·如何复习随机过程理论：(我个人并不记录离散型随机变量相关公式). 复习1

① 了解所有定理和性质的证明：要给出一句话证明思路，以PPT为主
② 背诵记必要的定义：尽可能给出直观的理解
③ 整理课上的所有例题：以自己的笔记为主，辅之以PPT
④ 完成指定的课后习题：给出尽可能直观的一句话思路

·概率论内容(五条) ① 条件概率的定义：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

② 条件概率的乘法公式：$P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)$

③ 全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$ 其中A_i不重不漏覆盖原空间

④ 贝叶斯公式(由果反因)：$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$

⑤ 事件独立的定义：$P(A_{i_1}, A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$
对$\forall k$均成立

·随机变量的数字特征：

① 期望：$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$.
在定义上要求 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<\infty$，否则称均值不存在
本质上是要求无论以何种求和顺序，表达式总收敛

② 方差：$D[X]=E[(X-E[X])^2]$
性质：$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2$：平方的平均数减去平均数的平方

③ 协方差：$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E[Y]]\}$

④ 相关系数：$r_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]}\cdot\sqrt{D[Y]}}$
性质 $-1\le r_{XY}\le +1$，证明：柯西不等式

· 特征函数：

① 定义：$\varphi(v)=E[e^{jvX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jvx}f(x)dx$

② 四个性质：I. $|\phi(v)|\le\phi(0)=1$ 证明：绝对可积分+放缩

II. $\phi_Y(v)=e^{jvb}\phi_X(av)$ 若 $Y=aX+b$

III. $\varphi_Y(v)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(v)$ 若 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ "变量和和特征函数积"

IV. $E[X^k]=j^{-k}\varphi^{(k)}(0)$ "原点k阶导数和k阶变量原点矩"

③ 高斯分布的特征函数 $\varphi_X(x)=\exp\{ja^Tv-\frac{1}{2}v^TCv\}$

证明思路待补充

· 作业 1.2-1.3．1.7 1.13．

1.18 1.36

· 对随机过程的理解

① 本质上相当于存一族样本函数 $x_i(t)$，每个函数有它相应被抽中

由于我并不知道会抽中所有 $x_i(t)$ 中的哪个，所以 $X(t)$ 为一个随机变量

② 数字特征：相当于每时刻是一个随机变量，這個该时刻随机变量的数字特征

所有数字特征都是确定性函数，本身不具有随机性

a. 基本数字特征

I. 均值 $m_X(t)=E[X(t)]$ 相当于信号在t时刻的直流分量

II. 方差 $\sigma_X^2(t)=D[X(t)]$ 相当于t时刻的交流功率

III. 均方值 $\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$ 相当于t时刻的总功率（等于直流功率+交流功率）

IV. 均方差 $\sigma_X(t)=\sqrt{D[X(t)]}$

b. 关键数字特征：在信号处理中起到至关重要的作用

自相关函数．互相关函数：$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$，$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$

自协方差函数．互协方差函数：协方差函数总能用相关函数求得（以及均值）

因此了解一个信号的关键就是计算相关函数

· 相互独立，正交，互不相关 ⇒ 三种关系性

复习：2

① 相互独立：概率密度等于边缘概率密度之积。

② 互不相关：$r_{XY}=0$，则称 X 与 Y 互不相关。

③ 正交：$E[XY]=0$，则称 X 与 Y 正交。

④ 相互独立和互不相关的关系：
- Ⅰ. 相互独立 ⇒ 互不相关
- Ⅱ. 对高斯随机变量而言 相互独立 ⇔ 互不相关

· 随机过程的四种分类~~思路~~维度：

① 按统计特性：平稳随机过程，非平稳随机过程

② 按记忆特性：纯随机过程（完全无记忆），马尔可夫过程，独立增量过程

③ 按概率分布：高斯随机过程，非高斯随机过程

④ 按功率谱特性：白噪声，有色噪声

我们并不能仅靠上述分类法完备地归类所有随机过程

这个分类法主要是用来教学方便，我们的课程主要关注：平稳，高斯，白噪声

· 狭义平稳与广义平稳：不提广义或狭义时默认认为讨论广义平稳过程

① 狭义平稳：任意高维分布函数 在任意点 有任意时间间隔的不变性（三组任意）

② 广义平稳：Ⅰ. $E[X(t)]<\infty$　Ⅱ. $m_X(t)$ 为常数　Ⅲ. $R_X(t_1,t_2)$ 只与 t_1-t_2 有关

二者关系：
- 原则上没有直接关系：因为狭义平稳过程可以不满足二阶矩存在，狭义可以不成广义
- 高斯随机过程 ~~因为~~ 广义和狭义平稳等价（有待证明）

· 平稳随机过程自相关函数的性质：
- 这里只关注广义平稳过程
- 6个重要性质

① 偶函数：$R_X(\tau)=R_X(-\tau)$ → 本质是交换律

② 极值性：$|R_X(\tau)|\le R_X(0)$ ：※ 本质上是柯西不等式

③ 特殊点：
- $R_X(0)=\sigma_X^2+m_X^2$ ：注意：平稳随机过程方差必然稳定（证明 用 $R_X(0)$ 即可）
- $R_X(\infty)=m_X^2$ ：证明：一般在工程上认为时间间隔无穷远就不能推出相关

5 ③. 2 分值.

④ $R_X(\tau)$ 处处连续的充要条件为零点处连续，⑤ 若存在周期，则 R_X 有同样周期

⑥ 非负定性 $\forall a_i, \forall t_i$ $\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)a_ia_j\ge0$ 总成立：能够写成正定二次型得证

联合平稳. 的定义及其互相关函数（回头再查笔记吧）.