随机过程~~的数字特征~~：典型例子 $X(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\Theta)$. (*)

$f_A(a)$：服从瑞利分布

$f_\Theta(\theta)$：服从 0~2π 的均匀分布

给定一个 t_i 则 $X(t_i)$ 为一个随机变量.

分布情况 $F(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\dots)$

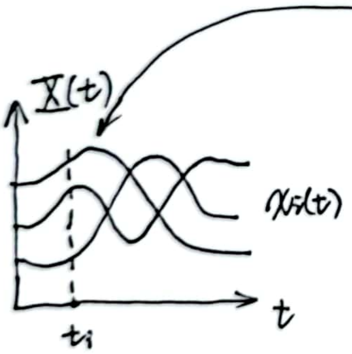
使用 描述.

求解 (*) 的一维分布情况，可以使用特征函数解决.

随机过程的数学期望：$m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,t)\,dx$

即每个时刻是个随机变量，这个随~的均值

某时刻的均值



例 求 (*) 的均值.

$$m_X(t)=E[X(t)]=E(A\cdot\cos(\omega_0 t+\Theta))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot\cos(\omega_0 t+\theta)\cdot f(a,\theta)\,da\,d\theta.$$

假设 A 和 Θ 独立：$=\int_{-\infty}^{+\infty} a f_A(a)\,da\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t+\theta)\,d\theta.$

均方差、均方根：$\sigma_X(t)$　　$=E(A)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot d\theta=0.$

方差：$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}=E[X^2(t)]-m_X^2(t)$

$=\psi_X^2(t)-m_X^2(t)$

均方值 $\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$

随机过程理论　2024-09-30　3M101　

$\nearrow E[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)dxdy.$

自相关函数：$R_X(t_1,t_2)=E(X(t_1)\cdot X(t_2))$　（二阶混合原点矩）

互相关函数：$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1),Y(t_2)]$

自协方差函数：$C_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)]\cdot[X(t_2)-m_X(t_2)]\}$

$=R_X(t_1t_2)-m_X(t_1)\cdot m_X(t_2).$

互协方差函数：$C_{XY}(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),Y(t_2))$　二阶混合中心矩.

例：求$X(t)$的方差．先求$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$

$2c^2-1=\cos 2\theta.$

$2c^2-1=\cos 2\theta$

$=E[A^2\cdot\cos^2(\omega_0t+\theta)].$

$=E[A^2]\cdot E[\cos^2(\omega_0t+\theta)]=\frac{1}{2}E(A).$

本章核心：$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[A^2\cos(\omega_0t_1+\theta)\cos(\omega_0t_2+\theta)]$

$=E(A^2)\cdot E\{(\cos\omega_0(t_1-t_2)+\cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\theta]\}$

!!

$=E(A^2)\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2).$

例：$Y(t)=X(t)+\phi(t)$　求$E[Y(t)]$　其中$\phi(t)$是高斯噪声.

相互独立：$F_{XY}(x,y;t_1,t_2)=F_X(x;t_1)\cdot F_Y(y;t_2).$

正交：$E[X(t_1)Y(t_2)]=0.$

互不相关：$C_{XY}(t_1,t_2)=cov[X(t_1),Y(t_2)]=0.$

注：相互独立$\Rightarrow$互不相关，反之不成立.

（差分GPS：消除系统误差．要求系统误差~~随时间变化~~不随时间变化．？）

例题：~~3个样本函数~~

统计特性：平稳随机过程 → 随时间推移特性不变

和非平稳随机过程.

记忆特性：纯粹随机过程（无记忆）.

马尔可夫过程：当前时刻只和前一时刻有关．马尔可夫链.

独立增量过程：$X(t_{i+1})-X(t_i)=\Delta X(t_i,t_{i+1})$ 相互独立的.

泊松过程．维纳随机过程．布朗运动

按概率分布：高斯随机过程：很多噪声服从高斯分布

非高斯随机过程.

功率谱特性：白噪声．带宽无限．能量~~谱~~恒定.

有色噪声.

主研究 平稳．高斯．白噪声.

① 狭义平稳随机过程.

平稳随机过程：$\forall n$，$\forall t_1,t_2,\dots,t_n$，$\forall \tau$.

$$F_X(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n)=F_X(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1+\tau,\dots,t_n+\tau)$$

$n=1$ 时．$F_X(x,t)=F_X(x,t-t)=F_X(x,0)$ 随与时间无关.

$n=2$ 时 $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=F_X(x_1,x_2;t_1-t_2)=F_X(x_1,x_2;\tau)$．只与时间间隔有关.

例：均值．方差不变.

自相关函数只与时间差有关.

② 广义平稳过程：二阶矩随机过程：$E[X^2(t)]<\infty$．即功率型信号（功率有限）. 能量不一定有限.

若均值为常数．且自相关函数只有时间差有关.

③ 用高阶矩度量一个广义平稳随机过程是否……

用高阶矩度量一个广义平稳随机过程是否是狭义平稳的

※ 简述二者关系：没有关系. 要注意 $E(X^2)<\infty$ 才行

总功率

点功率　微功率

$$\psi_X^2=\sigma_X^2+m_X^2$$

总功率　交流功率　直流功率

$\begin{cases}\text{狭义}+\text{功率有限}\Rightarrow\text{广义}\\ \text{广义}+\text{任意高阶矩恒定}\Rightarrow\text{狭义?}\end{cases}$

平稳随机过程的性质.

① 极值性 $|R_X(\tau)|\le R_X(0)$.　　$R_X(\tau)=E[X(t_1)X(t_2)]$　$\tau=t_1-t_2$.

$$\Big|E[\underbrace{X(t)}_{u}\underbrace{X(t-\tau)}_{v}]\Big|^2\le E[u^2]\cdot E[v^2]=R_X^2(0)$$

② 对称性：$R_X(\tau)=R_X(-\tau)$.

③ $R_X(0)=\sigma_X^2+m_X^2$　　$R_X(\infty)=m_X^2$.

认为 $\tau\to\infty$ 时 $X(t)$ 与 $X(t-\tau)$ 无关

※ 一般的周期函数的 R_X 一定是周期函数.

自相关函数连续的充要条件 $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 连续. ※

$$|R_X(\tau+\Delta\tau)-R_X(\tau)|^2=\cdots=\Big|E\{X(t)\cdot[X(t-\tau-\Delta\tau)-X(t-\tau)]\}\Big|^2$$

$$\le E[X^2(t)]\cdot E[X^2(t-\tau-\Delta\tau)-2X(t-\tau-\Delta\tau)\cdot X(t-\tau)+X^2(t-\tau)]$$

$$=2R_X(0)\cdot[R_X(0)-R_X(\Delta\tau)].$$

周期性: $R_X(T)=R_X(0)$ ⇒ 自相关函数为周期函数. (未证明).

※ 样本轨迹周期 ⇔ R_X 周期.

※ 非负定性: $\sum_{i,j=1}^{n} R(\tau_i-\tau_j)\cdot a_i a_j \geq 0$. ← 谱估计中常用.

任意实数

τ_i 为任意实数.

证.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\cdot a_i\cdot a_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E[a_i X(\tau_i)\cdot a_j X(\tau_j)]$$

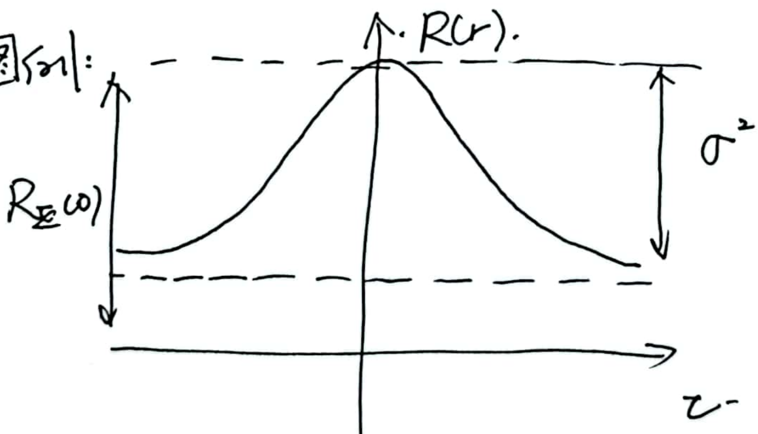
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i X(\tau_i)\cdot a_j X(\tau_j)\right]$$

$$= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X(\tau_i)\right]^2\right\} \geq 0.$$

令 $\Lambda=[a_1,\dots,a_n]^T$ $R=[r_{ij}]_{n\times n}$. 由于 R_X 的偶函数 ∴ $R=R^T$.

原式 $=\Lambda^T R\Lambda \geq 0$. 说明 R 非负定

自相关函数的图例:



我们基本上只研究平稳随机过程.

联合平稳: 各自广义平稳. 且 ~~[illegible]~~ 满足 $R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t-\tau)]$.

性质: $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$.

$$\begin{cases} |R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0) \\ |C_{XY}(\tau)|^2 \leq \sigma_X^2\sigma_Y^2 \end{cases}$$

相关系数：

$$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}=\frac{R_X(\tau)-R_X(\infty)}{R_X(0)-R_X(\infty)}\geq 0.$$

绝对值 ≤ 1 (别证明). 相关系数 $<5\%$ 认为不相关.

相关时间： $\tau_0=\int_0^\infty r_X(\tau)\,d\tau$. ???

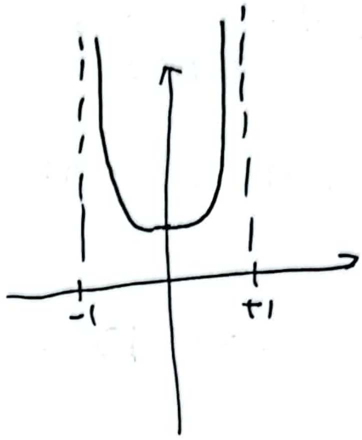
自相关函数： $R_X(\tau)=E[X(t)X(t-\tau)]$ ※ 核心.

思考题：互相关表征.

例题：如何判断广义平稳的函数.

设 $\cancel{f(\theta) = \int_{0}^{2\pi} e^{\cos\theta} d\theta}$

∴ $\cancel{f'(\theta) = \int -\sin\theta \cdot e^{\cos\theta} d\theta}$



∴

$$\frac{e^{u}}{\sqrt{1-u^2}} = y \qquad y^2 = \frac{e^{2u}}{1-u^2}. \qquad (1-u^2)y^2 = e^{2u}.$$

$$\ln(1-u^2)\cdot\ln(y^2) = 2u \qquad ∴ \quad u = \sqrt{1-v^2}$$

∴