随机 2024-12-02 讲101

到达时间：泊松随机过程的五个性质：
- 零初始值
- 平稳增量：
- 独立增量：无交区间独立
- 单跳性：足够短区间内至多发生一次
- 完备性(随机性)：概率和为1

回顾 { 泊松过程 { 状态：离散；时间：连续

学习到达时间的目的：{ ① 给定计数，求到达该计数所需的时间；② 给定区间，求发生事件数。

到...的定义：t_k：第k个事件发生的时间，连续型随机变量。

求到达时间的分布函数 $F_{T_k}(t) = P\{T_k \le t\} = 1 - P[N(t) \le k-1]$

从泊松计数过程出发

$$[N(t) > k-1] \Leftrightarrow [T_k \le t]$$

其中 $P[N(t)=j] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$ 于是 $F_{T_k}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$

对t求导可以得到 $f_{T_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

故 T_k 服从伽马分布

思考：给定 T_k 的分布如何反推出泊松分布的概率质量函数。

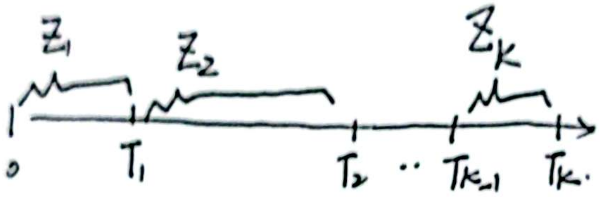
$E[T_k] = \frac{k}{\lambda}$，证明 执行 k+1 次分部积分法。

$E[T_k^2] = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}$ 还是分部积分法，当k很大时 $E[T_k^2] \approx \frac{k^2}{\lambda^2}$

$D[T_k] = E[T_k^2] - (E[T_k])^2 = \frac{k}{\lambda^2}$：强度越大 方差越小。

到达时间间隔：相邻两个事件的到达时间的差（第k个与第k-1个）

$$Z_k = T_k - T_{k-1} \quad (k \geq 1,\ T_0 = 0).$$



$t_{k-1} \sim t_{k-1}+z$ 发生零次.

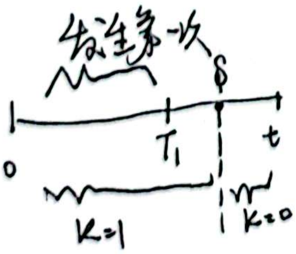
$$[Z_k > z] \Leftrightarrow [T_k > T_{k-1} + z] = [N(t_{k-1}+z) - N(t_{k-1}) = 0]$$

$$F_{Z_k}(z \mid T_{k-1} = t_{k-1}) = 1 - P[N(t_{k-1}+z) - N(t_{k-1}) = 0]$$ 平稳.

故与 t_{k-1} 无关.

$$f_{Z_k}(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} \\ 0 \end{cases}$$ 负指数分布（平稳）.

设 $N(t)=1$, $N(0)=0$. 则恰有一个事件发生的概率



故：概率为 0~s 发生1次 与 s~t 发生0次 的概率

故为 $\frac{s}{t}$. 故服从均匀分布

推论：若 0~t 时中发生了 K 次事件 $S_1, \ldots, S_k$ 为每个事件发生的时刻

则 $S_1, \ldots, S_k$ 均为 0~t 中的独立同分布的均匀分布

证明可以使用二项分布的极限得知

更新计数过程：设备更新问题：当设备故障时，换一个设备

有点类似于迭代分析 泊松分布

任一个设备发生故障的时刻(寿命)与其它设备无关：独立增量

假设独立同分布

已知到达时间间隔(负指数分布) $F_{Z_K}(z)$ 的分布 求 $F_{N_t}(i)$ 的分布

① $F_{Z_K}(z)$ (负指数分布) $\longrightarrow \phi_Z(\omega) \xrightarrow{\text{求积}} \phi_{T_i}(\omega)=\phi_Z^i(\omega)$ (伽马分布) $\to f_{T_i}(t)$

② $F_{T_i}(t) \longrightarrow F_{N_t}(i)=1-F_{T_{i+1}}(t) \longleftarrow$ 得到泊松计数过程

为什么从 Z_K 出发：设备的寿命是最容易被统计的过程。

非齐次泊松过程：没有"平稳增量"性质的泊松过程

零初值，独立增量，单跳性，完备性均满足

设 $\lambda(s)$ 为某时刻事件发生的可能性大小。

则 $P\{\{N(t_0+t)-N(t_0)\}=k\}=\frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds\right]^k\cdot\exp\left\{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds\right\}$

本质上就是λ随时间变化的泊松过程

在工程实践中比较常用

随机 2024-12-02 主M101.

复合泊松过程：设 Y_n 独立同分布

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$ ：以超市为例 { Y_i 表示单人消费数分布；$N(t)$ 为 t 时刻有多少人来 }

当 $Y_n=1$ 时，复合泊松过程 退化为 泊松过程

若 Y_n 为离散随机，则 称为广义泊松分布

$$E[X(t)]=\lambda t\cdot E[Y]$$
$$E[X^2(t)]=(\lambda t)^2\cdot(E[Y])^2-\lambda t\cdot E[Y^2]$$
$$D[X(t)]=\lambda t\cdot E[Y^2]$$

如何推导？
使用特征函数推导即可。
特征函数是求高阶矩的手段。
→ 使用 FFT + 微分代替积分。

※ 泊松过程的题目会较难一些，后面介绍如何在科研中应用泊松过程.

如何使用雷达探测高速目标时避免侦敌.

使用掩星法发现小行星 ⇒ 是否可以用来做高速目标探测
{ 在来波让感受信号强度变换化. → 把天空划分为网格.