$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Example 1

问题描述

已知 $x>0, y>0$ 且 $2x+8y-xy=0$ 求 $x+y$ 的最小值

分析与解答

通过 1的代换 来解决问题

考虑将 $2x+8y-xy=0$ 化简可得:

$2x+8y=xy$ 两边同乘 $\frac{1}{xy}$ 可得:

$\frac{2}{y}+\frac{2}{x}=1$

$\because x+y=(x+y)\cdot 1$

$\therefore (x+y)=(x+y)(\frac{8}{x}+\frac{2}{y})=\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}+10$

$\because x>0, y>0$

$\therefore \frac{2x}{y}+\frac{8y}{x} \geq 2\sqrt{16}$

当且仅当 $x=6, y=12$ 时 $(\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x})_{min}=8$

此时 $(x+y)_{min}=18$

Example 2

问题描述

已知 x， $y>0, x+2y+xy-6=0$，解决下列问题:

1. 求 xy 的最大值
2. $x+2y$的最小值
3. $x+y$ 的最小值
4. $(x+2)^2+(y+1)^2$的最小值

分析与解答

第一问

第一问可以使用基本不等式可将 $x+2y \Rightarrow \sqrt{2xy}$ 然后进行因式分解：

$\because x+2y \geq \sqrt{2xy}, x+2y+xy-6=0$

$\therefore 2\sqrt{2xy}+xy-6 \leq 0$

$\because x, y > 0$

$\therefore (\sqrt{xy})^2+2\sqrt{2xy}-6 \leq 0$

$=(\sqrt{xy})^2+2\sqrt{2}\sqrt{xy}-6 \leq 0$

若将上面的不等式中的 $\sqrt{xy}$ 看成一个整体，可得一个一元二次不等式，可解得：

$0 < \sqrt{xy} \leq \sqrt{2}$

$0 \leq xy \leq 2$

$\therefore xy\_max = 2$

第二问

由第一问可得 $xy_{max} = 2$

$\because x+2y = 6-xy$

$\therefore (x+2y)\_max = 6 - xy\_min = 6-2 = 4$

第三问

$\because x+2y+xy-6=0$

$\therefore 2y+xy = 6-x \Rightarrow y(2+x) = (6-x) \Rightarrow y = \frac{6-x}{2+x}$

$\therefore x+y = x+\frac{6-x}{2+x} = x-\frac{2+x-8}{2+x} = x-1+\frac{8}{x+2} = x+2+\frac{8}{x+2}-3$

$\because x > 0$

$\therefore x+2+\frac{8}{x+2} \geq 2\sqrt{8}$ 当且仅当 $x+2=\frac{8}{x+2}=\sqrt{8}$ 时，等号成立，此时 $x=\sqrt{8}-2$

$\therefore (x+y)\_min = (x+2+\frac{8}{x+2})\_min - 3 = 4\sqrt{2}-3$

第四问

**步骤可能可以简化*

由第三问可知 $y=\frac{6-x}{2+x}, x+2+\frac{8}{x+2} \geq 2\sqrt{8}$

$\therefore (x+2)^2+(y+1)=(x+2)^2+(\frac{6-x}{2+x}+1)=(x+2)^2+(\frac{8}{2+x})^2=(x+2)^2+\frac{8^2}{(2+x)^2}$

$\because \frac{8^2}{(2+x)^2}, (x+2)^2 \geq 0$

$\therefore (x+2)^2+\frac{8^2}{(2+x)^2} \geq 2\sqrt{8^2}=16$ 当且仅当 $(x+2)^2=\frac{8^2}{(2+x)^2}=8$ 时成立
此时 $x=\sqrt{8}-2$

$\therefore [(x+2)^2+(y+1)^2]_{min}=16$

总结

此题乍看可以使 1的代换 但深究发现因为有常数的存在而不能使用。此题利用了**整体思想/换元法**和**消元法**。

- 若发现分母较为复杂可使用**整体思想/换元法**
- 通过**因式分解**将多个未知数化简为一个未知数或许能方便运算
- 分子上有未知数时一定要设法删除
- 注意符号的改变