2024-12-16 复习

相关系数：$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}$ 故 $r_X(0)=1$ $0\le r_X(\tau)\le 1$

$$C_X(\tau)=E\{(X(\tau)-\underbrace{E[X(\tau)]}_{m_X})(X(0)-\underbrace{E[X(0)]}_{m_X})\}$$

$$=E\{X(\tau)X(0)-\underbrace{X(\tau)m_X}_{m_X^2}-\underbrace{X(0)m_X}_{m_X^2}+m_X^2\}$$

$$=R_X(\tau)-m_X^2$$

相关时间：$\tau_0=\int_0^{+\infty}r_X(\tau)d\tau$

时间平均的定义：本质上仍然是一个随机变量

$$\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

是 $\overline{X(t)}$ 的样本

设 $x_i(t)$ 是 $X(t)$ 的一个样本函数，则 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_i(t)dt=\overline{x_i(t)}$

均值各态历经：$E[X(t)]=m_X=\overline{X(t)}$

① $\overline{X(t)}$ 为常量，即不波动 …… 两种情况都有可能

② $\overline{X(t)}$ 依概率均方收敛于 m_X

自相关函数各态历经

↓

时间自相关函数：$\overline{X(t)X(t-\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t-\tau)dt$

各态历经性：
① 时间平均收敛于均值 …… 依概率收敛
② 时间自相关函数收敛于自相关函数

验证 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$ 其中 $\Theta\in[0,2\pi]$ 均匀分布 验证均值各态历经性。

① $E[X(t)]=E\{\cos(\omega t+\Theta)\}=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\Theta)\frac{1}{2\pi}d\Theta=0$ 恰好积分一个周期

② $\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\Theta)dt$ 由于对 cos 积分有界，但 $\frac{1}{2T}$ 无界，故 $=0$.

均值各态历经的充要条件：(针对平稳随机过程) 遍历性

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-m_X^2\right]d\tau=0$$

$\tau > 0$

从均方微积分角度，我们希望 $\underset{T\to\infty}{\lim}\left(\overline{X_T(t)}-m_X\right)^2=0$ (*)

其中 $\overline{X_T(t)}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$：本质上仍是一个随机变量

于是分析 (*) 式的期望：

期望：$R_X(t_1-t_2)$

$$\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt-m_X\right)^2=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t_1)X(t_2)dt_1dt_2+m_X^2$$

$$-\frac{1}{T}\cdot m_X\cdot\int_{-T}^{T}\underbrace{X(t)}_{m_X}dt$$

$\boxed{\begin{array}{l}0\le\tau+\tau'\le 2T\\ 0\le\tau-\tau'\le 2T\end{array}}$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_X(t_1-t_2)dt_1dt_2-m_X^2$$

换元：$\begin{cases}\tau=t_1-t_2\\ \tau'=t_1+t_2\end{cases}$ 故 $\begin{cases}t_1=\frac{\tau+\tau'}{2}\\ t_2=\frac{\tau-\tau'}{2}\end{cases}$

$$R_X(t_1,t_2)dt_1dt_2=f(\tau)\cdot d\tau\cdot d\tau'$$

故 $f(\tau)=R_X(t_1-t_2)\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau,\tau')}\right|$ $\Rightarrow |J|=\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}$

$$\text{原式}=\frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\int_{\max(-2T+\tau,-\tau)=-|\tau|}^{\min(2T-\tau,\tau)=|\tau|}R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}d\tau'd\tau-m_X^2$$

偶函数

$$=\frac{4}{T^2}\int_0^T\int_0^\tau R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}d\tau'd\tau-m_X^2=\frac{2}{T^2}\int_0^T\tau\cdot R_X(\tau)d\tau-m_X^2$$

之后根据 $\underset{T\to\infty}{\lim}\frac{1}{T}\int_0^{2T}R_X(\tau)d\tau=0$ 即可凑得原所求式

自相关函数各态历经定理(略)

2024-12-16复习

平稳过程的功率谱密度：第二章 P57

以下讨论针对非随机的样本函数，设 $s(t)$ 是实信号

① 针对能量型信号：$E_T=\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt<\infty$ 即总能量有限

直接对 $s(t)$ 进行傅里叶变换得到 $S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$

由于 $s(t)$ 和 $S(\omega)$ 互为变换对，故 $s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

证明巴塞伐尔定理：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)|^2 d\omega=E_T$ $\quad (AB)^*=A^*B^*$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)S^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\cdot e^{j\omega t}dt\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)s^*(t)e^{j\omega t}d\omega dt=\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)s(t)dt$$ 那我们定义：$S^*(\omega)S(\omega)$ 为能量谱密度

② 针对功率型信号有总平均功率有限：$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)dt<\infty$

引入截尾傅里叶变换，只保留 $s(t)$ 在时间 $-T$ 到 $+T$ 之间的部分得到 $s_T(t)$

$$F(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-T}^{T} s(t)e^{-j\omega t}dt$$

由①中巴塞伐尔定律有 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega,T)|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} s_T^2(t)dt=\int_{-T}^{T}s^2(t)dt$

左 $\qquad$ 右

对左右两侧同时求极限：$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega,T)|^2 d\omega=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s^2(t)dt=P$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega$$

那我们定义：$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2$ 为功率谱密度

→ 截尾信号能量谱密度的时间期望

③ 随机过程的功率谱密度：套一个期望以保证谱是确定性函数即可

故功率谱密度为 $S_X(\omega)=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot E\{|F_X(\omega,T)|^2\}$

维纳-辛钦定理：对宽平稳随机过程而言

功率谱密度与自相关函数互为傅里叶变换对

证明. $R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$ 　代入 $S_X(\omega)$ 定义验证

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot F_X(\omega,T)F_X^*(\omega,T)\right\}\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(\omega,T)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XT}^*(t)e^{j\omega t}dt\right)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega\right\}$$

$$=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XT}^*(t)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(\omega,T)\cdot e^{j\omega(t+\tau)}d\omega\right)}_{S_{XT}(t+\tau)}dt\right\}$$

$$=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XT}^*(t)\,S_{XT}(t+\tau)\cdot dt\right\}$$

$$=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}S_{XT}(t+\tau)S_{XT}^*(t)\,dt\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}E\{S_{XT}(t+\tau)\,S_{XT}^*(t)\}dt$$

① 当T足够大时 $S_{XT}(t)=X(t)$ 　② 由于 $X(t)$ 为实过程所以 $S_{XT}^*(t)=S_{XT}(t)$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot 2T\cdot R_X(\tau)=R_X(\tau)$$

随机过程功率谱密度的性质：① 实的 ② 偶的

③ $R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega=P$

$=E[X^2(t)]$

2024-12-17 复习 P64 白噪声过程

性质 $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)} \rightarrow \left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{0} e^{j\omega t} d\omega = \int_{0}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega + \int_{+\infty}^{0} e^{j(-\omega)t} d(-\omega)$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega + \int_{0}^{+\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \int_{0}^{+\infty} 2\cos(\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) d\omega$$

$\downarrow$ $\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$ $\downarrow$ $\cos(\omega t)-j\sin(\omega t)$? 不对把

白噪声定义：$S(\omega)=\frac{N_0}{2}$ $\omega\in\mathbb{R}$ $E[X(t)]=0$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} S(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2}\cdot\delta(\tau) \qquad P=R(0)=\infty$$

$$\lim_{W\to\infty}\left\{\frac{1}{jt}e^{jWt}-\frac{1}{jt}e^{-jWt}\right\} = \lim_{W\to\infty}\frac{2j\sin(Wt)}{jt} = \lim_{W\to\infty}\frac{2\sin(Wt)}{t}$$

① $t=0$ 时，洛一下：$\frac{2W\cos(Wt)}{1}=2W\to+\infty$

② $t\neq0$ 时：认为频率无限大使被积函数正负相抵、等效为零、
并不绝对可积

$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(t)$

$\delta(t)\leftrightarrow 1$ 例：求 $\cos(\omega_0 t)$ 的频谱

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t)\cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left\{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right\}\cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}e^{j(\omega_0-\omega)t}+\frac{1}{2}e^{j(-\omega_0-\omega)t}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right) = \pi\left\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right\}$$ 头

复习 2024-12-19.

$\frac{1}{2\pi}$

验证：时域乘积、频域卷积；时域卷积、频域乘积

设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 为两个时域信号：$h(t)=f(t)\cdot g(t)$ 求 $H(\omega)$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

其中 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 代入

$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$

提出时间

$$H(\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1)e^{j\omega_1 t}\cdot G(\omega_2)e^{j\omega_2 t}\cdot e^{-j\omega t}d\omega_1 d\omega_2 dt$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1)G(\omega_2)\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(\omega_1+\omega_2-\omega)t}dt}_{=2\pi\cdot\delta(\omega_1+\omega_2-\omega)}\Big)d\omega_1 d\omega_2.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega_2)\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_1)\cdot\delta(\omega_1+\omega_2-\omega)d\omega_1}_{=F(\omega-\omega_2)}\Big)\cdot d\omega_2.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega_2)F(\omega-\omega_2)\cdot d\omega_2=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*F(\omega).$$

设 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(t-\xi)d\xi$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(t-\xi)e^{-j\omega t}dtd\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\xi)e^{-j\omega t}dt\Big)\cdot d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cdot e^{-j\omega\xi}\cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\xi)e^{-j\omega(t-\xi)}dt\Big)\cdot d\xi.$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cdot e^{-j\omega\xi}\cdot G(\omega)\,d\xi=G(\omega)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi$$

$$=G(\omega)\cdot F(\omega)$$

第三章：随机过程的线性变换

{ 线性系统：$y(t)=L[x(t)]$

线性系统的性质：叠加性，比例性，时不变性

- 叠加性：$L\{x_1(t)+x_2(t)\}=L\{x_1(t)\}+L\{x_2(t)\}$
- 比例性：$L\{Kx_1(t)\}=K\cdot L\{x_1(t)\}$
- 时不变性：$L\{x(t)\}=y(t)$ 则 $L\{x(t+\tau)\}=y(t+\tau)$

① 使用冲激响应法获得传递函数：

$$y(t)=L\{x(t)\}=L\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\xi)\delta(t-\xi)d\xi\right\}$$ 由于在L算子只有t为变量

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\xi)L\{\delta(t-\xi)\}d\xi.$$ 设 $L\{\delta(t-\xi)\}=h(t-\xi)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\xi)\cdot h(t-\xi)d\xi=x(t)*h(t)$$

结论：若 $h(t)=L\{\delta(t)\}$ 为系统冲激响应

则 $L\{x(t)\}=x(t)*h(t)$

② 使用频率响应法获得传递函数

L只对t敏感

$$y(t)=L\{x(t)\}=L\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\cdot L\{e^{j\omega t}\}d\omega$$

由①得 $\forall x(t)$ $L\{x(t)\}=x(t)*h(t)$ 故 $L\{e^{j\omega t}\}=e^{j\omega t}*h(t)$