随机过程理论 2024-10-28. 3M102

$$Y(t)=X(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\alpha)\cdot h(t-\alpha)\cdot d\alpha.$$

$$X(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow Y(t).$$

$$\updownarrow\qquad\updownarrow\qquad\updownarrow$$

$$Y(\omega)=X(\omega)\ \ H(j\omega)$$

两个典型的线性系统
- 微分器：$Y(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$
- 积分器：$Y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}X(t)\,dt.$

系统的微分方程描述：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{m}b_i\,x^{(i)}(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i\,Y^{(i)}(t)\\ \text{其中 } y^{(i)}(t_0)=y_{i0}.\end{cases}$$

- MA 模型.
- AR 模型

微分方程法的数字特征求解：

$$\begin{cases}\displaystyle X(t)=\sum_{i=0}^{n}a_iY^{(i)}(t)\\ \displaystyle\text{均值：}\ m_X(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot E[Y^{(i)}(t)]\\ \displaystyle\text{相关函数：}\ R_X(t_1,t_2)=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial^iR_{XY}(t_1,t_2)}{(\partial t_2)^i}\ ;\ R_{XY}(t_1,t_2)=\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial^iR_Y(t_1,t_2)}{(\partial t_1)^i}\end{cases}$$

随机过程线性变化的冲激响应法和频谱法

冲激响应法：$Y(t)=L[X(t)]=L[\int_{-\infty}^{+\infty}X(\alpha)\cdot\delta(t-\alpha)d\alpha].$

$t>0$时$h(t)$才存在.
(因果系统).

$$\begin{cases}m_Y(t)=m_X(t)*h(t)\quad\text{证明 略}).\\ \text{平稳过程：}\ =m_X\cdot\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(\alpha)d\alpha=m_X\cdot\int_{0}^{\infty}h(\alpha)d\alpha.\end{cases}$$

可实现系统：$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$
绝对可积说明傅里叶变换存在

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$
$$=E[X(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}X(\alpha)\cdot h(t_2-\alpha)d\alpha]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}E[X(t_1)X(\alpha)]\cdot\underline{h(t_2-\alpha)}\,d\alpha.$$
$$=R_X(t_1,t_2)*h(t_2)$$

平稳：$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau).$

随机 

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_1-\alpha)h(\alpha)d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}X(t_2-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{R_X(t_1-\alpha,t_2-\beta)}\,h(\alpha)h(\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

平稳:

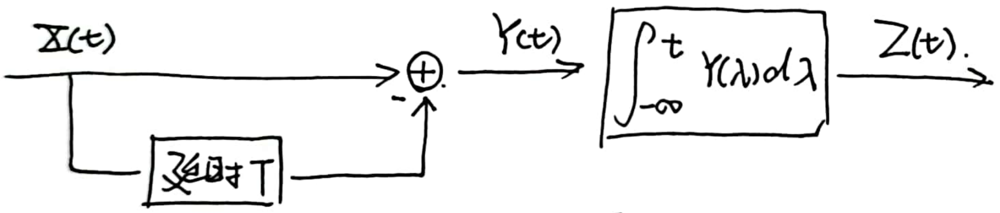
$R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$. 设 $R_h(\tau)=h(\tau)*h(-\tau)$

$=R_X(\tau)*R_h(\tau)$.

$$\left.\begin{aligned}R_{XY}(\tau)&=R_X(\tau)*h(-\tau)\\R_{YX}(\tau)&=R_X(\tau)*h(\tau)\\R_Y(\tau)&=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}S_{YX}(\omega)&=S_X(\omega)\cdot H(j\omega)\\S_{XY}(\omega)&=S_X(\omega)\cdot H^*(j\omega)\\S_Y(\omega)&=\cdots\end{aligned}$$

共轭.

例:

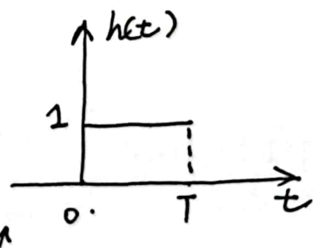



$$\left\{\begin{aligned}Y(t)&=X(t)-X(t-T)=X(t)*[\underbrace{\delta(t)-\delta(t-T)}]=X(t)*h_1(t)\\Z(t)&=\int_{-\infty}^{t}Y(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\lambda)\underbrace{u(t-\lambda)}_{\text{即 }\lambda<t.}d\lambda.\end{aligned}\right.\qquad u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\0, & t\le 0\end{cases}$$

$=Y(t)*h_2(t)$.

$=X(t)*\underbrace{h_1(t)*h_2(t)}$.

$=X(t)*h(t)$




故 $h(t)=h_1(t)*h_2(t).=[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)$

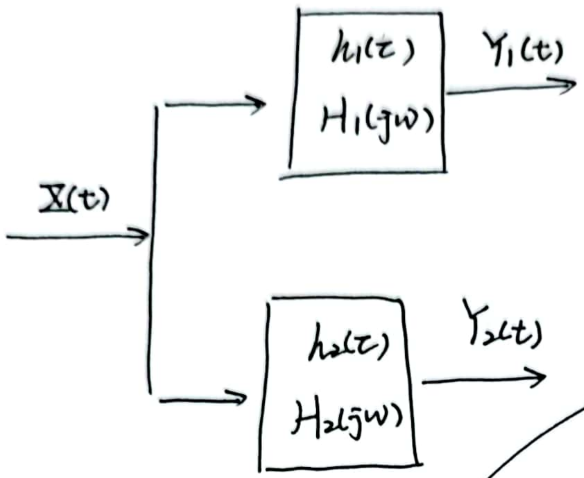
$=u(t)-u(t-T)$.

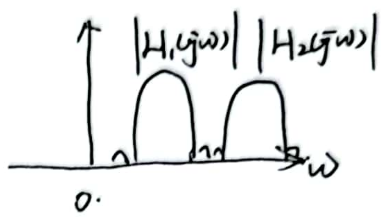
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[u(t)-u(t-T)]\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_0^t e^{-j\omega t}dt=\left[\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\right]_0^t$$

$=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega t})\longrightarrow$ 还可以继续化简,用欧拉公式.

输入平稳 输出是否平稳：取决于系统是否可实现

例2：




$H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)=0$

↓

即频带不相交.

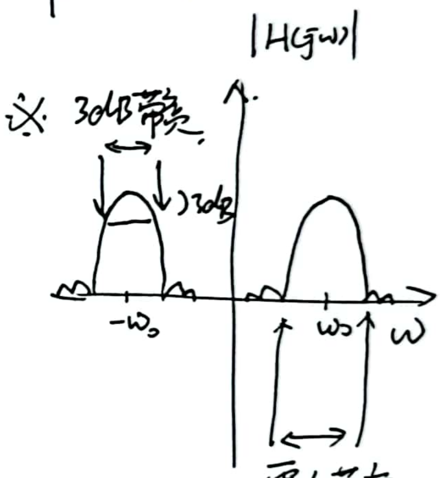
什么条件下 $E[Y(t_1)Y(t_2)]=0$. 对 $\forall t_1,t_2$ 成立.

白噪声通过线性系统： $S_X(\omega)=\frac{N_0}{2}$.

$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)\cdot|H(j\omega)|^2=\frac{N_0}{2}\cdot|H(j\omega)|^2$$

分解、均值为零 $S_Y(\omega)=\frac{N_0}{2}\int R_h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$.

考试一定有求功率的题目.



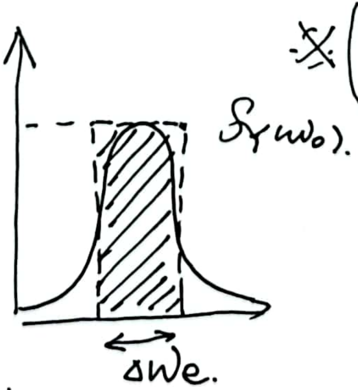

等效带宽

噪声等效通频带宽. $S_Y(\omega_0)\Delta\omega_e=\int_0^{\infty}S_Y(\omega)d\omega$

※ $\Delta\omega_e\cdot\tau_0=\frac{2\pi}{4}$

时带积

相关时间




方波的傅里叶变换.

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$?

四种滤波器
- 线性系统.
- RC积分器：低通滤波：冲击响应. $\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$. $t>0$. $\tau_0=RC$
- ※ 理想带通：白噪声通过.得到带限白噪声
- 高斯带通：(理想带通难以实现).

记住一个傅里叶 $e^{-\alpha|\tau|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ ※可以在考试时直接用

$$a(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}A(\omega)\cdot\underbrace{\pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))}_{※}$$
$$=\frac{1}{2}A(\omega)\cdot(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$
$$=\frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)].$$

$$C \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega).※$$

高斯函数的傅里叶变换还是高斯函数.

正态分布的特征函数：$\exp\{ja\upsilon-\frac{1}{2}\sigma^2\upsilon^2\}$.