窄带平稳实高斯随机过程：$\begin{cases} X_c：同向分量 \\ X_s：正交分量 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \\ Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ \hat{x} \end{cases}$

$\begin{cases} \hat{x}(t) = X_s(t)\sin\omega_0(t) + X_c(t)\cos\omega_0 t. \\ 上述三者可以相互表示 \end{cases}$

若 $X(t)$ 为高斯分布，$\begin{cases} 则\ X(t)\ 经由任何线性系统的输出均为高斯分布 \\ 因此希尔伯特变换后得到的分布仍然是高斯分布 \\ 于是\ X(t)\ 服从高斯\ 则\ X_c\ 和\ X_s\ 也服从高斯分布 \end{cases}$

※ X_c, X_s 与 $X(t)$ 有相同的方差，而 X_c 和 X_s 的均值为零

$Cov(X_c, X_s) = E[X_c X_s] - \underset{0}{E[X_c]}\overset{0}{E[X_s]} = 0$. 故 X_c 与 X_s 互不相关

$\{$ 而 X_c 与 X_s 服从高斯分布 $\Rightarrow$ 相互独立

于是：当 $X(t)$ 服从高斯分布，则 X_c 和 X_s 相互独立 $\Rightarrow f(X_c, X_s) = f(X_c)f(X_s)$

高斯分布求分布函数的常用思路：证明相互独立，再用乘法处理得到联合密度

· 如何使用 $f(X_c, X_s)$ $\overset{雅可比行列式}{\text{求}}$ $f(A, Q)$ 的分布，$\Rightarrow$ 进而求出 $\begin{cases} f(A) \\ f(\theta) \end{cases}$ 边缘.

$$\because\ f(x_c, x_s)\, dx_c\, dx_s = f(a, q)\left|\frac{\partial(x_c, x_s)}{\partial(a, q)}\right| da\, dq. \qquad \left|\frac{\partial(x_c, x_s)}{\partial(a, q)}\right| = a.\ ※$$

得到 $f_{A\varphi}(a, \varphi) = \dfrac{a \cdot f(\hat{x}_c, \hat{x}_s)}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left\{-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}\right\}$

$$\begin{cases} f_A(a) = \int_0^{2\pi} f(a, \varphi)\, d\varphi = \dfrac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left\{-\dfrac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \sim 瑞利分布 \\ f_\varphi(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi} \sim 均匀分布 \end{cases} ※$$

※ 高斯 $\longrightarrow$ $\begin{cases} 幅度服从瑞利分布，相位服从均匀分布 \\ X_c\ 和\ X_s\ 服从高斯分布 \end{cases}$

$f(A,\theta)=f(A)\cdot f(\theta)=\frac{a}{2\pi\sigma^2}\cdot\exp\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\}$ 说明 A和θ 也是相互独立的.

$$\begin{cases} E[A(t)]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma_X \\ D[A(t)]=(2-\frac{\pi}{2})\cdot\sigma_X^2 \end{cases}$$

中间度均方值: $E[A^2(t)]=$ 函数换元 → 分部积分法

$=2\sigma^2$ 相当于总功率

$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}$

中高度均值: $E[A(t)]=\sigma_x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 证明思路: 最后凑成经典积分.

※遇到高斯分布: ① 注意两个分布是否相互独立
② 若分量不相互独立 则需要求协方差矩阵

二维高斯分布(推导很复杂). ⇒ 比较复杂 主要是求协方差矩阵 以及其逆

A和φ的二维分布比较复杂. 但没有相互独立.
我猜 a_1与a_2不独立. φ_1与φ_2不独立.

○ 随机相位正弦波 加 窄带平稳高斯随机过程之和.

↑ 信号 ↑ 噪声

记 $Y(t)=S(t)+N(t)$ $\begin{cases} S(t): \text{随机相位正弦波} \\ N(t): \text{随机高斯噪声} \end{cases}$

载波相同: 例如广播中的信号和噪声

设 $S(t)=B\cos(\omega_0 t+\Theta)=B\cos\Theta\cdot\cos\omega_0 t-B\sin\Theta\cdot\sin\omega_0 t$.

$N(t)\rightarrow$ 窄带噪声 $=A_n(t)\cos[\omega_0 t+\Phi_n(t)]$

$=N_c(t)\cos\omega_0 t-N_s(t)\sin\omega_0 t$.

信号加……

小信噪比: $v=a\sigma$ $f(v)=v\cdot\exp\{-\frac{v^2}{2}\}$

大信噪比: 包络趋于高斯分布 ※.

$$p(v)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\{-\frac{(v-b)^2}{2\sigma^2}\}$$

这部分 $B\cos\theta$ 部分节数在算 所以要B存在真的情况

相位分布密度: 合成信号相位形式比较复杂.

小信噪比: 相位服从均匀分布

大信噪比: 相位服从一个关于$(\varphi-\theta)$的偶函数分布, 相位集中在θ附近

维纳分布

§5. χ^2分布与非χ^2中心分布 (介绍).

χ^2分布: 定义: 设 $X_1\sim X_n$ 是零均值, 单位方差, 独立同分布

设 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 则称S为有n个自由度的χ^2分布

可以使用特征函数计算概率密度

$(\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\cdot d\alpha.)$

较复杂

推论: 方差为σ^2的独立同高斯. 设 $S_1=\sigma^2 S$. 求 $p(S_1)$?

两个统计独立的自由度分别为n和m, 则它们的和自由度为n+m.

$E[\chi^2]=n$ $D[\chi^2]=2n$ ⇐ 记住, 会证明.

要会证明.

任一个

$$E[\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=n\cdot E[X_i^2]=(\underset{1}{\sigma^2}+\underset{0}{m^2})n=n.$$

任一个

※ $$D[\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=n\cdot D[X_i^2]=n\cdot[E[X_i^4]-(\overset{1}{E[X_i^2]})^2]=2n$$

※ 相互独立, 方差可加

技巧.

结合正态分布的性质.

$E[X^4]$ 分部积分法 $=3$ ※

随通机 2024-11-18 文M101.

维纳过程：独立增量，增量具有高斯分布.

↓ {相似的 $W_0(t_2+h)-W_0(t_1+h)$ 具有相同分布密度

布朗运动过程：① 不平稳 ② 齐次独立增量 ③ 增量服从高斯分布

{ ④ $R_{W_0(t)}(t_2,t_1)=\min\{t_1,t_2\}$ ⑤ 零均值

{ 如何得到 ⟶ 平稳高斯白噪声通过理想积分器.

一个平稳过程通过线性系统后是否保平稳？不一定.

例如：高斯过程 $\xrightarrow{\text{理想积分器}}$ 维纳过程
(平稳). (不平稳)

泊松计数过程：顾客流/服务点模型：随时间变化进行计数.

{ $N(t)$ 是非负整数

$N(0)\triangleq 0$ 起始时刻总认为没有计数.

若 $s<t$，则 { $N(s)\le N(t)$ 只有当 $s\sim t$ 时没有事件发生时 $N(s)=N(t)$
单调不降

$N(t)-N(s)$ 表示 $s\sim t$ 时间内事件发生的次数

① 若 $N(t)-N(s)$ 与 $N(t+\Delta t)-N(s+\Delta t)$ 相互独立，则为独立增量过程.
(s,t) $(s+\Delta t,t+\Delta t)$ 不重叠

② 若. $N(t+\Delta t)-N(s+\Delta t)$ 总与 $N(t)-N(s)$ 同分布
{ 则称为平稳增量计数过程.

单跳跃性：在足够小的时间内至多有1个事件发生.

必需要会才行必

泊松过程的五个条件：为什么满足这五个条件就一定是泊松过程？

状态离散，时间连续.

用二项分布极限证明泊松分布的概率质量.

$$P[N(t_0)=k]=\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad 设\ \lambda t_0 = np.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda t_0}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t_0}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{(\lambda t_0)^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{=1}\cdot\left(1-\frac{\lambda t_0}{n}\right)^{n-k}$$

$$1-\lambda t.$$

$$=\frac{(\lambda t_0)^k e^{-\lambda t_0}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 为泊松过程的强度.

设 $P_0(t_1,t_2)$ 为 $t_1\sim t_2$ 没有事件发生的概率 ← 分阶段. 必须会推导才行

$$\left\{\ \frac{dP_0(t_1,t_2)}{dt_2}=-\lambda P_0(t_1,t_2) \Rightarrow P_0(t_1,t_2)=e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right.$$

$$P_k(t_1,t_2)=\frac{\lambda(t_2-t_1)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}.$$ ⇒ 能证必 折成三部分.

泊松计数过程的数字特征 下次课再讲说.

下次课是 1~5 章的习题课.