《随机过程理论》

2022-2023 学年秋季学期期末考试试卷

考试日期：2022 年 12 月 23 日

注意事项：

1. 考试时间为 2 个小时
2. 本次考试为闭卷考试
3. 考试结束后立刻停止答题，并将答题纸拍照上传

一、简答题（本题 20 分，每小题 5 分）。

1. 两个随机过程独立、不相关和正交的定义，以及这三者之间的关系。
2. 复随机过程的均值、自相关函数的定义，以及复平稳过程的定义。
3. 简要说明高斯随机过程广义平稳与狭义平稳等价，不相关与独立等价。
4. 泊松过程的定义，并给出其均值、方差和自相关函数。

二、（本题 15 分） 设随机过程 $Z(t)=X\sin\omega_0 t+Y\cos\omega_0 t$，其中，$\omega_0$ 为常数，X 和 Y 是相互独立同分布的随机变量，它们分别以 $2/3$ 和 $1/3$ 的概率取值 -1 和 2。

1. 求 $Z(t)$ 的均值、方差及自相关函数；
2. 判断 $Z(t)$ 是否为广义平稳随机过程；是否为狭义平稳随机过程；
3. 判断 $Z(t)$ 均值的各态历经性。

三、（本题 15 分） 令复随机过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(U_i+V_i\right)\cos\omega_i t+\mathrm{j}\left(U_i-V_i\right)\sin\omega_i t\right]$，其中 ω_i 为大于 0 的常数，随机变量 U_i、V_i，$i=1,2,3,\cdots,n$ 相互独立，且 $\mathrm{E}\left[U_i\right]=\mathrm{E}\left[V_i\right]=0$，$\mathrm{D}\left[U_i\right]=\mathrm{D}\left[V_i\right]=\sigma^2$。

1. 求 $X(t)$ 的均值和自相关函数；
2. 证明 $X(t)$ 广义平稳；
3. 求 $X(t)$ 的自功率谱密度。

四、（本题 12 分） 令平稳随机过程 $X(t)$ 的均方导数为 $\dot{X}(t)$，希尔伯特变换为 $\hat{X}(t)$，请证明：

1. $\mathrm{E}\left[X(t)\dot{X}(t)\right]=0$，且 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 互不相关；
2. $\mathrm{E}\left[X(t)\hat{X}(t)\right]=0$。

五、（本题12分） 窄带平稳随机过程 $X(t)=X_C(t)\cos\omega_0 t-X_S(t)\sin\omega_0 t$，其中 $X_C(t)$、$X_S(t)$ 分别为其同相分量和正交分量。令窄带过程的自相关函数为 $R_X(\tau)=\dfrac{\sin B\tau}{B\tau}\cos\omega_0\tau$，且 $\tilde{X}(t)=X(t)+\mathrm{j}\hat{X}(t)$，其中 $0<B<<\omega_0$。

1. 求 $X_C(t)$ 的自相关函数；

2. 求 $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度 $S_{\tilde{X}}(\omega)$。

六、（本题 18 分）功率谱密度为 S_0 的高斯白噪声过程 $X(t)$，其经过某系统的输出 $Y(t)$ 为

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[X(\alpha)-X(\alpha-T)\right]d\alpha$$

其中 T 为大于 0 的常数。试计算：

1. 该系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$；

2. $Y(t)$ 的均方值和自功率谱密度；

3. $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互功率谱密度以及 $Y(t)$ 与 $X(t)$ 的互相关函数；

4. $Y(t)$ 的二维概率密度函数。

七、（本题8分）已知齐次马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1/2\\ 3/4 & 1/4 & 0\\ 0 & 3/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

其中 $0<p<1$，其状态空间为 $I=\{a,b,c\}$，初始分布为等概分布。求：

1. $P(X_{n+2}=c\,|\,X_n=b)$；

2. $P\left(X_1=a,X_2=b,X_3=c\right)$。