

马尔可夫链和马尔可夫过程 (最后一章) { 一次习题课
一次总答疑

马尔可夫链: 时间离散的随机序列
如何使用前状态预测目标未来状态
{ 应用: 预测 (例如语言模型预测, 导弹拦截)

随机过程按记忆特性分类 { 纯粹无记忆: 不考虑任何历史状态
马尔可夫过程: 考虑上次历史状态 (一阶马过程)
非马尔可夫过程: 考虑之前所有历史状态.

一阶马尔可夫过程是一个二维问题
马尔可夫过程的内涵: $P\{X_n = a_n | \text{给定全部历史}\} = P\{X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1}\}$ 给定最近一次

一句经常提但数学上不严谨的话: 未来的时刻只与当前时刻有关, 而过去时刻无关
{ 如果将这里的有关理解为相互独立, 那就是错的.

定义: { 时间离散, 状态有限 $S = \{a_1, \dots, a_n\}$
 $P\{X_n = a_n | \text{给定全部历史}\} = P\{X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1}\}$

转移概率: 如何用当前状态预测未来状态.

{ 转移概率: $P_{ij}(m, n) = P\{X_n = a_j | X_m = a_i\}$. $0 \leq P \leq 1$
步数: $n - m$ ($n > m$).

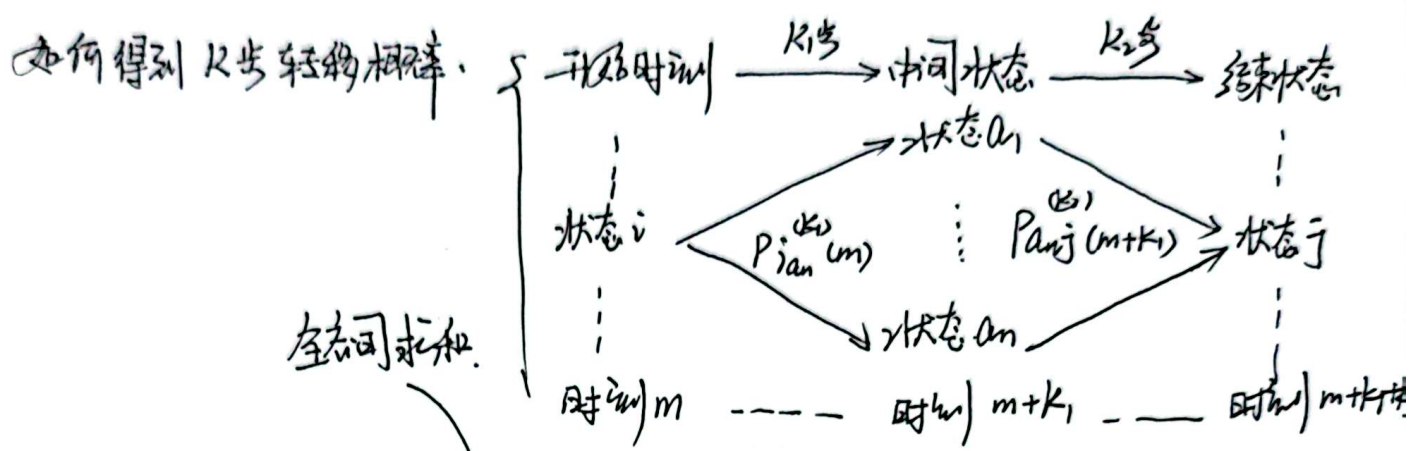
{ 基本(一步)转移概率: $P_{ij}(m) = P_{ij}(m, m+1)$

{ k 步转移概率: $P_{ij}^{(k)}(m) = P_{ij}(m, m+k)$

{ k 步转移矩阵: $P = \{P_{ij}^{(k)}(m), i, j \in S\}$ 转移矩阵的大小取决于 $|S|$
{ 每行元素和为 1
每列和不一定为 1

随机 2024-12-09 21:10

切普曼-柯尔莫哥洛夫(CK)方程: 如果预测较长时间后的状态怎么做
 松弛过程时间 \uparrow , 方差越大 \leftarrow 为什么时间间隔减小, 预测越准确



CK方程:
$$P_{ij}^{(K_1+K_2)}(m) = \sum_{a_n \in S} P_{i a_n}^{(K_1)}(m) \cdot P_{a_n j}^{(K_2)}(m+K_1)$$
 把步无问题变成两步走

感觉本质上类似于 DP 中的转移 DP.

描述: 马尔可夫链的有限维分布由其初始分布^①及基本转移概率^②唯一确定

举例: 随机游动

齐次马尔可夫链: 若转移概率与时刻无关, 则称为“平稳转移概率”

齐次形式的 CK 方程: $P^{(k)} = P^k$ 最终成为一步转移的大次幂

目标跟踪与目标状态建模

$$X_{k+1} = F X_k + W$$

W 为噪声, $F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$

随机 2024-12-09 21:10: 马尔可夫链中的状态分类 3

可达/可通: $f_{ii}=1$ (常返/非常返), 通过 ($f_{ii}<1$)

首次进入时间: $T_{ij} = \min\{n: X_0 = i, X_n = j, n \geq 1\}$ { 递推量 }

不返回几个概念: $f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij}=n | X_0=i\}$ { 从位置 i 到了 j 位置 }
{ 第 n 次到达 j 花费 n 步 }
{ 概率 }

$f_{ij}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_{ij}=n | X_0=i\} = P\{T_{ij}<\infty\}$

$f_{ij}^{(0)} = 1 - f_{ij}$ 即终生等待的概率: $0 \leq f_{ij}^{(0)} \leq f_{ij} \leq 1$

定理: $P_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} \cdot P_{jj}^{(n-v)}$ 考虑第 n 次到达状态 j 所花费的步数

{ 这不还是概率 DP }

常返: 概率 1 无穷次返回状态 j

{ 通过: 概率 1 有限次返回状态 j }

状态空间分解: 闭集: 出不去的状态集, 吸收状态: 单元素闭集.

{ 不可约闭集: 不存在闭集的真子集 } { 非空 }

把状态空间分解成若干个不可约闭集的并

所有常返状态构成一个闭集, 非常返状态, 可以划分为常返

周期状态 \neq 非周期状态: $\text{GCD}\{n: n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\} = d$

{ $d=1$ 称为非周期. }

随机 2024-12-08 3:10:01.

4

→ 行为转移矩阵 π_j 且 $\sum \pi_j = 1$.

1. 收敛性: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 与初始无关

收敛性意义: 若 $\exists m$ 使得 $P_{ij}^{(m)} > 0, \forall i, j$

{ 平稳分布: 迭代 $P_j = \sum_i P_i \cdot P_{ij}$ 迭代得到的结果.
↓
收敛时即为平稳分布

平稳分布是转移矩阵的不动点. 事实上对马尔可夫链而言

马尔可夫序列: 状态连续, 时间离散.

{ 马尔可夫序列的逆也具有马尔可夫性. ↵ 独立于过去, 也是马尔可夫的.

马尔可夫过程: 状态连续, 时间连续.

{ 在分布函数中引入具体时刻 \Rightarrow

齐次马尔可夫过程: $F\{y, t | x, s\} = F\{y, t-s | x\}$

三者中提到的所有性质都是三者共有的. 需要能举一反三

$$f(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \frac{\prod_{k=2}^n f(x_k, t_k; x_{k-1}, t_{k-1})}{\prod_{k=2}^{n-1} f(x_k, t_k)}$$

证明: 把 ~~所有~~ 表示成转移概率连乘.

习题很难

考试不会考特别难

所有课内题必须完成

16周提课, 17周复习, 18月初

作业: 随机过程(马尔可夫)在生活中的应用

科大讯飞(语音识别): 大模型非常成功的例子.

{ 输入法下一个词预测能力 \leftarrow 词频统计分析概率.

很多预测问题.

大量滤波中的观测量的修正量