随机过程理论

Stochastic process theory

授课教师：李春升教授　徐华平教授

第一章 概率与随机变量

Probability and random variable

目录

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

1.1 随机事件及其概率

Random event and its probability

概率论的内容——研究的架构和思路

概率论学了什么？

引论

- 什么是随机现象

不确定的、偶然的、不可预见的；未知的、复杂的

- 代数的研究思路

事件（数值）、变量、函数

- 随机数学的研究思路

随机事件（概率）、随机变量、随机过程（关系图）

为什么引入概率？

1. 从起源说起

初始值不确定；

驱动因素不确定；

没有足够的计算能力

2. 从逻辑推理说起—数据不够

节目是中国好声音=》周五晚上首播

几个问题

1. 概率的定义？含义？
2. 由概率延伸得到的其他描述统计特性的物理量？
3. 实际中如何得到概率？
4. 概率是确定的？随机的？（频率统计学派、贝叶斯学派）

1.1 随机事件及其概率

1、随机事件及其关系

- ✓ 什么是随机实验?
- ✓ 什么是随机事件?
- ✓ 样本空间
- ✓ 事件的基本关系
- ✓ 集合论的概念来研究

2、事件的概率

- ✓ 古典概率
- ✓ 几何概率
- ✓ 统计概率
- ✓ 公理化体系化的概率

3、几个公式

✓条件概率

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

✓乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n \mid A_{n-1} \cdots A_1) \cdot P(A_{n-1} \mid A_{n-2} \cdots A_1) \cdots P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

✓全概率公式

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \quad P(S) = 1 \quad A_i A_j = \varnothing \quad i \neq j \quad P(A_i A_j) = 0$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

1.1 随机事件及其概率

✓贝叶斯公式

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

✓事件的独立性

$$A_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$i_k \qquad k=1,2,\cdots,s \qquad 1\le i_1<i_2<\cdots<i_s\le n$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

思考

◆经典概率问题

1、三门问题（蒙蒂 霍尔问题）

问题出自美国的电视游戏节目Let’s Make a Deal。参赛者会看见三扇关闭了的门，其中一扇的后面有一辆汽车，选中后面有车的那扇门可赢得该汽车，另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，节目主持人开启剩下两扇门的其中一扇，露出其中一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。问题是：换另一扇门会否增加参赛者赢得汽车的机会率？

思考

◆经典概率问题

如果严格按照上述的条件，即主持人清楚地知道，哪扇门后是羊，那么答案是会。设门后有汽车的事件分别为A1、A2、A3；主持人打开门分别为B1、B2、B3。利用贝叶斯公式，不换门的话，赢得汽车的几率是1/3。换门的话，赢得汽车的几率是2/3。

思考

◆经典概率问题

2、监狱看守悖论

A、B、C被关在一个监狱，三人中会有1人被判处死刑，另两人获释，监狱看守是唯一知道谁会被判处死刑。A想给家人写封信，拜托看守交给获释的人传递。看守很为难，担心影响A的心情，请问A的处死概率会因为知道另两个人中的一人获释而改变吗？

思考

◆经典概率问题

3、辛普森悖论

一个大学中每个系的女生招收率均大于男生，那么这个大学的女生招收率一定大于男生吗？

	女			男		
	申请	招收	比率%	申请	招收	比率%
1	50	20	40	30	10	33
2	40	30	75	70	50	71
全校	90	50	25/45	100	60	27/45

思考

◆赌资分配问题

1、分赌本问题（德.梅尔问题）：甲、乙两赌徒赌技相同，各出赌注50法郎每局中无平局。他们约定，谁先赢三局则得到全部100法郎的赌本。当甲赢了两局，乙赢了一局时，因故要中止赌博。这100法郎如何分才算公平

◆赌徒输光问题

2、甲乙两人赌博，甲赢，则乙给甲1元；乙赢，则甲给乙1元。甲、乙赌资分别为a和b，甲赢的概率为q。

3、圣彼得堡问题：甲乙两人赌博，甲掷一枚硬币到掷出正面为一局。若甲掷一次出现正面，则乙付给甲2元，游戏结束；若甲第一次掷得反面，第二次掷得正面，乙付给甲4元，游戏结束。一般地，若甲前n－1次掷得反面，第n次掷得正面，则乙需付给甲2^n元，游戏结束。问在赌博开始前甲应付给乙多少钱才有权参加赌博而不致亏损乙方？

1.2 随机变量及其分布函数

Random variable and its distribution function

1.2 随机变量及分布函数

一维分布

二维分布

边沿分布

条件分布

多维分布

随机变量的独立性

1.2 随机变量及分布函数

✓一维分布

◆ 分布函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

◆离散型(概率)

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

◆连续型(概率密度)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

1.2 随机变量及分布函数

一维分布

二维分布

边沿分布

条件分布

多维分布

随机变量的独立性

1.2 随机变量及分布函数

✓二维分布

◆连续型(概率密度)

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

◆离散型(概率)

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_j)$$

1.2 随机变量及分布函数

一维分布

二维分布

边沿分布

条件分布

多维分布

随机变量的独立性

1.2 随机变量及分布函数

✓边沿分布

$$F_X(x) = F(x, \infty) = P(X \leq x)$$

◆连续型(概率密度)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

◆离散型(概率分布)

$$P(X = x_i) = \sum_{y_j} P(X = x_i, Y = y_j)$$

1.2 随机变量及分布函数

一维分布

二维分布

边沿分布

条件分布

多维分布

随机变量的独立性

1.2 随机变量及分布函数

✓条件分布

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

✓多维分布

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) ds_1 ds_2 \cdots ds_n$$

1.2 随机变量及分布函数

一维分布

二维分布

边沿分布

条件分布

多维分布

随机变量的独立性

1.2 随机变量及分布函数

✓随机变量的独立性

设n维随机变量中，在 $X_{k+1},\cdots,X_n$ 的取值为 $x_{k+1},\cdots,x_n$ 的条件下，

$X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的条件概率密度函数为

$$f(x_1,\cdots x_k \mid x_{k+1},\cdots x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{f(x_{k+1},\cdots x_n)}$$

由上式还可得出

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2\mid x_1)f(x_3\mid x_1,x_2)\cdots f(x_n\mid x_1,x_2,\cdots x_{n-1})$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)$$

1.3 随机变量的数字特征

The numerical characteristics of random variable

1.3 随机变量的数字特征

◆ “分赌本问题”到数学期望

期望——惠更斯（与帕斯卡同期的数学家）

◆ 其他数字特征的引入

矩，切比雪夫不等式——别奈梅（**1833**，法国数学家）

标准差——皮尔逊（**1894**，英国、现代数理统计创始人）

相关系数——高尔顿（**1889**，英国生物统计学家）

条件概率与条件期望——柯尔莫哥洛夫（**1933**，苏联）

1.3 随机变量的数字特征

✓数学期望

◆离散随机变量的数学期望

$$E[X]=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i \qquad \sum_{i=1}^{k} |x_i| p_i < \infty$$

◆连续随机变量的数学期望

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < \infty$$

◆随机变量函数的数学期望 $Y=g(X)$

$$E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)dx < \infty$$

◆条件数学期望

$$E[Y \mid X]$$

1.3 随机变量的数字特征

✓均值

◆离散随机变量的均值

$$m_X = E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i \qquad \sum_{i=1}^{k} |x_i| p_i < \infty$$

◆连续随机变量的均值

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

1.3 随机变量的数字特征

✓方差

◆随机变量的方差

$$D[X]=E\{[X-E(X)]^2\}=E[X^2]-[E(X)]^2$$

◆随机变量函数的方差

$$Y=g(X) \qquad D[Y]=D[g(X)]=E\{[g(X)-E[g(X)]]^2\}$$

1.3 随机变量的数字特征

✓协方差

◆协方差定义

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$$

◆协方差矩阵

$$C_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ii} = \sigma_{X_i}^2 \qquad C_{ij} = C_{ji}$$

1.3 随机变量的数字特征

✓相关系数

◆定义式

$$r_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}}$$

由柯西—许瓦兹不等式 $[E(VW)]^2 \le E[V^2]E[W^2]$ 得 $|r_{ij}| \le 1$

➢正交 $E(X_i X_j) = 0 \quad i \ne j$

➢相互独立 $f(x_i, x_j) = f_{X_i}(x_i) \cdot f_{X_j}(x_j)$

$\Downarrow$

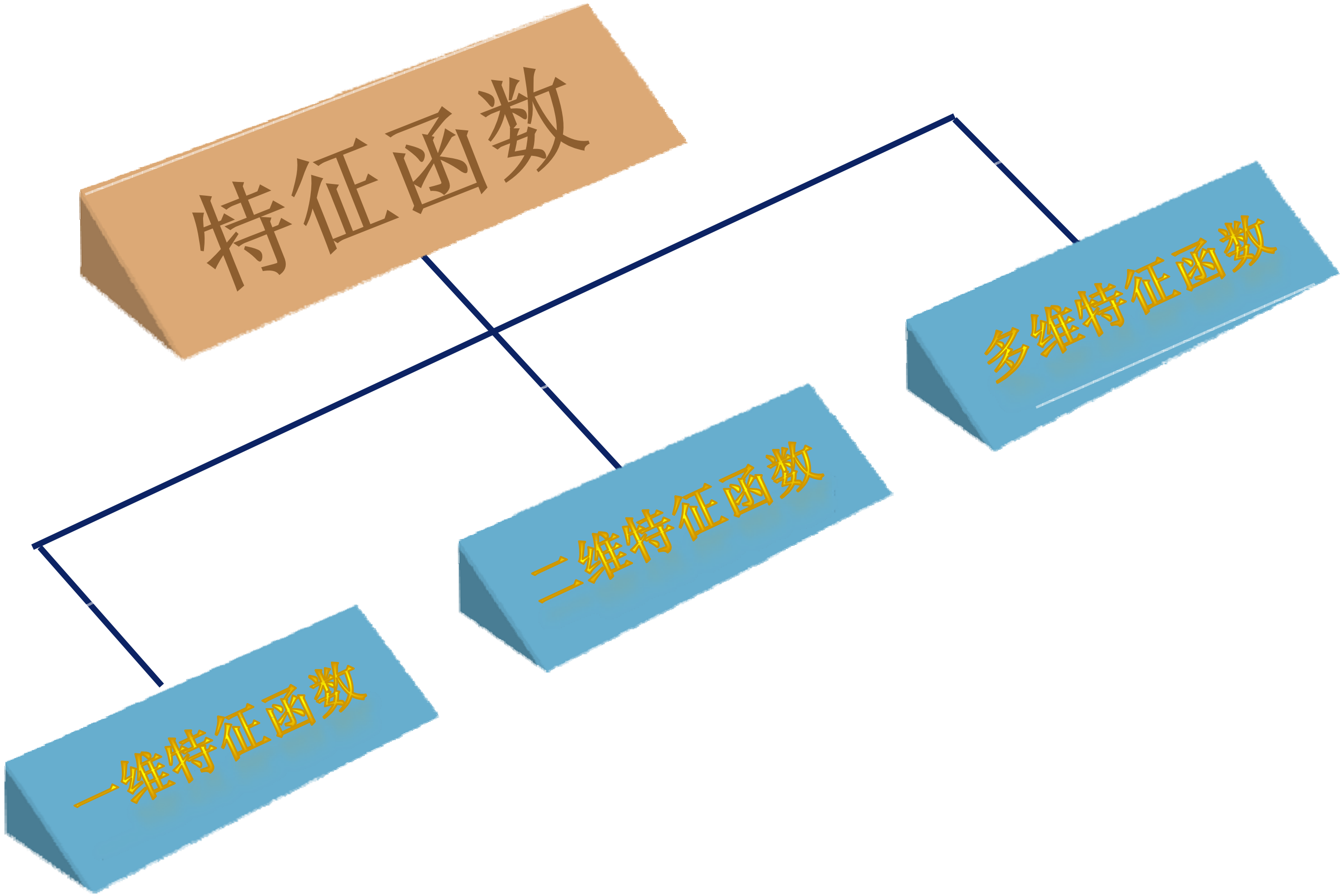
➢互不相关 $C_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$

1.4 特征函数

Eigenfunction

1.4 特征函数

✓特征函数——描写随机变量统计规律的工具



1.4 特征函数

✓一维特征函数定义

$$\phi(v)=E[e^{jvX}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jvx}dF(x)$$

◆离散随机变量

$$\phi(v)=E[e^{jvX}]=\sum_{k=1}^{\infty}e^{jvx_k}p_k$$

◆连续随机变量

$$\phi(v)=E[e^{jvX}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jvx}f(x)dx$$

◆概率密度函数与特征函数之间的关系

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(v)e^{-jvx}dv$$

1.4 特征函数

✓一维特征函数性质

$$|\phi(v)| \le \phi(0) = 1$$

$$\phi_Y(v) = e^{jvb}\phi_X(av) \qquad Y = aX + b \quad a,b\text{为常数}$$

$$\phi_Y(v) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(v) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[X^k] = j^{-k}\phi^{(k)}(0)$$

1.4 特征函数

✓二维特征函数

$$\phi(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1x_1+v_2x_2)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(v_1, v_2)e^{-j(v_1x_1+v_2x_2)}dv_1dv_2$$

1.4 特征函数

✓ 多维特征函数

$$\phi(v_1,v_2,\cdots,v_n)=E\{\exp[j\sum_{k=1}^{n}v_kX_k]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_nx_n)}dF(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j\sum_{k=1}^{n}v_kx_k)\cdot\phi(v_1,v_2,\cdots,v_n)dv_1dv_2\cdots dv_n$$

矩阵形式:

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\exp(-j\mathbf{v}^T\mathbf{x})\phi(\mathbf{v})d\mathbf{v}$$

作业

- 1.2 -1.3， 1.7， 1.13
- 1.18， 1.36