随机过程理论

Stochastic process theory

授课教师：李春升教授、徐华平教授

第三章 随机过程的线性变换

Linear transformation of random process

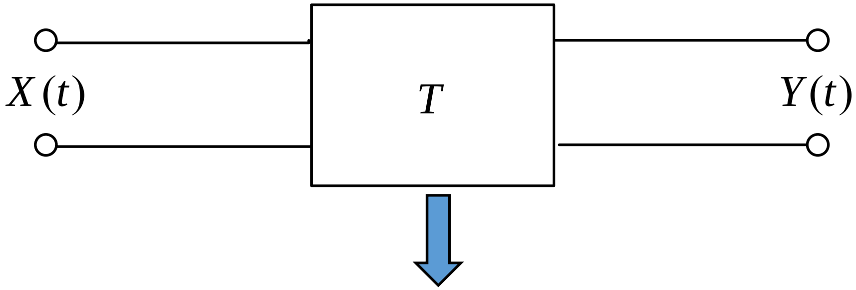
目录

3.1 随机过程变换的基本概念

The basic concepts of random process trasformation

3.1 随机过程变换的基本概念

1、系统的描述



$$Y(t) = T\{X(t)\}$$

2、系统的性质

- 线性系统

$$y(t) = L\left[x(t)\right]$$

3.1 随机过程变换的基本概念

2、系统的性质

➢ 线性

✓叠加性

$$L[\sum_{i=0}^{n} x_i(t)] = \sum_{i=0}^{n} L[x_i(t)]$$

✓比例性

$$L[kx(t)] = kL[x(t)]$$

➢时不变性

$$y(t+\tau) = L[x(t+\tau)]$$

➢随机性与确定性

随机系统与确定性系统

$$a_n Y^{(n)}(t) + a_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 Y(t) = b_m X^{(m)}(t) + a_{m-1} X^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 X(t)$$

3.1 随机过程变换的基本概念

3、确定性输入信号的分析方法

➤ 冲激响应—〉传递函数

$$
\begin{aligned}
y(t) &= L\left[x(t)\right] = L\left[\int x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda\right] \\
&= \int x(\lambda)L\left[\delta(t-\lambda)\right]d\lambda \qquad \text{线性} \\
&= \int x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \qquad \text{时不变性} \\
&= x(t)\otimes h(t)
\end{aligned}
$$

⇩

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

3.1 随机过程变换的基本概念

3、确定性输入信号的分析方法

➢频率响应—〉传递函数

$$
\begin{aligned}
y(t)=L\left[x(t)\right]&=L\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_k X(\omega_k)\Delta\omega_k e^{j\omega_k t}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_k X(\omega_k)\Delta\omega_k L\left[e^{j\omega t}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_k X(\omega_k)\Delta\omega_k H(j\omega_k)e^{j\omega_k t}\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}dt
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=h(t)\otimes x(t)$$

例

已知

$$Y(t) = X(t-T) - 2 \cdot X(t) + X(t+T)$$

求频率响应函数

3.2 均方微积分

Mean-square calculus

3.2 均方微积分

1、随机序列的极限及性质

➢常规极限（依概率收敛）

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} X$$

➢均方极限

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\left|X_n - X\right|^2\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X$$

$$P\left\{\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{E\left\{\left|X_n - X\right|^2\right\}}{\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad \text{均方收敛必定常规收敛}$$

➢性质

3.2 均方微积分

2、随机过程的极限

- 常规极限

$$\lim_{t\to t_0} P\left\{\left|X(t)-X\right|>\varepsilon\right\}=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to t_0} X(t)\overset{P}{=}X$$

- 均方极限

$$\lim_{t\to t_0} E\left\{\left|X(t)-X\right|^2\right\}=0 \quad \Rightarrow \quad \underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t)=X$$

3.2 均方微积分

3、随机过程的均方连续性

➢ 定义

$$\lim_{\Delta t\to 0} E\left\{\left|X(t+\Delta t)-X(t)\right|^2\right\}=0 \;/\; \underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t+\Delta t)=X(t)$$

➢ 条件 $R_X(t_1,t_2)$ 在 $t=t_1=t_2$ 处连续 ⟺ $X(t)$ 均方连续

平稳过程 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处连续 ⟺ $X(t)$ 均方连续

➢ 性质

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0} E\left[X(t+\Delta t)\right]=E\left[\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t+\Delta t)\right]}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} m_X(t+\Delta t)=m_X(t)$$

3.2 均方微积分

4、随机过程的均方微分

- 均方导数的定义

$$\dot{X}(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

或

$$\lim_{\Delta t\to 0} E\left\{\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-\dot{X}(t)\right|^2\right\}=0$$

- 条件　　$R_X(t_1,t_2)$在 $t=t_1=t_2$ 二阶偏导存在 ⟺ $X(t)$均方可微

<u>**平稳过程**</u>　　$R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 二阶导数存在 ⟺ $X(t)$均方可微

4、随机过程的均方微分

➢ 均值

$$m_Y(t)=E\left[\dot{X}(t)\right]=E\left[\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_X(t+\Delta t)-m_X(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}m_X(t)}{\mathrm{d}t}$$

平稳过程

$$m_Y(t)=0$$

3.2 均方微积分

4、随机过程的均方微分

➢ 相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=E\left[X(t_1)\underset{\Delta t_2\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t_2+\Delta t_2)-X(t_2)}{\Delta t_2}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{1}{\Delta t_2}E\left[X(t_1)X(t_2+\Delta t_2)-X(t_1)X(t_2)\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{1}{\Delta t_2}\left[R_X(t_1,t_2+\Delta t_2)-R_X(t_1,t_2)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_2}R_X(t_1,t_2)$$

同理

$$R_{YX}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}R_X(t_1,t_2)$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_X(t_1,t_2)$$

4、随机过程的均方微分

➢ 相关函数

平稳过程

$$R_{XY}(\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} R_X(\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} R_X(\tau)$$

$X(t)$与$Y(t)$正交,互不相关

$$R_{XY}(\tau)\Big|_{\tau=0} = -R_{YX}(\tau)\Big|_{\tau=0} = 0$$

$$R_Y(\tau) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} R_X(\tau)$$

4、随机过程的均方微分

- 功率谱密度

$$R_Y(\tau) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} R_X(\tau)$$

$\Big\Downarrow$ 傅立叶变换的性质

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\boxed{= -(j\omega)^2 S_X(\omega) = \omega^2 S_X(\omega)}$$

同理 $\boxed{S_{XY}(\omega) = -j\omega S_X(\omega)}$ $\boxed{S_{YX}(\omega) = j\omega S_X(\omega)}$

3.2 均方微积分

➢ ***n*阶导数**

$$X^{(n)}(t)=\frac{d^nX(t)}{dt^n}$$

$X(t)$平稳,且相关函数高阶导数存在

$$R_{X^{(n)}}(\tau)=(-1)^n\frac{d^{2n}R_X(\tau)}{d\tau^{2n}}$$

$X(t)$与$Y(t)$联合平稳

$$R_{X^{(n)}Y^{(m)}}(\tau)=E\left\{\frac{d^nX(t+\tau)}{dt^n}\cdot\frac{d^mY(t)}{dt^m}\right\}=(-1)^m\frac{d^{n+m}R_X(\tau)}{d\tau^{n+m}}$$

例

求随机相位余弦波导数过程的自相关函数、导数过程与该过程的互相关函数

3.2 均方微积分

5、随机过程的均方积分

➢ 定义

$$\int_a^b X(t)dt = \underset{\substack{\Delta n \to 0 \\ n \to \infty}}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{k=0}^{n-1} X(t'_k)(t_{k+1} - t_k)$$

➢ 可积条件（不证明）

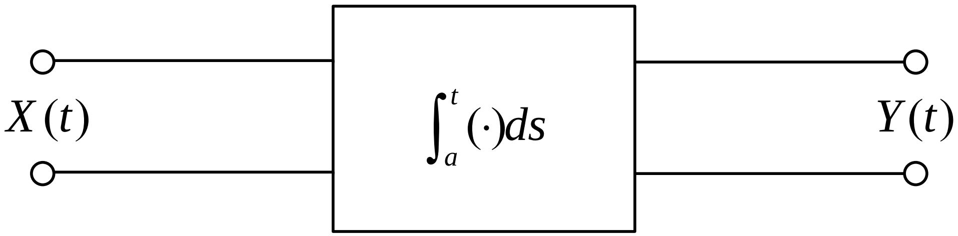
$$\int_a^b \int_a^b R_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

➢ 性质

$$\boxed{E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E\left[X(t)\right]dt}$$

3.2 均方微积分

随机过程的积分变换



$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds \quad a\le t\le b$$

- 均值

$$m_Y(t)=\int_a^t m_X(s)ds \qquad a\le t\le b$$

平稳过程

$$m_Y(t)=\int_a^t m_X(s)ds=\int_a^t cds=c(t-a)$$

3.2 均方微积分

➢ 相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}X(s)X(\lambda)dsd\lambda\right]=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}E\left[X(s)X(\lambda)\right]dsd\lambda$$

$$\boxed{=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}R_X(s,\lambda)dsd\lambda}$$

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=E\left[X(t_1)\int_a^{t_2}X(s_2)ds_2\right]=\int_a^{t_2}R_X(t_1,s_2)ds_2}$$

$$\boxed{R_{YX}(t_1,t_2)=\int_a^{t_1}R_X(s_1,t_2)ds_1}$$

3.3 随机过程线性变换的微分方程法

Differetial equation method for linear transformation of random process

3.3 随机过程线性变换的微分方程法

1、系统的微分方程描述

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)$$

$$y^{(i)}(t_0)=y_{i0}$$

2、输出的随机性

$$a_i, i=0,\cdots,n$$

$$y_{i0}, i=0,\cdots,n$$

$$X(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i Y^{(i)}(t)$$

3.3 随机过程线性变换的微分方程法

微分方程法中的数字特征求解

$$X(t)=\sum_{i=0}^{n}a_iY^{(i)}(t)$$

1、均值

$$m_X(t)=\sum_{i=0}^{n}a_iE[Y^{(i)}(t)]$$

2、相关函数

$$R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial^i R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_2^i}\qquad R_{XY}(t_1,t_2)=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial^i R_Y(t_1,t_2)}{\partial t_1^i}$$

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

Impulse response method and spectrum method for linear transformation of random process

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

1、冲激响应法

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= L\left[X(t)\right] = L\left[\int X(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda\right] \\
&= \int X(\lambda)L\left[\delta(t-\lambda)\right]d\lambda \qquad \text{线性} \\
&= \int X(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \qquad \text{时不变性} \\
&= X(t)\otimes h(t)
\end{aligned}
$$

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

数字特征

- 均值

$$\boxed{m_Y(t) = m_X(t) \otimes h(t)}$$

- 相关函数

$$\boxed{R_{YX}(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_1)}$$

$$\boxed{R_{XY}(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_2)}$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)}$$

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

请考虑如何求输出的协方差函数

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

平稳过程的数字特征

- 均值

$$\boxed{m_Y(t) = m_X \int h(\lambda) d\lambda = m_Y}$$

- 相关函数

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes R_h(\tau)$$

$$\boxed{R_h(\tau) = \int h(\lambda) h(\lambda - \tau) d\lambda = h(\tau) \otimes h(-\tau)}$$

3.4 随机过程线性变换的冲激响应法和频谱法

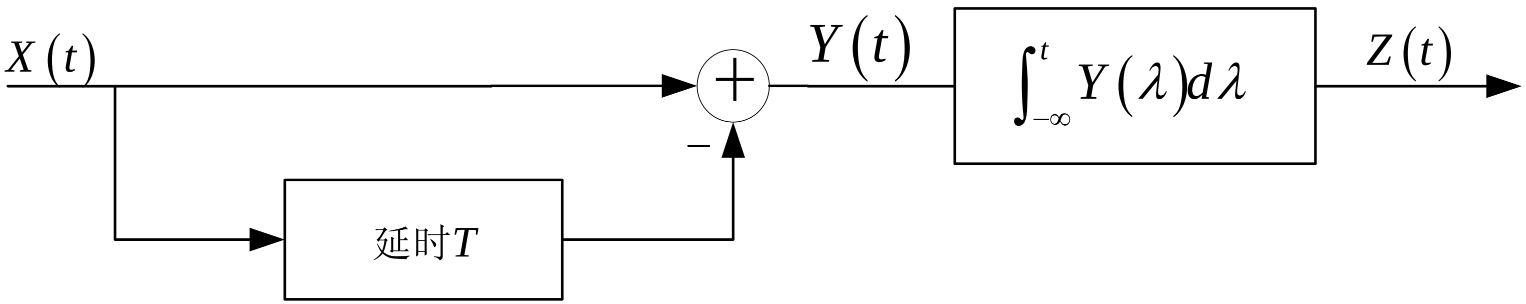
2、频谱法

对于平稳随机过程:

$$m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau = m_Y$$

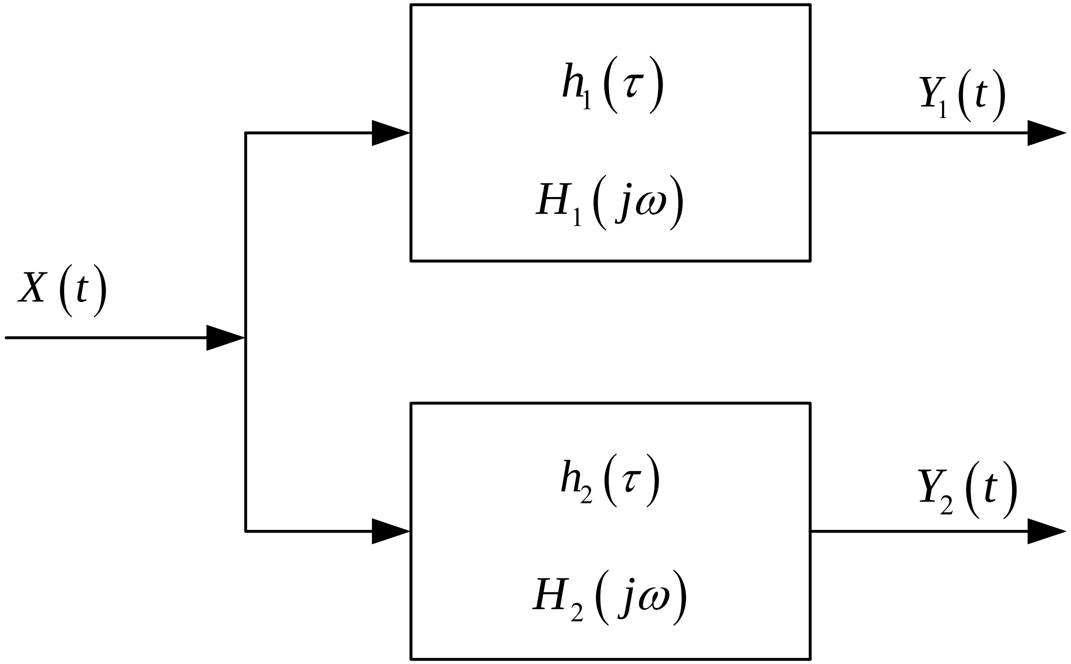
$$\left.\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= R_X(\tau) \otimes h(\tau) \\ R_{XY}(\tau) &= R_X(\tau) \otimes h(-\tau) \\ R_Y(\tau) &= R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} S_{YX}(\omega) &= S_X(\omega) \bullet H(j\omega) \\ S_{XY}(\omega) &= S_X(\omega) \bullet H^*(j\omega) \\ S_Y(\omega) &= S_X(\omega) \bullet H(j\omega) \bullet H^*(j\omega) \\ &= S_X(\omega) \bullet \left|H(j\omega)\right|^2 \end{aligned}\right.$$

例1



求频响函数$H(j\omega)$

例2



求互谱密度$S_{Y1Y2}(\omega)$

3.5 白噪声通过线性系统

White noise through linear system

3.5 白噪声通过线性系统

1、频谱法

$$S_X(\omega)=\frac{N_0}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad H(j\omega)$$

$$\boxed{S_Y(\omega)=S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2=\frac{N_0}{2}\left|H(j\omega)\right|^2}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$\sigma_Y^2=C_Y(0)=R_Y(0)=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega$$

3.5 白噪声通过线性系统

2、冲激响应法

$$R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau) \Longleftrightarrow h(t)$$

$$\boxed{R_Y(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{N_0}{2}h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{N_0}{2}R_h(\tau)}$$

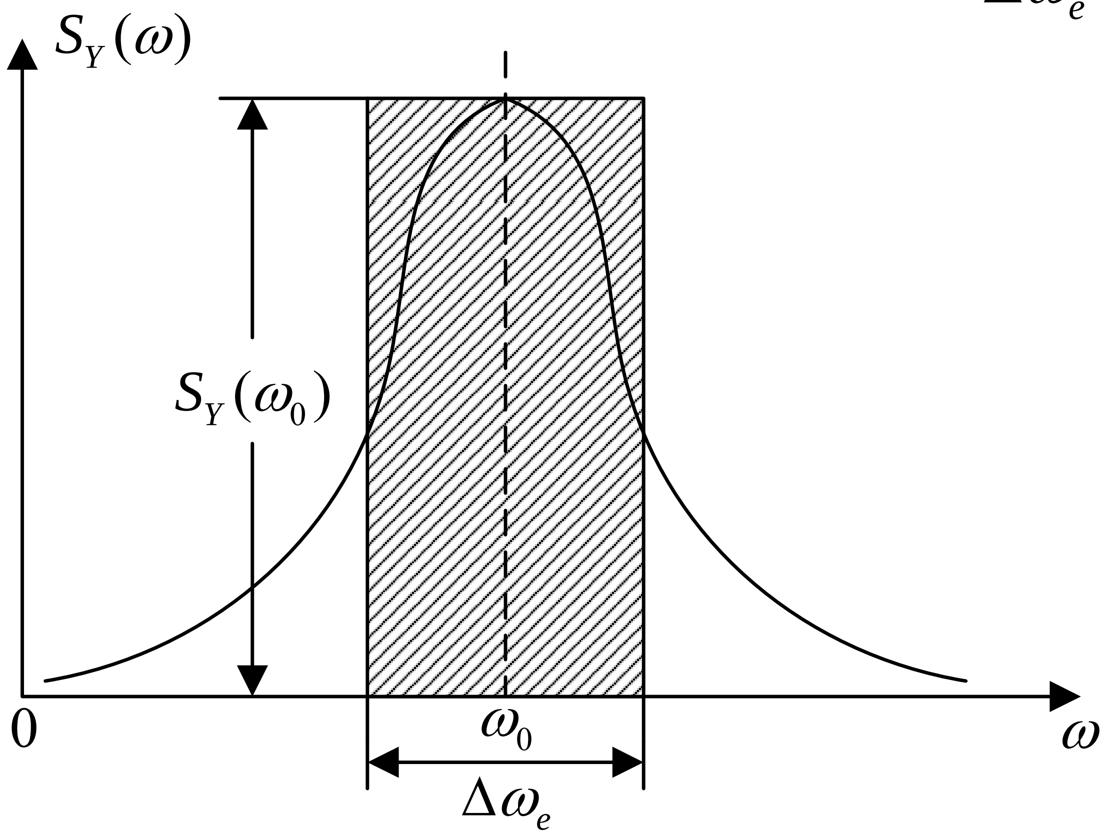
$$S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}\int R_h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\sigma_Y^2=C_Y(0)=R_Y(0)=\frac{N_0}{2}R_h(0)=\frac{N_0}{2}\int h^2(u)du$$

3.5 白噪声通过线性系统

3、噪声等效通频带

$$S_Y(\omega_0)\Delta\omega_e = \int_0^{\infty} S_Y(\omega)\,d\omega$$



$$\Delta\omega_e = \frac{\int_0^{\infty} S_Y(\omega)\,d\omega}{S_Y(\omega_0)}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} \left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}{\left|H(j\omega_0)\right|^2}$$

低通滤波

$$\Delta\omega_e \cdot \tau_0 = \frac{2\pi}{4}$$

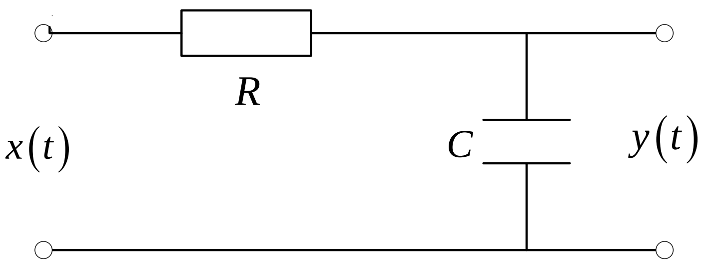
3.5 白噪声通过线性系统

4、白噪声通过线性系统

- 白噪声通过RC积分器
- 白噪声通过理想低通网络
- 白噪声通过理想带通网络
- 白噪声通过高斯型带通网络

3.5 白噪声通过线性系统

白噪声通过RC积分器



$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}},t>0$$

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0}{2}R_h(\tau)=\frac{N_0 a}{4}e^{-a|\tau|}$$

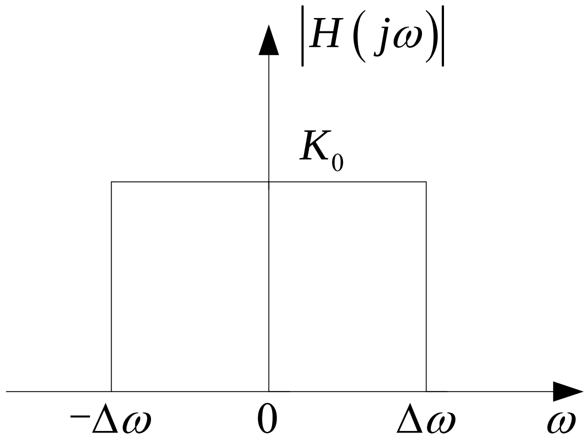
$$S_Y(\omega)=\int\frac{N_0 a}{4}e^{-a|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{N_0 a}{4}\cdot\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\tau_0=\frac{\frac{N_0 a}{4}\int_0^{\infty}e^{-a|\tau|}d\tau}{\frac{N_0 a}{4}}=\frac{1}{a}$$

$$\omega_e=\frac{\frac{N_0 a}{4}\cdot\int_0^{\infty}\frac{2a}{a^2+\omega^2}d\omega}{\frac{N_0 a}{4}\cdot\frac{2a}{a^2}}=a\frac{\pi}{2}$$

3.5 白噪声通过线性系统

白噪声通过理想低通网络



$$\left|H(j\omega)\right| = \begin{cases} K_0 & -\Delta\omega < \omega < \Delta\omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

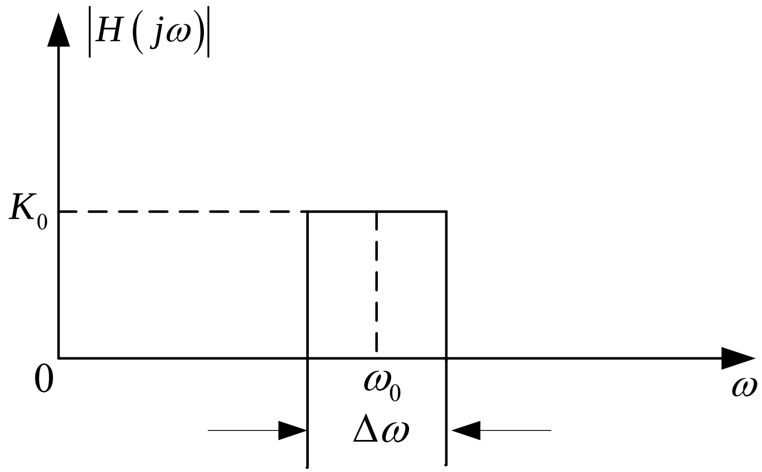
$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)\left|\mathrm{H}(j\omega)\right|^2 = \begin{cases} \dfrac{N_0 K_0^2}{2} & -\Delta\omega < \omega < \Delta\omega \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\omega_e = \frac{\int_0^{\Delta\omega} \frac{N_0 K_0^2}{2} d\omega}{\frac{N_0 K_0^2}{2}} = \Delta\omega$$

$$R_Y(\tau) = \frac{\Delta\omega N_0 K_0^2}{2\pi} \sin c(\Delta\omega\tau)$$

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2\Delta\omega}$$

白噪声通过理想带通网络



$$H(j\omega)=\begin{cases}K_0 & |\omega\pm\omega_0|<\dfrac{\Delta\omega}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

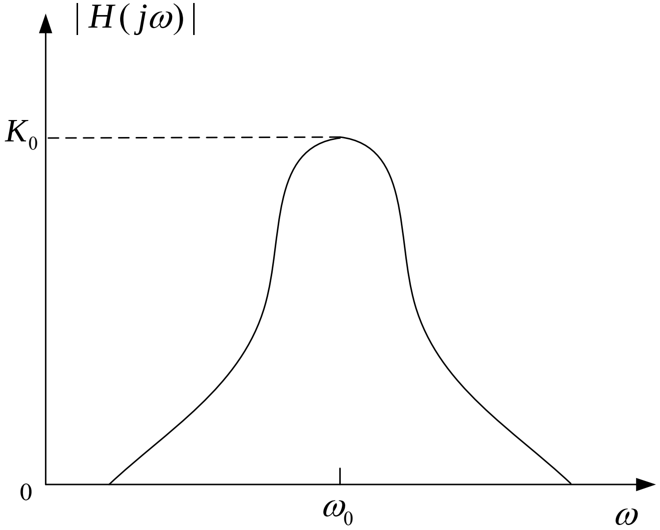
$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)|H(j\omega)|^2=\begin{cases}N_0K_0^2/2 & |\omega\pm\omega_0|<\dfrac{\Delta\omega}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\omega_e=\Delta\omega$$

$$R_Y(\tau)=\frac{\Delta\omega N_0K_0^2}{2\pi}\sin c(\frac{\Delta\omega\tau}{2})\cos\omega_0\tau$$

$$\tau_0=\frac{\pi}{\Delta\omega}$$

白噪声通过高斯带通网络



$$H(j\omega)=K_0\exp\left\{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta^2}\right\}$$

$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2=N_0K_0^2\exp\left\{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}\right\}$$

$$\tau_0=\int_0^{\infty}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}$$

作业

- 3.1—3.5
- 3.9， 3.10， 3.13
- 3.17， 3.19， 3.21， 3.25
- 3.28
- 选做： 3.16