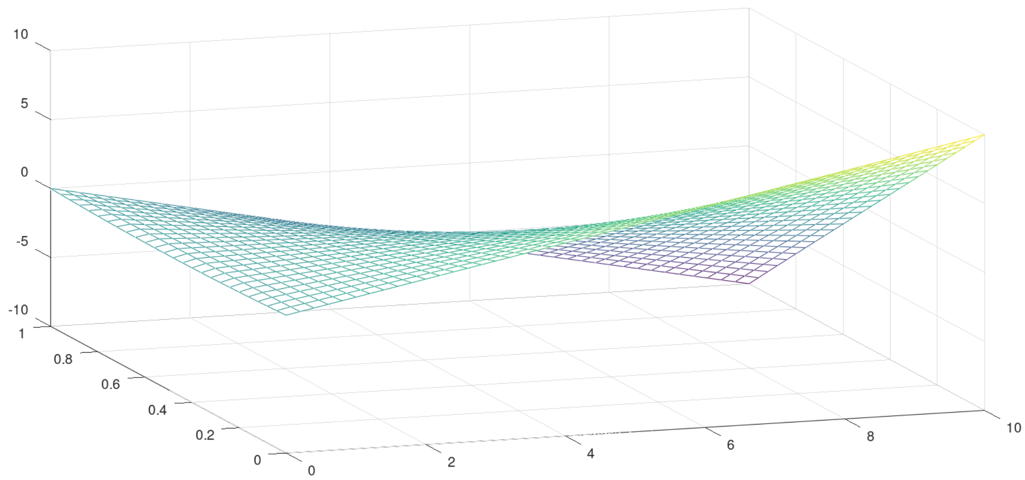
Memoria de la práctica final:
Esquema de Crank-Nicholson
Problema 1.24



Finn Maria Dicke (Y0080222N)
Gabriel González Pibernat (43638413F)
Antonio Amor Ramón (43467659M)
Alexandre Cebreiro Vega (46395907P)

Índice

Descripción del problema y proceso de resolución

Introducción al problema planteado

En este trabajo, se aborda el problema de determinar la distribución de temperatura en una barra de longitud $L = 1$, en un intervalo de tiempo $T = 10$. Para resolverlo, se utiliza el método de Crank-Nicholson, que es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Para aplicar el método, primero se divide el intervalo espacial y temporal en un número determinado de divisiones equidistantes. En este caso, se han elegido $I = 25$ divisiones espaciales y $J = 50$ divisiones temporales. Esto significa que se consideran 25 puntos en el espacio y 50 instantes de tiempo para calcular la temperatura en la barra.

Además, se define la ecuación de temperatura inicial de la barra, $f(x) = x(x - 1)$, y las condiciones de frontera, $l(t) = t$ y $r(t) = -t$, que especifican la temperatura en los extremos de la barra en función del tiempo. Con esta información, se pueden calcular las temperaturas en cada punto de la barra en cada instante de tiempo.

En cuanto a la representación gráfica, la matriz resultante se mostrará en un gráfico tridimensional, donde el eje 'x' representa la posición en la barra, el eje 'y' representa el tiempo y el eje 'z' representa la temperatura. El resultado será una forma en 3D que muestra cómo la temperatura varía a lo largo del tiempo y en diferentes puntos de la barra

En resumen, se ha planteado un problema para determinar la distribución de temperatura en una barra en un intervalo de tiempo y se ha utilizado el método de Crank-Nicholson para resolverlo. Se han dividido el espacio y el tiempo en un número determinado de divisiones y se han definido la ecuación de temperatura inicial y las condiciones de frontera. En el trabajo se presenta el proceso detallado de resolución del problema y los resultados obtenidos.

Proceso de resolución

Declaración de las variables

Inicialmente se nos presentaron una serie de variables sobre las que calcular el problema. Estas variables fueron:

- Longitud de la barra (L) = 1
- Longitud del tiempo (T) = 10
- Número de puntos de cálculo a lo largo de la barra (I) = 25
- Número de puntos de cálculo a lo largo del tiempo (J) = 50
- Función representante de la temperatura inicial ($f(x)$) = $x(x - 1)$
- Función representante de la temperatura en el extremo izquierdo ($l(t)$) = t
- Función representante de la temperatura en el extremo derecho ($r(t)$) = $- t$

Presentación del código

Se nos dieron una serie de códigos de ejemplo en el github del profesorado que hemos tomado como referencia para resolver el problema. Los códigos son los siguientes:

- main_crank_nicholson.m
    - Este archivo es solo una especie de coordinador de los otros dos archivos y un lugar donde introducir los parámetros principales para no tener que llamar a los otros dos archivos individualmente.
- solve_crank_nicholson_heat_equation.m
    - Este archivo hace el cálculo principal del problema y toma como argumentos las variables L, T, I y J también requiere un trabajo adicional para que se tengan en cuenta el resto de variables.
- plot_solution.m
    - Este último archivo solo se ocupa de graficar los resultados finales del archivo principal de cálculos mencionado anteriormente. Toma como argumentos la división equidistante tanto en el eje longitudinal como en el temporal y la matriz resultante de los cálculos.

Aparte de estos códigos proporcionados por el profesorado, también debimos usar el código de resolución de sistemas por pivotaje total. El que hemos usado se puede encontrar en eliminacion_gaussiana_p_t.m

Introducción de variables en el código de octave

Al rellenar cada una de las variables en su posición final, nos han quedado los archivos que hemos usado para calcular los resultados.
Estos archivos se pueden encontrar en la carpeta de código de nuestro Github del proyecto y se harán referencias a ellos en este apartado de la memoria.

- Modificaciones en main_crank_nicholson.m:
    - No se han modificado ningún dato ya que el archivo, por defecto, ya contenía los valores que se nos pedían en el enunciado. Aun así, podríamos encontrar

el caso en el que el enunciado diferiera de estos valores iniciales. En ese caso, se asignará cada una de las variables L, T, I, y J en las líneas 4, 7, 10 y 11 respectivamente

- Modificaciones en solve_crank_nicholson_heat_equation.m por linea(s) afectadas:
    - 23: Definición del parámetro h representante de la longitud entre cada uno de los puntos a calcular a lo largo del eje L.

    - 24: Definición del parámetro k representante de la longitud entre cada uno de los puntos a calcular a lo largo del eje T.

    - 25: Definición del parámetro α necesario para poder calcular los sistemas de ecuaciones necesarios.

    - 34: Definición del valor de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz B del sistema de ecuaciones.

    - 39 y 44: Definición del valor de cada uno de los elementos de las subdiagonales superiores y inferiores de la matriz B de los sistemas de ecuaciones.

    - 51: Definición de los valores de la primera columna de la matriz final U según las condiciones de frontera establecidas con $f(x)$.

    - 55: Definición de los valores de la fila superior de la matriz final U según las condiciones de frontera establecidas con $l(t)$.

    - 56: Definición de los valores de la fila inferior de la matriz final U según las condiciones de frontera establecidas con $r(t)$.

    - 64: Definición del valor superior del vector de términos independientes para la resolución de los sistemas de ecuaciones.

    - 65: Definición del valor inferior del vector de términos independientes para la resolución de los sistemas de ecuaciones.

    - 67: Cálculo del vector resultante W_s con la incorporación de la llamada al archivo incluido por nosotros para la resolución de sistemas de ecuaciones por pivotaje maximal, eliminacion_gaussiana_p_t.m

    - 69: Cálculo de cada una de las columnas de la matriz final U en función del vector W_s obtenido

    - Además, en las líneas 36, 41, 46, 53, 58, 68 y 72; se ha añadido una impresión del valor de cada una de las matrices o vectores correspondientes al final de su proceso de cálculo, además de la supresión de la impresión de este proceso. Para así conseguir una ventana de salida más limpia y ordenada.

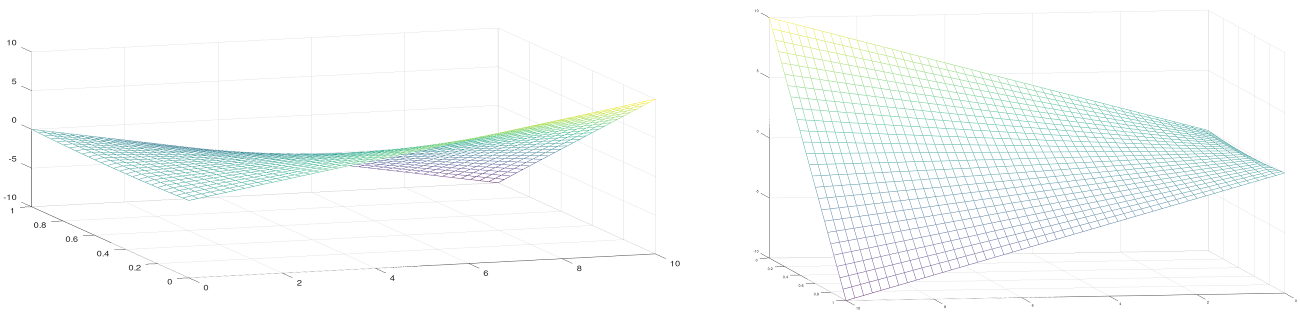
- Modificaciones en plot_solution.m:
    - No hay modificaciones en este archivo ya que solo grafica los datos pasados por parámetros.

Obtención de los resultados numéricos

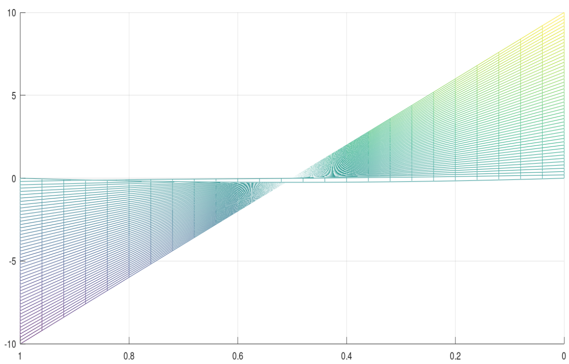
Al finalizar la edición de los archivos de código, los ejecutamos y esto nos devolvió una serie de resultados numéricos. Estos han sido ordenados, limpiados y presentados en el apartado de Resultados numéricos

Graficado de los resultados obtenidos

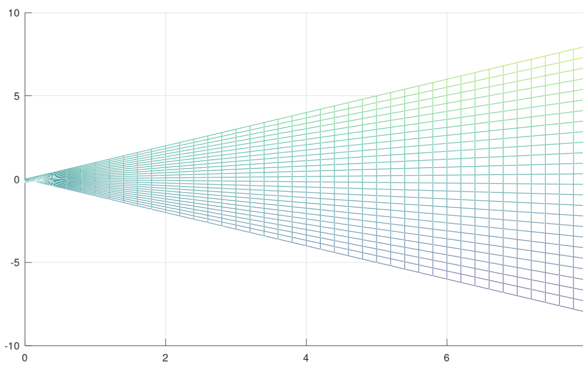
Además, el archivo plot_solution.m también genera el siguiente gráfico tridimensional:



Vistas en 3D del gráfico final



Vista frontal del gráfico final



Vista lateral del gráfico final

Resultados numéricos

Conjunto de vectores M

0	-0.0384	-0.0736	-0.1056	-0.1344	...	0
0.2000	0.1801	0.1592	0.1388	0.1192	...	-0.2000
0.4000	0.3602	0.3236	0.2891	0.2563	...	-0.4000
0.6000	0.5492	0.4971	0.4456	0.3949	...	-0.6000
0.8000	0.7286	0.6598	0.5930	0.5278	...	-0.8000
1.0000	0.9177	0.8334	0.7499	0.6675	...	-1.0000
1.2000	1.0972	0.9967	0.8978	0.8004	...	-1.2000
1.4000	1.2859	1.1694	1.0539	0.9395	...	-1.4000
1.6000	1.4659	1.3335	1.2028	1.0733	...	-1.6000
1.8000	1.6542	1.5055	1.3579	1.2115	...	-1.8000
2.0000	1.8346	1.6703	1.5076	1.3461	...	-2.0000
2.2000	2.0226	1.8417	1.6620	1.4836	...	-2.2000
2.4000	2.2032	2.0071	1.8124	1.6188	...	-2.4000
2.6000	2.3909	2.1779	1.9662	1.7558	...	-2.6000
2.8000	2.5718	2.3437	2.1170	1.8914	...	-2.8000
3.0000	2.7593	2.5142	2.2704	2.0280	...	-3.0000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
10.0000	9.2049	8.4010	7.5977	6.7954	...	-10.0000

Nota: Si nos fijamos bien podemos observar que cada uno de estos vectores representa la temperatura de la barra entera en cada instante de tiempo

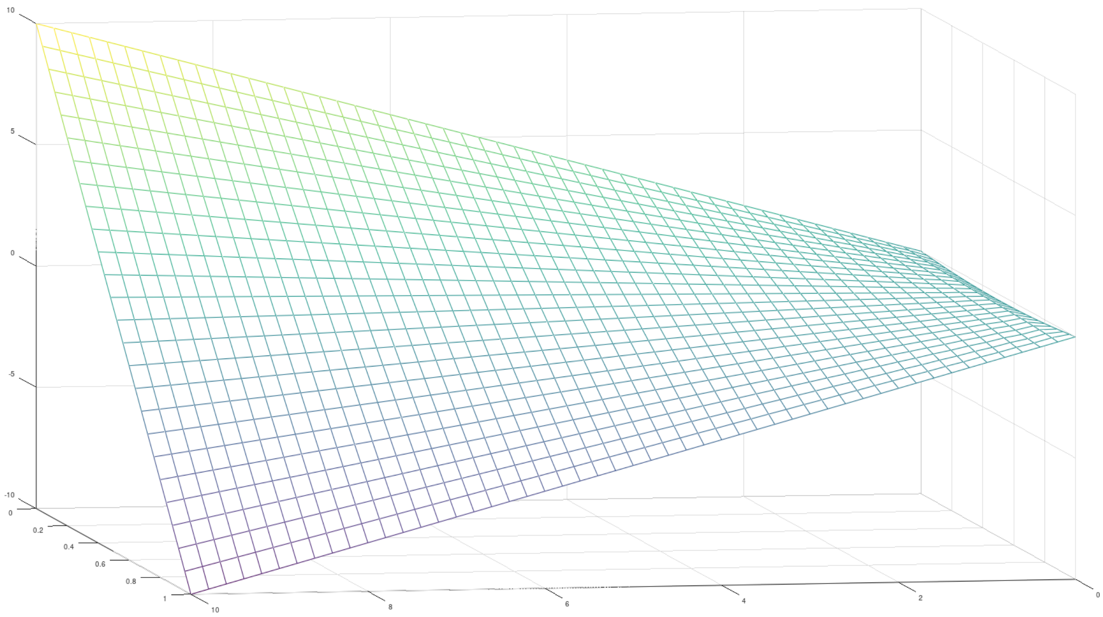
El conjunto M entero se puede encontrar en la carpeta de resultados del Github

Matriz U

0	0.2000	0.4000	0.6000	...	10.0000
-0.0384	0.1801	0.3602	0.5492	...	9.2049
-0.0736	0.1592	0.3236	0.4971	...	8.4010
-0.1056	0.1388	0.2891	0.4456	...	7.5977
-0.1344	0.1192	0.2563	0.3949	...	6.7954
-0.1600	0.1004	0.2249	0.3450	...	5.9941
-0.1824	0.0826	0.1944	0.2961	...	5.1937
-0.2016	0.0658	0.1647	0.2481	...	4.3942
-0.2176	0.0501	0.1355	0.2009	...	3.5954
-0.2304	0.0355	0.1066	0.1544	...	2.7972
-0.2400	0.0220	0.0778	0.1086	...	1.9995
-0.2464	0.0094	0.0489	0.0635	...	1.2020
-0.2496	-0.0023	0.0197	0.0188	...	0.4048
-0.2496	-0.0132	-0.0099	-0.0255	...	-0.3924
-0.2464	-0.0235	-0.0400	-0.0695	...	-1.1896
-0.2400	-0.0335	-0.0707	-0.1134	...	-1.9871
-0.2304	-0.0434	-0.1022	-0.1573	...	-2.7848
-0.2176	-0.0534	-0.1343	-0.2012	...	-3.5830
-0.2016	-0.0641	-0.1672	-0.2456	...	-4.3818
-0.1824	-0.0757	-0.2008	-0.2905	...	-5.1812
-0.1600	-0.0888	-0.2348	-0.3364	...	-5.9814
-0.1344	-0.1040	-0.2692	-0.3836	...	-6.7826
-0.1056	-0.1220	-0.3034	-0.4328	...	-7.5851
-0.0736	-0.1433	-0.3371	-0.4845	...	-8.3889
-0.0384	-0.1690	-0.3696	-0.5399	...	-9.1942
0	-0.2000	-0.4000	-0.6000	...	-10.0000

La matriz U entera se puede encontrar en la carpeta de resultados del Github

Dibujo de la matriz U



El resto de las vistas del gráfico ya están en el apartado de “Graficado de los resultados obtenidos”. También se pueden encontrar en el repositorio de Github.

Conclusiones finales

En conclusión, el problema planteado de calcular la temperatura en una barra a lo largo del tiempo ha sido resuelto con éxito mediante el uso del método de Crank-Nicholson. Se ha obtenido una matriz resultante con los valores de temperatura en cada punto de la barra en cada momento, y se ha representado gráficamente en un gráfico tridimensional.

Es importante destacar que esta solución es solo una aproximación numérica y que pueden existir diferencias entre los resultados obtenidos y la realidad física. Sin embargo, el método de Crank-Nicholson es una herramienta útil para resolver problemas de difusión en el tiempo y en el espacio.

En cuanto al proceso de resolución, se ha implementado un código en Octave que ha permitido la introducción de las variables y la obtención de los resultados numéricos. Además, se ha presentado la matriz resultante y se ha explicado cómo se ha representado gráficamente.

En resumen, se ha obtenido una solución al problema planteado y se ha presentado una interpretación teórica simplificada del proceso de resolución. Este trabajo proporciona una base para futuras asignaturas con base matemática como pueden ser por ejemplo el campo de la mecánica de fluidos y la termodinámica.

También queremos recalcar que hemos aprendido una cantidad de información y nos ha gustado ver que el álgebra sirve para estudios en la vida real.