随机 2024-11-11 3M101

1.

同向分量与正交分量 { 低频 正交 功率相同 均值为零

低频
正交
功率相同
均值为零

希尔伯特变换 { 数学内涵、物理意义 6个性质要会证明 ← 会考
目的：构成复随机变量 减小复杂度
物理：90°移相器

带通实平稳随机过程

复随机过程：$\tilde{X}(t)=X(t)+j\hat{X}(t)$ ← 奇函数

$$\left\{ R_{\tilde{X}}(\tau)=R_X(\tau),\ R_{\hat{X}X}(\tau)=\hat{R}_X(\tau)=-R_{X\hat{X}}(\tau) \right.$$

窄带：$\omega_0 \gg B$.

分解：$X(t)=A(t)\cdot\cos(\omega_0 t+\phi(t))=X_c(t)\cos(\omega_0 t)-X_s(t)\sin(\omega_0 t)$.

可解 X_c 和 X_s.

强耦合.

$$\begin{cases}A\\ \Phi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X_c\\ X_s\end{cases}$$ 幅度相位 ⇔ 同向分量正交分量 ⇔ 变量与其希尔伯特变换

最核心的式子

设 $n(t)=\cancel{X(t)\cos}\ X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\cancel{\cos\omega_0}\sin\omega_0 t$ 是为了表示 $\hat{n}(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} &\Big\downarrow H \qquad\qquad \Big\downarrow H \\ \hat{n}(t)&=X_c(t)\sin\omega_0 t+X_s(t)\cos\omega_0 t \end{aligned}\right.$$

↑ 低频特性不变

故 $$\begin{cases} X_c(t)=\dfrac{n(t)\cdot\cos\omega_0 t+\hat{n}(t)\sin(\omega_0 t)}{} \\ X_s(t)=-n(t)\sin\omega_0 t+\hat{n}(t)\cos\omega_0 t\end{cases}$$

会考证明

奇函数

性质：$R_n(t)=R_{\hat{n}}(t)$

$R_{\hat{n}n}(t)=\hat{R}_n(t)=-R_{n\hat{n}}(t)$

求 $R_{nc}(\tau)$ 和 $R_{ns}(\tau)$

$R_{nc}(\tau)=R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau$ 故信号的自相关函数可以求得

同向分量的自相关函数

某种意义上可以证明常态的信号保平稳.

$R_{nc}(0)=R_n(0)$. 由于 $R_{nc}(0)$ 对应信号均值为零. 故 $R_{nc}(0)$ 也是方差 ← 保方差.

$R_{ns}(\tau)=R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau=R_{nc}(\tau)$

同相分量与正交分量有相同的自相关函数

① 原信号（窄带）为平稳随机. 则 n_s 和 n_c 也为平稳的平稳随机过程

② R_n, R_{nc}, R_{ns}：具有相同的功率谱密度

同相分量和正交分量的互相关函数（证明：转化和充）.

$R_{ncns}(\tau)=R_n(\tau)\sin\omega_0\tau-\hat{R}_n(\tau)\cos\omega_0\tau$ 也是可以表示的

在 $\tau=0$ 时 $R_{ncns}(\tau)=0$ ⇒ 同向分量和正交分量在同时刻 有 $E[\xi_c(t)\xi_s(t)]=0$

即 两个随机变量相互正交

① $n(t)$ 和 $\hat{n}(t)$ 相互正交 - - - —— ·

② $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 相互正交 - - —— - -

③ 经过微分系统的输入和输出：相互正交且互不相关.

※都要会证明.

同理：一个信号的自相关函数也能够由同向分量和正交分量的互相关表示出来

$R_n(\tau)=R_{nc}(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{ncns}(\tau)\sin\omega_0\tau$.

$$G_{nc}(\omega)=\begin{cases} G_n(\omega-\omega_0)+G_n(\omega+\omega_0) & |\omega|<B \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

具有低频特性，互功率谱同理(要会证)。

考试的时候直接写。

$R_{nc}(\tau)=R_{ns}(\tau)$ 故 $G_{nc}(\omega)=G_{ns}(\omega)$ 对 R_{nc} 做变换

$$G_{nc}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{nc}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

写成exp.分解。

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R_n(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_n(\tau)\sin\omega_0\tau\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

希尔伯特变换
低通性

互功率谱密度 也能写成类似的形式

$$G_{ncns}(\omega)=-G_{nsnc}(\omega)=\begin{cases} -j\left[G_n(\omega-\omega_0)-G_n(\omega+\omega_0)\right] & |\omega|<\omega_0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

实功率谱会变成复功率谱

思考：设 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{j\omega_k t}$ 在何种情况下是广义平稳随机过程

① A_i, A_j 之间的相互独立

※ 回去推

第五章 高斯随机过程

互相独立 互不相关的关系

随机过程的分类：① 平稳 ② 记忆角度 ③ 高斯的/非高斯
④ 白噪声和有色噪声

随机 2024-11-11   3M101.

高斯随机过程的特点：① 常见 中心极限定理

② 易于处理：由均值和协方差描述

广义平稳 ⇒ 狭义平稳

线性变换后仍知道服从高斯分布

分布可能发生改变（均值/协方差会变）

能量有限，广义 ⇒ 狭义

一维高斯分布：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} m_X=a \\ \sigma_X=\sigma \end{array}\right.$

$E[e^{j\omega X}]$

特征函数：$\varphi(\omega)=\exp\left\{ja\omega-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right\}$ ※ 配平方来证明即可

⇕

带有系数变化的傅里叶逆变换

① 自相关函数 ⇔ 功率谱

② 冲激响应 ⇔ 线性系统

③ 特征函数 ⇔ 概率密度

三对互为变换对的东西。

归一化：$Y=\frac{X-a}{\sigma}$ 有利于提高解题速度，有利于查标准高斯分布的表

二维高斯分布：多维的体现在矩阵

$\varphi(\omega_1\cdots\omega_n)=\exp\left\{j\sum a_i\omega_i+\frac{1}{2}\sum\cdots\right\}$

※ 特征函数

$f(x_1,\cdots x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{|\Sigma|}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^T\Sigma^{-1}(x-a)\right\}$

可分 ⇔ 相互独立

当高斯分布 $r=0$ 时，相互独立，概率密度函数可拆分。

对变量分布不独立

单变量的不相关

（一般的随机变量 相互独立 ⇒ 互不相关）

※ 求高斯过程 经过微分器后的与输入的互相关函数 ⇐

分析 n 和 $\dot{n}$ 的互相关性 n_c 和 n_s 的互相关性

设 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ $\mathbb{C}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$

协统.

其中 $r=\dfrac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}$

求 $|\mathbb{C}|=\sigma_1^2\sigma_2^2-r^2\sigma_1^2\sigma_2^2$

$$\mathbb{C}^{-1}=\frac{1}{|\mathbb{C}|}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2\\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix}$$

二次项. $$(x-a)^T\mathbb{C}^{-1}(x-a)=\frac{1}{|\mathbb{C}|}(x_1-a_1,\ x_2-a_2)\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2\\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-a_1\\ x_2-a_2\end{bmatrix}$$

$$\overset{?}{=}\frac{1}{1-r^2}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

故 $$f_X(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|\mathbb{C}|^{\frac12}}\cdot\exp\left\{-\frac12(x-a)^T\mathbb{C}^{-1}(x-a)\right\}$$ 要求熟练掌握

计算协方差矩阵是得到 $f_X(x)$ 的关键.

二次型.

特征函数 $\varphi_X(v)=\exp\left\{ja^Tv-\frac12 v^T\mathbb{C}v\right\}$

n维高斯分布: $x=(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$ "形式一致"

$a=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)^T$

$\mathbb{C}=(C_{ij})_{n\times n}$ $C_{ij}=Cov(X_i,X_j)$

证明 $\int_{R^n} f_X(x)\,dx = 1$　∵ C为正定矩阵 ∴ L非奇异使 $C = L\cdot L^T$

↓

$$C^{-1} = (L\cdot L^T)^{-1} = (L^{-1})^T\cdot(L^{-1})$$

令 $\underline{y = L^{-1}(x-a)}$ 故 $x = L\cdot y + a$

雅可比行列式 $\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = |L| = |C|^{\frac{1}{2}}$

故 $$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^T\cdot C^{-1}\cdot(x-a)\right\}dx$$

换元 $$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}y^T\cdot y\right\}\cdot\underbrace{|C|^{\frac{1}{2}}\,dy}_{\text{雅可比行列式}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}y_i^2\right\}$$ 其中每一项都是标准维高斯分布

互不相关与相互独立等价：互不相关 ⇒ C是对角阵

故 $C = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & \sim\\ & \ddots & \\ \sim & & \sigma_n^2\end{bmatrix}$　$C^{-1} = \begin{bmatrix}\sigma_1^{-2} & & \sim\\ & \ddots & \\ \sim & & \sigma_n^{-2}\end{bmatrix}$

于是 $$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^T C^{-1}(x-a)\right\} = \cancel{\exp}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}$$

可拆分性证明相互独立.

一些性质：多维高斯分布的边缘分布仍然服从高斯分布 ← 用特征函数证明

↓

$\underline{取其它 v=0}$ ※

证明n维高斯分布做任意线性变换得到的还是一个高斯分布

设 $Y = LX$. 求Y的均值和协方差.

↳ $\underline{C_{新} = LCL^T}$ ※　　$\underline{a_{新} = La}$ ※

$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

若. $x(t)$ 服从高斯特性 且为窄带信号

则 $\tilde{x}(t)$ 仍为窄带信号 且具有高斯特性

$N(0, \delta^2)$

注意: 这里还是 $N(0, \delta^2)$ 但是 $L = \frac{1}{\pi t}$ 不能用 LCL^T 算方差

思考. $\tilde{x}(t)$ 的能量如何计算.