2.1 设 $X(t)=A\cos\omega t$，$t\geq 0$，ω为常数 $A\sim U(0,1)$

(1) 求 $X(t_i)$ 的概率密度，其中 $t_i=0, \frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$

① $t_i=0$ 时 $X(0)=A$ 故概率密度为 $f_X(x;t_i)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

② $t_i=\frac{\pi}{4\omega}$ 时 $X(\frac{\pi}{4\omega})=A\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

故概率密度为：$f_X(x;t_i)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0\leq x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

③ $t_i=\frac{3\pi}{4\omega}$ 时 $X(\frac{3\pi}{4\omega})=A\cos(\frac{3}{4}\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

故概率密度为：$f_X(x;t_i)=\begin{cases}\sqrt{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq x\leq 0.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

④ $t_i=\frac{\pi}{\omega}$ 时 $X(\frac{\pi}{\omega})=A\cdot\cos(\pi)=-A$

故概率密度为：$f_X(x;t_i)=\begin{cases}1, & -1\leq x\leq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) 当 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时，求 $X(t)$ 的概率密度

$X(\frac{\pi}{2\omega})=A\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$，故 $X(t)$ 只有有限种取值

概率密度不存在

2.3 给一个随机过程 $X(t)$ 和任一实数 x，定义另一随机过程 Y.

$$Y(t)=\begin{cases}1 & X(t)\leq x\\ 0 & X(t)>x\end{cases}$$

证明 $Y(t)$ 的均值和自相关函数，分别为 $X(t)$ 的一维和二维分布函数.

$$\begin{cases}E[Y(t)]=P\{X(t)\leq x\}=F_X(x;t)\\ E[Y(t_1)Y(t_2)]=1\times P\{X(t_1)\leq x_1 \text{且} X(t_2)\leq x_2\}=F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\end{cases}$$

得证

~~2.11 随机过程由三个样本函数等概率生成~~

~~$X(t,e_1)=1$, $X(t,e_2)=\sin t$, $X(t,e_3)=\cos t$~~

~~(1) 计算该随机过程的均值与自相关函数~~

~~$m_X(t)=\frac{1}{3}(1+\sin t+\cos t)$~~

2.11 给定一个随机变量Θ，其特征函数为$\phi(v)$，给定另一常数ω，构造一个随机过程 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$

证明 $X(t)$ 是平稳随机过程当且仅当 $\phi(1)=0$ 且 $\phi(2)=0$.

根据特征函数的定义：$\phi(v)=E[e^{jv\Theta}]$

即 $\phi(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jv\theta}\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta \Rightarrow e^{jv\theta}=\cos(v\theta)+j\sin(v\theta)$

$$E[X(t)]=E[\cos(\omega t+\Theta)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega t+\theta)f_\Theta(\theta)\,d\theta.$$

Θ $\begin{cases}\phi(1)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\theta+j\sin\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta.\\ \phi(2)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos2\theta+j\sin2\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta.\end{cases}$

$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

$\Downarrow$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).$

$$E[X(t_1)X(t_2)]=E[\cos(\omega t_1+\Theta)\cdot\cos(\omega t_2+\Theta)]$$
$$=\frac{1}{2}E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)+\cos\omega(t_1-t_2)]$$

从右推左：
$\begin{cases}\phi(1)=0 \text{ 说明 } \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\theta\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta=0 \text{ 且}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\theta\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta=0.\end{cases}\\ \phi(2)=0 \text{ 说明 } \begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos2\theta\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta=0 \text{ 且}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin2\theta\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta=0.\end{cases}\end{cases}$

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\omega t)\cos\Theta - \sin(\omega t)\sin\Theta\right)\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta$$

$$= \cos(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta\, f_\Theta(\theta)\,d\theta - \sin(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\theta\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta$$

$$= 0$$

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \frac{1}{2}E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)] + \frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$$

观察：$E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)]$

$$= E[\cos\omega(t_1+t_2)\cos 2\Theta - \sin\omega(t_1+t_2)\sin 2\Theta]$$

$$= \cos\omega(t_1+t_2)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\theta)\cdot f_\Theta(\theta)\,d\theta - \sin\omega(t_1+t_2)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\theta\, f_\Theta(\theta)\,d\theta;$$

$$= 0.$$

故 $E[X(t)]$ 与 t 取值无关且 $E[X(t_1)X(t_2)]$ 取值只与 t_1-t_2 有关.

但左推右怎么做？

2.13 设随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t+\Theta)$，其中 A 为具有瑞利分布的随机变量，其概率密度为：

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2}\cdot \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a>0. \\ 0, & a\le 0. \end{cases} \qquad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi. \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

证明：设 A, Θ 独立，ω 为常数，证明 $X(t)$ 是平稳随机过程

期望：$E[X(t)] = E[A\cdot\cos(\omega t+\Theta)]$ 由于 A, Θ 独立

$$= E[A]\cdot \underbrace{E[\cos(\omega t+\Theta)]}_{=0}$$

$$= 0.$$

自相关系数

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2 \cdot \cos(\omega t_1+\Theta)\cdot\cos(\omega t_2+\Theta)]$$

$$= E[A^2]\cdot E[\tfrac{1}{2}\{\underbrace{\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)}_{=0} + \cos\omega(t_1-t_2)\}]$$

$$= \tfrac{1}{2}E[A^2]\cdot\cos\omega(t_1-t_2)$$

故自相关系数只与 t_1-t_2 有关

2.18 设随机过程 $X(t)=U\cos t+V\sin t$ 其中 U 和 V 是两个相互独立的随机变量
和 $Y(t)=U\sin t+V\cos t$

已知：$E[U]=E[V]=0$. $E[U^2]=E[V^2]=1$.

(1) 证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是广义平稳随机过程

$$E[X(t)] = E[U\cos t+V\sin t] = \cos t\cdot E[U]+\sin t\cdot E[V]=0.$$ 与时间无关

$$E[X(t_1)X(t_2)] = E[(U\cos t_1+V\sin t_1)(U\cos t_2+V\sin t_2)]$$

$$=E[U^2\cdot\cos t_1\cdot\cos t_2 + UV\cdot(\cos t_1\sin t_2+\cos t_2\sin t_1)+V^2\sin t_1\cdot\sin t_2]$$

$$=\cos t_1\cos t_2\cdot E[U^2] + \underbrace{(\cos t_1\sin t_2+\cos t_2\sin t_1)E[U]\cdot E[V]}_{=0} + \sin t_1\sin t_2\cdot E[V^2]$$

$$=\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2 = \cos(t_1-t_2)$$

对 $Y(t)$ 也可以使用类似的作法.

(2) 证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不是广义联合平稳的

$$\mathrm{Cov}(X(t_1),Y(t_2)) = E\{(X(t_1)-\overset{0}{m_X})(Y(t_2)-\overset{0}{m_Y})\}$$

$$=E\{X(t_1)Y(t_2)\}$$

$$=E\{(U\cos t_1+V\sin t_1)\cdot(U\sin t_2+V\cos t_2)\}$$

$$=\underset{1}{E[U^2]}\cdot\cos t_1\cdot\sin t_2+\underset{1}{E[V^2]}\cdot\sin t_1\cos t_2+\underset{0}{E[U]\cdot E[V]}(\cdots)$$

$$=\sin(t_1+t_2)$$ 并不只与 t_1-t_2 有关，故不是广义联合平稳