北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

随机过程理论

习题课

概率与随机变量

集合与概率

作业题

1.2 1.3

- 集合：将为了某种目的而研究的对象的总体称为集合

  交集、并集、补集与差集

- 随机试验：相同条件下可重复进行；试验结果不止一个，且结果事先无法预知；试验出现的结果不确定；
- 事件概率：给定一个随机试验，对于每一个事件集，对应一个有限数P（A），数P(A)是事件的一个函数，当数P(A)满足非负性、规范性和可列可加性，称P(A)为事件A的概率。

条件概率 $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

全概率公式 $$P(A)=\sum_j P(A|B_j)P(B_j)$$

统计独立 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

贝叶斯公式 $$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

乘法公式 $$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

概率与随机变量

1.2：某学生参加四次考试，他的第一次考试及格的概率为p，按照前一次考试及格或者不及格，下一次考试及格的概率为p或者p/2，如果至少有三次及格，就可以升级，问升级的概率有多大？

解：设不及格的门数为N，事件A为“学生升级”，那么N的取值为0或者1，所以事件A发生的概率为：

$$P(A)=P(N=1)+P(N=0)=(1-p)\frac{p}{2}p^2+p(1-p)\frac{p}{2}p+p^2(1-p)\frac{p}{2}+p^3(1-p)+p^4=\frac{1}{2}p^3(5-3p)$$

1.3：t时间内，总呼叫次数k的概率为：$P_t(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-t}$ 相邻时间呼叫次数相互独立，则2t内呼叫n的概率

解：事件B为第一个t发生次数为k，事件A为“2t内呼叫n次”，所以事件A发生的概率为：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=2^n$$

$$P(B_k)=P_t(k),P(A|B_k)=P_t(n-k)$$

$$P_{2t}(n)=\sum_{k=0}^{n}P(B_k)P(A|B_k)=\sum_{k=0}^{n}P_t(k)P_t(n-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-2t}=\frac{(2\lambda)^n}{n!}e^{-2t}$$

概率与随机变量

随机变量

- 给定一个随机试验，结果是样本空间的元素，既有相应的概率空间，对于每个结果，都有一个实数与之相对应，称其为随机变量
- 分布函数：随机变量可能值与概率之间的对应关系
- 离散型概率分布：0-1分布、二项分布和泊松分布
- 连续型随机变量及其分布函数：均匀分布、正态分布和瑞利分布
- 概率密度函数： $f(x)$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- 单调非降性、左连续 、积分为0和1
- 二维分布： $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ $\quad \frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$
- 边沿分布： $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
- 条件分布： $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$
- 随机变量的函数：雅各比行列式

$$f_Y(y_1,y_2,\dots y_n)=|J|\,f_X(x_1,x_2,\dots x_n),\ x_i=h_i(y_1,y_2,\dots y_n)$$

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

作业题

1.7 1.13

1.18（二重积分）

概率与随机变量

1.7 随机变量的联合概率密度函数为： $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)} & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ **求A、边沿分布和** $P\{X+Y<2\}$

$$A=2;$$

$$P\{X+Y<2\}=P\{Y<2-X\}=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=(1-e^{-2})^2$$

1.13 X,Y相互独立，服从指数分布，求X+Y与X/（X+Y）的联合概率密度函数与边沿，并判断是否独立?

$$f(x,y)=f(x)\cdot f(y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

$$(X,Y)\leftrightarrow(U,V)$$

$$\begin{cases}U=X+Y\\ V=\dfrac{X}{X+Y}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}X=UV\\ Y=U(1-V)\end{cases}$$

$$f(u,v)=|J|\,f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 ue^{-\lambda u} & (u>0, 0<v<1)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f(u)=\lambda^2 ue^{-\lambda u}\qquad f(v)=1$$

$$f(u,v)=f(u)\cdot f(v)$$

1.18 X,Y相互独立，服从高斯分布，求幅度，W=X/Y与相位的概率密度函数（SAR数据统计特性，同样可参考高斯随机过程进行推导）

$$f(x,y)=f(x)f(y)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$$

概率与随机变量

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$$
$$=\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y)dxdy$$
$$=4\int_0^z\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}dxdy$$
$$f(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=4\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}(\sqrt{z^2-y^2})'dy$$
$$=\frac{2z}{\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{z^2-y^2}}dy$$
$$=\frac{2z}{\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}(\arcsin\frac{y}{z}\Big|_0^z)$$
$$=\frac{z}{\sigma^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}$$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

$$F_z(z)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\}\cdot rdrd\theta$$
$$f(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\frac{z}{\sigma^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}\quad(z>0)$$

$$F_W(w)=P\{\frac{X}{Y}\le w\}$$
$$=P\{X\le wY,Y>0\}+P\{X\ge wY,Y<0\}$$
$$=\int_{y=0}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=wy}f_{XY}(x,y)dxdy+\int_{y=-\infty}^{y=0}\int_{x=wy}^{x=\infty}f_{XY}(x,y)dxd$$
$$=2\int_{y=0}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=wy}f_{XY}(x,y)dxdy$$
$$f_W(w)=\frac{dF_W(w)}{dw}=2\int_0^\infty yf_{XY}(yw,y)dy$$
$$=2\int_0^\infty y\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{(w^2+1)y^2}{2\sigma^2}\}dy$$
$$=\frac{1}{\pi(w^2+1)}$$
$$f_W(w)=\frac{1}{\pi(w^2+1)}\quad(-\infty<w<\infty)$$

$$F_\Theta(\theta)=P\{\Theta\le\theta\}=P\{\frac{X}{Y}\le\tan\theta\}$$
$$=P\{X\le Y\tan\theta,Y>0\}+P\{X\ge Y\tan\theta,Y<0\}$$
$$=2\int_0^\infty\int_{-\infty}^{y\tan\theta}f_{XY}(x,y)dxdy$$
$$=2\int_0^\infty\int_{-\infty}^{y\tan\theta}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}dxdy$$
$$f_\Theta(\theta)=\frac{dF_\Theta}{d\theta}=2\int_0^\infty\frac{y}{\cos^2\theta}\exp\{-\frac{(y\tan\theta)^2+y^2}{2\sigma^2}\}dy$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{y}{2\sigma^2\cos^2\theta}\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2\cos^2\theta}\}dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\exp\{-\frac{y^2}{2\sigma^2\cos^2\theta}\}d(\frac{y^2}{2\sigma^2\cos^2\theta})$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\exp\{-u\}du$$
$$=\frac{1}{\pi}$$
$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\phi(x)]\phi'(x)$$

概率与随机变量

数字特征

- **数学期望：** $E[X]=\sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$ $\quad E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$E[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

- **方差** $D[x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[x])^2 f(x)dx=E[X^2]-(E[X])^2$

$$D[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}(g(x)-E[g(x)])^2 f(x)dx$$

- **中心矩、原点矩** $E[X^k]$

$$E\{[X-E(X)]^k\}$$

- **相关系数：** $r_{12}=\dfrac{E\{(X_1-E[X_1])\}E\{(X_2-E[X_2])\}}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$

- **特征函数：** $\phi(v)=E[e^{jvX}]$

1.36

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y} & y>|x|,-\infty<x<\infty \\ 0 & \end{cases}$$

不相关但不独立;E[Y]和E[Y|X]

证明 X 和 Y 不相关，即 $E[XY]=E[X]E[Y]$

$$\begin{aligned}E[XY]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{|x|}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy\\&=\int_{0}^{\infty}xdx\int_{x}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy+\int_{-\infty}^{0}xdx\int_{-x}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy\ (u=-x)\\&=\int_{0}^{\infty}xdx\int_{x}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy+\int_{+\infty}^{0}-ud(-u)\int_{u}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy\\&=\int_{0}^{\infty}xdx\int_{x}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy-\int_{0}^{\infty}udu\int_{u}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy\\&=0\end{aligned}$$

同理可得 $E[X]=0$

故有 $E[XY]=E[x]E[y]$

证明统计不独立，即 $f(x,y)\neq f(x)f(y)$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_{0}^{\infty}y^2e^{-y}dy=2$$

证明统计不独立，即 $f(x,y)\neq f(x)f(y)$

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dy\\&=\int_{|x|}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-y}dy\\&=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad(-\infty<x<\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dx\\&=\int_{-y}^{y}\frac{1}{2}e^{-y}dx\\&=ye^{-y}\quad(y>0)\end{aligned}$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

故 $f(x,y)\neq f(x)f(y)$

$$f_{XY}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{|x|-y} & y>|x|,-\infty<x<\infty\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[Y|X]&=\int_{-\infty}^{\infty}yf_{XY}(y|x)dy\\&=\int_{|x|}^{\infty}ye^{|x|-y}dy\\&=|x|+1\end{aligned}$$

随机过程

随机过程

作业题

2.1 2.3

- **随时间变化的随机变量的总体；** $X(t,e)$
- **分布函数：** $F(x,t_i)=P[X(t_i)\le x]$ $f(x,t_i)=\dfrac{\partial F(x,t_i)}{\partial x}$
- **数字特征：一维数学期望与方差；二维：相关矩与相关系数（确定的数转确定的时间函数）**
- **独立—概率密度函数** $f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1;t_1)\cdot f(x_2;t_2)$
- **不相关—协方差为0** $C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-E_X(t_1)E_X(t_2)=0$
- **正交—自相关函数为0** $R_X(t_1,t_2)=E_X(t_1)E_X(t_2)=0$

2.1 随机变量 $f_X(x)=f_A(a)\left|\dfrac{dA}{dx}\right|$

2.3 均值 $m_Y(t)=E[Y(t)]$

自相关函数 $R_Y(t_1,t_2)=E_Y(t_1)E_Y(t_2)$

随机过程

平稳随机过程

作业题

2.13 2.18 2.19 2.21 2.24

- 统计特性：平稳与非平稳；记忆特性：纯粹、马尔可夫和独立增量；概率分布函数：高斯随机过程；功率谱：白噪声与有色噪声
- 严格平稳随机过程：任意阶不随时间变化（沿时间轴具有平移时不改变性)
- 广义平稳随机过程：一阶与时间无关，二阶与时间差有关，功率有限
- 自相关函数的性质： 极值性、对称特殊点处的值、周期性、连续性的充要值和非负定性
- 相关系数与相关时间：协方差函数的归一化；给定时间 τ_0，当大于该时间 $X(t)$ $X(t-\tau)$ 不相关 $\tau_0=\int_0^\infty r_X(\tau)d\tau$ $r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X{}^2}$

随机过程

平稳随机过程的各态历经性

作业题

2.23

- **时间平均：** $n=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$
- **各态历经性：平稳随机过程 统计平均=时间平均，依概率1成立**

均值各态历经性 $m_{XT}=\overline{X(t)}=E[X(t)]=m_X$

自相关函数各态历经性 $R_{XT}(\tau)=\overline{X(t+\tau)X(t)}=E[X(t+\tau)X(t)]$

- **各态历经性判定：定义法**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=0$$

- **定理法（定理1、定理2）**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]d\tau=0$$

$$B(\tau_1)=E[X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)]$$

随机过程

平稳随机过程的功率谱密度

- 能量信号（能量有限）与功率信号（能量无限，功率有限）
- 功率谱密度的物理意义—平稳随机过程的平均**功率**关于**频率**的分布。
- **维纳—辛钦公式**：功率谱密度与自相关函数为傅里叶变换对
- 互功率谱密度与互相关函数为傅里叶变换对
- 白噪声过程—均值为0的平稳随机过程，具有恒定功率谱密度

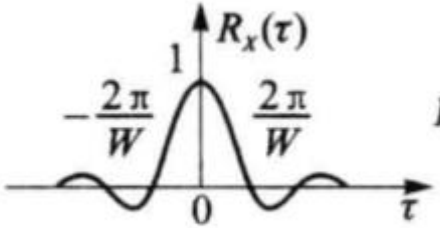
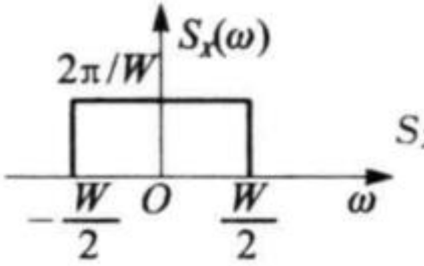
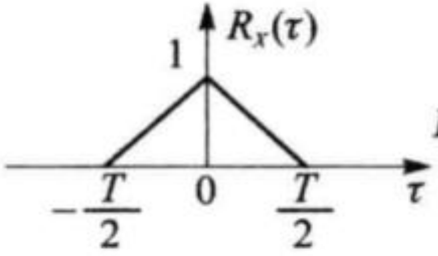
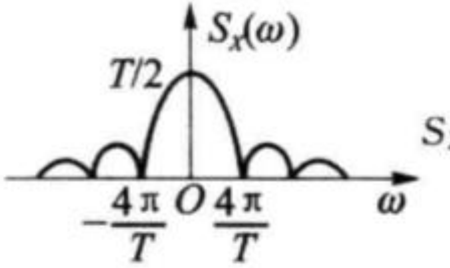
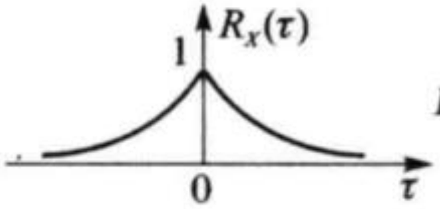
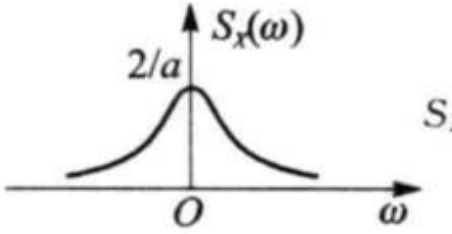
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

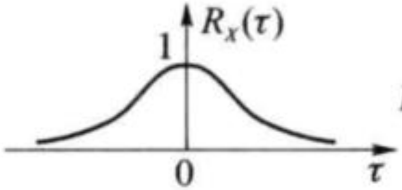
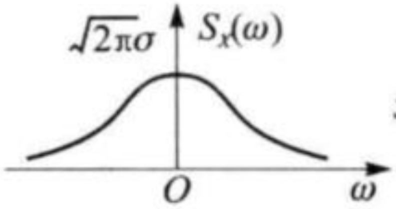
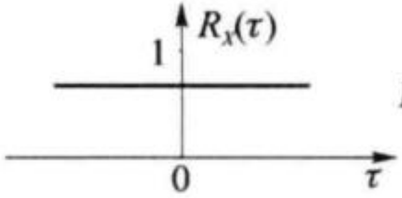
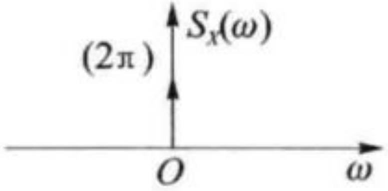
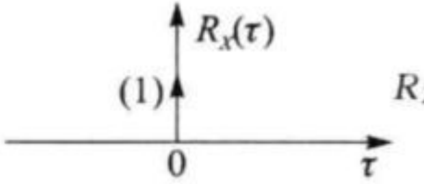
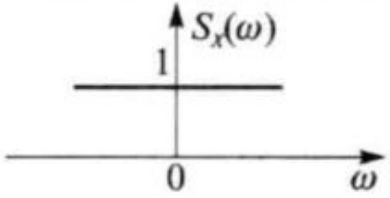
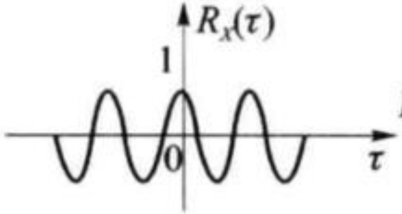
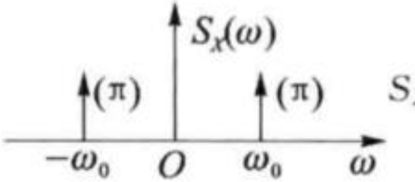
作业题

2.27 2.28 2.29 2.30 2.31

随机过程

自相关函数 $R_X(\tau)$	功率谱密度 $S_X(\omega)$
 $R_X(\tau)=\mathrm{Sa}\left(\frac{W_\tau}{2}\right)$	 $S_X(\omega)=\begin{cases}\frac{2\pi}{W}, & \lvert\omega\rvert\leqslant\frac{W}{2}\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\frac{W}{2}\end{cases}$
 $R_X(\tau)=\begin{cases}0, & \lvert\tau\rvert\geqslant\frac{T}{2}\\ 1-\frac{2\lvert\tau\rvert}{T}, & \lvert\tau\rvert<\frac{T}{2}\end{cases}$	 $S_X(\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$
 $R_X(\tau)=\mathrm{e}^{-a\lvert\tau\rvert}$	 $S_X(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

随机过程

自相关函数 $R_X(\tau)$		功率谱密度 $S_X(\omega)$	
	$R_X(\tau)=e^{-\tau^2/2\sigma^2}$		$S_X(\omega)=\sqrt{2\pi}\sigma e^{-(\omega\sigma)^2/2}$
	$R_X(\tau)=1, -\infty<\tau<\infty$		$S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$
	$R_X(\tau)=\delta(\tau)$		$S_X(\omega)=1, -\infty<\omega<\infty$
	$R_X(\tau)=\cos\omega_0\tau$		$S_X(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)]+\delta(\omega+\omega_0)]$

随机过程的线性变换

线性变换LTI系统

$$X(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow Y(t)$$

作业题

3.3 3.4

- **均方极限**

  概率分布—数字特征

  均方连续　极值与均值运算可交换顺序

- **均方微积分**

  均方微分--自相关函数的性质　　导数与均值运算可交换顺序。

  均方积分--自相关函数的性质　　积分与均值运算可交换顺序。

$$Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$$

$$E[Y(t)]=\frac{d}{dt}X(t)$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}R_X(t_1,t_2)$$

$$R_{XY}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}R_X(\tau)$$

$$R_Y(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau)$$

随机过程的线性变换

随机过程通过线性变换系统

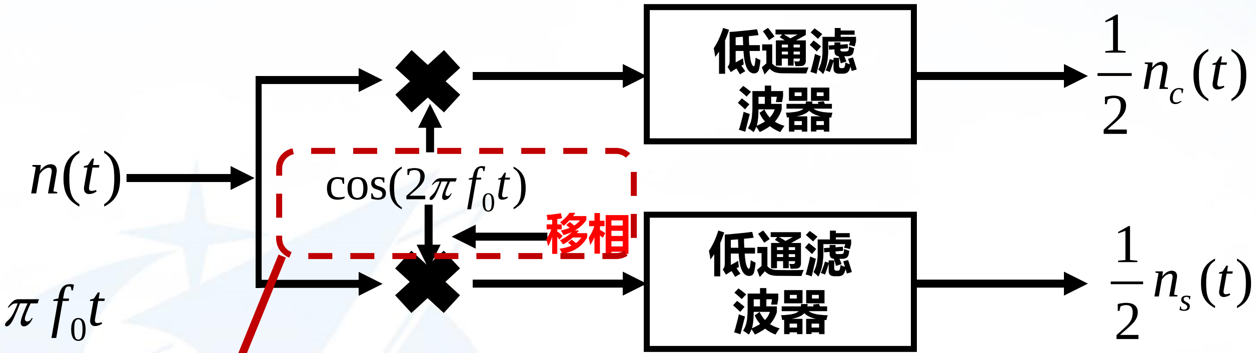
$$X(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow Y(t)$$

- 微分方程法：一阶线性微分方程通解
- 冲激响应法：LTI系统
- 频谱法：平稳随机过程、LTI系统 $$G_Y(\omega) = G_X(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$$
- 白噪声特例

作业题

3.5 3.10 3.19 3.28

窄带随机过程



- **窄带随机过程**

$$n(t)=n_c(t)\cos 2\pi f_0 t - n_s(t)\sin 2\pi f_0 t$$

- **同相分量与正交分量**

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

- **窄带随机过程的复信号表示：希尔伯特变换（内容、性质和物理含义（90°移相器））**

$$X(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\Phi(t))$$
$$=X_c(t)\cos(\omega_0 t)-X_s(t)\sin(\omega_0 t)$$

- **复随机过程：数字特征**

$$X_c(t)=A(t)\cos(\Phi(t))=X(t)\cos(\omega_0 t)+\hat{X}(t)\sin(\omega_0 t)$$
$$X_s(t)=A(t)\sin(\Phi(t))=\hat{X}(t)\cos(\omega_0 t)-X(t)\sin(\omega_0 t)$$

- **窄带实平稳随机过程的数字特征**

自相关函数、互相关函数、功率谱密度

作业题

4.8 4.13 4.19（数形结合）4.22（公式3.4.8）

高斯随机过程

- 高斯随机变量
- 一维分布
- 二维分布 多维分布
- 性质：边沿分布、条件分布、线性变换都服从高斯分布 统计 独立与互不相关等价
- 高斯随机过程：随机过程的任意有限维分布都是高斯分布。

高斯过程是二阶矩过程

作业题

5.5 5.8 5.15

- 维纳过程：零均值平稳高斯白噪声通过理想积分器