*А для операторов вида (5.19), построенных с помощью решений задачи Коши (5.17), равномерно по $x$ на $[0,\pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg| f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)} {\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\Bigg| = 0. \quad (5.28)$$

*Где штрих у сумм в (5.27) или (5.28) означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а индекс $p$ определяется с помощью соотношений (5.24).*

**Теорема 5.8 (Критерий равномерной сходимости)** *Пусть $f \in C_0[0,\pi]$, и функции $q_\lambda$ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (5.20) в случае задачи Коши (5.16), или (5.21) — в случае задачи (5.17). Тогда, для того чтобы значения оператора (5.19), построенного по решениям задачи Коши (5.16) или (5.17), равномерно на $[0,\pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, аппроксимировали функцию $f \in C_0[0,\pi]$:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\|S_\lambda(f,\cdot) - f\right\|_{C_0[0,\pi]} = 0, \quad (5.29)$$

*необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n}\left|{\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\right| = 0, \quad (5.30)$$

*или эквивалентное ему условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n}\left|{\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}}' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda})}{p-2m}\right| = 0, \quad (5.31)$$

*где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$ (смотрите (5.24)), то сумма в (5.30) равна нулю.*

*Определим оператор, ставящий в соответствие любой, принимающей конечные значения на отрезке $[0,\pi]$, функции $f$, непрерывную функцию по правилу*

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\left\{f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda} - f(0)\right\} + \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0). \quad (5.32)$$

С помощью этого оператора, в отличие от (5.19), можно равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ аппроксимировать непрерывные (не обязательно исчезающие на концах отрезка) функции, обладающие достаточным запасом гладкости, с сохранением интерполяции, то есть для всех $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $T_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$.

## 5.2 Новые операторы, обобщающие синк-аппроксимации. Предмет исследования в численных экспериментах.

**Напоминаю, что если взять $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, $h(\lambda_n) = n$, то операторы (5.19) в случае задачи Коши (5.17) превращаются в усечённые кардинальные функции Уиттекера (4.1). Поэтому в Вашем случае**

$$s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda}) \equiv \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad x_{k,\lambda} = \frac{k\pi}{n}.$$

Далее, на пространстве непрерывных на $[0,\pi]$ функций $f$ определим операторы

$$A_\lambda(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(s_{k-1,\lambda}(x) + s_{k,\lambda}(x)\big)f(x_{k,\lambda}), \quad (5.33)$$

$$\widetilde{A}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k+1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}s_{k,\lambda}(x), \tag{5.34}$$

$$AT_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\right\}\big(s_{k-1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x)\big)$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0), \tag{5.35}$$

$$\widetilde{AT}_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{f(x_{k+1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}-\frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k+1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}\right.$$
$$\left.-f(0)\right\}s_{k,\lambda}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{5.36}$$

Аналогично, определим операторы $B_\lambda$, $\widetilde{B}_\lambda$, $BT_\lambda$ и $\widetilde{BT}_\lambda$, рассматривая другие пары соседних номеров узлов и функций $s_{k,\lambda}$ :

$$B_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x)\big)f(x_{k,\lambda}), \tag{5.37}$$

$$\widetilde{B}_\lambda(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1,\lambda})+f(x_{k,\lambda})}{2}s_{k,\lambda}(x), \tag{5.38}$$

$$BT_\lambda(f,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f(x_{k,n})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\right\}\big(s_{k+1,\lambda}(x)+s_{k,\lambda}(x)\big)$$
$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0), \tag{5.39}$$

$$\widetilde{BT}_\lambda(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f(x_{k-1,n})+f(x_{k,n})}{2}-\frac{(f(\pi)-f(0))}{\pi}\frac{(x_{k-1,\lambda}+x_{k,\lambda})}{2}\right.$$
$$\left.-f(0)\right\}s_{k,\lambda}(x)+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{5.40}$$

Наконец, рассмотрим операторы

$$C_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x)+2s_{k,\lambda}(x)+s_{k-1,\lambda}(x)\big)f(x_{k,\lambda}), \tag{5.41}$$

$$\widetilde{C}_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}s_{k,\lambda}(x)\big(f(x_{k+1,\lambda})+2f(x_{k,\lambda})+f(x_{k-1,\lambda})\big), \tag{5.42}$$

$$CT_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\big(s_{k+1,\lambda}(x)+2s_{k,\lambda}(x)+s_{k-1,\lambda}(x)\big)\left\{f(x_{k,\lambda})\right.$$
$$\left.-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\right\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0), \tag{5.43}$$

$$\widetilde{CT}_\lambda(f,x)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}s_{k,\lambda}(x)\left\{f(x_{k+1,\lambda})+2f(x_{k,\lambda})+f(x_{k-1,\lambda})\right.$$
$$\left.-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}(x_{k+1,\lambda}+2x_{k,\lambda}+x_{k-1,\lambda})-4f(0)\right\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{5.44}$$

К сожалению, предлагаемые операторы не обладают интерполяционными свойствами как $S_\lambda$ или $T_\lambda$. Зато их аппроксимативные качества существенно менее чувствительны к гладкостным свойствам приближаемой функции. С их помощью можно аппроксимировать произвольный элемент пространства $C[0,\pi]$.