 0$$

$$F_{Z_k(z)}=1-P[N(z)=0]\qquad k=1,2,3,\cdots$$

$$F_{Z_k(z)}=\begin{cases}1-e^{-\lambda z}, & z\geqslant 0\\ 0, & 其他\end{cases},\quad k=1,2,3,\cdots$$

$$f_{Z_k}(z)=\lambda e^{-\lambda z}$$

负指数分布

泊松随机过程

- **到达时间条件分布：[0,t]内有一个事件A发生情况下到达时间的分布**

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 < s \mid N(t) = 1\} &= \frac{P\{T_1 < s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}} \\
&= \frac{P\{\text{在}[0,s)\text{内出现事件 A 一次，在}[s,t)\text{内不出现事件 A}\}}{P\{N(t) = 1\}} \\
&= \frac{P\{\text{在}[0,s)\text{内出现事件 A 一次}\}P\{\text{在}[s,t)\text{内不出现事件 A}\}}{P\{N(t) = 1\}} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

均匀分布

- **更新计数过程：由到达时间间隔确定更新计数随机变量的概率分布函数**
- **复合泊松过程：N(t)泊松过程，Y(n)独立同分布，** $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \quad t \geq 0$
- **非齐次泊松过程：零初值性；独立增量过程；单跳跃性；随机性；（平稳增量X）**

泊松随机过程

6.1 泊松分布 $P\{X(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad k=1,2,\cdots$

特征函数 $\phi_X(v)=E\left[e^{jvX(t)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}\cdot\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\lambda t\cdot e^{jv}\right)^k}{k!}$

$$=e^{-\lambda t}e^{\lambda t e^{jv}}=e^{\lambda t\left(e^{jv}-1\right)}$$

$$P\{X(t_1)=m,X(t_2)=m+n\}=P\{X(t_1)=m,X(t_2)-X(t_1)=n\}$$

$$=e^{-\lambda t_1}\cdot\frac{(\lambda t_1)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n t_1^m}{m!n!}$$

6.3：1. (1)特征函数法；（2）直接求。（相互独立的随机变量之和的特征函数等于各自特征函数之积）

2. (1)特征函数法；（2） 数字特征；（3）定义法 泊松过程≥0，而X(t1)-X(t2)≥0，不一定成立。

泊松随机过程

6.4

$$P\{Y(t+\Delta t)-Y(t)=k\}=\frac{(\lambda_Y \Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda_Y \Delta t}$$

X(t)第k个事件到达时间的概率密度函数：

$$f_{T_k}(\Delta t)=\lambda_X e^{-\lambda_x \Delta t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

X(t)不同事件到达时间间隔的概率密度函数：

$$f_T(\Delta t)=\lambda_X e^{-\lambda_x \Delta t}$$

所以：

$$P=\int_0^{\infty}(P\{Y(t+\Delta t)-Y(t)=k\})f_T(\Delta t)d\Delta t$$

泊松随机过程

6.13：服从lambda=1/3的泊松过程

（1） $P[N(t)=k]=\dfrac{(\frac{1}{3}t)^k}{k!}e^{-\frac{1}{3}t} \quad k=0,1,2,\cdots$

（2） $E[N(t)]=\dfrac{1}{3}t$

（3） $P\{Y(t)=k\}=\dfrac{(\frac{1}{9}t)^k}{k!}e^{-\frac{1}{9}t} \quad k=0,1,2,\cdots$

6.15：服从lambda=2的泊松过程

马尔可夫

状态空间
$S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

随机序列$\{X_n,n\in N^+\}$

过去　　现在　　未来

$X_1=a_{i_1}$　$X_2=a_{i_2}$　$X_3=a_{i_3}$　…　$X_{n-1}=a_{i_{n-1}}$　$X_n=a_{i_n}$

时刻

$$P\{\underbrace{X_n=a_{i_n}}_{\text{未来}}\,|\,\underbrace{X_{n-1}=a_{i_{n-1}}}_{\text{现在}},\underbrace{X_{n-2}=a_{i_{n-2}},\dots,X_1=a_{i_1}}_{\text{过去}}\}$$

$$=P\{\underbrace{X_n=a_{i_n}}_{\text{未来}}\,|\,\underbrace{X_{n-1}=a_{i_{n-1}}}_{\text{现在}}\}$$

化繁为简：降维

未来时刻状态只与当前时刻状态有关，而与过去时刻状态无关

马尔可夫

- **马尔可夫链**

设$\{X_n, n \in N^+\}$为一随机序列，时间参数集$N^+ = \{0,1,2,\cdots\}$，其状态空间$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，若对所有的$n \in N^+$，有

$$P\{X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}, X_{n-2} = a_{i_{n-2}}, \ldots, X_1 = a_{i_1}\} =$$

$$P\{X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}\}$$

则称$\{X_n, n \in N^+\}$为马尔可夫链。

马尔可夫过程 $\xrightarrow[\text{状态离散}]{\text{时间离散}}$ 马尔可夫链

马尔可夫

转移概率

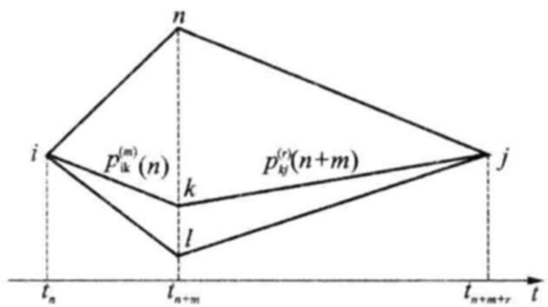
$$p_{ij}(m,n)=P\{X_n=a_j \mid X_m=a_i\}=P\{X_n=j \mid X_m=i\} \qquad i,j\in S$$

齐次马尔可夫链：与时刻m无关

$$p_{ij}(m)=P\{X_{m+1}=j \mid X_m=i\}=p_{ij} \quad i,j\in S$$

转移矩阵

$$\mathbf{P}=\{p_{ij},i,j\in S\}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NM} \end{bmatrix}$$



C-K方程

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)\,p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad i,j\in S$$

$$\mathbf{P}^{(m)}=\{p_{ij}^{(m)},i,j\in S\}$$

$$\mathbf{P}^{(m+r)}=\mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(r)}$$

马尔可夫

首次进入时间和状态分类

$$T_{ij}(\omega) \triangleq \min\{n : X_0(\omega) = i, X_n(\omega) = j, n \geq 1\}$$

状态i迟早到状态j的概率

$$f_{ij} \triangleq \sum_{1 \leqslant n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \leqslant n < \infty} P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\} = P\{T_{ij} < \infty\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\{T_{ij} = \infty\} = 1 - f_{ij}$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

马尔可夫

状态可达、相通、常返、非常返

$f_{ii}=1$ ⟹ 状态i常返

$f_{ii}<1$ ⟹ 状态i非常返，滑过的

令条件数学期望：

$$\mu_{ij} \triangleq E\{T_{ij} \mid X_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

μ_{ij} 是从状态 i 出发，首次到达状态 j 的平均转移步数（时间）。

定义：对于常返态 $i\in S$，若 $\mu_i<+\infty$，则称状态 i 是正常返的；否则，若 $\mu_i=\infty$，则称状态 i 是零常返的。

$$\text{状态}\begin{cases}\text{非常返态}\\ \text{常返态}\begin{cases}\text{零常返态}\\ \text{正常返态}\begin{cases}\text{有周期}\\ \text{非周期（遍历态）}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

（1） 状态 $i\in S$ 是常返的（$f_{ii}=1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$。

（2） 状态 $i\in S$ 是非常返的（$f_{ii}<1$）$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\dfrac{1}{1-f_{ii}}<\infty$。

（3） 如果 $j\in S$ 是非常返的，则对 $\forall i\in S$，有 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}<\infty$；$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$。

（4） 设 $i\leftrightarrow j$，则 i 和 j 或者都是正常返的，或者都是非常返的，或者都是零常返的。

马尔可夫

遍历性：对一切状态，存在不依赖i的常数 π_j 使得：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \qquad \sum_j \pi_j = 1$$

平稳性：概率分布满足方程： $p_j = \sum_i p_i p_{ij}$

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_n]$$

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{N\times N}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

马尔可夫

7.1

$$P\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \ldots, Y_1 = y_1\}$$

$$= \frac{P\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \ldots, Y_1 = y_1\}}{P\{Y_{n-1} = y_{n-1}, \ldots, Y_1 = y_1\}}$$

$$= \frac{P\{X_n = y_n - y_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1\}}{P\{X_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}, \ldots, X_1 = x_1\}}$$

$$= P\{X_n = y_n - y_{n-1}\}$$

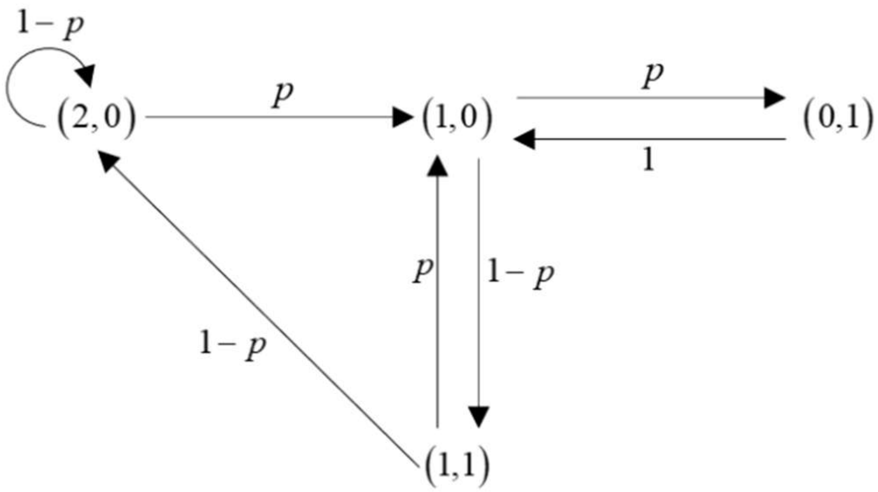
$$= P\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}\}$$

7.4

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ p & 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

马尔可夫

7.9



$i \backslash j$	(2,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
(2,0)	$1-p$	p	0	0
(1,0)	0	0	$1-p$	p
(1,1)	$1-p$	p	0	0
(0,1)	0	1	0	0

$$p_j = \sum_i p_i p_{ij} \qquad \sum_j p_j = 1$$