2025年 01-05 复习 马尔可夫过程

转移概率：$P_{ij}(m,n) = P\{X_n = a_j \mid X_m = a_i\}$（$m$：条件，$n$：结果）

其中 $X_n$ 表示 $n$ 时刻系统所处的状态，$a_i, a_j$ 是某一状态。

基本转移概率：$P_{ij}(m,m+1) \overset{记作}{=} P_{ij}(m) = P\{X_{m+1} = a_j \mid X_m = a_i\}$

k步转移概率：$P_{ij}^{(k)}(m) = P\{X_{m+k} = a_j \mid X_m = a_i\}$

k步转移矩阵：$\mathbb{P} = \{P_{ij}^{(k)}(m)\}$

本质上与m取值无关（对齐次马尔可夫过程而言）

C-K方程：假设我会

马尔可夫链的任意有限维分布只与初始分布和基本转移概率有关

齐次马尔可夫过程：具有平移转移概率的马尔可夫过程

$\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^k$，即平移转移概率的马尔可夫链，k步转移矩阵为基本转移矩阵的k次方

马尔可夫链中状态分类：

① 可达：$i \to j$：$\exists k$ 使 $P_{ij}^{(k)} > 0$

② $i \to j, j \to k \Rightarrow i \to k$

③ 相通：$i \leftrightarrow j$：$i \to j$ 且 $j \to i$（互相可达）

④ $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

首次进入时间，$T_{ij}$：从i出发，第一次到达j所需要的时间（是随机变量）

$T_{ij} = \infty$：终生无缘，即从i出发，一直到不了j

$f_{ij}^{(n)}$：从i出发，恰经过n步后，第一次到达j的概率

$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\}$

$f_{ij}$：从i出发走无数步，能到达过j的概率　$f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}$　$f_{ij} = \sum_{n<\infty} f_{ij}^{(n)}$

转移概率和初次到达的关系：$p_{ij}^{(n)}=\sum_{v=1}^{n} f_{ij}^{(v)} \cdot p_{jj}^{(n-v)}$.

($i\neq j$) ← 需要吗，好像不用.

$f_{ij}>0 \Leftrightarrow i\to j$

当 $i=j$ 时 $f_{ii}=1 \Leftrightarrow f_{ii}^{(\infty)}=0$. 即常返（有限步 总能回到自己）：无穷次返回

$f_{ii}<1 \Rightarrow$ 滑过的：有限次返回.

初次返回时刻有限的概率为1.

$g_{ij}$ 是啥 ← 从 i 出发后无限次经过 j 的概率.

$$= \begin{cases} f_{ij} & j\text{常返} \\ 0, & j\text{滑过} \end{cases}$$

对非常返态 j：$\sum_{n=0}^{\infty} (1-f_{jj}) \cdot p_{jj}^{(n)} = 1$. 证明?

从 j 出发 n 步后 到达 j 的概率.

$f_{jj}$：有限次返回概率

状态空间分解：① 闭集：从内部出发无法到达任何外部状态.

② 吸收状态：不可约闭集.

③ 不可约闭集：不存在子闭集的闭集

不可约闭集中状态之间互相相通

马尔可夫链：一个状态集上的马尔可夫链

CK方程的齐次形式

任意定义 $\sum_{k} p_{ik} = 1$, $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{r} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(m)}$

所有常返态构成一闭集：换言之，常返态无法到达非常返态

状态周期 $d_i = GCD\{n: n\geq 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非周期 $\Leftrightarrow d=1$.