УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Поступила

В статье методом продолжения находится формула для решения одной начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной в уравнении. При этом используется полученная автором ранее обощенная формула Даламбера для решения соответствующей задачи Коши.

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$.

Предположим, что (1) является уравнением гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и характеристики ω_1 и ω_2 (корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$) лежат на вещественной оси. Здесь возможны только две принципиально разные ситуации

$$\omega_1 < 0 < \omega_2 \tag{4}$$

и

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{5}$$

Требуется найти *классическое решение* задачи (1)–(3), то есть найти функцию $u(x,t)$, которая в области $Q = \{(x,t) \big| x \in [0,1], t \in [0, +\infty)\}$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Большой вклад в решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны при самых общих предположениях внес А.П. Хромов. Он предложил новый подход [1] для решения такой задаачи, использующий идеи А.Н. Крылова [3] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также [2] идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах. В дальнейшем А.П. Хромов и его ученики [4,5] распространили эти результаты на различные обощения уравнения колебаний струны и различные постановки смешанных задач.

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y=0$ для пучка $L(\lambda)$ вида:

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y,$$
$$U_1(y,\lambda) := y(0)=0,\ U_2(y,\lambda) := y(1)=0.$$

Система функций

$$y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x), \quad y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$$

есть фундаментальная система решений уравнения $\ell(x,\lambda)=0$. Справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \det\bigl(U_i(y_j,\lambda)\bigr)_{i,j=1}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1}.$$

Отсюда видно, что уравнение $\Delta(\lambda)=0$ имеет простые корни

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2-\omega_1}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \,\big|\, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$. Очевидно, Λ есть множество собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Очевидно, точка $\lambda_0=0$ не является с.з.

Лемма 1. *Если выполняется условие* (4)*, то пучок* $L(\lambda)$ *является регулярным по Биркгофу. А в случае выполнения условия* (5) *пучок* $L(\lambda)$ *является нерегулярным.*

Далее рассматриваем только случай (4), В частности, при $\omega_2 = -\omega_1 = 1$ имеем $p_1=0$ и $p_1=1$ и получаем классический случай уравнения колебаний струны с $a=1$. Поэтому интересен только случай, когда $\omega_2 \neq -\omega_1$.

Обозначив $\tau := \omega_2/|\omega_1|$, для собственных функций пучка $L(\lambda)$ получим формулу

$$y_k(x) = e^{\frac{2k\pi\omega_2}{\omega_2-\omega_1}ix} - e^{\frac{2k\pi\omega_1}{\omega_2-\omega_1}ix} \equiv e^{\frac{2k\pi\tau}{\tau+1}ix} - e^{-\frac{2k\pi}{\tau+1}ix}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Лемма 2. *Если выполняется условие* (4) *и* τ *является рациональным числом:* $\tau = s/m$, *где* $s,m\in\mathbb{N}$, *то собственные функции пучка*

$\{y_k(x)\}$ *являются периодическими функциями с периодом* $s+m$, *Если же* τ *иррациональное число, то собственные функции не являются периодическими.*

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0 \ x \in (-\infty, +\infty), \ t \in [0, +\infty), \tag{6}$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x). \tag{7}$$

Лемма 3. *Если выполняется условие* (4), *то решение задачи Коши* (6)–(7) *дается следующей обощенной формулой Даламбера при соответствующих условиях гладкости функций* $\Phi(x), \Psi(x)$

$$u(x,t) = \frac{\omega_2 \Phi\left(x + \frac{t}{\omega_2}\right) - \omega_1 \Phi\left(x + \frac{t}{\omega_1}\right)}{\omega_2 - \omega_1} - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_{x+\frac{t}{\omega_1}}^{x+\frac{t}{\omega_2}} \Psi(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Будем искать решение задачи (1)–(3) на отрезке $[0,1]$ методом продолжения [6, с. 64–72], предполагая возможность представления ее решения $u(x,t)$ формулой (8), где Φ и Ψ — функции, подлежащие определению.

Удовлетворим (8) начальным условия (3). Получим

$$u(x,0) = \Phi(x) \equiv \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x) \equiv 0, \quad x \in [0,1],$$

то есть $\Phi(x) := \varphi(x)$, $\Psi(x) := 0$ для $x \in [0,1]$.

Считаем далее, что $\Psi(x) \equiv 0$ на всей вещественной оси. Формула (8) тогда будет иметь более простой вид

$$u(x,t) = \frac{\omega_2 \Phi\left(x + \frac{t}{\omega_2}\right) - \omega_1 \Phi\left(x + \frac{t}{\omega_1}\right)}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{9}$$

Удовлетворим $u(x,t)$ граничным условиям (3). Получим следующие условия для определения функции $\Phi(x)$

$$\begin{cases} \omega_2 \Phi\left(\frac{t}{\omega_2}\right) - \omega_1 \Phi\left(\frac{t}{\omega_1}\right) = 0, \\ \omega_2 \Phi\left(1 + \frac{t}{\omega_2}\right) - \omega_1 \Phi\left(1 + \frac{t}{\omega_1}\right) = 0, \end{cases}$$

где $t \in [0, +\infty)$, или после преобразования

$$\Phi(x) = -\tau \Phi\Big(-\frac{1}{\tau} x\Big), \quad x \in (-\infty, 0), \tag{10}$$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\tau} \Phi\Big((1+\tau) - \tau x\Big), \quad x \in (1, +\infty). \tag{11}$$

Предположим далее, что

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{12}$$

Используя поочередно формулы (10) и (11) можно пошагово определить функцию $\Phi(x)$ на всей вечественной оси. А именно:

0) при $x \in [0,1]$ полагаем $\Phi(x) := \varphi(x)$;

1) при $x \in [-\tau, 0]$ определяем $\Phi(x)$ по формуле (10);

2) при $x \in [1, 2 + 1/\tau]$ определяем $\Phi(x)$ по формуле (11);

3) при $x \in [-2\tau - 1, -\tau]$ определяем $\Phi(x)$ по формуле (10);

4) при $x \in [2 + 1/\tau, 3 + 1/\tau]$ определяем $\Phi(x)$ по формуле (11) и так далее.

Тем самым доказана следующая теорема

Теорема. *Если выполняется условие* (4), *то решение смешанной задачи* (1)–(3) *дается формулой* (9), *где функция* $\Phi(x)$ *определена выше, при соответствующем условии гладкости функции* $\varphi(x)$ *и выполнении условия* (12).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2. С. 239-–251.

2. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. 2019 Т. 19, вып. 3. С. 280–288.

3. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в техънических вопросах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.

4. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // ДАН. 2019. Т. 484, № 1. С. 18–20.

5. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286—300.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ