随机 2024-11-04 B3M104.

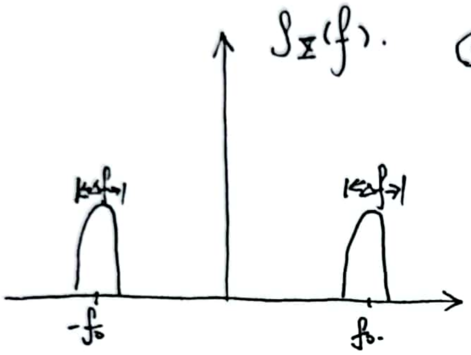
第四章 窄带随机过程

这门课程最早叫无线电信号处理（2系）.

电子信息工程学院，导航无线电 ⇒ 很多信号都是窄带信号：wifi、雷达、收音机

希尔伯特变换，相信大家一定会用到

窄带随机的概念：$B \ll f_0$. 10倍以上认为窄带



① f_0离0频率远：
- 更大的带宽
- ~~[illegible]~~
- 能量上更容易衰减.

窄带信号在波形上的特征：包络变化慢，载频很大

$S(t)=A\cdot\sin(\omega_0 t+\theta)$. ω很大的信号

设 $n(t)=A(t)\cdot\cos(\omega_0 t+\phi(t))$ 　把$A(t)$和$\cos(\omega(t))$组合.

$$= n_c(t)\cdot\cos(\omega_0 t) - n_s(t)\cdot\sin(\omega_0 t).$$

其中 $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 变化是快变部分 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 是慢变的.

- $n_c(t)$：同相分量.
- $n_s(t)$：正交分量.

A_k 可以用 S_n 表达出来.

目标：给出同相分量和正交分量的表达形式 ⇒ 都在基带位置，具有低频特性（最本质）.

$$n_c(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cdot\cos(k\Delta\omega t+\theta_k).$$

$$n_s(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_k A_k\cdot\sin(k\Delta\omega t+\theta_k).$$

期望等于零　$\sigma_{n_c}^2=\sigma_{n_s}^2=\sigma_n^2$ 求?

$$S_{n_c}(\omega)=S_{n_s}(\omega)=\begin{cases} S(\omega+\omega_0)+S(\omega-\omega_0) & |\omega|<B \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$E[n_c(t)n_s(t)]=0$.

随通机 2024-11-04 31|10年.

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_0 t-n_s(t)\sin\omega_0 t = A(t)\cos(\omega_0 t+\Theta(t)) \Rightarrow \begin{cases} A(t)=\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)} \\ \Theta(t)=\arctan\dfrac{n_s(t)}{n_c(t)} \end{cases}$$

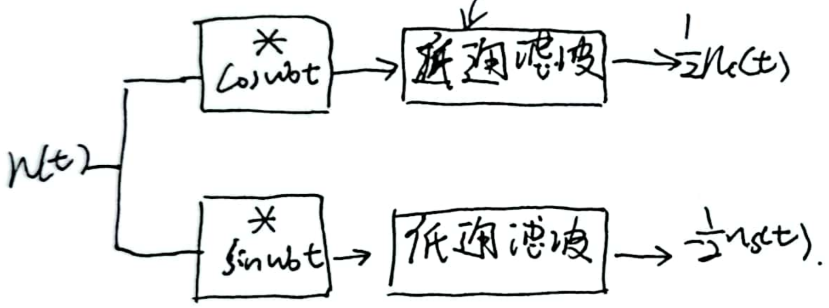
因此 $\{n_c(t), n_s(t)\}$ 可以和 $\{A(t), \Theta(t)\}$ 相互推导.

通常: $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 常服从高斯分布

此时 $A(t)$ 服从瑞利分布. $\Theta(t)$ 常服从均匀分布.

如何获取两分量.

正交分量会被平移到二倍频.



确定信号的复表示: 一个单通道信号变成双通道信号

多通道的用途 ① 纠错 ② 防截获

③ 抗辐噪技术: 宇宙中的芯片如何抗辐射.

复信号的优点: ① 某个不直观??

② 某个直观??

余弦信号的复数表示: $s(t)=a\cos[\omega_0 t+\varphi]$ 设 $\hat{s}(t)=a\sin(\omega_0 t+\varphi)$

组合. $\tilde{s}(t)=ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = s(t)+j\hat{s}(t)$

故. $$\begin{cases} s(t)=\frac{1}{2}\{ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}+ae^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\} \\ \hat{s}(t)=\frac{1}{2}\{ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}-ae^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\} \end{cases}$$

故 $$\boxed{S(\omega)=\pi[\tilde{a}\,\delta(\omega-\omega_0)+\tilde{a}^*\delta(\omega+\omega_0)] \quad \tilde{a}=ae^{j\varphi}}$$

随机 2024-11-04 讲M10本.

"第二节 双边 能量 希尔伯特":

设 $x(t)$ 是任意一个实信号 记 $\tilde{x}(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$ 是其复表示.

$\hat{x}(t)$ 是如何生成出来的. 以及生成的目的是什么.

① 把负频率上的能量移动到正频率, 总带宽变为一半
有利于采样. 采样带宽需要大于一倍带宽.
只需要一半的采样带宽. {第一个目的}.

我们已知. $\tilde{X}(\omega)=2X(\omega)u(\omega)$.

$$\downarrow$$

$$2x(t) * \tfrac{1}{2}\left[\delta(t)-\frac{1}{j\pi t}\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(t)+j\cdot\frac{1}{\pi t}\right]$$

$\delta(t)$：跳变. $\frac{1}{j\pi t}$：滤波

故. $\hat{x}(t)=x(t) * \frac{1}{\pi t}$.

※

$\frac{1}{\pi t}\leftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$. 故 $\hat{X}(\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)\cdot X(\omega)$.

希尔伯特变换: 每存在一个信号, 必然存在一个对称的信号存在.
复信号 (也叫解析信号) 带有相位信息

※ $\frac{1}{\mathrm{sgn}(\omega)}=\mathrm{sgn}(\omega)$.

设 $\hat{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的希尔伯特变换:
$$\begin{cases}\hat{x}(t)=x(t) * \frac{1}{\pi t}\\ x(t)=\hat{x}(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right).\end{cases}$$

{ 数学本质: 卷积运算.
物理意义: 90° 的移相器. ※

附加 2024-11-04 补充

$h(t)=\delta(t)+j\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H(\omega)=2U(\omega)$

希尔伯特变换性质:

顺时针旋转90°.(相位)

性质1 $F[\hat{x}(t)]=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)$ 最为重要的性质.

高频谱.

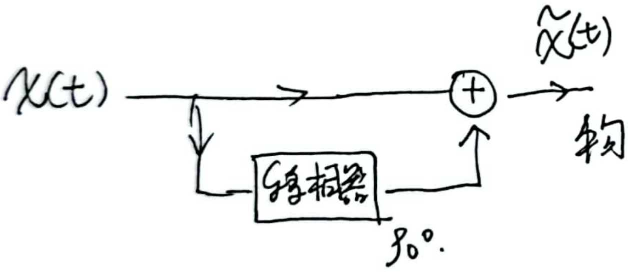
性质2 $H[\hat{x}(t)]=-x(t)$: 可以理解为做了两次90°的移相

性质3 低频调制性 $H[a(t)\cos\omega_c t]=a(t)\sin\omega_c t$

$\omega_c \gg B$ 时 $H[a(t)\sin\omega_c t]=-a(t)\cos\omega_c t$.

性质5 $\hat{x}(t)$ 和 $x(t)$ 功率相同. 能量保持

性质6. 正交性 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}x(t)\hat{x}(t)dt=0$. 利用傅里叶变换以及希尔伯特变换



物理器件上使用移相器实现希尔伯特变换.

性质4: 若 $y(t)=x(t)*v(t)$

※卷积交换律

$\hat{y}(t)=\hat{x}(t)*v(t)=x(t)*\hat{v}(t)$

$\hat{y}(t)=y(t)*\frac{1}{\pi t}$

$=x(t)*v(t)*\frac{1}{\pi t} = x(t)*\underbrace{\left(v(t)*\frac{1}{\pi t}\right)}_{\hat{v}(t)}$

$=\underbrace{\left(x(t)*\frac{1}{\pi t}\right)}_{\hat{x}(t)}*v(t)$

如何理解: 两个线性系统串联时, 是可交换的. 最终结果不变.

CamScanner

复随机变量: $X+jY=Z$

数字特征: $m_Z=E[X]+jE[Y]$

一切 复数计算二阶矩一定要加上共轭

均方差: $E[(Z-m_Z)(Z-m_Z)^*]=D[X]+D[Y]$ 能量没有相互耦合.

协方差: $E[(Z_1-m_{Z_1})(Z_2-m_{Z_2})^*]$

互不相关: 协方差=0. 或者 $E[Z_1Z_2^*]=E[Z_1]E[Z_2^*]$

正交. $E[Z_1 Z_2^*]=0$.

认为是两个变量

相互独立: $f(x_1,y_1;x_2,y_2)=f_{Z_1}(x_1,y_1)\cdot f_{Z_2}(x_2,y_2)$.

复随机过程: 类似于↑

自相关函数: $R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$

$$=R_X(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)+j[R_{YX}(t_1,t_2)-R_{XY}(t_1,t_2)]$$

6个性质 必要会证明 ⊗

常用的工具: 最大相关性问题.

思考 $Y=\hat{X}(t)$ 的情况

协方差函数 $C_Z(t_1,t_2)=\mathrm{cov}[Z(t_1),Z^*(t_2)]$

能不展开就不展开.

$$=E\{[Z(t_1)-m_Z(t_1)][Z(t_2)-m_Z(t_2)]^*\}$$

广义平稳: $E[|Z(t)|^2]<\infty$: 能量有限

$E[Z(t)]=m_Z$: 均值

$R_Z(\tau)$: 只与 τ 有关

$R_X(\tau)=R_{\hat{X}}(\tau)$

R_Z的4个性质: ① $|R_Z(\tau)|\le R_Z(0)$ ② ....

③ $R_Z(-\tau)=R_Z^*(\tau)$. ④ 非负定性.

随机 2024-11-04 主M101.　　卷积的三种写法是什么※、

H变换和.自相关函数.

$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$.　故 $R_{\hat{X}}(0)=R_X(0)$ 即具有相同的能量.

$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$　　$R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$.

※要会证明 $R_{X\hat{X}}(\tau)=R_{\hat{X}X}(-\tau)=-\hat{R}_X(\tau)$ 为奇函数.

缺少第二步的部分.　　由于 $R_X(\tau)$ 是偶函数.

※证明: 偶函数的希尔伯特变换是奇函数　　所以 $\hat{R}_X(\tau)$ 是奇函数.

{奇函数的希尔伯特变换是偶函数.

$R_{X\hat{X}}(0)=0$. (由于奇函数) 故 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 正交.

从 $R_{\hat{X}}(\tau)$ 看 $\hat{X}(t)$ 的特性. $w>0$. 有 4倍能量. $w<0$ 无能量.