2025-01-04 复习

泊松计数过程：① 非负 ② 零初值 ③ 不下降 ④ $N(t)-N(s)$ 表示时间 $[s,t]$ 的事件数

⑤ 任意不相交等长区间独立同分布，是平稳独立增量过程

⑥ 单跳跃性：同时刻至多有一个计数增量 ⑦ 随机性：概率和为“1”

泊松计数过程定义：① 零初值 ② 独立增量 ③ 平稳增量

④ 单跳跃性 ⑤ 随机性

使用二项分布极限推导泊松分布的概率密度

设有n个时间片，每个时间片有p的概率发生某事件，$n\to\infty$ $p\to 0$ $np=\lambda$

求事件恰发生k次的概率

$$C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \boxed{\frac{\overset{\to\infty}{n!}}{\underset{\to\infty}{(n-k)!}\,k!}} \cdot \overset{\to 0}{p^k}\, \boxed{\overset{\to 0}{(1-p)^{n-k}}}$$

定值

$$= \frac{n}{n-k} \cdot \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{n-2}{n-k-2} \cdots\cdots \frac{n-k+1}{1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^n \cdot (1-p)^{-k} \right\}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k\text{次}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot p^k \cdot n^k}_{\text{定值}} \underbrace{\left(1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)}_{\Downarrow\ 1} \overset{\text{变}}{\boxed{(1-p)^n}} \underbrace{(1-p)^{-k}}_{1}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

泊松随机过程 $N(t)$ 有 $P\{N(t)=k\}=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

设 $P_0(t_1,t_2)$ 为从 t_1 到 t_2 没有事件发生的概率，求 $P_0(t_1,t_2)$

其实由于独立平稳增量，$P_0(t_1,t_2)=P_0(0,t_2-t_1)=P\{N(t_2-t_1)=0\}=e^{-\lambda(t_2-t_1)}$

PPT上用积分的方式处理我觉得没必要

同理 $P_k(t_1,t_2)=\dfrac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}\left(\lambda(t_2-t_1)\right)^k}{k!}$ 我觉得也不用PPT上的做法

○ 求 $N(t)$ 的均值和方差

$$E\{N(t)\}=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k}{k!}=(\lambda t)\cdot e^{-\lambda t}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda t e^{-\lambda t}e^{\lambda t}=\lambda t$$

$$E[N^2(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$ 令 $k\Leftarrow k+1$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)\cdot e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)=\begin{cases}① \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=e^{\lambda t}\\ ② \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\cdot\lambda t=e^{\lambda t}(\lambda t)\end{cases}$$

拆

$$=e^{\lambda t}(\lambda t+1)\cdot e^{-\lambda t}(\lambda t)=\lambda^2t^2+\lambda t$$

故 $D[N(t)]=E[N^2(t)]-E^2[N(t)]=\lambda t$ 泊松过程的均值和方差在对应点处相等

计算相关函数 $R_N(t_1,t_2)=E\{N(t_1)N(t_2)\}$ 不妨设 $t_1<t_2$

$$=E\{N(t_1)\{N(t_1)+N(t_2-t_1)\}\}$$

没有交，故无关

$$=E\{N^2(t_1)\}+E\{N(t_1)\}\cdot E\{N(t_2-t_1)\}=\begin{cases}\lambda^2t_1^2+\lambda t_1+\\ \lambda t_1\cdot(\lambda(t_2-t_1))\end{cases}$$

$\Uparrow$

$\lambda^2t_1t_2+\lambda t_1$

泊松冲击 $X(t)=\dfrac{dN(t)}{dt}$ 计算均值方差自相关函数

$$E[X(t)]=\frac{dE[N(t)]}{dt}=\lambda \qquad R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$$

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-(E[X(t)])^2=\lambda\delta(0)\to\infty$$

$$\lambda\cdot u(t_1-t_2)\cdot t_1+\lambda\, u(t_2-t_1)\cdot t_2 \xrightarrow{\partial t_1} \delta(t_1-t_2)t_1+u(t_1-t_2)-\delta(t_2-t_1)\cdot t_2+u(t_2-t_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(t_2-t_1)\xleftarrow{\partial t_2} 1+\delta(t_1-t_2)t_1-\delta(t_2-t_1)t_2$$

$$\frac{\partial^2 R_N(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\lambda^2+\lambda\delta(t_2-t_1)$$

到达时间：T_k：第k个事件到来的时刻

是一个随机变量

$P\{T_k\le t\}=P\{N(t)\ge k\}$ 因为 $N(t)$ 为整数，教材写的是 $P\{N(t)>k-1\}$ 我觉得一样

$$=\sum_{j=k}^{\infty}P\{N(t)=j\}=1-\sum_{j=0}^{k-1}P\{N(t)=j\}=F_{T_k}(t)$$

求导得到 $f_{T_k}(t)$ 服从 Γ 分布

到达间隔 Z_k，在我看来就是一些相同分布的 T_1

可以认为到达时间是到达间隔的时间级数和。

研究在机械检查界

$$P\{Z_k\le t\}=P\{N(t)\ge 1\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

$\therefore f_{Z_k}(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ 故 $T_k=\sum_{i=1}^{k}Z_i$ $\quad E[T_k]=\dfrac{k}{\lambda}$

$$E[T_k^2]=E\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}Z_i\right)^2\right\}=E\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}Z_iZ_j\right\}=k\cdot E[Z_i^2]+2C_k^2\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty}z^2\lambda e^{-\lambda z}dz=-\int_0^{+\infty}z^2 d(e^{-\lambda z})=-\left[z^2e^{-\lambda z}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-e^{-\lambda z}d(z^2)$$

$$E[Z_i^2] = \int_0^{+\infty} 2z\, e^{-\lambda z}\, dz = \frac{1}{-\lambda}\int_0^{+\infty} 2z\, e^{-\lambda z}\, d(-\lambda z)$$

$$= \frac{1}{-\lambda}\int_0^{+\infty} 2z\, d(e^{-\lambda z}) = \frac{1}{-\lambda}\left[\cancel{2z\, e^{-\lambda z}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda z}\, d(2z)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} 2e^{-\lambda z}\, dz = -\frac{2}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda z}\, d(-\lambda z) = -\frac{2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda z}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$ 故 $E[T_k^2] = \frac{2k}{\lambda^2} + \frac{k(k-1)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}(k^2+k)$

故 $D[T_k] = E[T_k^2] - (E[T_k])^2 = \frac{1}{\lambda^2}(k^2+k) - \frac{k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$