随机过程理论

Stochastic process theory

第六章 泊松随机过程

Poisson stochastic process

目录

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

6.1 泊松计数过程

Poisson counting process

6.1 泊松计数过程

问题：高考招生咨询可以帮助考生顺利报考，如何对考生前往招生点的过程建模分析，辅助各高校合理安排招生人员？

抽象

“顾客流”
考生

过程

“服务点”
招生点

建模

随时间变化进行计数

6.1 泊松计数过程

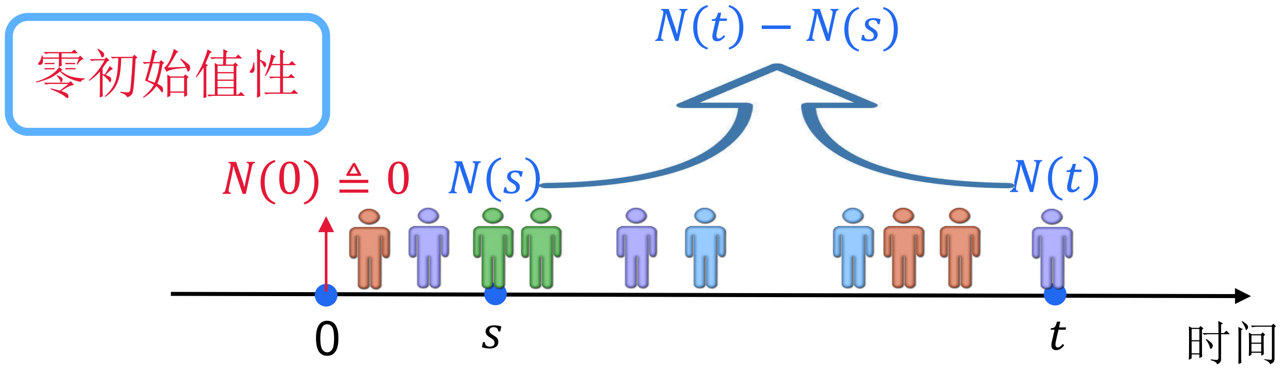
在时间$[0,+\infty)$内出现事件A的总数所组成的过程$\{N(t),t\geq 0\}$称为计数过程。计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$一般满足下列条件：

（1）$N(t)$是一个非负整数；

（2）$N(0)\triangleq 0$；

（3）如果有两个时刻点s,t，且$s<t$，则$N(s)\leq N(t)$；

（4）对于$s<t$， $N(t)-N(s)$代表在时间间隔$[s,t]$内出现事件A的次数。



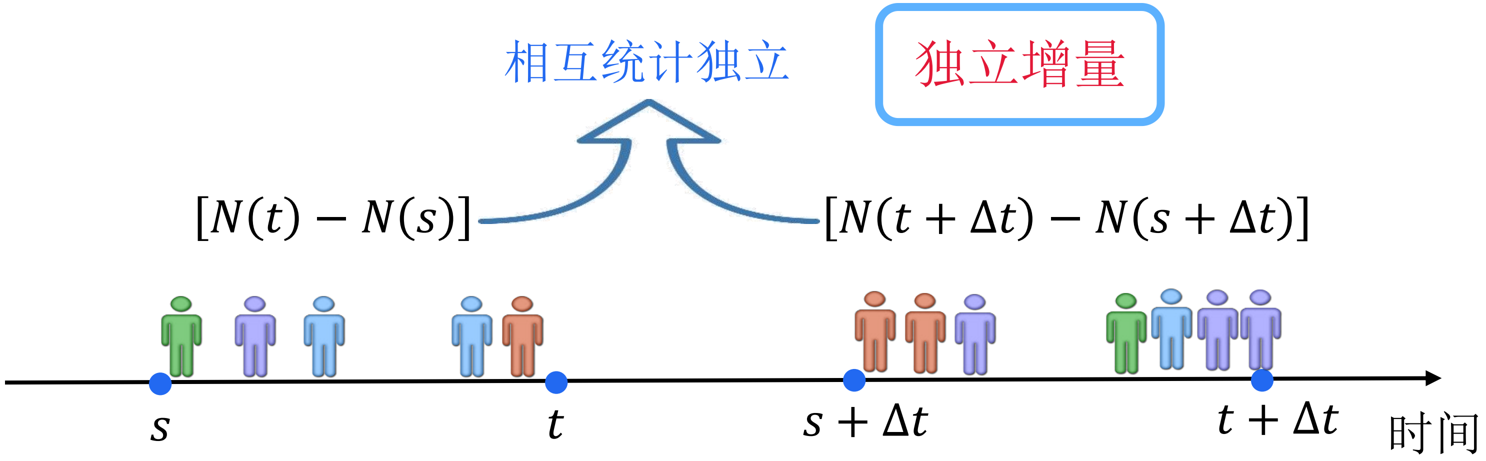
6.1 泊松计数过程

在计数随机过程中：

1. 设有两个不相重叠的时间间隔$[s,t]$和$[s+\Delta t, t+\Delta t], t \geq s \geq 0, \Delta t \geq 0$；

2. 在$[s,t]$内出现事件A的次数为$[N(t)-N(s)]$，在$[s+\Delta t, t+\Delta t]$内出现事件A的次数为$[N(t+\Delta t)-N(s+\Delta t)]$。

若$[N(t)-N(s)]$与$[N(t+\Delta t)-N(s+\Delta t)]$相互统计独立，则$\{N(t), t \geq 0\}$为独立增量计数过程。



6.1 泊松计数过程

在计数随机过程中：

对任意的$t \geq s \geq 0, \Delta t > 0$，增量$[N(t+\Delta t) - N(s+\Delta t)]$与$[N(t) - N(s)]$有相同的分布函数

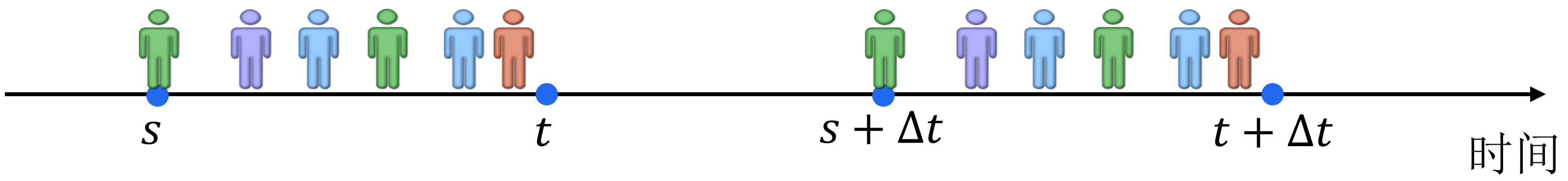
$$P\{N(t) - N(s) = k\} = P\{N(t+\Delta t) - N(s+\Delta t) = k\}, k \geq 0$$

即出现事件A的次数仅与时间差$(t-s)$有关，与起始时刻无关，则称$\{N(t), t \geq 0\}$为平稳增量计数过程。

相同的分布函数

平稳增量

$[N(t) - N(s)] = k$　　$[N(t+\Delta t) - N(s+\Delta t)] = k$

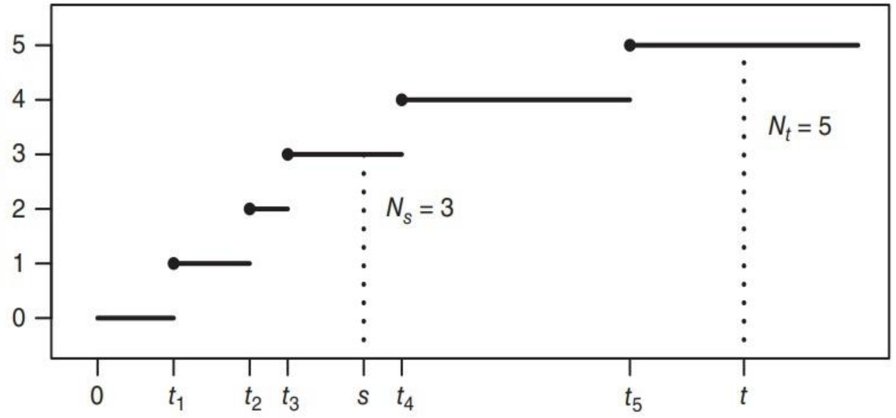


6.1 泊松计数过程

单跳跃性

在计数随机过程中，同一时刻至多只有一个计数增量，即

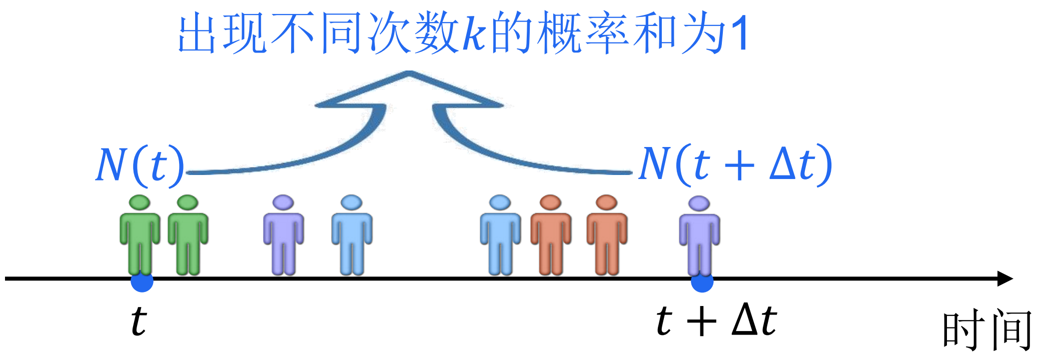
$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=k\}}{\Delta t} = 0, t \geq 0;$$



随 机 性

在计数随机过程中，时间间隔Δt内出现事件A的次数为k的概率$p, 0 < p < 1$是任意的，即令 $P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=k\} = p, 0 < p < 1$

且 $\sum_{k=0}^{\infty} P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=k\} = 1, \ t, \Delta t \geq 0$



6.1 泊松计数过程

设有一随机计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$，其状态仅取非负整数值，并满足下列条件：

零初始值性　独立增量　平稳增量　单跳跃性　随 机 性

则称计数过程为泊松过程。

问题1： $N(t)$ 如何计算呢？

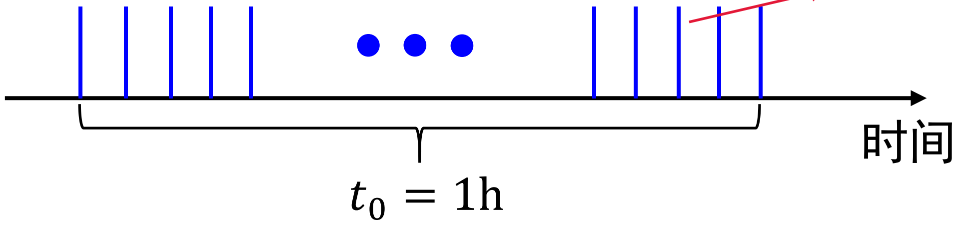
问题2：为什么叫泊松过程呢？

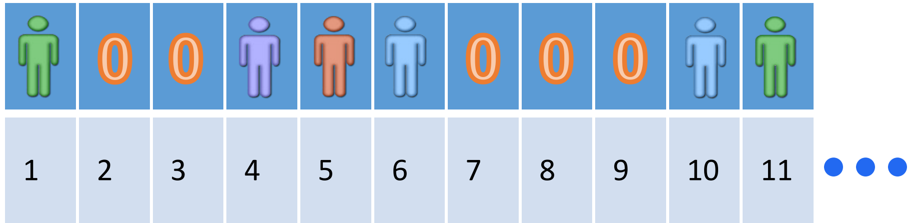
6.1 泊松计数过程

高考招生　以早上9点-10点一个小时为例进行分析

分析思路

将t_0切分为$n \to \infty$份　　每个时间段只有0/1名考生前往





适用于二项分布

$n \to \infty$次独立重复的伯努利试验会出现$k = 0,1,2,\cdots n$种结果，成功的次数$N(t_0)$服从的概率分布为

$$P[N(t_0) = k] = \lim_{n \to \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

高考招生 以早上9点-10点一个小时为例进行分析

分析思路 已知9点-10点$t_0 = 1h$内平均到达考生数，即$\lambda t_0 = np$

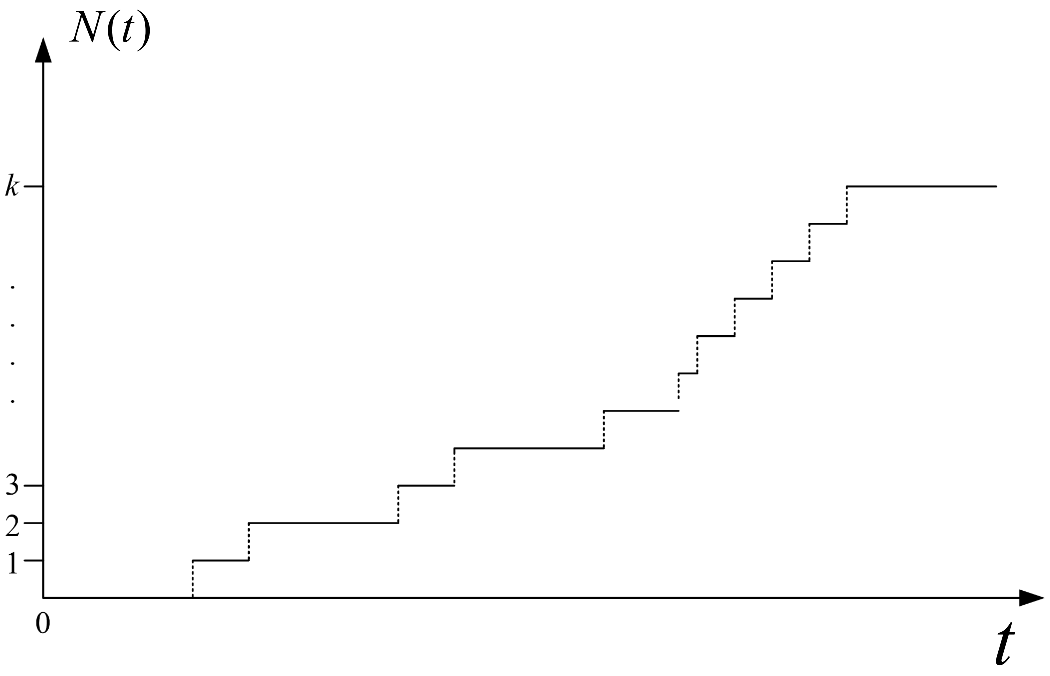
$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(N(t_0)=k) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda t_0}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t_0}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda t_0)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{=1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda t_0}{n}\right)^{n-k}}_{=e^{-\lambda t_0}} \\
&= \frac{(\lambda t_0)^k e^{-\lambda t_0}}{k!}, k=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

当时间间隔t_0为任意值t时，事件A出现k次的概率为：

$$\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$$

泊松过程概率分布

6.1 泊松计数过程



典型计数函数

在有限区间上泊松过程的样本函数是连续的，除在有限个点上以外还是处处可微的。

每个样本函数的形状都是阶梯函数，各阶步的长度为1，阶梯出现在随机时刻上。

所有可能的计数函数的集合，可用非负的、整数值的连续参数随机过程表示。

2、泊松计数过程

➢ 定理

若随机过程 $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ 为泊松过程，则在时间

$\{t_0, t_0+t\}$ 内事件A出现 k 次的概率为

$$P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$k=0,1,2,\cdots \quad t_0, t \geq 0$

$\lambda>0$ 为泊松过程的强度。

$$P\{N(t)=k\}$$

$$=P\{N(t)-N(0)=k\}$$

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

➢ 增量的概率

（1）求 $p_0(t_1,t_2)$

$$\begin{aligned} p_0(t_1,t_2+\Delta t) &= P[X(t_2+\Delta t)-X(t_1)=0] \qquad t_2>t_1 \\ &= P[X(t_2+\Delta t)-X(t_2)=0, X(t_2)-X(t_1)=0] \\ &= P[X(t_2+\Delta t)-X(t_2)=0]P[X(t_2)-X(t_1)=0] \\ &= [1-\lambda\Delta t-0(\Delta t)]\cdot p_0(t_1,t_2) \end{aligned}$$

$$p_0(t_1,t_2+\Delta t)-p_0(t_1,t_2)=[-\lambda\Delta t-0(\Delta t)]\cdot p_0(t_1,t_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp_0(t_1,t_2)}{dt_2}=-\lambda p_0(t_1,t_2) \qquad \Rightarrow p_0(t_1,t_2)=e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

6.1 泊松计数过程

（2）求 $p_k(t_1,t_2)$

$$
\begin{aligned}
& p_k(t_1,t_2+\Delta t) = P[X(t_2+\Delta t)-X(t_1)=k] \\
& = P[X(t_2)-X(t_1)=k, X(t_2+\Delta t)-X(t_2)=0] \\
& +P[X(t_2)-X(t_1)=k-1, X(t_2+\Delta t)-X(t_2)=1] \\
& +\sum_{s=2}^{k} P[X(t_2)-X(t_1)=k-s, X(t_2+\Delta t)-X(t_2)=s] \\
& = p_k(t_1,t_2)[1-\lambda\Delta t-0(\Delta t)]+p_{k-1}(t_1,t_2)[\lambda\Delta t+0(\Delta t)] \\
& +\sum_{s=2}^{k} p_{k-s}(t_1,t_2)0(\Delta t) \\
& \Rightarrow \quad \frac{dp_k(t_1,t_2)}{dt_2}=\lambda(p_{k-1}(t_1,t_2)-p_k(t_1,t_2))
\end{aligned}
$$

$$\frac{dp_1(t_1,t_2)}{dt_2}=\lambda(p_0(t_1,t_2)-p_1(t_1,t_2))$$

解

$$\Rightarrow p_1(t_1,t_2)=\lambda(t_2-t_1)e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$\frac{dp_k(t_1,t_2)}{dt_2}=\lambda(p_{k-1}(t_1,t_2)-p_k(t_1,t_2))$$

$$p_k(t_1,t_2)=\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

2、泊松计数过程

➢ 增量$N(t_0,t_0+t)=N(t_0+t)-N(t_0)$ 的数字特征

✓ 均值

$$E[N(t_0,t_0+t)]=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k(t_0,t_0+t)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}=\lambda t\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda te^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda t$$

2、泊松计数过程

✓ 均方值

$$
\begin{aligned}
E\left[N^2(t_0,t_0+t)\right] &= E\{N(t_0,t_0+t)[N(t_0,t_0+t)-1]+N(t_0,t_0+t)\} \\
&= E\{N(t_0,t_0+t)[N(t_0,t_0+t)-1]\}+E[N(t_0,t_0+t)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}+\lambda t=(\lambda t)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda t}+\lambda t \\
&= (\lambda t)^2+\lambda t
\end{aligned}
$$

✓ 方差

$$
D[N(t_0,t_0+t)]=E[N^2(t_0,t_0+t)]-\{E[N(t_0,t_0+t)]\}^2=\lambda t
$$

2、泊松计数过程

- 随机过程 $N(t)=N(t)-N(0)$ 的数字特征

✓ 均值 $E[N(t)]=E[N(t)-N(0)]=\lambda t$

✓ 方差 $D\left[N^2(t)\right]=D\left[[N(t)-N(0)]^2\right]=\lambda t$

✓ 均方值 $E\left[N^2(t)\right]=E\left[[N(t)-N(0)]^2\right]=(\lambda t)^2+\lambda t$

6.1 泊松计数过程

2、泊松计数过程

➢随机过程 $N(t)=N(t)-N(0)$ 的数字特征

✓相关函数

$$t_2>t_1 \quad R_N(t_1,t_2)=E[N(t_1)N(t_2)]$$
$$=E\{[N(t_2)-N(t_1)+N(t_1)]N(t_1)\}$$
$$=E\{[N(t_2)-N(t_1)]N(t_1)\}+E\{N^2(t_1)\}$$
$$=E\{[N(t_2)-N(t_1)][N(t_1)-N(0)]\}+D[N(t_1)]+\{E[N(t_1)]\}^2$$
$$=\lambda(t_2-t_1)\lambda t_1+\lambda t_1+(\lambda t_1)^2$$
$$=\lambda t_1(1+\lambda t_2)$$

$$t_1>t_2 \quad R_N(t_1,t_2)=\lambda t_2(1+\lambda t_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)}$$

6.1 泊松计数过程

2、泊松计数过程

➢随机过程 $N(t)=N(t)-N(0)$ 的数字特征

✓过程强度

$$\lambda=\frac{E[N(t)]}{t}$$

单位时间内事件A发生的平均次数

常称为泊松计数过程的速率

3、泊松脉冲列的数字特征

$$\text{泊松随机过程} \xrightarrow{\frac{d}{dt}N(t)} \text{泊松脉冲列}$$

$$\{N(t), t \in [0, \infty)\} \longrightarrow X(t) = \frac{d}{dt}N(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

泊松脉冲列的数字特征

- 均值 $$E[X(t)] = \frac{d}{dt}E[N(t)] = \lambda$$
- 相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2)$$

6.1 泊松计数过程

高 铁 问 题

2023年9月，“一带一路”标志性项目雅万高铁投入运营，全长142公里，共铺设使用了多组高速道岔。据其他高速道岔经验，平均3年发生2次故障，发生故障后设备更换购置期为30天，为保证99.99%的正常通行率，需要长期储备多少组该类高速道岔？

设$N(t) \geq 0$表示在$[0, t)$内高速道岔出现的故障数，为一泊松过程，其以天为时间单位的过程强度为

$$\lambda = \frac{2}{3 * 365} = 0.0018265$$

更换购置期（30天）出现故障的概率分布为

$$P[N(30) = k] = \frac{(0.0018265 \times 30)^k}{k!} e^{-0.0018265 \times 30},\ k = 0,1,2,\cdots$$

6.1 泊松计数过程

高铁问题

2023年9月，“一带一路”标志性项目雅万高铁投入运营，全长142公里，共铺设使用了多组高速道岔。据其他高速道岔经验，平均3年发生2次故障，发生故障后设备更换购置期为30天，为保证99.99%的正常通行率，需要长期储备多少组该类高速道岔？

购置期内K组道岔发生故障	购置期内K组道岔发生故障概率	满足购置期内K组抢修需要的保障率
0	$P[N(30)=0]=0.946679$	$P(0)=0.946679$
1	$P[N(30)=1]=0.051872$	$P(0)+P(1)=0.998552$
2	$P[N(30)=2]=0.001421$	$P(0)+P(1)+P(2)=0.999973$
3	$P[N(30)=3]=0.000026$	$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=0.999999$
…	…	…

为满足99.99%的保障率，需要长期储备2组高速道岔。

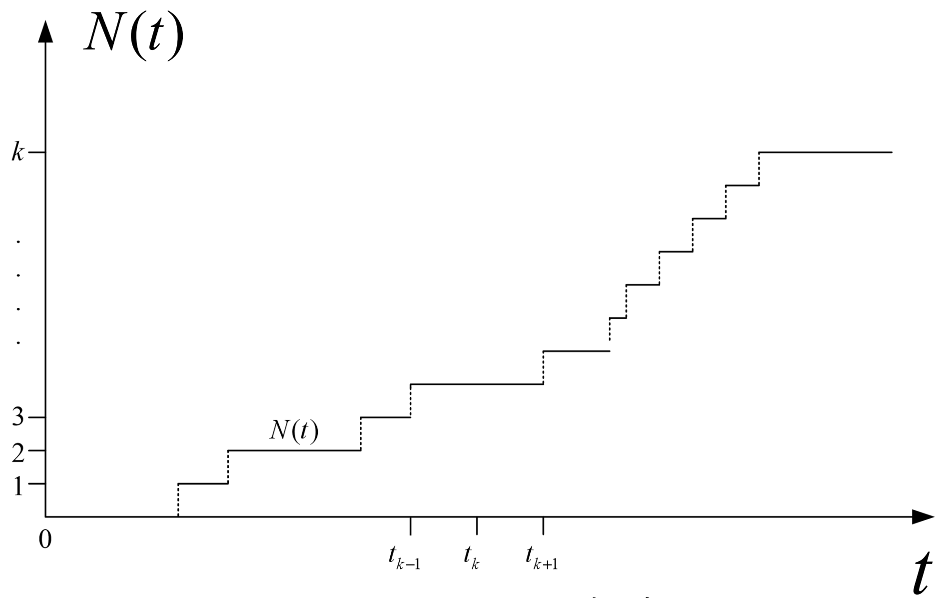
6.2 到达时间

Arrival time

6.2 到达时间

➢ 学习目的

计算给定的事件发生数所需要的时间长度，以及计算在给定的时间区间中所发生的事件数。



计数函数和到达时间

6.2 到达时间

- 定义

观测区间中出现第k个事件的发生时刻t_k为第k个事件的到达时间。

- 到达时间的分布函数

$$F_{T_k}(t) = P\{T_k \le t\}$$

$N(t)$ 概率分布 $\longrightarrow$ T_k概率分布函数

$$[N(t) > k-1] \xLeftrightarrow{\text{等价}} [T_k \le t]$$

$$P[T_k \le t] = P[N(t) > k-1] = 1 - P[N(t) \le k-1]$$

6.2 到达时间

$$P\left[T_k \le k\right] = 1 - P\left[N(t) \le k-1\right]$$

$$\longrightarrow F_{T_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k-1) \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

又有 $P[N(t) = j] = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$

$$\begin{aligned}\longrightarrow F_{T_k}(t) &= P[T_k \le t] = P[N(t) > k-1] \\ &= 1 - P[N(t) \le k-1] \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P[N(t) = j] \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\end{aligned}$$

6.2 到达时间

泊松计数过程第k个到达时间 T_k 的概率分布函数和概率密度:

$$F_{T_k}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

求导

$$f_{T_k}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

伽马分布

6.2 到达时间

➢ 到达时间的数字特征

✓ 均值

$$E[T_k]=\int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_k}(t)dt=\int_0^{\infty} t\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^{\infty} t^k e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{\lambda^{k+1}}=\frac{k}{\lambda}$$

✓ 均方值

$$E[T_k^2]=\int_0^{\infty} t^2\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}dt=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^{t} t^{k+1}e^{-\lambda t}dt$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\cdot\frac{(k+1)!}{\lambda^{k+2}}=\frac{(k+1)k}{\lambda^2}$$

✓ 方差

$$D[T_k]=E[T_k^2]-\{E[T_k]\}^2=\frac{k^2+k}{\lambda^2}-\frac{k^2}{\lambda^2}=\frac{k}{\lambda^2}$$

6.3 到达时间间隔

Arrival interval

- 定义

泊松计数过程中逐次到达的时间间隔的长度 Z_k 称为到达时间间隔。

$$Z_1 = T_1 - 0$$

$$Z_k = T_k - T_{k-1} \quad k = 2,3,4,\cdots$$

- 第k个到达时间间隔的概率分布函数

$N(t)$的概率分布 $\Longrightarrow$ Z_k的概率分布函数

$$\text{事件}\,[Z_k > z] \xleftrightarrow{\text{等价}} \text{事件}\,[T_k - T_{k-1} > z]$$

$$\Downarrow$$

$$[Z_k > z] = [(T_k - T_{k-1}) > z] = [T_k > T_{k-1} + z]$$

$T_{k-1}=t_{k-1}$（观测值）

$$\text{事件}\left[T_k > T_{k-1}+z \middle| T_{k-1}=t_{k-1}\right] \xleftrightarrow{\text{等价}} \begin{cases} N(t)\text{在}\left(t_{k-1},t_{k-1}+z\right)\text{内不变} \\ \left[N(t_{k-1}+z)-N(t_{k-1})=0\right] \end{cases}$$

$$P\left[Z_k > z \middle| T_{k-1}=t_{k-1}\right]=P\left[N(t_{k-1}+z)-N(t_{k-1})=0\right]$$

$$F_{Z_k}\left[z \middle| T_{k-1}=t_{k-1}\right]=1-P\left[N(t_{k-1}+z)-N(t_{k-1})=0\right] \xrightarrow{\text{平稳}} P\left[N(z)=0\right]$$

平稳

$$F_{Z_k}\left(z\right)=1-P\left[N(z)=0\right]$$

平稳条件下 $F_{Z_k}\left[z \middle| T_{k-1}=t_{k-1}\right]$ 与 t_{k-1} 无关

6.3 到达时间间隔

泊松计数过程具有平稳增量，各次事件间的到达时间间隔都具有相同的分布。

$$F_{Z_k}(z)=\begin{cases}1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots$$

求导

$$f_{Z_k}(z)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda z}, & z\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots$$

6.3 到达时间间隔

✓均值

$$E[Z_k] = \int_0^{\infty} z\lambda e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\lambda}$$

✓到达时间

$$T_k = \sum_{i=0}^{k} Z_i$$

6.4 到达时间的条件分布

Conditional distribution of arrival time

6.4 到达时间的条件分布

泊松过程 $\left\{N(t), t \in [0,\infty)\right\}$

- $[0,t]$ 内有一个事件A发生情况下到达时间的分布

$$
\begin{aligned}
& P\left[T_1 \le s \middle| N(t)=1\right] \\
&= \frac{P\left[T_1 \le s, N(t)=1\right]}{P\left[N(t)=1\right]} \\
&= \frac{P\left\{\text{在}[0,s]\text{内出现时间}A\text{一次，在}(s,t]\text{内不出现事件}A\right\}}{P\left[N(t)=1\right]} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

6.4 到达时间的条件分布

- $[0,t)$ 内有一个事件发生情况下到达时间的分布

$$\begin{cases} F_{[T_1|N(t)=1]}(s) = \dfrac{s}{t} \\ f_{[T_1|N(t)=1]}(s) = \dfrac{1}{t} \end{cases} \Longrightarrow$$

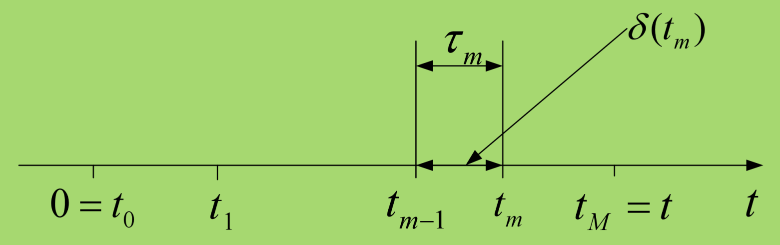
在 $[0,t)$内事件A出现一次，则该事件 A的到达时间在$[0,t)$内均匀分布

- 推论 $\longrightarrow k$个事件

泊松过程 $\{N(t), t\in[0,\infty)\}$，在 $[0,t)$ 内出现k个事件A ,则k个事件A的到达时间$\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$是一组 k $(k\geq 1)$维独立、同分布的随机变量所组成的顺序统计量，且每一随机变量均匀分布在 $[0,t)$ 内。

用$t_0,t_1,\cdots,t_M$ 将 $[0,t)$ 划分成M个子时间间隔

$t_0 \triangleq 0$， $t_M \triangleq t$， $\delta(\tau_m) \triangleq \left(t_{m-1},t_m\right)$



时间间隔的划分

在整个区间$[0,t)$发生k个事件A的假设下，在长度为 $\delta(\tau_m) m=1,2,\cdots$

的子时间间隔 τ_m,内发生k_m 个事件A的条件概率：

$$P\left[N_{\tau_1}=k_1,N_{\tau_2}=k_2,\cdots,N_{\tau_M}=k_M \middle| N_t=k\right]=\frac{k!}{t^k}\prod_{j=1}^{k}\tau_j$$

6.5 更新计数过程

Update count process

6.5 更新计数过程

- 设备更新问题

  ✓ t=0时刻安装某设备，使用至失效，被同类设备替换

  ✓ 任一设备寿命不受任何其它设备的影响

  ✓ 一部设备的寿命及其被另一部替换是相互独立，具有相同分布的随机变量

该问题相对应的计数过程为更新计数过程。

6.5 更新计数过程

➢ 更新计数随机变量的概率分布

到达时间间隔 $F_{Z_k}(z)$ ⟶ 更新计数随机变量 $F_{N_t}(i)$

$$F_{Z_k}(z) \text{ 给定}$$

$$\downarrow$$

$$\phi_Z(v)$$

$$\downarrow \quad T_i = \sum_{k=1}^{i} Z_k \text{ ，} Z_k \text{ 独立同分布}$$

$$\phi_{T_i}(v) = \phi_Z^i(v)$$

$$\downarrow \quad \text{傅立叶反变换}$$

$$f_{T_i}(t)$$

$$F_{T_i}(t)$$

$$\downarrow$$

$$F_{N_t}(i) = 1 - F_{T_{i+1}}(t)$$

假设更新计数过程的到达时间间隔具有负指数分布

5

$$\phi_{T_i}(v)=[\phi_T(v)]^i=\frac{1}{(1-jv/\lambda)^i}$$

6

$$F_{T_i}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

7

$$F_{N_t}(i)=1-F_{T_{i+1}}(t)=1-1+e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{i}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{i}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad i=0,1,2,\cdots$$

可见$N(t)$服从泊松分布

6.6 非齐次泊松过程

Non-homogeneous Poisson process

6.6 非齐次泊松过程

➤ 定义

计数过程 $\{N(t), t\in[0,\infty)\}$ 满足下列假设称为非齐次泊松过程。

✓零初始值性：$P\{N(0)=0\}=1$

✓独立增量过程

✓单跳跃：$P\{[N(t+\Delta t)-N(t)]=1\}=\lambda(t)\Delta t+0(\Delta t)$

$$\text{且}\quad \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}}{\Delta t}=0,\quad t\geq 0$$

✓ 随机性：$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}=p \qquad 0<p<1$

$$\text{且}\quad \sum_{k=0}^{\infty}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}=1 \qquad (t,\Delta t\geq 0)$$

6.6 非齐次泊松过程

➢ 定理

$\{N(t), t\in[0,\infty)\}$ 是非齐次泊松过程，则在时间间隔$[t_0, t_0+t]$内出现事件A为k次的概率为：

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}$$
$$=\frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds\right]^k\exp\left\{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds\right\}$$
$$=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}\exp\{-[m(t_0+t)-m(t_0)]\}\quad k\geq 0$$

式中 $m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

6.7 复合泊松过程

Compound Poisson process

6.7 复合泊松过程

➢ 定义

设 $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，$\{Y_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一组相互独立，具有相同分布的随机变量，且 $\{N(t)\}$ $\{Y_n\}$ 亦相互统计独立，令

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \quad t \geq 0$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ 称为复合泊松过程。

$Y_n = 1 \longrightarrow X(t)=N(t)$ 通常所说的泊松过程

Y_i离散 $\longrightarrow$ $X(t)$广义泊松过程

Y_i连续 $\longrightarrow$ $X(t)$复合泊松过程

➢数字特征

✓均值 $E[X(t)] = \lambda t E[Y]$

✓均方值 $E[X^2(t)] = (\lambda t)^2 \{E[Y]\}^2 + \lambda t E[Y^2]$

✓方差 $D[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$

作业

- 6.1(2)， 6.2 -6.4
- 6.13-6.15