

[Statistics]

Operations on Matrices

오영석

고려사이버대학교 AI·데이터과학부 외래교수

Contents

01 Operations on Matrices	03
1.1 Learning Objectives	04
1.2 Multiplications of Matrices	05
1.3 Applications of Matrices	15
1.4 Learning Summary	23

Operations on Matrices

이번 챕터에서는 행렬의 곱셈과 그 응용에 대하여 살펴봅니다.

1.1 Learning objectives

1. 행렬의 곱셈에 대해 설명할 수 있다.
2. 흑백 이미지의 대칭 이동에 대해 설명할 수 있다.
3. PyTorch를 활용하여 행렬의 곱셈과 흑백 이미지의 대칭이동을 처리할 수 있다.

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

행렬의 곱셈은 두 행렬을 결합하여 새로운 행렬을 생성하는 연산
행렬의 곱셈은 신경망 구현에 핵심이 되는 연산임

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬
예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{matrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \\ \end{bmatrix} \\ 3 \times 3 & 3 \times 2 & & 3 \times 3 & 3 \times 2 & & \end{matrix}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬 예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{array}{ccc}
 D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ & \end{bmatrix} \\
 3 \times 3 & 3 \times 2 & \begin{array}{cc} 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬
예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{array}{ccc}
 D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 2 \\ & \end{bmatrix} \\
 3 \times 3 & 3 \times 2 & \begin{array}{cc} 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬 예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{array}{ccc}
 D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 1 \end{bmatrix} \\
 3 \times 3 & 3 \times 2 & \begin{array}{cc} 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬 예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{array}{ccc}
 D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 2 \\ 33 & 2 \end{bmatrix} \\
 3 \times 3 & 3 \times 2 & \begin{array}{cc} 3 \times 3 & 3 \times 2 \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬 예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$\begin{array}{ccc}
 D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 1 \\ 33 & 1 \end{bmatrix} \\
 3 \times 3 & 3 \times 2 & \begin{array}{cc} \text{3} \times \text{3} & \text{3} \times \text{2} \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈 연산

두 행렬의 곱셈은 행렬 D 의 i 번째 행벡터와 행렬 E 의 j 번째 열벡터 사이의 내적을 성분으로 가지는 행렬 예를 들어, 다음과 같이 행렬 D 와 행렬 E 의 곱을 표현할 수 있음

$$D \times E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 21 & 1 \\ 33 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad D \times E = \sum_l (f_{il} \cdot g_{lj})$$

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈에 대한 코드 표현

두 행렬 D, E의 행렬 곱셈 연산의 코드 표현은 다음과 같음

```
D = torch.tensor([[1, 1, 3],  
                  [4, 5, 6],  
                  [7, 8, 9]])  
E = torch.tensor([[1, 0],  
                  [1, -1],  
                  [2, 1]])
```

행렬을 생성했을 때,

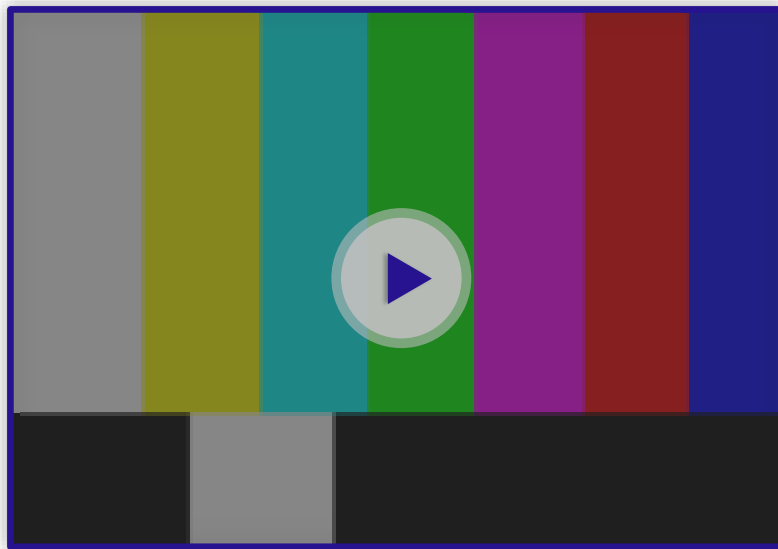
행렬 D와 E의 행렬 곱셈 연산 코드 표현: `D.matmul(E)`

행렬 D와 E의 행렬 곱셈 연산 코드 표현: `D.mm(E)`

행렬 D와 E의 행렬 곱셈 연산 코드 표현: `D @ E`

1.2 Multiplication of Matrices

행렬의 곱셈에 대한 코드 표현 실습



1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 대칭 이동

흑백 이미지 처리에서 행렬의 곱셈 연산을 사용하면 **대칭 이동**을 수행할 수 있음

- 대칭 이동(반사)이란 주어진 축을 기준으로 이미지를 뒤집는 변환을 의미함

1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 대칭 이동

흑백 이미지 처리에서 행렬의 곱셈 연산을 사용하면 **대칭 이동**을 수행할 수 있음

- 대칭 이동(반사)이란 주어진 축을 기준으로 이미지를 뒤집는 변환을 의미함

1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 좌우로 대칭 이동의 대수적 표현

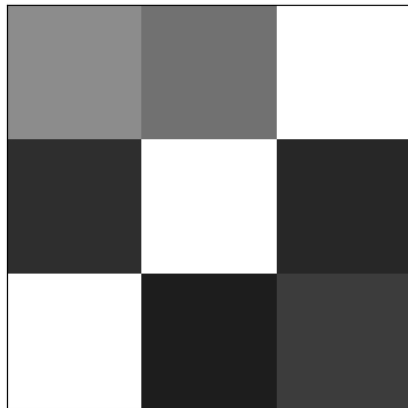
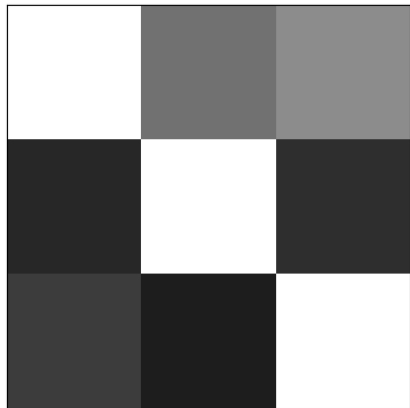
흑백 이미지의 좌우로 대칭 이동은 y축을 기준으로 이미지를 뒤집는 변환을 의미함

$$I = G \times H = \begin{bmatrix} 255 & 114 & 140 \\ 39 & 255 & 46 \\ 61 & 29 & 255 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 114 & 255 \\ 46 & 255 & 39 \\ 255 & 29 & 61 \end{bmatrix}$$

1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 좌우로 대칭 이동의 이미지 표현

흑백 이미지의 좌우로 대칭 이동은 y 축을 기준으로 이미지를 뒤집는 변환을 의미함



1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 좌우로 대칭 이동의 코드 표현

두 행렬 G, H

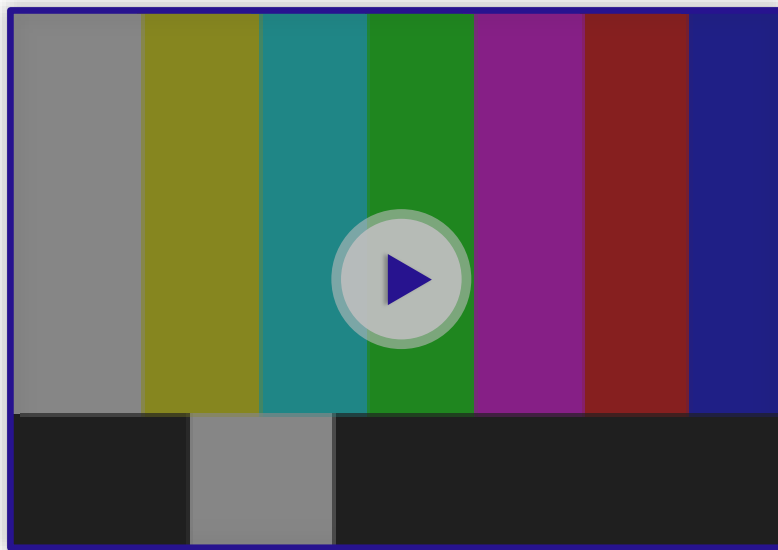
```
G = torch.tensor([[255, 114, 140],  
                  [39, 255, 46],  
                  [61, 29, 255]])  
H = torch.tensor([[0, 0, 1],  
                  [0, 1, 0],  
                  [1, 0, 0]])
```

 행렬을 생성했을 때,

Tensor G의 흑백 이미지를 좌우로 대칭 이동시키는 코드 표현: $I = G @ H$

1.2 Multiplication of Matrices

흑백 이미지의 좌우로 대칭이동에 대한 코드 표현 실습



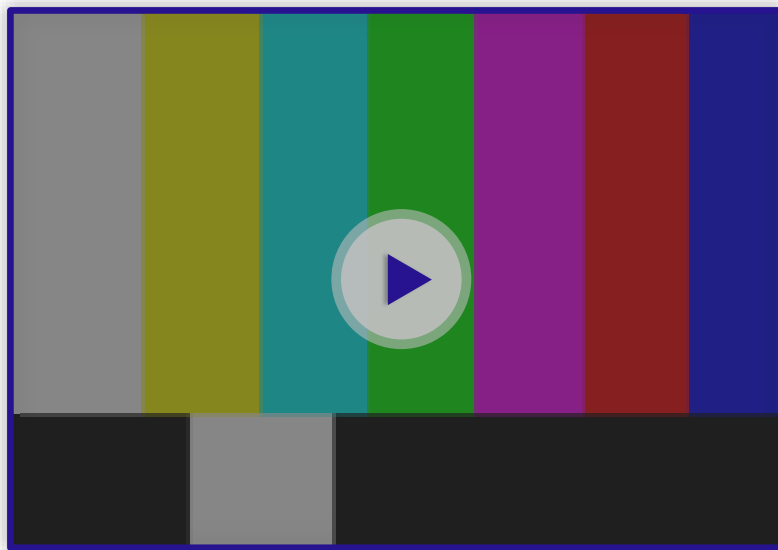
1.3 Applications of Matrices

흑백이미지의 상하로 대칭 이동의 대수적 표현

그렇다면 흑백 이미지의 상하로 대칭 이동은 어떤 축을 기준으로 이미지를 뒤집는 변환일까요?
또한, 흑백 이미지를 상하로 대칭 이동시키기 위해서는 어떤 행렬을 어떻게 곱셈해야 할까요?

1.3 Applications of Matrices

흑백 이미지의 상하로 대칭이동에 대한 코드 표현 실습



1.4 Learning Summary

학습 정리

행렬 곱셈은 두 행렬을 결합하여 새로운 행렬을 생성하는 연산이다.

흑백 이미지 처리에서 행렬의 곱셈 연산을 사용하면 대칭 이동을 수행할 수 있다.

End of Document

Thank you

본 콘텐츠를 어떠한 경로로든 외부로 일부 또는 전부를 복사, 복제, 판매, 재판매, 공유 등을 할 수 없습니다.
이를 위반하는 경우, 지식재산권 침해 및 관련 법률에 따라 책임을 질 수 있습니다.

[Statistics]

Mean Vector and Covariance Matrix

오영석

고려사이버대학교 AI·데이터과학부 외래교수

Contents

01 Mean Vector and Covariance Matrix	03
1.1 Learning Objectives	04
1.2 Mean Vector	05
1.3 Covariance Matrix	08
1.4 Learning Summary	14

Mean Vector and Covariance Matrix

이번 챕터에서는 평균 벡터와 공분산 행렬에 대해 살펴봅니다.

1.1 Learning objectives

1. 평균 벡터에 대해 설명할 수 있다.
2. 공분산 벡터에 대해 설명할 수 있다.

1.2 Mean Vector

평균 벡터의 여러가지 표현

평균 벡터란 주어진 벡터들의 “중심” 또는 “평균 위치”를 나타내는 벡터를 의미함

$$\mu = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1.2 Mean Vector

평균 벡터의 예제

$x_1 = [1, 2, 3]$, $x_2 = [2, 2, 4]$, $x_3 = [1, 1, 2]$, $x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 평균 벡터를 구하시오.

1.2 Mean Vector

평균 벡터의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 평균 벡터를 구하시오.

$$\mu = \frac{[1 + 2 + 1 + 0, 2 + 2 + 1 + 3, 3 + 4 + 2 + 3]}{4} = [1, 2, 3]$$

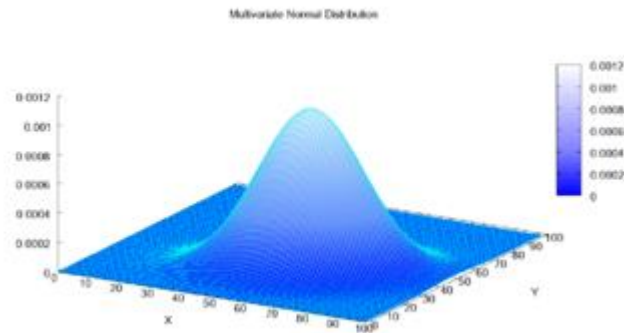
1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 여러가지 표현

공분산 행렬이란 여러 변수들의 공분산을 행렬 형태로 표현한 것을 의미함

- 공분산이란 두 확률 변수 간의 선형 관계를 나타내는 지표로, 두 변수의 값이 함께 변화하는 정도를 측정

다변량 정규분포에서 각 변수 간의 분산과 공분산을 설명하는데 사용됨
공분산 행렬은 주성분 분석(PCA)에서 데이터의 주성분을 추출하는데 사용됨



1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 수식 표현

공분산 행렬이란 여러 변수들의 공분산을 행렬 형태로 표현한 것을 의미함

- 공분산이란 두 확률 변수 간의 선형 관계를 나타내는 지표로, 두 변수의 값이 함께 변화하는 정도를 측정

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} (x_i - \mu)^T (x_i - \mu)$$

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step 1. 주어진 데이터 벡터 파악하기

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 데이터는 4개의 표본과 3개의 변수를 가짐

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step2. 데이터 행렬 작성하기

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

데이터 벡터들의 집합인 행렬 X 로 표현함. 각 벡터는 행을 이루고, 변수는 열을 이룸

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step 3. 평균 벡터 구하기

$$\mu = \frac{[1 + 2 + 1 + 0, 2 + 2 + 1 + 3, 3 + 4 + 2 + 3]}{4} = [1, 2, 3]$$

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step4. 데이터 행렬에서 평균 벡터를 빼기(중심화, Centering)

$$X' = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & 3-3 \\ 2-1 & 2-2 & 4-3 \\ 1-1 & 1-2 & 2-3 \\ 0-1 & 3-2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step5. 공분산 행렬 계산

공분산 행렬은 다음과 같이 계산함

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} (x_i - \mu)^T (x_i - \mu)$$

$(x_i - \mu)$ 이 X' 이라고 할 수 있음

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{이므로 } (x_i - \mu) = X'^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step 5. 공분산 행렬 계산

공분산 행렬은 다음과 같이 계산함

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} (x_i - \mu)^T (x_i - \mu)$$

$$(x_i - \mu)^T (x_i - \mu) = X^T X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3 Covariance Matrix

공분산 행렬의 예제

$x_1 = [1, 2, 3], x_2 = [2, 2, 4], x_3 = [1, 1, 2], x_4 = [0, 3, 3]$ 일 때, 공분산 행렬을 구하시오.

Step6. 최종 공분산 행렬 계산

$$\Sigma = \frac{1}{4-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

1.4 Learning Summary

학습 정리

평균 벡터란 주어진 벡터들의 “중심” 또는 “평균 위치”를 나타내는 벡터를 의미한다.

공분산 행렬이란 여러 변수들의 공분산을 행렬 형태로 표현한 것을 의미한다.

End of Document

Thank you

본 콘텐츠를 어떠한 경로로든 외부로 일부 또는 전부를 복사, 복제, 판매, 재판매, 공유 등을 할 수 없습니다.
이를 위반하는 경우, 지식재산권 침해 및 관련 법률에 따라 책임을 질 수 있습니다.

[Statistics]

Random Variable

오영석

고려사이버대학교 컴퓨터공학부 외래교수

Contents

01 Random Variable & Probability Function	03
1.1 Learning Objectives	04
1.2 Random Variable	05
1.3 Learning Summary	23

01

Random Variable & Probability Function

이번 챕터에서는 확률변수와 확률함수에 대해 살펴봅니다.

1.1 Learning objectives

1. 확률변수에 대해 설명할 수 있다.
2. 확률함수에 대해 설명할 수 있다.
3. 사건, 확률, 확률변수, 확률함수의 관계에 대해 설명할 수 있다.

1.2 Random Variable

확률변수

확률변수란 **확률적 시행의 결과(사건)**를 실수로 대응시키는 함수

- **이산확률변수:** 수집한 데이터의 확률변수 중에서 셀 수 있는 값들로 구성되거나
일정한 범위로 나타낼 수 있는 확률변수

예) 동전을 2개 던졌을 때 나올 수 있는 확률변수는 $\{0, 1, 2\}$

- **연속확률변수:** 연속형 또는 무한한 경우와 같이 셀 수 없는 확률변수

예) 확률변수 X 가 오영석의 몸무게를 나타낼 때, 몸무게가 $59kg$ 과 가깝다고 한다면, 오영석의 몸무게에 따른 확률변수는 $\{58 < X < 60\}$

1.2 Random Variable

확률함수

확률함수란 **확률변수가 특정 값을 가질 확률**을 나타내는 함수

이산 확률변수의 확률함수: 이 경우 확률함수는 “확률질량함수(PMF, Probability Mass Function)”라고 불리며, 이산 확률변수 X 가 특정 값 x 를 가질 확률 $P(X = x)$ 를 나타냄

$$P(X = x) = f(x)$$

여기서 $f(x)$ 는 확률질량함수로, 각각의 가능한 값에 대해 확률을 부여함
PMF는 다음 조건을 만족해야 함:

- $0 \leq P(X = x) \leq 1$
- 가능한 모든 값에 대해 확률의 합이 1이어야 함. 즉, $\sum P(X = x) = 1$

1.2 Random Variable

확률함수

확률함수란 **확률변수가 특정 값을 가질 확률을 나타내는 함수**

연속 확률변수의 확률함수: 연속 확률변수에서는 “확률밀도함수(PDF, Probability Density Function)”를 사용하여 특정 구간에서 확률변수가 나타날 확률을 나타냄. 그러나 PDF는 특정 값에서의 확률을 직접적으로 구할 수는 없고, 특정 구간에서의 확률을 적분하여 계산함
확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족해야 함:

- $f(x) \geq 0$
- 확률변수 전체 구간에서의 확률은 1이어야함($\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$)

1.2 Random Variable

사건, 확률변수, 확률, 확률함수의 관계

동전을 두 번 던질 때 앞면이 나오는 경우를 기준으로
사건, 확률변수, 확률, 확률함수의 관계를 살펴보자.

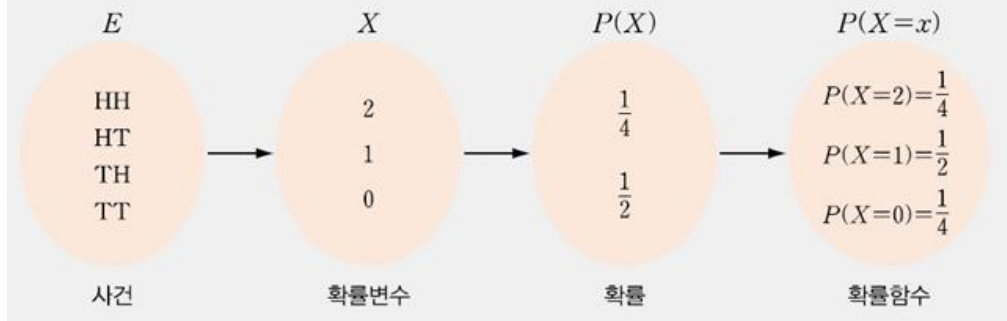
동전을 두 번 던졌을 때 발생하는 **사건**은
HH, HT, TH, TT로 총 4가지이다.

앞면이 몇 번 나올 것인가를 기준으로 사건을 분류하면, **확률변수**는 HH는 앞면이 2번이므로 2,
HT와 TH는 앞면이 1번이므로 1, TT는 앞면이 나오지 않으므로 0이 된다.

1.2 Random Variable

사건, 확률변수, 확률, 확률함수의 관계

확률변수가 2인 경우는 H가 나올 확률 $\frac{1}{2}$ 이 모두 나와야하므로 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 확률변수가 1인 경우는 두 가지이므로 각각의 확률 $\frac{1}{4}$ 을 더해 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 이 된다. 확률변수가 0인 경우는 T라는 확률 $\frac{1}{2}$ 이 모두 나와야하므로 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이 된다. 확률함수로 표현하면 $P(X=2) = \frac{1}{4}$, $P(X=1) = \frac{1}{2}$, $P(X=0) = \frac{1}{4}$ 로 표현할 수 있다. 이를 정리하면 [그림 4-4]와 같다.



1.2 Random Variable

확률변수의 평균

확률변수의 평균은 기대값과 같은 의미로 사용됨

기대값이란 어떤 사건에 대하여 해당 사건이 벌어질 확률을 곱해서 전체 사건에 대하여 합한 값을 의미하며 다음과 같이 표현함

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$$

1.2 Random Variable

확률변수의 평균

주사위를 던질 때 확률변수의 평균을 구해보자

$$\bullet \quad 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

1.2 Random Variable

확률변수의 평균의 성질

c, d 가 상수, X, Y 가 확률변수일 때 다음이 성립함

- $E(c) = c$
- $E(cX) = cE(X)$
- $E(cX + d) = cE(X) + d$
- $E(cX + dY) = cE(X) + dE(Y)$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$, X, Y 가 확률적으로 독립

1.2 Random Variable

확률변수의 평균의 성질

$E(X) = 3$ 일 때, 다음을 구해보자.

- $E(3) = ?$
- $E(3X - 2) = ?$
- $E(-2X + 1) = ?$

1.2 Random Variable

확률변수의 분산

확률변수의 분산은 기대값의 특성을 나타내는 값

확률변수들이 기대값으로부터 벗어난 정도

즉, 기대값과 어느정도 차이가 있는지를 나타내며 다음과 같이 표현함

$$Var(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

1.2 Random Variable

확률변수의 분산

주사위를 던질 때 확률변수의 분산 식을 구해보자

- $(1 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (2 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (3 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (4 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (5 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (6 - 3.5)^2 \times \frac{1}{6}$

1.2 Random Variable

확률변수의 분산의 성질

a, b 가 상수, X 가 확률변수일 때 다음이 성립함

- $V(a) = 0$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

1.2 Random Variable

확률변수의 분산의 성질

$V(X) = 5$ 일 때, 다음을 구해보자.

- $V(3) = ?$
- $V(3X) = ?$
- $V(3X - 1) = ?$

1.2 Random Variable

확률변수의 표준편차

표준편차는 분산(σ^2)의 제곱근이므로

$$\sigma = \sqrt{E(X - \mu)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(x_i)}$$

학습퀴즈

1 이산확률변수는 셀 수 없는 확률변수를 의미한다.

0

X

학습퀴즈

1 이산확률변수는 셀 수 없는 확률변수를 의미한다.

0 X

해설

연속형 확률변수가 연속형 또는 무한한 경우와 같이 셀 수 없는 확률변수를 의미한다.

학습퀴즈

2 $V(aX) = a^2 Var(X)$ 이다.

0

X

학습퀴즈

2 $V(aX) = a^2 Var(X)$ 이다.

0

X

해설

$V(aX) = a^2 Var(X)$ 이다.

1.3 Learning Summary

학습 정리

확률변수란 확률적 시행의 결과(사건)를 실수로 대응시키는 함수이다.

확률함수란 확률변수가 특정 값을 가질 확률을 나타내는 함수이다.

확률변수의 평균은 기대값과 같은 의미로 사용된다.

확률변수의 분산은 기대값의 특성을 나타내는 값이다.

End of Document

Thank you

본 콘텐츠를 어떠한 경로로든 외부로 일부 또는 전부를 복사, 복제, 판매, 재판매, 공유 등을 할 수 없습니다.
이를 위반하는 경우, 지식재산권 침해 및 관련 법률에 따라 책임을 질 수 있습니다.

[Statistics]

Probability Distribution

오영석

고려사이버대학교 컴퓨터공학부 외래교수

Contents

01 Probability Distribution	03
1.1 Learning Objectives	04
1.2 Probability Distribution Overview	05
1.3 Uniform Distribution	07
1.4 Normal Distribution	15
1.5 Binomial Distribution	12
1.6 Learning Summary	30

Probability Distribution

이번 챕터에서는 확률분포에 대해 살펴봅니다.

1.1 Learning objectives

1. 확률분포에 대해 설명할 수 있다.
 2. 균등분포, 정규분포, 표준정규분포에 대해 설명할 수 있다.
 3. 파이썬을 활용하여 정규분포를 나타낼 수 있다.
 4. 베르누이 분포와 이항분포에 대해 설명할 수 있다.
 5. 파이썬을 활용하여 이항분포를 나타낼 수 있다.
-

1.2 Probability Distribution Overview

확률분포의 정의

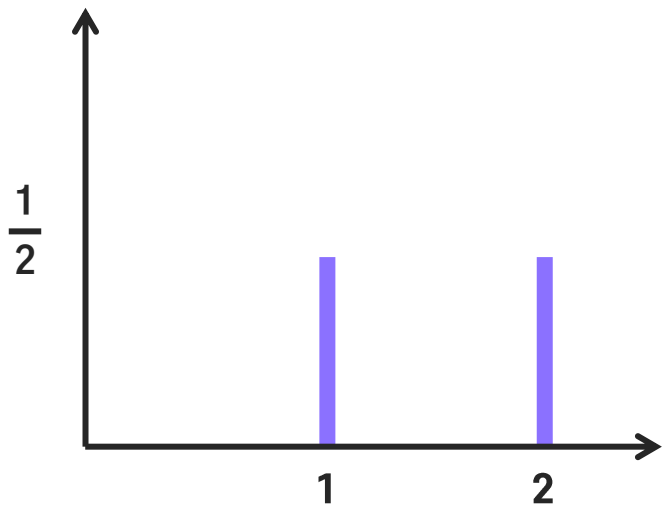
확률분포는 확률변수가 가질 수 있는 모든 가능한 값과 그 값들이 발생할 확률을 나타낸 것을 의미함

일반적으로 확률분포는 표나 그래프 표상으로 나타냄

1.2 Probability Distribution Overview

확률분포의 정의

동전을 던지는 경우의 확률분포



[확률분포도]

사건	1	2
확률	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

[확률분포표]

1.3 Uniform Distribution

균등분포

확률변수가 특정 구간 내에서 동일한 확률로 모든 값을 가질 수 있는 분포를 의미함

- 변수의 특성에 따라서 이산균등분포와 연속균등분포로 구분할 수 있음

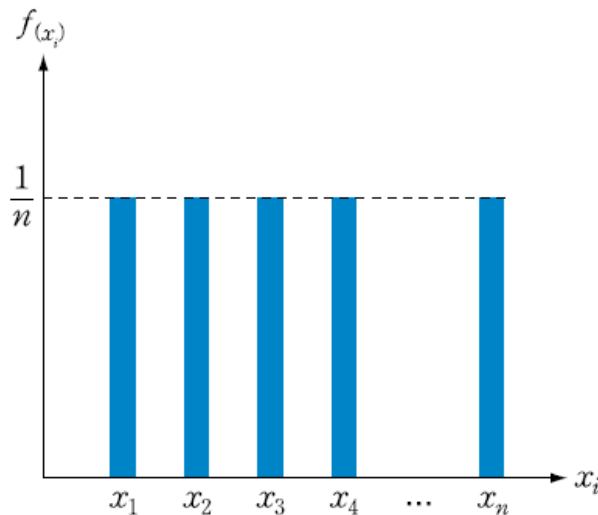
1.3 Uniform Distribution

이산 균등분포

이산 확률변수가 가질 수 있는 몇 가지 가능한 값들이 동일한 확률로 나타나는 확률분포를 의미함

확률변수가 x_1, x_2, \dots, x_n 으로 n 개일 때, x_i 의 확률은 $\frac{1}{n}$

확률변수 X 의 확률함수는 $f_X(x) = \frac{1}{n}$

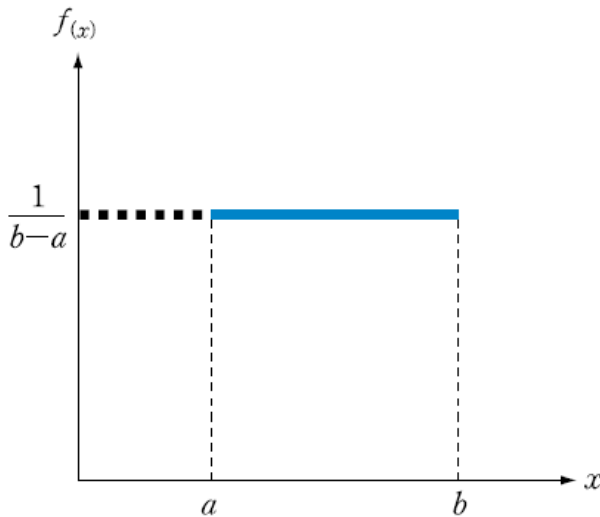


1.3 Uniform Distribution

연속 균등분포

연속 확률변수가 특정 구간 내에서 동일한 확률함수를 가지는 분포를 의미함

확률변수 X 가 a 와 b 구간에서 균등분포를 가질 때,
확률변수 X 의 확률함수는 $\frac{1}{b-a}$ ($a \leq x \leq b$)



1.3 Uniform Distribution

연속 균등분포

예시

스톱워치를 작동시킨 후 편안히 잠을 자고 일어나서
시계를 확인했을 때, 분침과 상관없이 초침이
45~55 사이에 있을 확률을 구하시오.

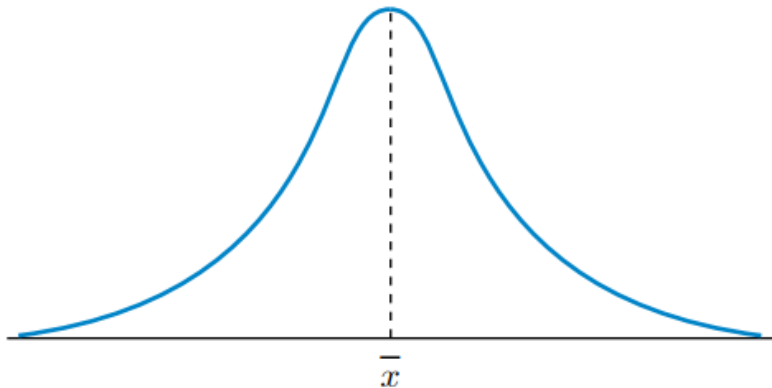
$$\therefore P(45 \leq X \leq 55) = (55 - 45) \times \frac{1}{60} = \frac{1}{6}$$

1.4 Normal Distribution

정규분포

표본분포 중 가장 단순하면서 많이 나타나는 형태의 분포

- 어떤 사건이 일어난 빈도(frequency)를 계산하여 그래프로 나타내면
중심(평균)을 기준으로 좌우가 대칭되는 분포가 그려짐(\therefore 중심극한정리)

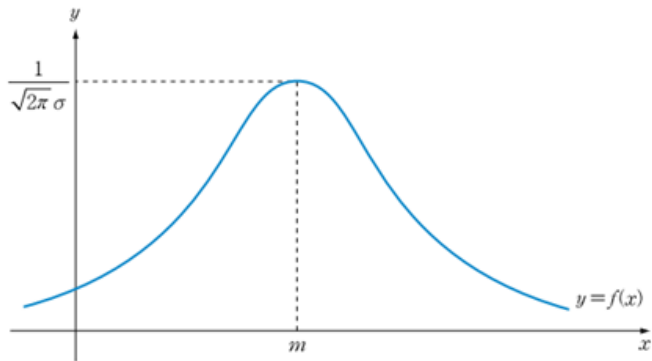


1.4 Normal Distribution

정규분포

평균이 m , 분산이 σ^2 인 정규분포의 확률함수는 $e = 2.71828 \dots$ 인 무리수를 사용하여

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

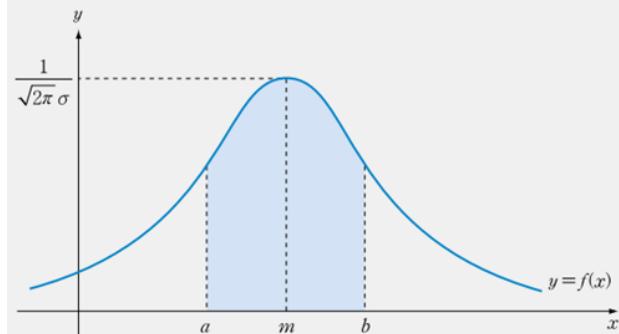


1.4 Normal Distribution

정규분포의 성질

정규분포의 성질은 다음과 같음

- ❶ 어떤 실수 x 에 대해 $f(x) > 0$
- ❷ 분포곡선은 평균 m 을 기준으로 좌우대칭
- ❸ 곡선과 x 축 사이의 넓이는 1
- ❹ 곡선 내 임의의 a, b 가 $a < b$ 일 때 a 와 b 에 속할 확률 $P(a \leq X \leq b)$ 는 a, b 와 곡선 사이의 넓이와 같다.



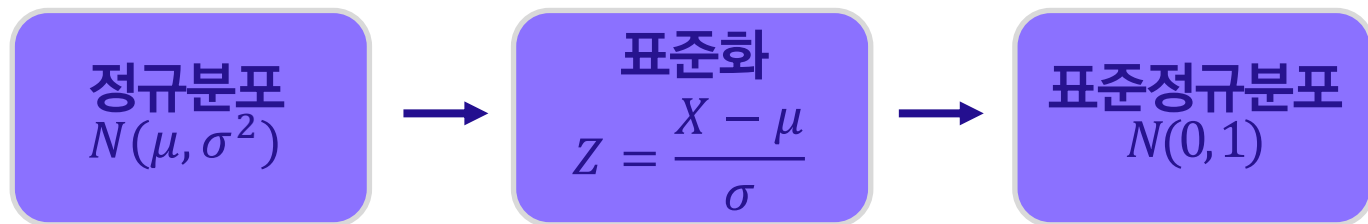
1.4 Normal Distribution

표준정규분포

일반적으로 정규분포를 활용하여 결과를 도출하는 것에는 문제가 없음

하지만 대다수의 연구나 조사에서는 복잡한 관계를 분석하는 경우가 대부분이므로, 여러가지 특성에 대한 분석 결과들을 서로 비교할 수 있도록 만드는 과정이 필요함

즉, 서로 다른 정규분포들을 비교하기 위해 **평균이 0, 표준편차는 1을 기준으로** 각각의 정규분포들을 표준화한 **표준정규분포**를 사용하게 됨



1.4 Normal Distribution

표준정규분포

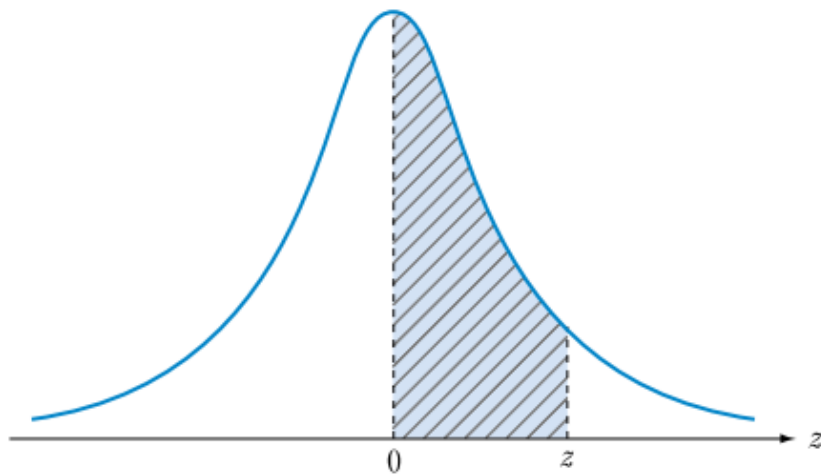
확률변수 X 가 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 을 따를 때, 새로운 확률변수 $\frac{x-\mu}{\sigma} = z$ 로 변환하면,
표준정규분포에 대한 확률함수는 다음과 같음

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

1.4 Normal Distribution

표준정규분포

확률변수 Z 의 값이 $(0, z)$ 에 속할 확률은 아래의 넓이와 같음
즉, $P(0 \leq Z \leq z)$



1.4 Normal Distribution

표준정규분포

정규분포를 표준화하여 평균과 분산을 구하는 과정은 다음과 같음

정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 인 확률변수 X 를 표준정규분포인 $N(0, 1)$ 이 되는 $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 로 변환하여 표준화하면 서로 다른 대상을 쉽게 비교할 수 있다.

[참고]

표준화하여 (평균)=0, (분산)=1이 되는 과정을 수식으로 나타내면 다음과 같다.⁴

$$\begin{aligned} E(z) &= E\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} E(\bar{X}) - \frac{m}{\sigma} \\ &= \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(z) &= V\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} V(\bar{X}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1 \end{aligned}$$

1.4 Normal Distribution

정규분포 실습 코드

정규분포 생성 코드

- `mu, sigma = 0, 0.1` : `mu`는 정규분포의 평균값을 나타내며, 여기서는 0, `sigma`는 정규분포의 표준편차를 나타내며 여기서는 0.1
- `s = np.random.normal(mu, sigma, 1000)` : `np.random.normal` 함수는 주어진 평균 `mu`와 표준편차 `sigma`를 가지는 정규분포에서 1000개의 무작위 샘플을 생성
- `count, bins, ignored = plt.hist(s, 30, density=True)` : `plt.hist` 함수는 `s`를 통해 생성된 데이터의 히스토그램을 그림, 30은 히스토그램의 바의 개수를 나타냄, `density=True`는 히스토그램의 면적이 1이 되도록 정규화 함
- `plt.plot(bins, 1/(sigma*np.sqrt(2*np.pi))*np.exp(-(bins-mu)**2/(2*sigma**2)), linewidth=2, color='r')` : 해당 코드는 정규분포의 함수를 계산하여 히스토그램 위에 빨간색 선으로 그림

1.5 Binomial Distribution

베르누이 시행

서로 반대되는 사건이 일어나는 시행을 반복적으로 실험하는 것

서로 반대되는 사건이란 반드시 두 가지만 존재하며 동시에 일어나지 않는 배타적인 사건을 의미함

- 동전 던지기

1.5 Binomial Distribution

베르누이 분포

베르누이 시행을 확률분포로 나타낸 것

성공 확률을 $p(x = 1 \text{ 경우})$ 라 할 때,
실패 확률은 $1 - p(x = 0 \text{ 경우})$ 로 가정

1.5 Binomial Distribution

베르누이 분포

베르누이 분포의 평균과 분산은 다음과 같음

$$\mu = E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 0^2 \cdot p^0(1-p)^{1-0} + 1^2 \cdot p^1(1-p)^{1-1} - p^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

1.5 Binomial Distribution

이항분포

연속적인 베르누이 시행을 통해 표현된 확률분포

서로 독립적인 베르누이 시행을 n 회 반복하여 성공한 횟수를 X 라할 때,
성공한 X 의 확률분포를 이항분포라 함

1.5 Binomial Distribution

이항분포

이항분포의 평균과 분산은 다음과 같음

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1 - p)$$

성공 확률 p 에 대하여

베르누이 시행을 n 회 반복한 이항분포를

$X \sim B(n, p)$ 와 같이 표현함

1.5 Binomial Distribution

이항분포 확률의 계산

이항분포의 확률은 n 번의 시행에서 성공확률(p)이 r 번 나타날 확률이므로,
 n 번의 시행에서 r 번 관찰되는 것으로 표현 가능함

n 번의 시행에서 r 번 성공할 확률과 $n - r$ 번의 실패할 확률을 곱하면,
이항분포의 확률함수는

$$P(X = r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{(n-r)}$$

1.5 Binomial Distribution

이항분포 문제

S선수가 패널티킥을 차면 5번 중 4번을 성공한다고 한다.

S선수가 10번을 차서 7번을 성공할 확률을 구하시오.

$$P(X = 7) = \frac{10!}{7! \cdot (10 - 7)!} \cdot 0.8^7 \cdot 0.2^3 = 0.2013$$

성공확률은 이므로 20.13%이다.

1.5 Binomial Distribution

이항분포 실습 코드

이항분포 생성 코드

- `np.random.binomial(n=10, p=0.7, size=1000)`: 이항분포로부터 무작위 샘플의 생성, n 은 시행에서의 시도횟수는 10, 시도에서 성공할 확률은 0.7, 샘플의 크기는 1000
- `sns.distplot(np.random.binomial(n=10, p=0.7, size=1000), hist=True, kde=False)`: `sns.distplot` 함수는 데이터의 분포를 시각화함

학습퀴즈

1 연속 균등분포는 특정 범위 내에서 모든 확률함수가 동일한 분포이다.

O

X

학습퀴즈

1 연속균등분포는 특정 범위 내에서 모든 확률함수가 동일한 분포이다.

O

X

해설

연속 균등분포는 특정 범위 내에서 모든 확률함수가 동일하다.

학습퀴즈

2

정규분포의 곡선은 평균 m 을 기준으로 좌우대칭이다.

O

X

학습퀴즈

2

정규분포의 곡선은 평균 m 을 기준으로 좌우대칭이다.

O

X

해설

정규분포의 곡선은 평균 m 을 기준으로 좌우대칭이다.

1.6 Learning Summary

학습 정리

확률분포는 확률변수가 가질 수 있는 모든 가능한 값과 그 값들이 발생할 확률을 나타낸 것을 의미한다.

확률변수가 특정 구간 내에서 동일한 확률로 모든 값을 가질 수 있는 분포를 의미한다.

베르누이시행이란 서로 반대되는 사건이 일어나는 시행을 반복적으로 실험하는 것을 의미한다.

이항분포란 연속적인 베르누이시행을 통해 표현된 확률분포를 말한다.

End of Document

Thank you

본 콘텐츠를 어떠한 경로로든 외부로 일부 또는 전부를 복사, 복제, 판매, 재판매, 공유 등을 할 수 없습니다.
이를 위반하는 경우, 지식재산권 침해 및 관련 법률에 따라 책임을 질 수 있습니다.

[Statistics]

Underlying & Sampling Distribution

오영석

고려사이버대학교 AI·데이터과학부 외래교수

Contents

01 Underlying Distribution

1.1 Learning objectives

1.2 Underlying Distribution

03

04

05

02 Sampling Distribution

2.1 Learning objectives

2.2 Parallax Thinking

2.3 Learning Summary

10

11

12

20

Underlying Distribution

본 단위에서는 기저분포에 대해 학습합니다.

1.1 Learning objectives

1. 기저분포의 여러가지 표현에 대해 설명할 수 있다.

1.2 Underlying Distribution

기저분포의 언어적 표현

기저분포란 어떤 관찰된 데이터나 확률 변수들이 따르는 실제이자 근본적인 확률 분포를 의미함
이는 데이터가 생성된 확률 모델의 구조를 나타내며, 표본 데이터는 이 분포로부터 추출된 것이라고 가정

예) 두 개의 정육면체 주사위를 던졌을 때 나오는 확률

1.2 Underlying Distribution

기저분포의 대응표 표현

합	빈도	확률
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36

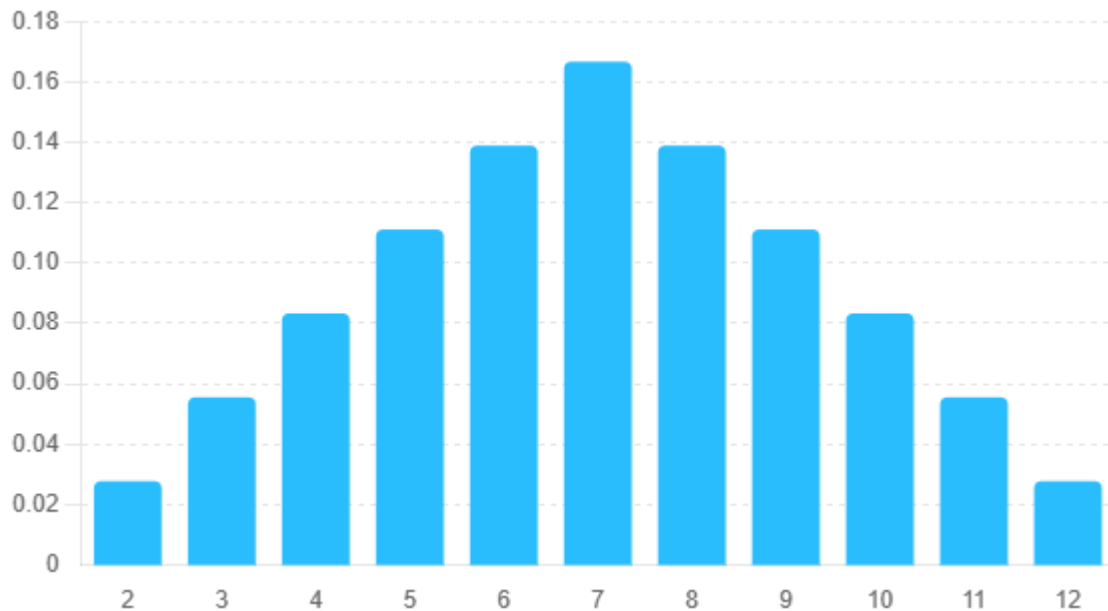
(1, 1)

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

(6, 6)

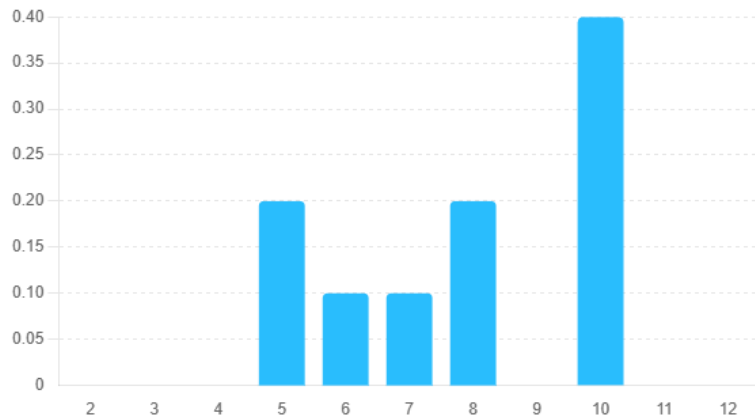
1.2 Underlying Distribution

기저분포의 그래프 표현

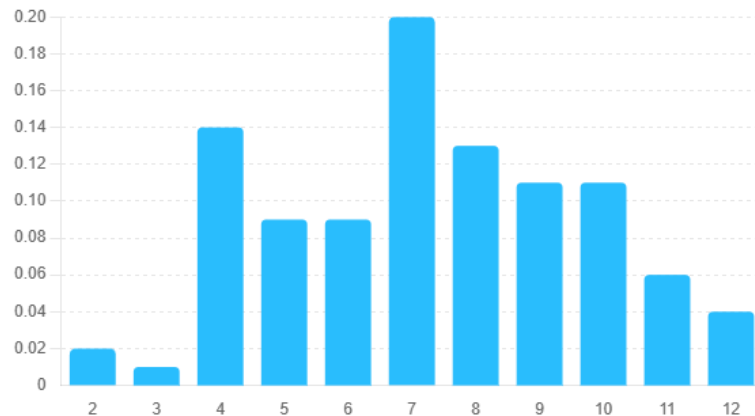


1.3 Frequency Distribution

시행횟수에 따른 확률분포의 그래프 표현



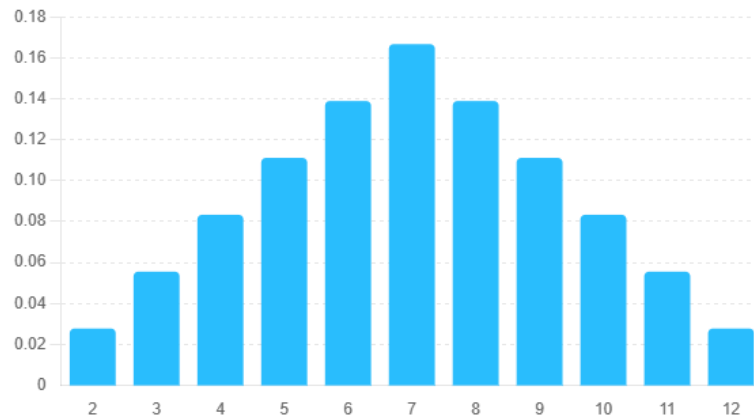
시행 횟수: 10



시행 횟수: 100

1.3 Frequency Distribution

시행횟수에 따른 확률분포의 그래프 표현



시행횟수: 1000

Sampling Distribution

본 단위에서는 표집분포에 대해 학습합니다.

2.1 Learning Objectives

1. 표집분포의 여러가지 표현에 대해 설명할 수 있다.
2. 표집분포의 특징에 대해 설명할 수 있다.

2.2 Sampling Distribution

표집분포의 언어적 표현

표집분포란 어떤 모집단에서 표본을 여러 번 추출해서 구한 통계량의 분포를 의미함

표본 - sample

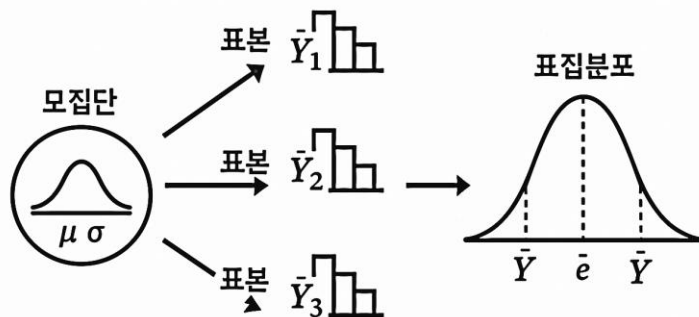
표본추출, 표본들 - sampling

표집분포 - sampling distribution

2.2 Sampling Distribution

표집분포의 그래프 표현

표집분포란 어떤 모집단에서 표본을 여러 번 추출해서 구한 통계량의 분포를 의미함



2.2 Sampling Distribution

표집분포의 특징

표본 크기(n)가 증가하고 표본추출이 많아질수록, 표본 평균의 표집분포는 다음과 같은 특성을 가진다:

1. 중심극한정리

- 모집단이 정규분포가 아니더라도, 표본 크기가 충분히 크면 표본평균의 표집분포는 근사적으로 정규분포를 따름
- 일반적으로 표본 크기 $n \geq 30$ 이면 근사적으로 정규분포로 간주할 수 있음

2. 표집분포의 평균

- 표본평균의 표집분포의 평균은 모집단 평균과 같음

3. 표집분포의 표준오차(standard error)

- 표집분포의 표준편차는 표준오차(standard error)라고 부름

- $SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$

- 표본들의 평균이 모집단의 평균과 얼마나 떨어져 있는가를 살펴보는 것이므로 표준편차와 다른 용어를 사용함

2.2 Sampling Distribution

표집분포의 예

1. 학생 10명의 시험 점수와 평균은 다음과 같음
 - 시험점수: 85, 90, 78, 88, 92, 75, 80, 95, 70, 82
 - 평균: 83.5
2. 표본의 크기를 3이라고 하자(3명 씩 표본을 추출). 그렇다면 다음과 같은 표본들과 평균을 얻을 수 있음
 - 표본 1의 시험점수: 85, 90, 78 / 표본 1의 평균: 84.33
 - 표본 2의 시험점수: 88, 92, 75 / 표본 2의 평균: 85
 - 표본 3의 시험점수: 80, 95, 70 / 표본 3의 평균: 81.67
 - 등등
3. 표본의 크기가 3일 때, 표집분포의 평균은 83.5
4. 표집분포의 표준오차는 다음과 같음
 - 모집단의 표준편차: 약 7.53
 - 표집분포의 표준오차: $\frac{7.53}{\sqrt{3}} \approx 4.35$

학습퀴즈

1

표집분포의 평균은 모집단의 평균과 같다.

O

X

학습퀴즈

1 표집분포의 평균은 모집단의 평균과 같다.

0

X

해설

표집분포의 평균은 모집단의 평균과 같다.

학습퀴즈

2

표준오차는 표본표준편차와 같다.

O

X

학습퀴즈

2

표준오차는 표본표준편차와 같다.

O

X

해설

표준오차는 표본표준편차를 표본의 크기의 제곱근으로 나눈 것이다.

2.3 Learning Summary

학습 정리

기저분포란 어떤 관찰된 데이터나 확률 변수들이 따르는 실제이자 근본적인 확률 분포를 의미한다.
이는 데이터가 생성된 확률 모델의 구조를 나타내며, 표본 데이터는 이 분포로부터 추출된 것이라고 가정한다.

표집분포란 어떤 모집단에서 표본을 여러 번 추출해서 구한 통계량의 분포를 의미한다.

End of Document

Thank you

본 콘텐츠를 어떠한 경로로든 외부로 일부 또는 전부를 복사, 복제, 판매, 재판매, 공유 등을 할 수 없습니다.
이를 위반하는 경우, 지식재산권 침해 및 관련 법률에 따라 책임을 질 수 있습니다.
