$$\phi(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jvx}f(x)dx$$

2024-12-15 复习

$$\therefore \phi^{(k)}(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}(jx)^k\cdot e^{jvx}f(x)dx$$

$$\therefore \phi^{(k)}(0)=j^k\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot f(x)dx=j^k\cdot E[X^k]$$

故 $E[X^k]=j^{-k}\phi^{(k)}(0)$

第一章到这结束.

随机过程的数字特征

均值：$m_X(t)=E[X(t)]$

方差：$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E\{(X(t)-m_X(t))^2\}$ 均方差：$\sigma_X(t)$

均方值：$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$ 均方根：$\psi_X(t)$

自相关函数：$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}$

互相关函数：$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}$

自协方差函数：$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

互协方差函数：$C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$

三种关系性：① 相互独立：概率密度函数可乘

② 正交：$E\{X(t_1)Y(t_2)\}=0$.

③ 互不相关：$C_{XY}(t_1,t_2)=0$ 结论：相互独立一定互不相关

随机过程分类
- 统计特性：平稳、非平稳
- 记忆特性：纯粹随机、独立增量、马尔可夫
- 概率分布：高斯，非高斯
- 功率谱特性：白噪声和有色噪声.

狭义平稳随机过程：三个任意：{① 任意采样点数目 ② 任意时刻 ③ 任意时间间隔} pdf与cdf均保持不变

广义平稳随机过程：{① 二阶矩过程 ② 均值为常数且相关函数只与时间间隔有关}

两种平稳的联系：{① 没有必然联系 ② 功率有限的狭义平稳过程也是广义平稳的 ③ 借助高阶矩可以判断一个广义平稳过程是否是狭义平稳的}

PPT没说如何判断

提到"平稳过程"时，默认指广义平稳过程：性质

① 偶函数：

$R_X(\tau)=R_X(-\tau)$ ： $R_X(\tau)=E\{X(t)X(t-\tau)\}=E\{X(t-\tau)X(t)\}=R_X(-\tau)$

削减后（约定）

② 极值性：

$|R_X(\tau)|\le R_X(0)$ ：只需证明 $\begin{cases} a.\ R_X(0)\ge 0 ：R_X(0)=E\{X^2(0)\}\ge 0 \\ b.\ R_X^2(\tau)\le R_X^2(0) \end{cases}$

$R_X^2(\tau)=(E\{X(0)X(-\tau)\})^2$ 而 $R_X^2(0)=E\{X(0)X(0)\}\cdot E\{X(-\tau)X(-\tau)\}$

由柯西-施瓦茨不等式：$(E[VW])^2\le E[V^2]\cdot E[W^2]$

设 $V=X(0)$，$W=X(-\tau)$ 即可证明

③ 特殊点处的值：$R_X(0)=E\{X^2(t)\}$ 即总功率（任意时刻不变）

$\begin{cases} =D\{X(t)\}+m_X^2(t)=\sigma_X^2+m_X^2 \\ \text{从侧面反应出广义平稳过程的方差也是不随时间改变的} \end{cases}$

当信号具有遍历性时：$R_X(\infty)=m_X^2$

④ R_X 处处连续 $\Leftrightarrow$ R_X 在0点处连续，只需证明右⇒左

考虑 R_X 在τ处的左右极限，如果等于 $R_X(\tau)$ 则证明连续（要[illegible]）

$$0\le \left(R_X(\tau+\Delta\tau)-R_X(\tau)\right)^2=\left(E[X(\tau+\Delta\tau)X(0)]-E[X(\tau)X(0)]\right)^2$$ 柯西施瓦兹

$$=E^2\{X(0)\cdot(X(\tau+\Delta\tau)-X(\tau))\}\le E\{X^2(0)\}\cdot E\{(X(\tau+\Delta\tau)-X(\tau))^2\}$$

$$=R_X(0)\cdot E\{X^2(\tau+\Delta\tau)+X^2(\tau)-2X(\tau+\Delta\tau)X(\tau)\}$$

$$=R_X(0)\cdot\{2R_X(0)-2R_X(\Delta\tau)\}=2R_X(0)\cdot\{R_X(0)-R_X(\Delta\tau)\}$$

由于 R_X 在0处连续，所以 $R_X(0)-R_X(\Delta\tau)$ 收敛至0，夹逼知 $(R_X(\tau+\Delta\tau)-R_X(\tau))^2\to0$

⑤ 周期性：若 $X(t)$ 有周期性，则 $R_X(\tau)$ 与之一样有周期性

⑥ 非负定性：设 a_i 为实数列：

$$\sum_{i,j}\underbrace{R(\tau_i-\tau_j)}_{=E[X(t_i)X(t_j)]}\cdot a_i a_j\ge0$$

原式 $=E\{\sum_i\sum_j X(t_i)X(t_j)\cdot a_i\cdot a_j\}$

$=E\{\sum_i X(t_i)\cdot a_i\cdot\sum_j X(t_j)\cdot a_j\}$

$=E\{(\sum_i X(t_i)\cdot a_i)^2\}\ge0$

联合平稳：① 两个过程各自是广义平稳
② 满足 $E\{X(t_1)Y(t_2)\}$ 只与时间间隔 t_1-t_2 有关

① $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$：$R_{XY}(-\tau)=E\{X(-\tau)Y(0)\}=E\{Y(0)X(-\tau)\}=R_{YX}(\tau)$

② $(R_{XY}(\tau))^2\le R_X(0)R_Y(0)$：$E^2\{X(\tau)Y(0)\}\le E[X^2(\tau)]\cdot E[Y^2(0)]=R_X(0)\cdot R_Y(0)$

③ $(C_{XY}(\tau))^2\le\sigma_X^2\sigma_Y^2$ 证明思路与②一致，柯西-施瓦兹不等式

相关系数 $r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}$ 故 $r_X(0)=1$ $0\le r_X(\tau)\le 1$

$$C_X(\tau)=E\{(X(t)-\underbrace{E[X(t)]}_{m_X})(X(0)-\underbrace{E[X(0)]}_{m_X})\}$$

$$=E\{X(t)X(0)-\underbrace{X(t)m_X}_{m_X^2}-\underbrace{X(0)m_X}_{m_X^2}+m_X^2\}$$

$$=R_X(\tau)-m_X^2$$

相关时间：$\tau_0=\int_0^{+\infty}r_X(\tau)d\tau$

时间平均的定义 本质上仍然是一个随机变量

$$\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$ 是 $\overline{X(t)}$ 的样本

设 $x_i(t)$ 是 $X(t)$ 的一个样本函数，则 $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_i(t)dt=\overline{x_i(t)}$

均值各态历经：$E[X(t)]=m_X=\overline{X(t)}$

① $\overline{X(t)}$ 为常量即不波动 …… 两种情况都有

② $\overline{X(t)}$ 依概率均方收敛于 m_X 可能

自相关函数各态历经

↓

时间自相关函数：$\overline{X(t)X(t-\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t-\tau)dt$

各态历经性：① 时间平均收敛于均值 ………… 依概率收敛

② 时间自相关函数收敛于自相关函数

验证 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$ 其中 $\Theta\in[0,2\pi]$ 均匀分布 验证均值各态历经性.

① $E[X(t)]=E\{\cos(\omega t+\Theta)\}=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$ 恰好积分一个周期

② $\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\Theta)dt$ 由于对cos积分有界但 $2T$ 无界 故 $=0$.