随机过程理论　2024-09-09　主M101

老师：李春升、徐华平　课程经历了40年的时间.

└→ 值守以卫星遥感技术、世界一流的卫星技术.

└→ 课程又名：统计无线电、随机信号分析、随机过程导论(1987)

有些太难的内容被简化：随机微分方程、伊藤积分

第一部分：随机过程的基本概念.
第二部分：…

"随机过程随机过"
作业：30%，期末考试：70%

先修课：信号系统(线性变换，傅里叶变换).

① 随机事件与概率：

- 随机试验：具有不确定性的观测活动
- 随机事件：随机试验的观测结果.
- 随机变量与随机分布的数学特征.

- 工程数学：使用事件/样本空间描述(集合论).
- 理科数学：公理化.

4种概率模型：
- 古典概率：有限概率空间中的等可能分布 $\frac{M}{N}$
- 几何概率：无限连续概率空间中的(一般等可能)的分布 $\frac{S_{有利}}{S_{整体}}$
- 统计概率：样本无限情况下频率的极限.
- 公理化体系：?

几个公式：
- 条件概率：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$　相当于传递函数.
- 乘法公式：
  - $P(AB)=P(A)P(B|A)$.
  - $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_{n-2}\cdots A_1)\cdots P(A_2|A_1)$

全概率公式: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$, $P(S)=1$, $A_iA_j=\phi$, $i\neq j$, $P(A_iA_j)=0$.

构成完备概率空间: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$, $P(B)=\sum_{i=1}^{n}(P(B|A_i))P(A_i)$

其中 $P(A_i)$ 可以试验得到, 称为先验知识.

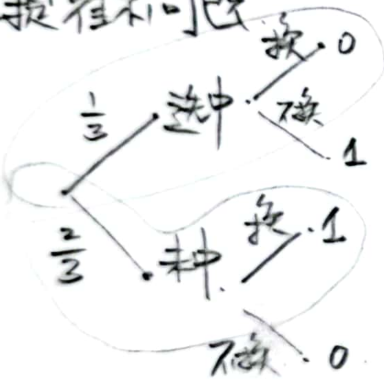
用得最多.

贝叶斯公式: $P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)\cdot P(A_i)}$ 全概率公式.

事件独立性和变量独立性的区别.

证明错排概率为 $\frac{1}{e}$ 必 自己课后回顾.

。蒙提霍尔问题



$P(得|换)=\frac{2}{3}$?

$P(得|不换)=\frac{1}{3}$

随机变量及分布函数: $F(x)=P(X\le x)$
- 连续: 积分
- 离散: 求和

一维
- 常见的离散型随机变量:
  - 零一分布
  - 二项分布
  - 泊松分布: 二项分布 $\begin{cases} n\to\infty \\ pn 有限时 \end{cases}$
- 连续型:
  - 均匀分布
  - 指数分布: 可靠性 寿命
  - 高斯分布(正态分布): 中心极限定理
  - 统计分布: t分布, f分布, χ^2分布 ⇒ 杂变波特性.

随机过程理论 2024-09-09 主M101

二维分布

$$\begin{cases} F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,ds\,dt \\ \quad f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} \\ F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_j\le y} P(X=x_i,Y=y_j) \end{cases}$$

边缘分布 多维分布 条件分布: $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 条件概率密度.

条件分布函数 $F(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(\alpha|y)\,d\alpha$

有一维 二维 甚至多维.

$$f(x_1,x_2\dots x_n)=f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1,x_2)\dots f(x_n|x_1\dots x_{n-1})$$

补充一:

RV X,Y $Y=g(X)$ 已知 $f_X(x)$ $f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|J|$, $|J|=|h'(y)|$

要求 $g(x)$ 单调 $\longrightarrow x=h(y)$.

补充二:

※ $\begin{cases} y_1=g_1(x_1,x_2) \\ y_2=g_2(x_1,x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=h_1(y_1,y_2) \\ x_2=h_2(y_1,y_2) \end{cases} \Rightarrow f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f(h_1(\cdot),h_2(\cdot))\cdot|J|$.

例 $\begin{cases} R=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=R\cdot\cos\theta \\ y=R\cdot\sin\theta \end{cases}$ 若 x,y 服从独立正态分布 则 R,θ 服从均匀分布 ※

二维带相关系数正态分布.

$(x_1,x_2)\sim N(a_1,\sigma_1^2;a_2,\sigma_2^2;r)$.

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

因为正态高斯分布 积分 $\int f(x)dx=1$, 可以证明边沿概率密度和条件概率密度都是高斯分布.

随机过程理论 2024-09-09 3M101

※ 多维正态分布

R.V. $X_i \quad i=1,2\ldots n$

$X=[X_1,\ldots X_n]^T$

$x=[x_1,x_2\ldots,x_n]^T$

$a=[a_1,a_2\ldots a_n]^T \quad a_i=E(X_i)$

$C=[C_{ij}]_{n\times n} \quad C_{ij}=Cov(X_i,X_j)$ ← 半正定

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\{-\frac{1}{2}(x-a)^TC^{-1}(x-a)\}$$ 则 $X\sim N(a,C)$.

行列式

其中 C 为实对称矩阵: $C=L^TL=U^T\Lambda U$.

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2}{2}\}$$ 其中 x_i' 是变化后的变量 x'.

观察 $(x-a)^TC^{-1}(x-a)$. 由于 C 可以开平方, 显然 $C^{-1}=(L^TL)^{-1}$

得到 $((x-a)^TL^{-1})\cdot(L^{-1})^T(x-a)$ 为二次型 故新变量组为 $(L^{-1})^T(x-a)=x'$

随机变量的数字特征 → 也称为均值(在随机过程中)

① 数学期望: 对各种 必绝对可积

m_X

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx. \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<\infty$$

质心大小

例 $f(x)=\frac{\lambda}{1+x^2}$ $E(x)$ 不存在 (定义上)

$$m_Y=E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx.$$

交流功率 也要有绝对收敛 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f_X(x)dx<\infty$.

② 方差:

$$\sigma_x^2=D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E\{[X-E(X)]^2\}$$ 总功率

$\psi_x^2=E(x^2)$ 均方值

σ_x: 均方差, 均方根 RMS $=\sqrt{\sigma_x^2}$

又 $\psi_x^2=\sigma_x^2+m_x^2$ 功率理解

设 $\varphi(c)=E\{[x-c]^2\}$ 则 c取 $E(x)$ 时 $\varphi(c)$ 有最小值.

$E[g(x_1,x_2,\dots,x_n)]=E(y) \rightarrow y=g(x_1\dots x_n)$,

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1\dots x_n) f(x_1\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n$

协方差: $Cov(X_i,X_j)=E(g(x_i,x_j))=E\{(x_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))\}^2$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_i,x_j)f(x_i,x_j)\,dx_i\,dx_j$$

$$=E(x_i,x_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j).$$

将未在随机过程中: $X_i=X(t_i)$

相关系数 由柯西许瓦兹不等式: $[E(VW)]^2\le E[V^2]E[W^2]$ 得 $|r_{ij}|\le$

$r_{ij}=\frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}}$ 切比雪夫不等式: 数学期望方差与概率

$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

※ 证明 $E[(V-\lambda W)^2]=E(V^2)-2\lambda E(V,W)+\lambda^2E(W^2)\geq 0$. 恒成立.

则 故 $B^2-4AC\le 0$. $E(V,W)^2-E(V^2)E(W^2)\le 0$

正交: $E(X_i,X_j)=0$ $i\ne j$

相互独立 $f(x_i,x_j)=f_{X_i}(x_i)\cdot f_{X_j}(x_j)$.

$\Downarrow$

互不相关: $C_{ij}=cov(X_i,X_j)=0$.