随机过程理论 2024-10-21 主M102

随机过程的线性变换：$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$

随机过程通过线性系统：$y(t)=x(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\cdot h(t-\lambda)\,d\lambda.$$

若 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$. $Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt$

则 $H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

有 $Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(j\omega)$.

线性系统为什么：时域卷积、频域点乘？ ※

什么是冲激响应．什么是阶跃响应．

1.系统的描述：

使用微分方程/状态方程描述系统：$a_n Y^{(n)}(t)+\cdots=b_m X^{(m)}(t)+\cdots$

确定系统：$X(t,\xi_1)=X(t,\xi_2)\Rightarrow Y(t,\xi_1)=Y(t,\xi_2)$.

随机系统： … .. $\Rightarrow Y(t,\xi_1)\neq Y(t,\xi_2)$.

我们研究的是确定性线性系统

2.线性系统：$y(t)=L(x(t))$.

叠加性：$L[\sum_i x_i(t)]=\sum_i L[x_i(t)]$

比例性：$L[kx(t)]=k\cdot L[x(t)]$

时移性：$y(t+\tau)=L[x(t+\tau)]$

3. 确定性性 输入信号的分析方法.

频率响应 ⇒ 传递函数：我们的课程区分 频率响应函数和传递函数

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k}x(\omega_k)\cdot\Delta\omega_k e^{j\omega_k t}.$$

小面积求和.

$$=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$$ 其中 n为小面积的总数量

故 $$y(t)=L[x(t)]=L\left[\lim_{n\to\infty}x_n(t)\right]=\lim_{n\to\infty}L[x_n(t)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}L\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k}\underbrace{X(\omega_k)\Delta\omega_k}_{\text{常量}}\cdot e^{j\omega_k t}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k}X(\omega_k)\Delta\omega_k\cdot\underbrace{L[e^{j\omega_k t}]}_{\text{单频信号}}$$

$$=\quad\cdots\quad\underline{H(j\omega_k)e^{j\omega_k t}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\underline{H(j\omega)}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}dt$$

$$\begin{cases}y(t)=h(t)*x(t)\\ H(j\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}\end{cases}$$ ← 对 ∀ω 成立. 但对函数连续并不成立.

$$x(t)=x(t)*\delta(t).$$

$$y(t)=L[x(t)]=L\left[\int x(\lambda)\cdot\delta(t-\lambda)\cdot d\lambda\right]$$

$$=\int x(\lambda)\cdot L[\delta(t-\lambda)]\cdot d\lambda$$ 线性.

$$=\int x(\lambda)\cdot h(t-\lambda)d\lambda$$ 时不变性

$$=x(t)*h(t)$$

其中 h(t)为冲激响应

即 δ(t) 经过系统后的输出.

工程上可以用极短时间内的脉冲来替代 δ(t).

例子：$Y(t)=\overset{\text{延迟}}{X(t-T)}-2X(t)+\overset{\text{记忆}}{X(t+T)}$. 求传递函数 $H(j\omega)$.

三脉冲对消. 抑制杂波 ← 在雷达系统中应用广泛.

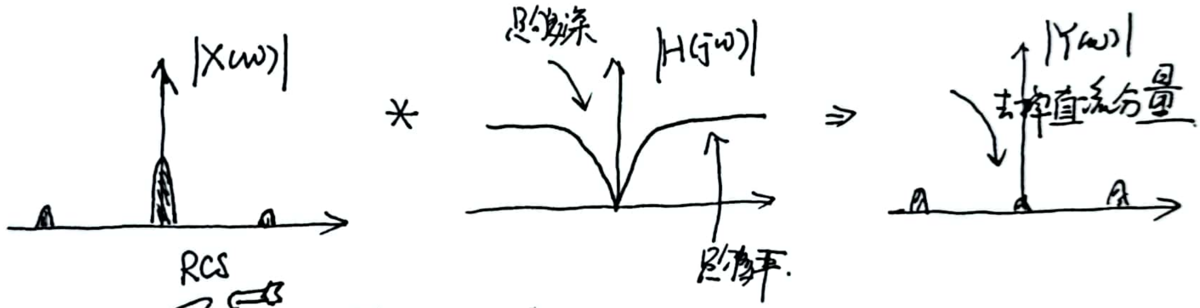
$$y(t)=x(t-T)-2x(t)+x(t+T).$$

$$=x(t)*\delta(t-T)-2x(t)*\delta(t)+x(t)*\delta(t+T)$$

$$=x(t)*h(t)$$

得到：$h(t)=\delta(t-T)-2\delta(t)+\delta(t+T)$. 求 $H(j\omega)$.

$$H(j\omega)=e^{-j\omega T}-2+e^{j\omega T}=2\cos\omega T-2=-4\sin^2\frac{\omega T}{2}$$



$\frac{2v}{\lambda}\cos\theta$，多普勒平移.

补充

$\delta(t)$：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta(t)\,dt=f(0)$：

$F[\delta(t)]$：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt=e^{0}=1$

$F[\delta(t-T)]$：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-T)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)\,e^{-j\omega(u+T)}\cdot du=e^{-j\omega T}$.

令 $t-T=u$

故 $F[\delta(t+T)]=e^{+j\omega T}$

1.随机序列的极限及性质

$|x_n - x| < \varepsilon$, $n > N$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 序列极限

设 X_n 是随机序列. X 是一个随机变量.

若 $P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$ 在 $n \to +\infty$ 成立. 则称依概率收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} X$

而 $P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \le \dfrac{E\{|X_n - X|^2\}}{\varepsilon^2}$ 故若 $\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0$: $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$.

2.两种收敛:

① 依概率收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} X$

② 均方收敛: $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, X_n = X$

若均方收敛, 则一定依概率收敛. 均方极限一定是依概率极限

3.随机过程的均方连续.

$\forall \varepsilon$. $\exists$ 足够小 Δt 使 $|x(t+\Delta t) - x(t)| < \varepsilon$. 对足够小的 Δt 均成立

均方连续. $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \{|X(t+\Delta t) - X(t)|^2\} = 0$. 记为 $\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\, X(t+\Delta t) = X(t)$.

称为 t 均方连续. E

条件: $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $X(t)$ 均方连续.

证明:

$$E[|X(t+\Delta t) - X(t)|^2] = E(X^2(t+\Delta t) - 2X(t+\Delta t)X(t) + X^2(t))$$

$$= 2R_X(0) - 2R_X(\Delta t) \ge 0.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[|X(t+\Delta t) - X(t)|^2] = 0 \Leftrightarrow R_X \text{ 在 } \tau=0 \text{ 处连续}.$$

性质:

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[X(t+\Delta t)] = E[\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\, X(t+\Delta t)]$$

4.均方导数

常规导数: $\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \dot{x}(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

均方导数: ① $\dot{X}(t) = \underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$

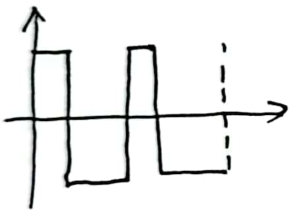
$\Updownarrow$

② $\lim\limits_{\Delta t\to 0} E\left\{\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} - \dot{X}(t)\right|^2\right\} = 0.$

条件: $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处存在二阶导 $\Leftrightarrow$ $X(t)$ 均方可微 (平稳随机过程).

证明自己写.

结论: $R_X(\tau)=e^{-\lambda|\tau|}$ 是已知一个随机过程满足且.



不连续 但均方连续. 由于 $\tau=0$ 时 $R_X(\tau)$ 连续.
而 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处不满足均方可微.

4.随机过程的均方微分

若 $m_Y(t)=E[Y(t)]=E\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = E\left[\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$

$= \lim\limits_{\Delta t\to 0} E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right] = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{m_X(t+\Delta t)-m_X(t)}{\Delta t}$

$= \frac{dm_X(t)}{dt}$ 物理意义: 去除直流分量/系统均差. 事实上是去除低频分量.

若. $X(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d(\cdot)}{dt}} \xrightarrow{Y(t)}$: $R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$ 微分.

$= \frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}$

同理, $R_{YX}(t_1,t_2) = \frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}$,

$R_Y(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_X(t_1,t_2)$

partial t1 partial t2

随机

对平稳随机: $R_{XY}(\tau)=?$

$$\begin{cases} R_{XY}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2} \xlongequal{\tau=t_1-t_2} \dfrac{\partial R_X(\tau)}{\partial \tau}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial\tau}{\partial t_2}}_{-1}=-R_X'(\tau). \\ R_{YX}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1} \xlongequal{\tau=t_1-t_2} \dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial \tau}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial\tau}{\partial t_1}}_{1}=R_X'(\tau). \\ R_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \xlongequal{\tau=t_1-t_2} \dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial^2\tau}\cdot\dfrac{\partial^2\tau}{\partial t_1 \partial t_2}=-\dfrac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau). \end{cases}$$

※ $R_{XY}(\tau)\big|_{\tau=0}=-R_{YX}(\tau)\big|_{\tau=0}=0.$

简述: 平稳随机过程经过微分器后输入输出正交.

$$\begin{cases} R_{XY}(\tau)=-R_X'(\tau) \\ R_{YX}(\tau)=R_X'(\tau) \\ R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau)= \end{cases} \Rightarrow R_{XY}(\tau)=-R_{YX}(\tau).$$

$-R_X'(\tau)=R_X'(-\tau).$

故 $-R_X'(0)=R_X'(0)$.

功率谱特性:

$$R_Y(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau).$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega.$$

$\Downarrow$

$$R_X'(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\omega\cdot S_X(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega.$$

$\parallel$

$$R_{YX}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{YX}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

互谱密度.

$$\begin{cases} S_{YX}(\omega)=j\omega S_X(\omega). \\ S_{XY}(\omega)=-j\omega S_X(\omega). \end{cases}$$

$$-R_X^{(4)}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-(j\omega)^2S_X(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega \Rightarrow S_Y(\omega)=\omega^2S_X(\omega)$$

随机.

N阶导:

$$
\begin{cases}
R_{X^{(n)}Y^{(m)}} = (-1)^m \dfrac{d^{n+m} R_X(\tau)}{(d\tau)^{n+m}} \\
R_{X^{(n)}} = \cdots
\end{cases}
$$

例：证明 $X(t)$ 和 $\dot{X}(t)$ 在任意时刻正交.

试说明高斯随机过程通过微分器后象与输入互不相关.

5. 随机过程的均方积分.

$$\int_a^b X(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_k X(\xi_k)\Delta t_k$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta n \to 0}} E\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k')(t_{k+1}-t_k) - \int_a^b X(t)\,dt \right|^2 \right\} = 0.$$

可积条件: $\int_a^b \int_a^b R_X(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 < \infty$. 证明.

性质: $E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E[X(t)]\,dt$.

均值和相关函数.(略讲了).

见PPT.

- 3.1 − 3.5
- 3.9. 3.10 3.13
- 3.17 3.19 3.21 3.25
- 3.28
- 选做 3.16.