随机 2024-10-14 主M101

1

例题. 课后 2.12

只有平稳随机过程才研究各态历经性

各态历经性：

由大数定律：$x \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 当n足够大

样本

随机过程均值的计算（状态平均）
$$\begin{cases} 离散：E[X(t)] = \sum x_i \cdot p_i \\ 连续：E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,t)\,dx \end{cases}$$

设 $X(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \Theta)$ 是随机过程，则样本离散指 Θ 只有有限种取值

时间均值：选定一个样本函数，把样本函数在时间上求均值

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt$$ 仍是一个随机变量.

现实问题：状态平均难以测量，时间均值易于测量

均值各态历经性：
$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,t)\,dx = \overline{X(t)}$$

由于 $\overline{X(t)}$ 是一个随机变量，故
$$\begin{cases} D[\overline{X(t)}] = 0 \\ P\{\overline{X(t)} = E[X(t)]\} = 1 \\ P\{|\overline{X(t)} - E[X(t)]| < \varepsilon\} = 1,\ \forall\varepsilon > 0 \end{cases}$$

样本函数的时间均值

$$\overline{x_i(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A\cos(\omega_0 t + \theta_i)\cdot dt.$$ 是一个值.

$$\overline{X(t)X(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\cdot X(t-\tau)\,dt$$ ⇐ 时间自相关函数.

如果一个平稳随机过程：

随机变量

随机变量.

$$\begin{cases} 均值各态历经：\overline{X(t)} = E(X(t)) \text{ 依概率} \\ 时间自相关各态历经性：R_X(\tau) = \overline{X(t+\tau)X(t)} \text{ 依概率} \\ 各态历经性：同时满足上述两个条件 \end{cases}$$

???

验证：$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$ 其中 Θ $(0\sim 2\pi)$ 均匀分布 是平稳随机过程.

不好用 理解即可

均值各态历经的充要条件：$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\cdot[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau=0$

$D[\overline{X(t)}]=E[\overline{X(t)}^2]-\{E(\overline{X(t)})\}^2$

m_X 平稳

$E[\overline{X(t)}]=E[\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\cdot dt]=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]\cdot dt=m_X$

$E[\overline{X(t)}^2]=E[\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\cdot\int_{-T}^{T}X(t_2)\cdot dt_2$??

$=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E(X(t_1)\cdot X(t_2)]\cdot dt_1dt_2$：难可以变换 $\begin{cases}\tau=t_1-t_2\\ \tau'=t_1+t_2\end{cases}$

$=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_1-t_2)dt_1dt_2$ 仅解t_1t_2即可 回去推

时间自相关

平稳随机过程的均值各态历经条件：?? $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})[B_X(\tau_1)-R_X^2(\tau)]d\tau_1=0$

推 ??

$\overline{X^2(t)}$：时间均方值 $=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}A^2\cdot\cos^2(\omega_0t+\Theta)dt=\frac{A^2}{2}$

? ?

$E[X^2(t)]=\frac{1}{2}E[A^2]$ 故只认为当A为常数时，不的心过程才具有时间自相关各态历经。

平稳过程的功率谱密度： 能量型信号：$E_T=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)dt<\infty$

$s(t)=a\cdot\cos(\omega_0t+\Theta)$.

$\Updownarrow$

$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt.$ $\begin{cases}|S(\omega)|：幅值.\\ |S(\omega)|^2：谱：E(\omega)=|E(\omega)\ S(\omega)|^2 能量谱密度.\end{cases}$

巴塞伐尔定理：使用卷积定理证明.

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)|^2d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}s^2(t)dt=E_T$

随机 2024-10-14 3M101

功率型信号：$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s^2(t)dt<\infty$

$\begin{cases} s(t) & -T\le t\le T \\ 0, & 其它 \end{cases}$

截尾FT：$F(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}s_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}\underbrace{s(t)e^{-j\omega t}}dt$

周期图谱估计

T越长精度越高

帕塞伐尔定理：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega,T)|^2d\omega=\int_{-T}^{T}s^2(t)dt$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2}_{平均功率谱密度}d\omega=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s^2(t)dt=P.$$

推广到随机过程：$F_X(\omega,T)=\int_{-T}^{T}X(t)\cdot e^{-j\omega t}dt.$

$$X_T(t)=\begin{cases} X(t), & |t|\le T \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty}X_T(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T}X(t)\cdot e^{-j\omega t}dt.$$

$$\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega,T)|^2d\omega$$

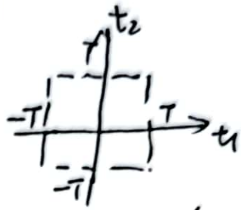
$$P_X=\lim_{T\to\infty}E\left\{\underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt}_{随机变量}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_X(\omega,T)|^2\}}_{设为S_X(\omega)为功率谱密度}d\omega\ge0.$$

平稳~过程.

故 $P_X=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega$：为~~平稳~~随机过程的总平均功率

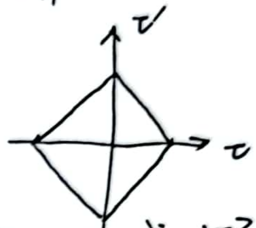
$\ge0.$

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[\int_{-T}^{T}X(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1\cdot\int_{-T}^{T}X(t_2)e^{+j\omega t_2}dt_2\right]$$



$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\underbrace{E[X(t_1)X(t_2)]}_{=R_X(t_1-t_2)}e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

换元 $\begin{cases}\tau=t_1-t_2\\ \tau'=t_1+t_2\end{cases}$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=S_X(\omega).$$

{ 带到教材里的公式 / 维纳辛钦定理 ※ }

{ 时域：相关函数 / 频域：功率谱密度 }

根据FT的唯一性，得到：$R_X(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$ ※

{ 平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度互为变换对.

可以得到：$S(\omega)=2\int_0^\infty R(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$ ≥0的偶函数

$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega.$

例题：$X(t)=A(t)\cdot\cos(\omega_0t+\Theta)$，$A(t)$与$\Theta$相互独立. {且$A(t)$为随机过程. 平稳.

$$\begin{cases}R_A(\tau)=e^{-\lambda|\tau|},\ \lambda>0.\\ f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le2\pi\\ 0, & 其他\end{cases}\end{cases}$$

{ ① 判断是否平稳. ② 求功率谱密度.

$R_X(\tau)=E[X(t)X(t-\tau)]=E\{A(t)\cos(\omega_0t+\Theta)\cdot A(t-\tau)\cdot\cos(\omega_0(t-\tau)+\Theta)\}$

※ 由于$A(t)$和Θ相互独立 $=E\{A(t)A(t-\tau)\}\cdot E\{\cos(\omega_0t+\Theta)\cdot\cos(\omega_0(t-\tau)+\Theta)\}$

由于 $R_A(\tau)=e^{-\lambda|\tau|}$ $=e^{-\lambda|\tau|}\cdot\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau).$

※ $=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{\lambda^2+(\omega+\omega_0)^2}\right]$

而 $S_X(\omega)=FT[\frac{1}{2}e^{-\lambda|\tau|}\cdot\cos\omega_0\tau]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot FT[e^{-\lambda|\tau|}]*FT[\cos\omega_0\tau].$

$=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2\lambda}{\lambda^2+\omega^2}*\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

功率谱密度：是个实偶非负函数 ※

$\cancel{S_X(0)} = R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega = E[X^2(t)] = P$ 总平均功率

经常用于计算信噪比.

功率
互谱密度：对互相关函数进行傅里叶变换

$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$ 不一定是实函数. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) = S_{YX}$

$R_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$.

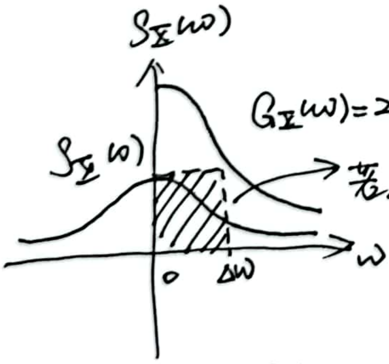
性质 $|S_{XY}(\omega)|^2 \le S_X(\omega)S_Y(\omega)$.

$S_{XY}(\omega)$：实部是偶函数. 虚部是奇函数

白噪声定义：$S(\omega) = N_0/2$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. 即功率谱密度为常数

$E[X(t)] = 0$.

所以写 $\frac{N_0}{2}$. 为了让物理谱为 N_0



$G_X(\omega) = 2S_X(\omega)U(\omega)$. : 物理谱.

若 $\Delta\omega S_X(0) = \int_0^{\infty} S_X(\omega)\cdot d\omega$ 则 $\Delta\omega$ 为等效带宽 $\Delta\omega$ 越大 τ_0 越小.

$\tau_0 = \int_0^{\infty} r_X(\tau)d\tau$. τ_0 为相关时间 $\tau_0\cdot\Delta\omega$：时带积.

$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau}d\omega$：不存在. ∵不满足绝对收敛.

$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{N_0}{2}\cdot 2\pi\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\cdot\delta(\tau)$. 迪拉克函数是个广义函数.

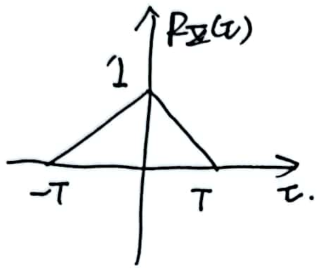
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$.

带宽：工程上的假设：相关时间足够小

等效带宽足够大的噪声.

例：
① 随机余弦
② 指数形式自相关.
求①②的功率谱密度.

例：求



的功率谱密度.