随机过程理论 2024-09-23 正M101

随机变量的数字特征：特征函数

三个核心的数字特征：均值，方差，协方差

协方差矩阵的性质：设 $X_i, i=1,2\dots n$ 为一组随机变量。

设 C 为协方差矩阵，设 $\Lambda=[\alpha_1\dots\alpha_n]^T$ 是一个 n维列向量。

计算 $\Lambda^T C\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\cdot C_{ij}$ 其中 $C_{ij}=Cov(X_i,X_j)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(\alpha_i(X_i-m_i)\cdot\alpha_j(X_j-m_j))$$ 其中 $m_i=E(X_i)$.

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i(X_i-m_i)\cdot\alpha_j(X_j-m_j))\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(X_i-m_i))^2\right]\geqslant 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j$$

故协方差矩阵是非负定矩阵.(即非负定矩阵).

在降到信号处理中的应用. C 做对角化，其中较大特征值对应信号子空间

较小特征值对应噪声子空间.

回顾：二维高斯分布：$(x_1,x_2)\sim N(a_1,\sigma_1^2,a_2,\sigma_2^2;r)$.

上周证明了边缘分布和条件分布遵循高斯分布.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx=1$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\underbrace{\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1}-2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}_{\text{一个二次型}}\right\}$$

如何求 $E(X_1X_2)$.

二阶混合原点矩

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$$

$E(X_1|X_2)$ 条件期望

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{x_1|x_2}(x_1|x_2)\,dx_1\right]\cdot f(x_2)\,dx_2$$

※

而 $(x_1|x_2) \sim N\left[a_1 + r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-a_2),\ \sigma_1^2\sqrt{1-r^2}\right]$ $\quad \sigma_1^2(1-r^2)$ ※

$x_1 - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-a_1)$

$r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot x_2 - x_1 - a_1$

$(r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot a_2 - a_1)$.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \underbrace{x_2}_{\text{期望}}\left(a_1 + \underbrace{r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}_{\text{均方值}}(x_2 - \underbrace{a_2}_{\text{期望}})\right)\cdot f(x_2)\,dx_2.$$

$$= a_1 a_2 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(\sigma_2^2 - a_2^2) - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot a_2^2 = a_1a_2 + r\sigma_1\sigma_2.$$

$C_{X_1X_2} = Cov(X_1,X_2) = \underbrace{E(X_1X_2) - a_1a_2}_{\text{二阶中心矩}} = r\sigma_1\sigma_2$. 故 $r_{X_1X_2} = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}} = r$.

n维高斯分布的概率

二次型

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^T C^{-1}(x-a)\right\}.$$

一般分布：相互独立 ⇒ 互不相关

高斯分布：相互独立 ⇔ 互不相关.

如何证明高斯分布下互不相关推出相互独立.（首先不能只考虑二维）.

若互不相关则推出 C 是对角阵 则 $-\frac{1}{2}(x-a)^T C^{-1}(x-a)$ 是标准二次型.

特征函数：高阶混合矩的计算工具. ⇒ 本质上利用了傅里叶变换.

三大变换：傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z变换.

→ 描述随机变量统计规律的工具.

高斯分布　χ^2分布.

设 x_i $i=1,2,\dots,n$. 独立同分布 $x_i \sim N(0,\sigma^2)$.

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad y_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

一维特征函数：$\phi(v)=E[e^{jvX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jvx}dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jvx}f(x)dx$

傅里叶变换
$$\begin{cases} S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt \\ s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \end{cases}$$

ω：角频率

性质 $\begin{cases}\text{绝对可积} \Rightarrow \text{存在.}\\ \text{唯一性}\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{|S(\omega)|^2}_{\text{谱}}d\omega \Leftarrow \text{功率理解即可.}$$

→能量

概率密度函数与特征函数构成变换对：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(v)e^{-jvx}dv.$

以高斯分布为例：

$x\sim N(a,\sigma^2)$.

$$\phi(v)=E(e^{jvX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jvx}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underbrace{x^2-2ax+a^2-}_{\text{配方}}j2\sigma^2vx)\right\}dx$$

$$=\exp\left\{jav-\tfrac{1}{2}\sigma^2v^2\right\}$$

$x_i\sim N(0,\sigma^2)$.

故求 $y_1=\sum X_i$ 的性质.

$$\phi_{y_1}(v)=E(e^{jvY_1})=E\left\{\exp(jv\sum_{i=1}^{n}X_i)\right\}=E\left\{\prod_{i=1}^{n}\exp\{jvX_i\}\right\}=\prod_{i=1}^{n}E\{\exp(jvX_i)\}.$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\phi_{x_i}(v)=\left(\phi_x(v)\right)^n=\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sigma^2n\cdot v^2\right\}$$ 恰为 $D(x)=\sigma^2 n$ 的高斯分布

故 $y_1\sim N(0,n\sigma^2)$、也是高斯分布.

→也可看到 $f_{y_1}(y_1)=f_{x_1}(y_1)*f_{x_2}(y_1)\cdots*f_{x_n}(y_1).$

随机过程理论 2024-09-23 主M101

证明 $|\phi(\omega)| \le \phi(0) = 1$ $\quad \phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\nu x} f(x) dx$

$|\phi(\omega)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{j\nu x}|}_{=1} f(x) dx$

※ $Y = aX + b$ 则 $\phi_Y(\nu) = e^{j\nu b}\phi_X(a\nu)$.

※ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 则 $\phi_Y(\nu) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(\omega)$. X_i 独立时. $e^{j\nu x} = \cos(\nu x) + i\sin(\nu x)$.

证明 $E[X^k] = j^{(-k)} \cdot \phi^{(k)}(0)$ 证明思路：$\phi^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^k e^{j\nu x} f(x) dx$

故 $\phi^{(k)}(0) = j^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \cancel{e^{j\nu x}} dx$.

二维特征函数：

$e^{+j\sum_{i=1}^{2} \nu_i x_i}$

$$E[g(x_1,x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

n维高斯分布的特征函数：

待验证.

$$\phi(\omega_1,\dots,\nu_n) = E\{\exp(j\sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i)\} = \exp\{j\sum_{i=1}^{n} a_i\nu_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_i\sigma_k \nu_i\nu_k\}$$

~~$C_{ij} = \frac{E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)]}{\sigma_i\sigma_j}$~~

矩阵形式：

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} \exp(-j\nu^T x)\,\phi(\omega)\, d\nu$$

若 n个随机变量相互独立：则 $\begin{cases} f(x_1, x_2 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ \phi(\nu_1,\dots,\nu_n) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(\omega_i) \end{cases}$

例题：$y = \sum_{i=1}^{n} K_n \cdot x_i$ 设 x_i 为均匀分布. ~~$\sum_{i=1}$~~

所以证明 $n \to +\infty$ 时 y 趋近于高斯分布.

设：θ 为 $(0, 2\pi)$ 均匀分布 求 $y = \cos\theta$ 的分布函数.

随机过程概述：（随机信号分析，统计无线电）.

{ 陈景润（哥德巴赫猜想）. 侯振挺（长沙铁道学院）.

工科院校学生不能独立于应用学习随机过程.

信号的波动形式：$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$ $\omega=2\pi f$ 角频率

θ 每个人测 测都是随机的
（十个人测一次和一个人测十次？）

p.d.f

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故 $x=X(t_i)$：不同时刻本质上得到的是不同随机变量.

随机过程：随时间变化的随机变量.

熵：墓碑上记录玻尔兹曼方程：$S=k\ln W$.（核心：概率论）.

目录：{ 定义、分类
概率分布、数字特征.

$X(t)$：随机过程 $X(t_j)$：时刻固定.

$x_i(t)$：函数固定 $x_i(t_j)$：时一个、都…

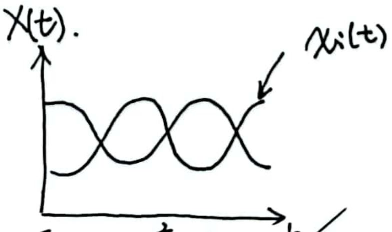
定义：随时间变化的一族随机变量.

{ 三元~~概率分布~~ (Ω, F, P) 和参数集 T.

总体集 概率 样本空间 样本空间中的所有事件

$\forall t\in T$ 在 (Ω, F, P) 上随机变量 $X(t,e)$, $e\in\Omega$. 则称、依赖于时间的一族……

$X(t,e)$：{ $X(t)$：随机过程.
$x_i(t)$：样本函数.



连续随机过程：t 和 e 都连续

{ 离散随机过程：e 离散 t 连续

连续随机序列：e 连续 t 离散

{ 离散随机序列：e 离散 t 离散

一维分布：$F_X(x,t)=P[X(t)\le x]$

$$f_X(x,t)=\frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$

二维分布函数：$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\}$

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

相互独立：$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=F_X(x_1,t_1)\cdot F_X(x_2,t_2)$.

例2.1 抛一枚硬币 ...（见相机）.

以下为单时刻抽样点的统计特性.

均值：$E(X(t))=\int_{-\infty}^{x} x f(x,t)\,dx = m_X(t)$.

例：求 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)$ 的均值.和2=阶矩. ※

均方值：$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$.

方差 $\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}$

均方差：σ_X.