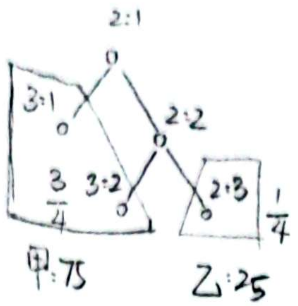
2024-12-15 复习



协方差: $Cov(X,Y)=E\{[X-E[X]][Y-E[Y]]\}$

协方差矩阵: $C_{ij}=cov(X_i,X_j)$ 一般是实对称

相关系数: $r_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}}$
- 量纲:1
- $-1\le r\le 1$:使用柯西不等式证明

$r_{ij}=0 \Leftrightarrow C_{ij}=0$ 称为互不相关

相互独立一定有互不相关 高斯分布之间互不相关推出相互独立

特征函数: $\phi(\nu)=E[e^{j\nu X}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{e^{j\nu x}f(x)}dx$
- 类似于不带 $\frac{1}{2\pi}$
- 即逆变换

反推 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\nu x}\underbrace{\phi(\nu)d\nu}$
- 类似于正变换
- 注意积分变量别写反

为什么变换对具有唯一性:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\nu x}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\nu t}f(t)dt\right\}d\nu$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\nu(t-x)}f(t)dt\cdot d\nu$$ 先积ν,其中x不变

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\nu(t-x)}\cdot d\nu\right\}}_{2\pi\cdot\delta(t-x)}\cdot dt \qquad \boxed{\frac{1}{j(t-x)}\cdot e^{j\nu(t-x)}}$$

作为一个结论记忆吧: $\delta(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jkx}dk$

2024-12-15

证明: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkx}\,dk\right\}dx = 1$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{jx}e^{jkx}\right]_{-\infty}^{+\infty}\cdot dx$$

k为变量

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{jx}e^{jkx} - \frac{1}{jx}e^{-jkx}\right]\cdot dx$$

这里要两个一起看 得到 $\frac{\sin x}{x}$.

$$e^{jkx} - e^{-jkx} = (\cos kx + j\sin kx) - (\cos(-kx) + j\sin(-kx)) = 2j\sin kx$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2j\sin kx}{jx}\cdot dx = \boxed{\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{\pi x}\cdot dx} = 1$$

k=0时 得到

一维特征函数的性质:

① $|\phi(\omega)| \le \phi(0) = 1$:
$$\begin{cases} \phi(0) = E[e^{j0X}] = 1 \\ |\phi(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{j\omega X}|}_{=1}\cdot \underbrace{f(x)\,dx}_{=1} \end{cases}$$

② 设 $Y = aX + b$: $\phi_Y(\omega) = E\left[e^{j\omega(aX+b)}\right] = e^{j\omega b}\cdot E\left[e^{j\omega\cdot aX}\right] = e^{j\omega b}\cdot\phi_X(a\omega)$

③ 在独立的前提下: 随机变量相加 特征函数相乘.

④ $E[X^k] = j^{-k}\phi^{(k)}(0)$ 证明:

$$\phi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jvx} f(x)\,dx$$

2024-12-15 复习

$$\therefore \phi^{(k)}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^k e^{jvx} f(x)\,dx$$

$$\therefore \phi^{(k)}(0) = j^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx = j^k E[X^k]$$

故 $E[X^k] = j^{-k}\phi^{(k)}(0)$

第一章刷题结束.

随机过程的数字特征

均值: $m_X(t) = E[X(t)]$

方差: $\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E\{(X(t) - m_X(t))^2\}$　均方差: $\sigma_X(t)$

均方根: $\psi_X(t)$

均方值: $\psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$

自相关函数: $R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$

互相关函数: $R_{XY}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\}$

自协方差函数: $C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$

互协方差函数: $C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$

三种关系性: ① 相互独立: 概率密度函数可乘

② 正交: $E\{X(t_1)Y(t_2)\} = 0$

③ 互不相关: $C_{XY}(t_1,t_2) = 0$　结论: 相互独立一定互不相关

随机过程分类:

- 统计特性: 平稳、非平稳
- 记忆特性: 纯粹随机、独立增量、马尔可夫
- 概率分布: 高斯、非高斯
- 功率谱特性: 白噪声和有色噪声。