随机过程理论

Stochastic process theory

授课教师：李春升教授、徐华平教授

第七章 马尔可夫链和马尔可夫过程

Markov chain and Markov Process

目录

7.1 马尔可夫链的定义

7.2 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

7.3 马尔可夫链中的状态分类

7.4 遍历性与平稳分布

7.5 马尔可夫序列

7.6 马尔可夫过程

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

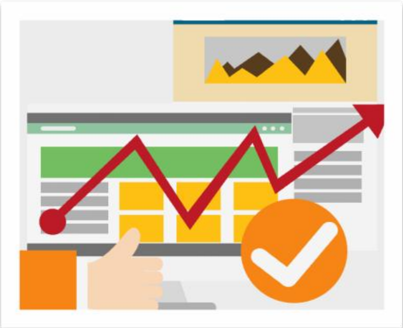
7.1 马尔可夫链的定义

Definition of Markov chain

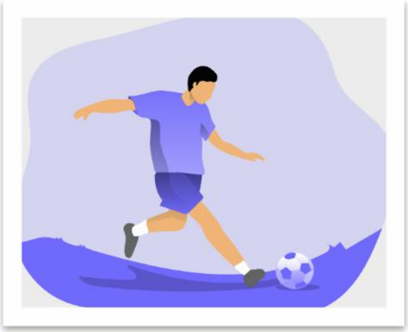
前言

日常生活

天气预报



股票涨跌



球赛预测

语言模型

预测

科研领域

陆基中段反导拦截技术

- 目标从哪来的（信息未知）
- 目标当前状态（信息可知）
- 目标下步去哪（预测跟踪）

如何用目标当前的状态，科学合理的预测目标未来的状态？

概念引入

随机过程

- 按统计特征分类
- 按记忆特性分类
  - 纯粹无记忆过程
  - 马尔可夫过程
  - 非马尔可夫过程
- 按概率分布分类

例：球赛预测

- 不考虑两支球队过去的表现 —— 纯粹过程
- 两支球队最近一次比赛的战绩 —— 马氏过程
- 两支球队过往所有的战绩 —— 非马氏过程

过去 → 现在 → 未来

如何描述三者之间的关系呢?

马尔可夫过程的内涵

状态空间
$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

随机序列$\{X_n, n \in N^+\}$

过去　　　　现在　　　　未来

$X_1 = a_{i_1}$　$X_2 = a_{i_2}$　$X_3 = a_{i_3}$　…　$X_{n-1} = a_{i_{n-1}}$　$X_n = a_{i_n}$

时刻

$$P\{\underbrace{X_n = a_{i_n}}_{\text{未来}} | \underbrace{X_{n-1} = a_{i_{n-1}}}_{\text{现在}}, \underbrace{X_{n-2} = a_{i_{n-2}}, \ldots, X_1 = a_{i_1}}_{\text{过去}}\}$$

$$= P\{\underbrace{X_n = a_{i_n}}_{\text{未来}} | \underbrace{X_{n-1} = a_{i_{n-1}}}_{\text{现在}}\}$$

化繁为简：降维

未来时刻状态只与当前时刻状态有关，而与过去时刻状态无关

马尔可夫链的定义

- **马尔可夫链**

设$\{X_n, n \in N^+\}$为一随机序列，时间参数集$N^+ = \{0,1,2,\cdots\}$，其状态空间$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，若对所有的$n \in N^+$，有

$$P\{X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}, X_{n-2} = a_{i_{n-2}}, \dots, X_1 = a_{i_1}\} =$$

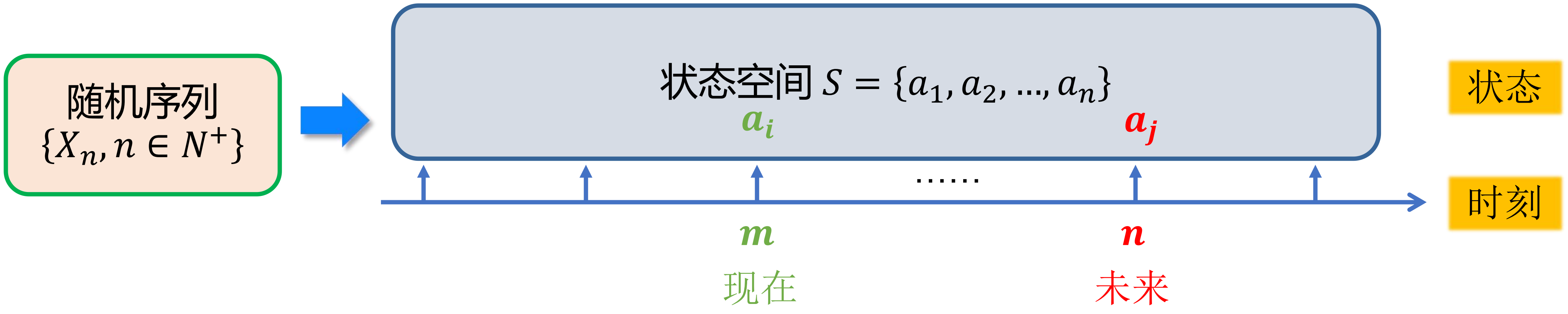
$$P\{X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}\}$$

则称$\{X_n, n \in N^+\}$为马尔可夫链。

马尔可夫过程 $\xrightarrow[\text{状态离散}]{\text{时间离散}}$ 马尔可夫链

转移概率

问题：如何由当前的状态去预测未来的状态呢？



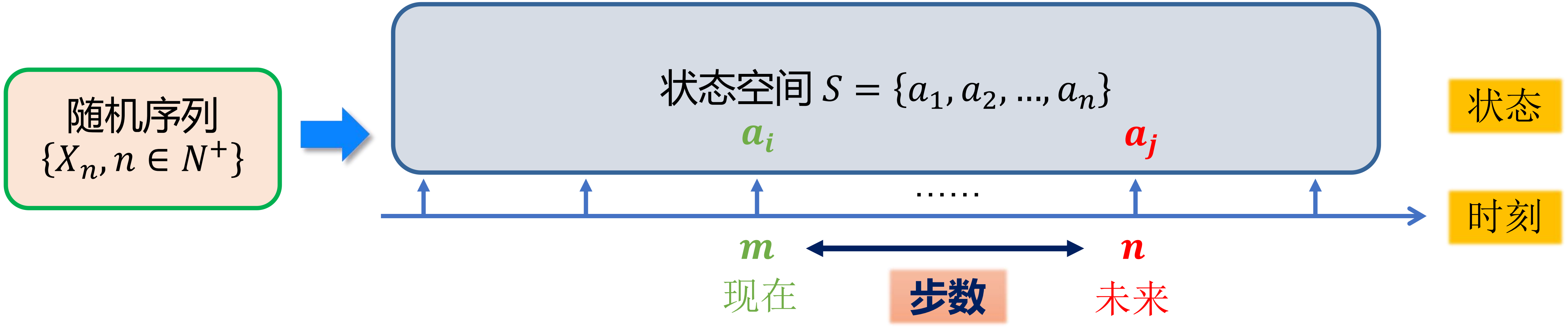
- **转移概率**

状态

$$p_{ij}(m,n) = P\{X_n = a_j | X_m = a_i\} \overset{\text{简化}}{=} P\{X_n = j | X_m = i\}$$

时刻

转移概率



- **基本（一步）转移概率**

$$p_{ij}(m) = p_{ij}(m, m+1) = P\{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\}$$

- ***k*步转移概率**

$$p_{ij}^{(k)}(m) = P\{X_{m+k} = j | X_m = i\}$$

- ***k*步转移矩阵**

$$\boldsymbol{P} = \{p_{ij}^{(k)}(m), i, j \in S\}$$

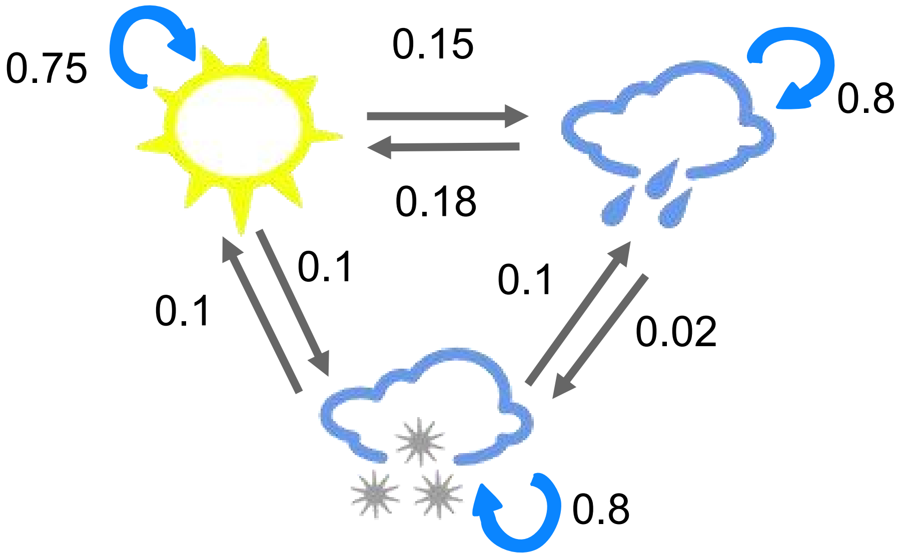
转移概率

例：天气预测问题

随机序列$\{X_n, n \in N^+\}$ ➡ 每一天的天气

状态空间$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ➡ 晴天、下雨、下雪

问：已知今天下雪的概率为0.3，那么明天晴天的概率？



$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 雨 & 雪 & 晴 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.02 & 0.18 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.15 & 0.1 & 0.75 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 雨 \\ 雪 \\ 晴 \end{array} \end{array}$$

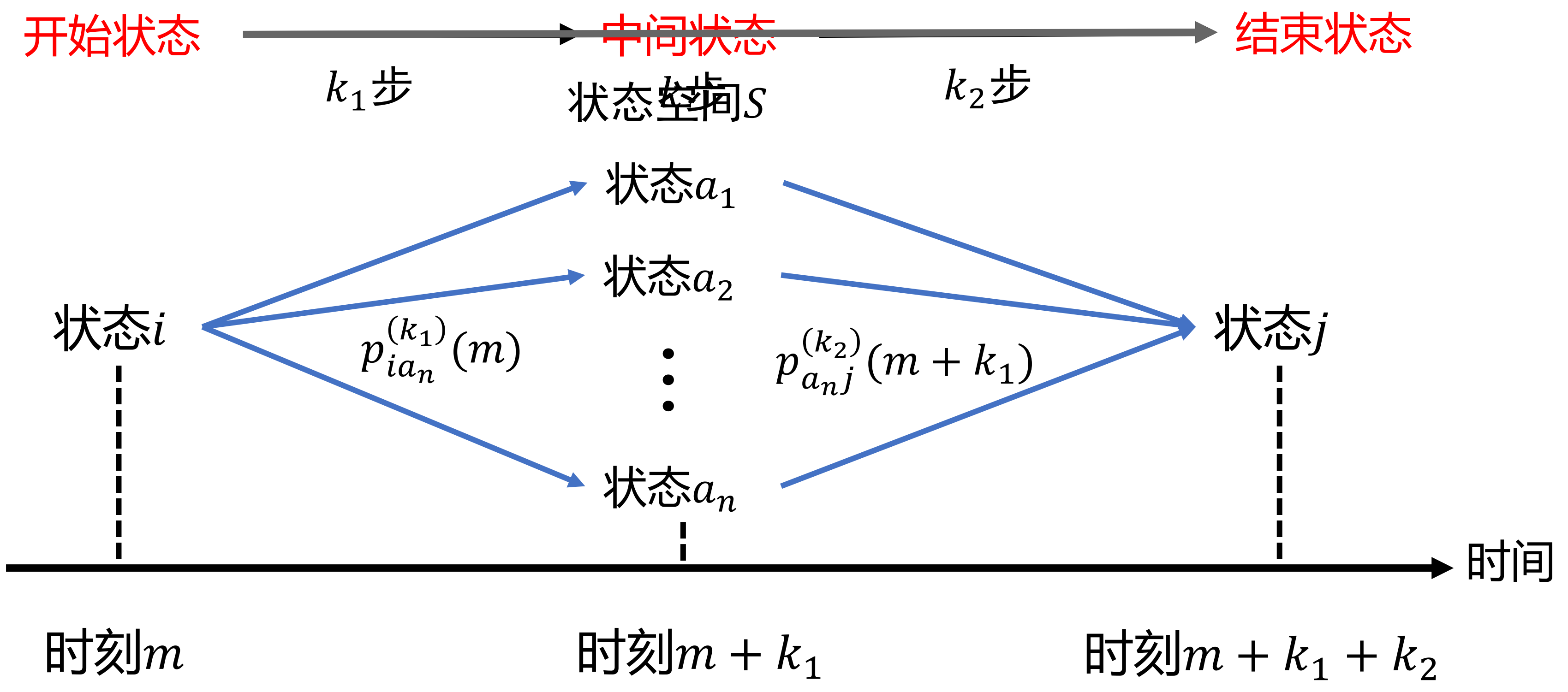
$$P_A = 0.3 \times 0.1 = 0.03$$

7.2 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

Karl Chapman - kolmogoroff equation

切普曼-柯尔莫戈罗夫方程

问题：如何得到k步转移概率呢?



$$p_{ij}^{(k_1+k_2)}(m)=P_{iS}^{(k_1)}(m)\cdot P_{Sj}^{(k_2)}(m+k_1)=\sum_{a_n\in S}p_{ia_n}^{(k_1)}(m)p_{a_nj}^{(k_2)}(m+k_1)$$

切普曼-柯尔莫戈罗夫方程（C-K方程）

C-K方程证明

证明

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m)\qquad i,j\in S$$

$$p_{ij}^{(m+r)}(n)=P\left\{X_{n+m+r}=j\,\middle|\,X_n=i\right\}$$

$$=\frac{P\left\{X_{n+m+r}=j,X_n=i\right\}}{P\left\{X_n=i\right\}}$$

$$=\sum_{k\in S}\frac{P\left\{X_{n+m+r}=j,X_{n+m}=k,X_n=i\right\}}{P\left\{X_{n+m}=k,X_n=i\right\}}\bullet\frac{P\left\{X_{n+m}=k,X_n=i\right\}}{P\left\{X_n=i\right\}}$$

$$=\sum_{k\in S}P\left\{X_{n+m+r}=j\,\middle|\,X_{n+m}=k,X_n=i\right\}\bullet P\left\{X_{n+m}=k\,\middle|\,X_n=i\right\}$$

$$=\sum_{k\in S}P\left\{X_{n+m+r}=j\,\middle|\,X_{n+m}=k\right\}\bullet P\left\{X_{n+m}=k\,\middle|\,X_n=i\right\}$$

$$=\sum_{k\in S}p_{kj}^{(r)}(n+m)p_{ik}^{(m)}(n)=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}(n)p_{kj}^{(r)}(n+m)$$

C-K方程证明

- 描述：马尔可夫链的有限维分布由其初始分布及基本转移概率唯一确定

$$
\begin{aligned}
&P\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_k}=i_k\} \\
&=\sum_{j\in S} P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}, , X_{n_k}=i_k\} \\
&=\sum_{j\in S} p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})} P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\} \\
&=\sum_{j\in S} p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})} p_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})} P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_{k-2}}=i_{k-2}\} = \cdots\cdots \\
&=\sum_{j\in S} p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})} p_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})} \cdots p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)} P\{X_{n_1}=i_1, X_0=j\} \\
&=\sum_{j\in S} p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})} p_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})} \cdots p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)} p_{ji_1}^{(n_1)} P\{X_0=j\}
\end{aligned}
$$

- 举例：随机游走

齐次马尔可夫链

- **齐次马尔可夫链**

如果在马尔可夫链中

$$p_{ij}(m) = P\{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\} = p_{ij}$$

与时刻m无关

即从状态i转移到状态j的概率与时刻m无关，则称这类马尔可夫为齐次马尔可夫链，它具有平稳转移概率的特性

齐次马尔可夫链的C-K方程

齐次形式

$$p_{ij}^{(k_1+k_2)}(m) = p_{ij}^{(k_1+k_2)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(k_1)} p_{kj}^{(k_2)}$$

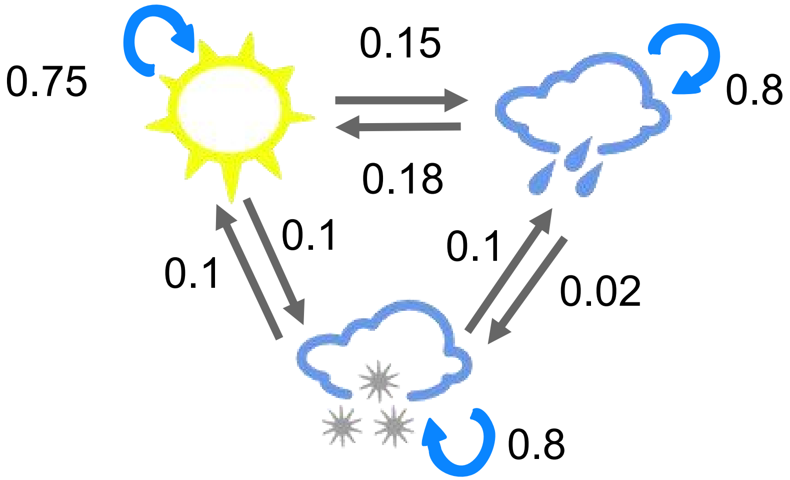
矩阵形式

$$\boldsymbol{P}^{(k)} = \boldsymbol{P}^{(k_1+k_2)} = \boldsymbol{P}^{(k_1)}\boldsymbol{P}^{(k_2)}$$

$$= \boldsymbol{P}^{(k_1)}\boldsymbol{P}^{(k_2-1)}\boldsymbol{P} = \cdots = \boldsymbol{P}^{k}$$

一步转移概率可以完全确定**k步转移概率**

例：天气预测问题续



问：已知今天下雪的概率是0.3，

那么今天下雪五天后是晴天的概率？

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 雨 & 雪 & 晴 \end{array} \\ \boldsymbol{P}^{(5)} = \boldsymbol{P}^{5} = & \begin{bmatrix} 0.4854 & 0.1354 & 0.3793 \\ 0.3045 & 0.401 & 0.2945 \\ 0.3574 & 0.2201 & 0.4225 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 雨 \\ 雪 \\ 晴 \end{array} \end{array}$$

$$P_A = 0.3 \times 0.2945 = 0.08835$$

目标跟踪-目标状态建模

问题：如何进行目标预测跟踪？

假设目标做一维匀速直线运动，

目标初始位置为x_0，目标速度为v

$$x = x_0 + v \cdot t$$ **牛顿运动方程**

假设对目标运动情况进行离散采样（时间间隔为T），则

$$x_1 = x_0 + v \cdot T$$

$$x_2 = x_1 + v \cdot T \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k + v \cdot T$$ **马尔可夫链**

……

第$k+1$时刻目标的位置x_{k+1}由k时刻目标位置x_k、速度v以及采样间隔T决定

目标跟踪-目标状态建模

牛顿运动方程 → **离散状态模型**

$$x = x_0 + v \cdot t \qquad\qquad x_{k+1} = x_k + v_k \cdot T$$

目标运动状态(一维)可构建为$X_k = [x_k, v_k]^T$，通常称为**系统状态**

离散状态模型可建模为$X_{k+1} = \boldsymbol{F} \cdot X_k$，实际中考虑运动过程噪声可建模为

$$X_{k+1} = \boldsymbol{F} X_k + W_k$$

其中$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $W_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{k,x} \\ \boldsymbol{w}_{k,v} \end{bmatrix}$为服从高斯分布的过程噪声

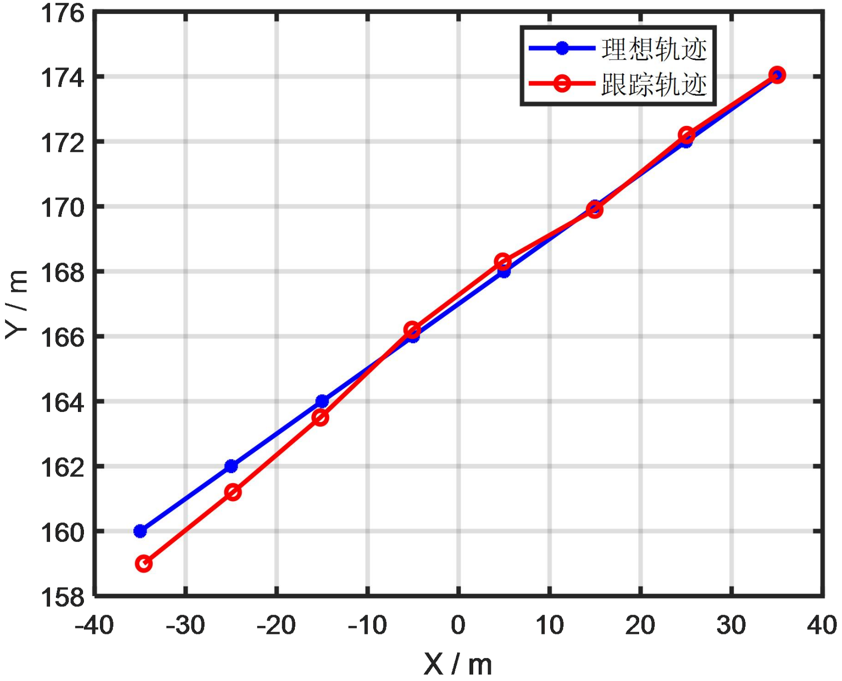
目标跟踪-目标状态建模

通常目标在三维空间中运动，目标运动模型为

$$X_{k+1} = \boldsymbol{F}X_k + W_k$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

目标运动状态可构建为$\boldsymbol{X}_k = [x_k, v_x, y_k, v_y, z_k, v_z]^T$



7.3 马尔可夫链中的状态分类

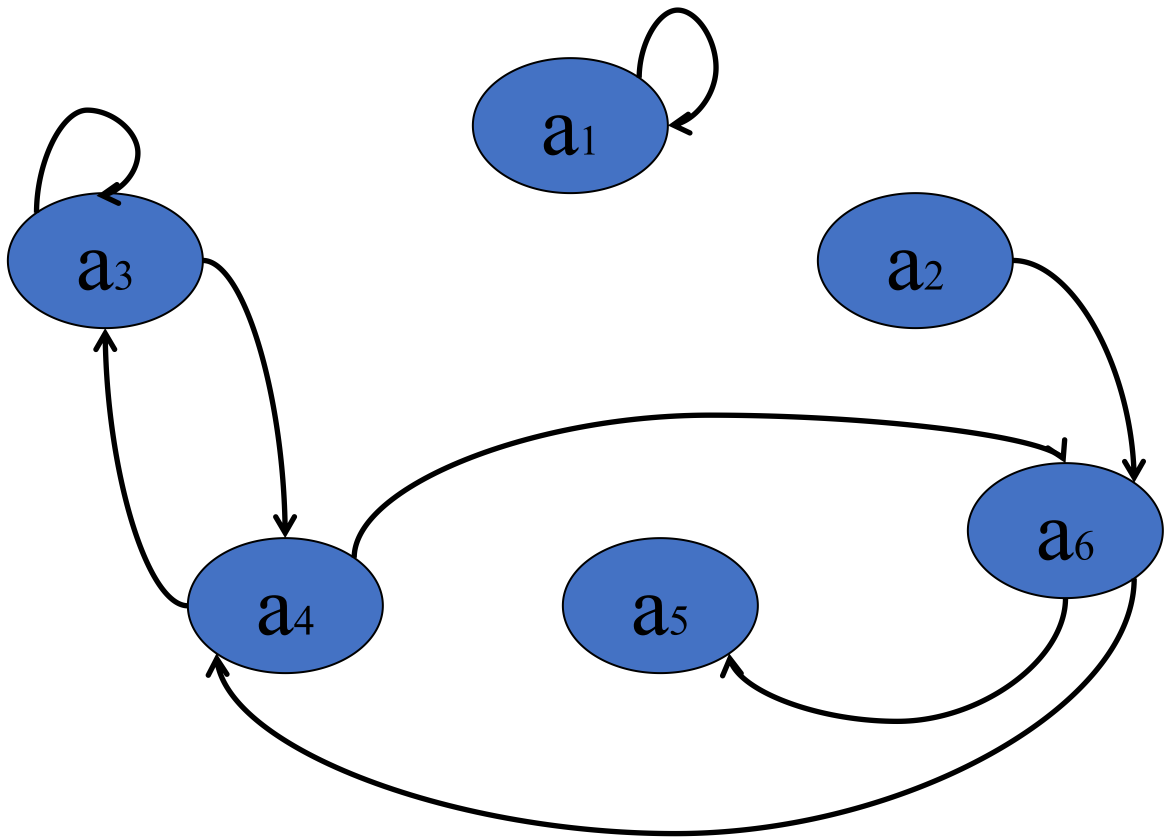
State classification in Markov chains

马尔可夫链中的状态分类

- ✓ **状态可达** 由状态i到状态j，$P_{ij}^{(k)} > 0$ ，记为 $i \rightarrow j$
- ✓ **定理** 由$i \rightarrow k$，$k \rightarrow j$，则$i \rightarrow j$
- ✓ **状态相通** 状态$i \rightarrow$状态j，且状态$j \rightarrow$状态I, 记为 $i \leftrightarrow j$
- ✓ **定理** 由状态$i \leftrightarrow$状态k，状态$k \leftrightarrow$状态j，则状态$i \leftrightarrow$状态j

马尔可夫链中的状态分类

例：试分析下图：



马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

对于任何两个状态i和j，在事件$\{X_0=i\}$上引入随机变量T

$$T_{ij}(\omega) \triangleq \min\{n : X_0(\omega) = i, X_n(\omega) = j, n \geq 1\}$$

T_{ij} ⟹ 从状态i出发，首次进入状态j的时间

使 $X_n = j$ 的最小正值n

$T_{ij}(\omega) = \infty$ ⟹ 终身等待

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定义：从状态i经过n步首次进入状态j的概率

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\}$$

对于 $n \in N_\infty$

有 $$f_{ij} = \sum_{n<\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n<\infty} P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\}$$

$$= P\{T_{ij} < \infty\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\{T_{ij} = \infty\} = 1 - f_{ij}$$

$$0 \le f_{ij}^{(n)} \le f_{ij} \le 1$$

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定理1:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

证明

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j \mid X_0 = i\} \\
&= P\{T_{ij} \le n, X_n = j \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{T_{ij} = v, X_n = j \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{T_{ij} = v \mid X_0 = i\} P\{X_n = j \mid X_0 = i, T_{ij} = v\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{T_{ij} = v \mid X_0 = i\} P\{X_n = j \mid X_0 = i, X_1 \ne j, \cdots X_{v-1} \ne j, X_v = j\} \\
&= \sum_{v=1}^{n} P\{T_{ij} = v \mid X_0 = i\} P\{X_n = j \mid X_v = j\} = \sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{n-v}
\end{aligned}$$

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定理2： $f_{ij} > 0 \iff i \to j$

推论： $i \leftrightarrow j \iff f_{ij} > 0$ 且 $f_{ji} > 0$

当 $i = j$ 时

$f_{ii} = 1 \Longrightarrow$ 状态i常返

$f_{ii} < 1 \Longrightarrow$ 状态i非常返，滑过的

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定理3：

如果状态j是常返的，则以概率1系统无穷次返回状态j；

如果状态j是非常返的，则以概率1系统只有有限次返回状态j。亦即系统无穷次返回状态j的概率为零。

推论：

$$Q_{ij} = \begin{cases} f_{ij} & j\text{为常返态} \\ 0 & j\text{为非常返态} \end{cases}$$

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定理4：

状态j为常返的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

如果状态j为非常返的，则 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{jj}} < \infty$

平均返回时间 $m_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$

$m_j < \infty$ 正常返态	$m_j = \infty \Big/ \frac{1}{m_j} = 0$ 零常返态

马尔可夫链中的状态分类

2、首次进入时间

定理5：

如果状态i，j是马尔可夫链两个相通的状态，则它们同为常返态，或同为非常返态。

定理6：

如果状态j是非常返的，则对每一个状态i， $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$

且对每一个状态i， $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

马尔可夫链中的状态分类

3、状态空间的分解

定义：

由一些状态组成的集合C，如果对任意的 $i \in C, j \notin C$

自状态i出发，不能到达状态j，则称状态集合C为闭集。

1、若单个状态形成一个闭集，则称这个闭集为吸收状态。

2、在一个闭集内，若不包含任何子闭集，则称该闭集为不可约的，这时所有状态之间都是相通的。

马尔可夫链中的状态分类

3、状态空间的分解

定理1：

在转移概率矩阵*P(n)*中，仅保留同类中各状态间的转移概率，将其他所有行和列都删去，则剩下一个随机矩阵，其中基本关系仍满足

$$\sum_{k\in C} p_{ik} = 1 \qquad i \in C \qquad p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{r\in C} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(m)}$$

这意味着有一定义在C上的马尔可夫子链，且这个子链可以不涉及所有其他状态而被独立地研究。

马尔可夫链中的状态分类

3、状态空间的分解

定理2：

所有常返状态构成一个闭集C。

定理3：

在一个马列尔可夫链中，所有常返状态可以分为若干个互不相交的闭集$\{C_n, n=1,2,3,\cdots\}$，且有：

（1）C_k中任二状态相通

（2）C_k中的任一状态和C_m中的任一状态，在 $k \neq m$ 时互不相通。

马尔可夫链中的状态分类

3、周期状态和非周期状态

定义：

称正整数集合$\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$的最大公约数 $G.C.D\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$

为状态i的周期，记之为d。或者说，状态i是具

周期d的周期性状态。

特别地，当d=1时，则称状态i是无周期的。

当 $\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$为空集时，不考虑$i$的周期。

非周期的正常返态称为遍历状态。

7.4 遍历性与平稳分布

Ergodic and stationary distribution

遍历性与平稳分布

1、遍历性

✓定义 设$\{X_n=i\}$为齐次马氏链，对一切状态i，j有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

其中，π_j为平稳分布

- $\pi_j \geqslant 0$
- $\sum_j \pi_j = 1$

遍历性与平稳分布

✓定理 对有限状态的齐次马氏链，若存在一个正整数m，使得对一切状态i，j有 $p_{ij}^{(m)} > 0$ ，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

且该马氏链是遍历的

- $\pi_j \geqslant 0$
- $\sum_j \pi_j = 1$

遍历性与平稳分布

2、平稳分布

✓定义 设$\{X_n=i\}$为齐次马氏链，概率分布p_i，满足

$$p_j=\sum_i p_i p_{ij} \quad j=0,1,2,\cdots$$

其中，p_j为平稳分布

- $p_j \geqslant 0$
- $\sum_j p_j = 1$
- $n\to\infty$时，$p_j=\pi_j$

遍历性与平稳分布

对于平稳分布，有

$$p_j = \sum_i p_i p_{ij} = \sum_i (\sum_k p_k p_{ki}) p_{ij} = \sum_k p_k (\sum_i p_{ki} p_{ij})$$

$$= \sum_k p_k p_{kj}{}^{(2)} = \cdots = \sum_k p_k p_{kj}{}^{(n)}$$

- 另外 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_n]$

  $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$

  则 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$

7.5 马尔可夫序列

Markov sequence

马尔可夫序列

✓定义 设一个随机序列X_n连续，有

$$F(x_n|x_{n-1},\cdots,x_1)=F(x_n|x_{n-1})$$

则称此随机序列为马尔可夫序列

其联合概率密度为

$$f(x_n|x_{n-1},\cdots,x_1)=f(x_n|x_{n-1})$$

➢齐次性 $f(x_n|x_{n-1})$ 与n无关

➢平稳性 对齐次过程有 $f(x_n)=f(x)$

马尔可夫序列

- 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

$$f(x_n|x_s) = \int f(x_n|x_r) f(x_r|x_s) dx_r$$

- 马尔可夫序列中，若已知现在，则过去和将来独立

$$f(x_n, x_s \mid x_r) = f(x_n \mid x_r) f(x_s \mid x_r) \qquad x_s < x_r < x_n$$

- 马尔可夫序列的逆也具有马尔可夫特性

$$f(x_1|x_2, \cdots, x_n) = f(x_1|x_2)$$

马尔可夫过程

$$f(x_n, x_s \mid x_r) = f(x_n \mid x_r) f(x_s \mid x_r)$$

证：

$$f(x_n, x_s \mid x_r) = \frac{f(x_n,\ x_s,\ x_r)}{f(x_r)}$$

$$= \frac{f(x_n \mid x_r) f(x_r \mid x_s) f(x_s)}{f(x_r)}$$

$$= \frac{f(x_n \mid x_r) f(x_r, x_s)}{f(x_r)}$$

$$= f(x_n \mid x_r) f(x_s \mid x_r)$$

马尔可夫过程

$$f\left(x_n \mid x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+k}\right) = f\left(x_n \mid x_{n+1}\right)$$

证：

$$f\left(x_n \mid x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+k}\right) = \frac{f\left(x_n,\ x_{n+1}, \cdots,\ x_{n+k}\right)}{f\left(x_{n+1}, \cdots,\ x_{n+k}\right)}$$

$$= \frac{f\left(x_n\right) f\left(x_{n+1} \middle| x_n\right) f\left(x_{n+2} \middle| x_{n+1}\right) \cdots f\left(x_{n+k} \mid x_{n+k-1}\right)}{f\left(x_{n+1}\right) f\left(x_{n+2} \mid x_{n+1}\right) \cdots f\left(x_{n+k} \mid x_{n+k-1}\right)}$$

$$= \frac{f\left(x_n\right) f\left(x_{n+1} \middle| x_n\right)}{f\left(x_{n+1}\right)} = \frac{f\left(x_{n+1}, x_n\right)}{f\left(x_{n+1}\right)}$$

$$= f\left(x_n \middle| x_{n+1}\right)$$

7.6 马尔可夫过程

Markov process

马尔可夫过程

- 定义
  - ✓ 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$
  - ✓ $F\{x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \cdots; x_1, t_1\} = F\{x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}\}$
- 理解
  - ✓ 有两个参量
  - ✓ 概率密度函数若存在，则

$$f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \cdots; x_1, t_1) = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

  - ✓ 转移概率分布和转移概率密度函数
  - ✓ 齐次马尔可夫过程

$$F\{y, t | x, s\} = F\{y, t-s | x\}$$

马尔可夫过程

- 切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

$$f(x_n,t_n|x_s,t_s)=\int f(x_n,t_n|x_r,t_r)f(x_r,t_r|x_s,t_s)dx_r$$

- 马氏过程的联合概率密度完全由一维和二维分布函数描述

$$f(x_n,t_n;\cdots;x_1,t_1)=\frac{\sum_{k=2}^{n} f(x_k,t_k;x_{k-1},t_{k-1})}{\sum_{k=2}^{n-1} f(x_k,t_k)}$$

- 马氏过程的逆也具有马尔可夫特性

$$f(x_1,t_1|x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=f(x_1,t_1|x_2,t_2)$$

马尔可夫过程

$$f(x_n,t_n;\cdots;x_1,t_1)=\frac{\sum\limits_{k=2}^{n} f(x_k,t_k;x_{k-1},t_{k-1})}{\sum\limits_{k=2}^{n-1} f(x_k,t_k)}$$

证：

$$f(x_1,t_1;\cdots;x_n,t_n)=f(x_n,t_n\,|\,x_{n-1},t_{n-1};\cdots;x_1,t_1)$$

$$f(x_{n-1},t_{n-1}\,|\,x_{n-2},t_{n-2};\cdots;x_1,t_1)\cdots f(x_1,t_1)$$

$$=f(x_1,t_1)\prod_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1},t_{k+1}\,|\,x_k,t_k)$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} f_2(x_{k+1},t_{k+1};x_k,t_k)}{\prod\limits_{k=2}^{n-1} f(x_k,t_k)}$$

作业

结合在工作或生活中的实例，给出随机过程在实际中的具体应用

作业

7.1，7.2，7.4，7.7，7.9

悟已往之不谏，知来者之可追。

——陶渊明