Лекция №1: Метод математического моделирования в экономике

Список литературы

- Экономико-математическескре моделирование Дрогобыцкого И.Н.
- Интрилигатор М. Математические методы оптимимзации и экономическая теория.
- Нуреев Р.М. Курс микроэкономики: учебник.

План

1. Экономика как объект изучения и как наука (Нуреев);
2. Метод математического моделирования экономики (Модель, типы переменных в моделе, два класса моделей, две формы модели);
3. Предельные величны и эластичность в экономике;

Экономика как объект изучения и как наука

Экономика как объект изучения представляет собой совокупность или множество институтов, деятельность которых направлена на деятельность удовлетворения потребностей населения в ситуации ограниченных ресурсов. Основными объектами микроэкономики являются:

1. Фирмы, производящие блага (товары или услуги) и продающие эти блага на рынке;
2. Домашние хозяйства являющиеся потребителями благ и в нашем курсе мы будем изучать методом математического моделирования поведение потребителей благ и фирм при их взаимодействии на рынке;

Экономика как наука занимается изучением упомятых выше институтов с целью улучшения их деятельности. Как наука экономика по традиции разделяется на микроэкономику и макроэкономику.

В любом изучаемом экономическом объекте мы будем выделять известные характеристики:

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \tag{1}$$

, искомые характристики

$$y_1, y_2, \cdots, y_m \tag{2}$$

и взаимосвязи велчин (1) и (2)

$$F(\vec{y}, \vec{x}) \tag{3}$$

Экономика как наука представляет собой сформулированные взаимосвязи наиболее значимых известных и искомых характеристик микро- и макро- экономических объектов.

В методе математического моделирования изучения экономики упомянутые выше взаимосвязи описываются математическим языком и в результате такой записи возникает математическая модель объекта.

Определение. Экономико-математическая модель (ЭММ) объекта - это некоторое математическое выражение (график или таблица, уравнение или система уравнений, дополненная, возможно, неравенствами, условие экстремума), связывающее воедино известные характеристики объекта (1) и его искомые характеристики (2)

Терминология. Известные характеристики (1) - это экзогенные переменные модели, искомые величины (2) - это эндогенные переменные модели.

ЭКЗ. ПЕРЕМЕННЫЕ $\Rightarrow$ МОДЕЛЬ $\Rightarrow$ ЭНД. ПЕРЕМЕННЫЕ

Два класса экономико-математических моделей

Всё множество математических моделей, математических объектов можно разделить на два класса. В первый класс относятся модели, которые описывают изучаемые объекты такими какими эти объекты являются в реальности модели входящие в этот класс принято называть дескриптивными (описательными) моделями. Вот самый общий вид таких моделей:

$$F(\vec{y}, \vec{x}) = 0; \tag{4}$$

Здесь символом $\vec{y}$ обозначен набор эндогенных переменных (2), символом $\vec{x}$ набор экзогенных переменных (1), символом F обозначены записанные математическим языком взаимосвязи величин (1) и (2). Модель (4) задаёт эндогенные переменные $\vec{y}$, как неявные функции экзогенных переменных $\vec{x}$. Выражение (4) это всегда система уравнений (линейные алгебраические, нелинейные, дифференциальные уравнения и возможно интегральные уравнения). Количество уравнений непременно совпадает с количеством эндогенных переменных. Дискриптивные модели.

Во второй класс включаются модели в которых отычкиваются такие значения эндогенных переменных, которые удовлетворяют некоторому требованию оптимальности, вот самый общий вид таких моделей:

$$\begin{cases} \phi = \phi(\vec{x}; \vec{y}) \to ext(\min, \max), \\ \vec{y} \in Y\vec{x} \end{cases} \tag{5}$$

В первой строчке выражения (5) записано требование оптимальности к значиям эндогенных переменных $\vec{y}$. Во втой строчке минимальные требования к эндогенным переменным. Символом Y мы обозначили множество допустимых значений $\vec{y}$ и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных $\vec{x}$. Модели входящие во второй класс принято именовать *оптимизационными* в математике такие модели называются задачами математического программирования на условный экстремум. Функция ϕ именуется целевой функцией или иногда критерием. Добавим к сказанному, что выражения (4) и (5) принято называть структурной формой соответсвенно дискриптивные и оптимизационной модели.

Приведённая форма модели предельные величны и эластичность в экономике

Для расчёта по модели (4) или (5) её необходимо трансформировать к приведённой форме: $\vec{y} = f(\vec{x})$. Пример трансформации модели (4) к приведённой форме обсуждён на занятиях (семинар №1 и №2). Приведённая форма модели позволяет получить взаимосвязь заданных изменений экзогенных переменных с возникающими в ответ изменениями эндогенных переменных.

$$\triangle\vec{y} = f'(\vec{x}) \cdot \triangle\vec{x} \tag{6}$$

Символом $f'(\vec{x})$ обозначена матрица частных производных, которая в матиматике называется *матрица Якоби*; её элементы имеют смысл изменений эндогенных перменных в ответ $\triangle\vec{y}$ в ответ на еденичные изменения экзогенных переменных и называются такие элементы п*редельными значениями эндогенных переменных*.

Проиллюстрируем понятие предельных велечин экономики на примере простейшей модели спроса на некоторое благо.

$$y_t^d = a_0 + a_1 p + a_2 x$$

Коэффициент a_1 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на повышение цены на одну еденицу. Этот коэффициент носит название *предельного спроса по цене*. Коэффициент a_2 имеет смысл изменения спроса на данное благо в ответ на увеличение дохода потреьтителя x на еденицу. Его можно посчитать по следующему правилу

$$M_y(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = a_2$$

$$M_y(p) = \frac{\partial y}{\partial p} = a_1$$

Формула (6) подробно выглядит так:

$$\triangle y = a_0 + \frac{\partial y}{\partial p} p + \frac{\partial y}{\partial x} x$$

Матрица

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Вектор

$$\vartriangle \vec{x} \ = \begin{pmatrix} \triangle p \\ \triangle x \end{pmatrix}$$

Определение эластичности

По мимо предельных велечин в экономике в процессе анализа объекта методом математического моделирования постоянно используется эластичность эндогенных переменных по экзогенным. Эластичность определяется по следующему правилу:

$$E_{y_i}(x_i) = \frac{\triangle y_i}{y_i} : \frac{\triangle x_j}{x_j} \tag{7}$$

является безразмерной велечино, позволяет вычислить относительные изменения эндогенной переменной в ответ на заданное изменение соответствующей экзогенной переменной $\dfrac{\triangle x_j}{x_j}$. Эластичность имеет смысл относительного изменения эндогенной переменной в % в ответ на относительное изменение экзогенной переменной на 1%.

Из определения эластичность можно получить следующуу формулу для её расчёта.

$$E_{y_i}(x_j) = \frac{\triangle y_i}{x_j} : \frac{y_i}{x_j} = M_{y_i}(x_j) : A_{y_i}(x_j)$$

Делитель в правой части имеет среднее значение $\dfrac{y_i}{x_j}$

Итог. При изучении экономического объекта методом математического моделирования создаётся модель одно из двух классов: дискриптивная или оптимизационная. Искомые характеристики объекта и анализ объекта осуществляются при помощи приведённой формы модели.

Лекция №2:

Модель поведения потребителя

План

1. Модель способности потребителя сопоставлять наборы благ;
2. Безразличные наборы благ и множества безразличия (кривые безразличия);
3. Теорема Жерар Дебре и функция полезности потребителя;
4. Модель Маршалла-Вальраса поведения потребителя на рынке благ.

Занумеруем натуральными числами $1,\ 2,\ \cdots,n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} = (x_1^{*},\ x_2^{*}, \cdots,\ x_n^{*})\ \in R_n^{+}\ = C \tag{1}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}, \cdots,\ x_n^{(1)}\right)\ \in R_n^{+}\ = C \\ \vec{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \cdots,\ x_n^{(2)}\right)\ \in R_n^{+}\ = C \end{cases} \tag{2}$$

Зададимся вопросом почему потребитель предпочитает например набор $\vec{x}^{(1)}$ набору $\vec{x}^{(2)}$. Это означает, что потребитель умеет сопоставлять любые два набора благ и в итоге сопаставления давать себе отчёт какой из этих наборов предпочтительней. Сделанный выше вывод мы оформим ввиде следующей модели способности потребителя. Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A\ =\ \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A}\ =\ \vec{x}^{(1)}$хуже $\vec{x}^{(2)}$

$$wpr\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \ \begin{cases} A\ =\ \left(\vec{x}^{(1)}\quad \vec{x}^{(2)}\right) \\ \overline{A}\ =\ \left(\vec{x}^{(1)}\ \vec{x}^{(2)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

В итоге сопоставления потребитель делает одно из следующий утверждений. В математике функции двух элементов называются бинарными отношениями и областью определения таких функций служит декартово произведение C^2 просто благ. Множеством изменения такой функции такого бинарного отношения является набор из двух словестных альтернатив $\left(A,\ \overline{A}\right)$.

$$wpr : C^2\ \to \left(A,\ \overline{A}\right) \tag{4}$$

Две аксиомы функции wpr

1. Аксиома транзитивности. Пусть $\vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$, а $\vec{x}^{(2)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(3)}$, тогда $\vec{x}^{(1)}$ набор предпочтительнее $\vec{x}^{(3)}$:

$$\begin{cases} wpr\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\ \left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow wpr\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(3)}\right) = A. \tag{5}$$

2. Аксиома не насыщаемости. Пусть каждая компонента в $\vec{x}^{(1)}$ не меньше соотвествующей компоненты $\vec{x}^{(2)}$. Тогда $\vec{x}^{(1)} \geq \vec{x}^{(2)} \rightleftarrows \vec{x}_i^{(1)} \geq \vec{x}_i^{(2)}$ при $\forall i \rightarrow \vec{x}^{(1)} \succeq \vec{x}^{(2)}$. Полагаем, что потребитель обладает свойством wpr сопоставлять любые два набора благ, и это свойство удовлетворяет двум аксиомам тарнзитивности и ненасыщаемости.

Безразличные наборы благ

Если из двух наборов $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ потребитель не может выбрать предпочтительный для него набор благ, то такие наборы называются *безразличными.* Вот определение:

$$\begin{cases} wpr\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\ \left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(1)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)}. \tag{6}$$

Тогда такие наборы называются безразличными и обозначаются символом $\sim$.

Пусть $\vec{x}$некоторый набор благ. Множеством безразличия называют все наборы благ $\vec{y}$ каждый из которых безразличен набору $\vec{x}$.

$$I\left(\vec{x}\right) = \left(\vec{y} | \vec{y} \in C,\ \vec{y} \sim \vec{x}\right) \tag{7}$$

В ситуации двух благ множество безразличия на графике представляет собой кривую линию и называется *кривой безразличия.* Добавим к сказанному, что wpr пораждает отношение безразличия, которое определено соотношением (8). Значение функции rin на любых двух наборах благ $\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right)$ равно либо альтернативе B, либо $\overline{B}$. B обозначает, что набор $\vec{x}^{(1)}$ безразличен набору $\vec{x}^{(2)}$. В математике функции с определением (8) носят отношение эквивалентности.

$$rin\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \begin{cases} \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)} = B, \\ \overline{B}. \end{cases} \tag{8}$$

Теорема.

1. Если $rin\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \overline{B},\ \ I\left(\vec{x}^{(1)}\right) \cap I\left(\vec{x}^{(2)}\right) = \emptyset.$

Теорема Дебре. Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u\left(\vec{x}\right)$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вврех, такая, что

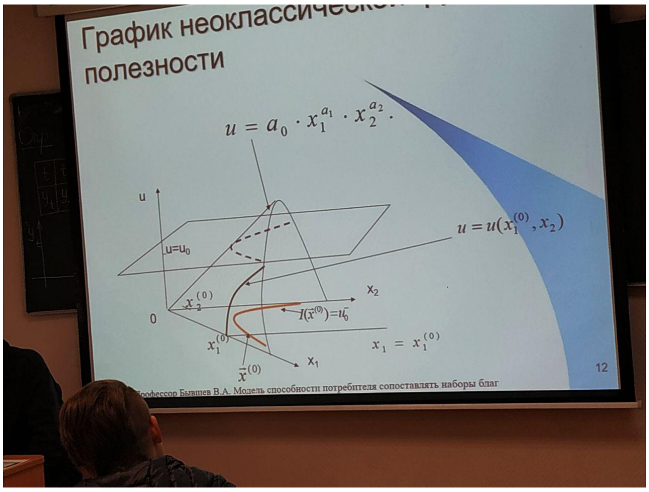
$$wpr\ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right)\ = A,$$
$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right)\ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$ $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right)\ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Экономисты пользуются следующими примерами функции полезности:

- Неоклассическая функция полезности $a_0\ \cdot\ x_1^{a_1}\ \cdot\ x_2^{a_2}\ \cdot \cdots \cdot\ x_n^{a_n}$
- Логарими Бернулли $u\ =\ a_1\ \ln(x_1 - c_1) + a_2\ \ln(x_2 - c_2) + a_n\ \ln(x_n - c_n)$.

Отметим график неокласической функции полезности графика двух граф:



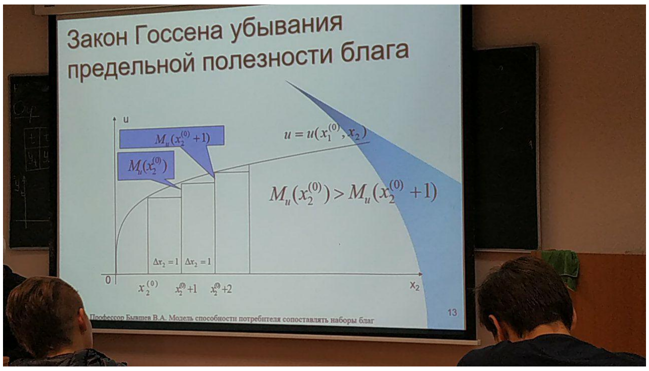
На плоскости $x^{(0)}$ мы обозначаем кирпичным цветом кривая безразличия. Точки которой, как набора благ имеют туже полезность, что и $\vec{x}_0$. Кривую безразличия мы можем обозначить u_0^- прообразы.

Предельная полезности блага и закон Госсена

Вернёмся к теореме Дебре; выпуклость вверхе функции полезности обозначает отрицательный знак второй производной по каждому аргументу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\ <\ 0 \tag{9}$$

Проиллюстрируем на графике на примере двух благ:



Закон Госсена. Выпуклость вверх означает, что каждая следующая еденица блага приносит дополнительную полезность меньшую чем предыдущая дополнительная еденица. Это означает убывание предельной полезности любого блага при фиксированных значениях остальных благ.

Завершая лекцию дадим определение предельной полезности блага:

$$\triangle\, u = M_u(x_i) = u(x_1, \cdots, x_i + 1, \cdots, x_n) - u\,(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) > 0 \tag{10}$$

Согласно теоремы Дебре предельная полезность всегда положительна. Добавим, что с позиции математики предельная полезность - это приращение функции полезности в ответ на прирощении аргумента x_i. И поэтому предельную полезность удобно вычеслить по правилу: $M_u(x_i) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Лекция №3. Модели потребления потребителя и уравнение Слутского

План

1. Модель Маршала-Вальрасса, свойства функции спроса и косвенная функция полезности;

2. Модель Хикса, функция расходов, лемма Шепарда и матрица Слуцкого;

3. Двойственный характер моделей поведения потребителя (взаимосвязь моделей) и уравнение Слуцкого;

4. Классификация благ в спросе потребителя.

На предыдущей лекции обсудили модель способности потребителя сопоставлять наборы благ (отношение слабого предпочтения) и **теорему Дэбре**, *что у любого потребителя, умеющего непротиворечиво сопоставлять наборы благ, существует функция полезности.* Понятие функции полезности лежит в основании моделей поведения потребителя. Начнём с модели Маршалла-Вальраса

Экзогенные величины модели:

1. C −пространство благ и их цены $(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$;

2. $u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$−функция полезности;

3. M − доход потребителя.

Эндогенные переменные модели:

1. Наилучший и доступный потребителю набор благ $(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)$.

Структурная форма модели (потребитель пытается найти такой набор благ, который наиболее полезен ему, но и по карману):

$$\begin{cases} u\ =\ u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\ \leq\ M \\ (x_1\ \geq\ 0,\ \ldots,\ x_n\ \geq 0)\ \in C \end{cases} \tag{1}$$

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = u(x_1, \ldots, x_n) + l\left(M\ -\ \sum\limits_i p_i\ x_i\right)$

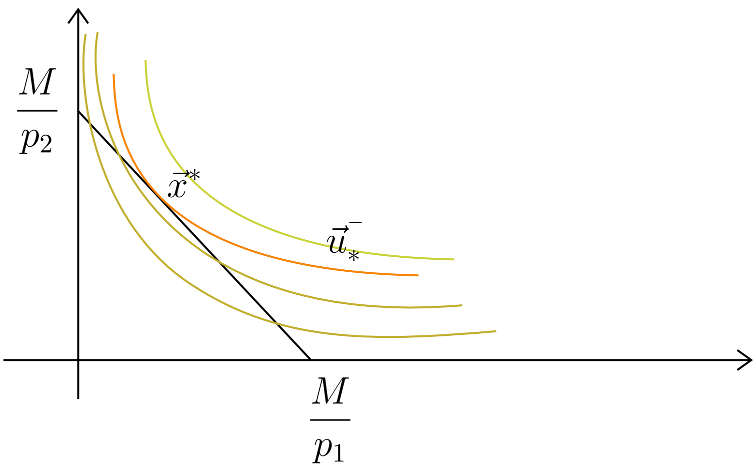
2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} - l \cdot p = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - \sum_i p_i x_i = 0; \\ i = (1, \ldots, n) \end{cases} \tag{2}$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной.

Система (3) решается либо аналитически, либо численно. Итогом решения является: $\vec{x}^D = \vec{x}^* = \vec{x}^D(M, p_1, \ldots, p_n)$ и множитель Лагранжа $l = l(M, p_1, \ldots, p_n)$.

Набор эндогенных переменных расчитанных по Маршаллу-Вальрасу принято называть спросом потребителя по Маршаллу-Вальрасу. Проиллюстрируем на графике это спрсс в ситуации двух благ:



Кривые линии - это множества безразличия. Другими словами - это линии уровня функции полезности потребителя. Оранжевая полоса показывает линию максимального возможного уровня функции полезности, такую которая имеет единственную точку с множеством доступных потребителю набором благ; точку касания кривой безразличия u^* с границей множества допустимых наборов мы обозначаем символом $\vec{x}^*$ и именно координаты этой точки удовлетваряют моделе (1).

Свойства функции спроса и косвенная функция полезности

Если все цены и доход изменяются в одно и тоже количество раз m, то спрос потребителя не меняется, т.е. функция спроса является однородной нулевой степени:

$$\begin{cases} \vec{x}^* = \vec{x}^D(m \cdot \vec{p}, m \cdot M) = \vec{x}^D(\vec{p}, M) \\ m > 0; \end{cases}$$

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в моделе Маршалла-Вальраса**:

$$u = u^*(\vec{x}^*) = u^*(\vec{p}, M) \tag{3}$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Справдливо следующее равенство, расскрывающее смысл мнодителя Лагранжа:

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} \;=\; l^*; \tag{4}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \; -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{5}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

Модель Хикса

В модели Хикса заложенна другая точка зрения: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую стоимость, а с другой стороны доставляет потребителю заданный уровень полезности. Модель Хикса имеет следующую структурную форму

$$\begin{cases} M \;= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1,\;\ldots,\;x_n) \;= u_0 \\ x_1 \;\geq 0,\;\ldots,\;x_n \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

где экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1,\;\ldots,\;p_n),\; u(x_1,\;\ldots,\;x_n),\; u_0 \tag{7}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1,\;\ldots,\;x_n) \;-\; \text{значение благ потребителя} \tag{8}$$

Трансформация к приведённой форме позволяет определить спрос по Хиксу и множитель Лагранжа

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^* = \vec{x}^H\left(\vec{p}, u_0\right); \\ l^* \;=\; l^*\left(\vec{p}, u_0\right) \end{cases}$$

Свойства функции спроса по Хиксу:

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^H\left(\vec{p}, u_0\right) \;= \vec{x}^H\left(m \cdot \vec{p}, u_0\right); \\ m > 0 \end{cases}$$

Функция спрса по Хиксу является однородной функцией нулевой степени по ценам благ. Если цены всех раз изменить в m раз, то спрос не меняется и остаётся на уровне полезности u_0.

Приведённая форма целевой функции модели Хикса называется функцией расходов потребителя и её значение это *стоимость спрса по Хиксу:*

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = M^*(\vec{p}, u_0) \tag{9}$$

Отметим два свойства:

1. Если все цены изменяются одновременно в m раз, то значение функции расходов возрастает в m раз:

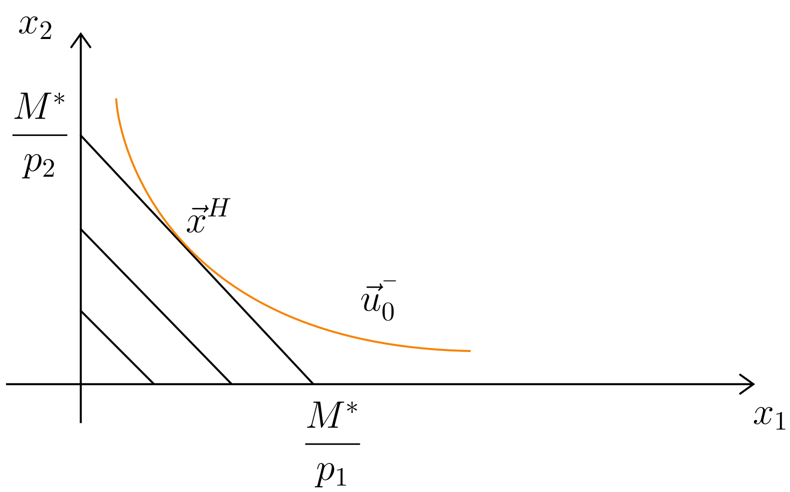
$$M^*(m \cdot \vec{p}, u_0) = m \cdot M^*(\vec{p}, u_0), \ m > 0$$

2. Функция возрастает по цене данного блага

3. Функция расходов выпкла вверх, то есть:

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} < 0 \tag{10}$$

Два последних свойства такие же как у функции полезности. Завершая обсуждение модели Хикса дадим наглядную интерпритацию спроса по Хиксу в результате двух благ:



Прямыми линиями обозначены лини уровня функции расходов, то есть наборы благ на этих уровнях имеют одинаковую стоимость. Ораневой линией нарисована кривая безразличия заданного уровня u_0. Спрос по Хиксу назодится в точке касания кривой безразличия $\vec{u_0}$ с линией минимально возмодного уровня функции спроса.

Двойственный характер моделей поведения потребителя (взаимосвязь моделей) и уравнение Слуцкого

Следщая теорема устанавляивает взаимосвязь моделей поведения потребителя (Занятие №6)

Теорема. Вернёмся к $\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M\right)$ и пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H\left(\vec{p}, u_0\right) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*\left(\vec{p}, u_0\right)\right) \tag{11}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*\left(\vec{p}, u_0\right)\right)\right) = u_0 \tag{12}$$

Следствие из теоремы (уравнение Слуцкого). Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество (11) по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial\vec{x}^D}{\partial\vec{p}} = S - \frac{\partial\vec{x}^D}{\partial M^*}\cdot\left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial\vec{x}_i^D}{\partial\vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial\vec{x}_i^D}{\partial M^*}\cdot\left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена слудующая матрица, которая называется матрицей Слуцкого и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S\ =\ \frac{\partial\vec{x}^H}{\partial\vec{p}}\cdot\triangle\,\vec{p}\ =\ \left(\frac{\partial\vec{x}^H}{\partial\vec{p}}\ +\ \frac{\partial\vec{x}^H}{\partial M^*}\cdot\frac{\partial M^*}{\partial\vec{p}}\right)\cdot\triangle\,\vec{p}$$

Итог. Равенство (11) и (12) называются тожедествами двойственности моделей поведения потребителя. Уравнения Слуцкого ($\frac{\partial\vec{x}^H}{\partial\vec{p}}$) задают взаимосвязь предельного спроса по Маршаллу-Вальраса и Хикса и называются основными теориями полезности.

Модель производства фирмой товара или услуги(блага)

План

1. Классификация благ в спросе потребителя (Понятие нормально блага и ценного блага);
2. Произведсвенная функция фирмы (модель производства фирмой товара или услуги). Свойства производственной функции;
3. Основные примеры производственной функции (Коббла-Дугласа, CES);
4. Предельные, средние продукты факторов производства и эластичность выпуска.

В конце прошлой лекции обсудили двойственный характер (взаимосвязь) моделей Маршала-Вальраса и Хикса поведения потребителя.

Подробная запись уравнения Слуцкого:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Нам остаётся осуществить классификацию благ в спросе потребителя.

Даём классификацию блага в спросе потребителя называется ***ценным или благом высшей категории***, если спрос на это благо возрастает с ростом доходом потребителя:

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} \geq 0$$

Вот примеры таких благ: автомобили, жильё (квартиры).

Благо называется ***малоценным***, если справедливо следующее неравенство, если спрос на благо снижается по мере роста дохода потребителя (маргарин):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} < 0$$

Благо называется ***нормальным***, если спрос на него снижается в ответ на рост цены (пиво):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} < 0$$

Экономисты считают, что практически все блага являются нормальными. В спросе по Хиксу и Маршалу-Вальрасу все блага нормальны.

Благо в спросе нызвается ***гиффиновым***, если в ответ на рост цены спрос на него повышается (валюта):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} \geq 0$$

Завершили моделирование поведение потребителя на рынке товаров и услуг.

Модель производства фирмой товара или услуги(блага)

Приступая к моделированию поведения фирмы на рынке благ обсудим, лежащую в основании поведении фирмы *модель производства фирмой уровней её продукции*.

Уровень продукции или блага фирмы создаваемый за определённый отрезок времени обозначим q, в процессе создания q фирма использует факторы производства, которые занумеруем $1, 2, \dots, n$, например:

1. Основной капитал (средство труда - здание, станки, компьютеры);
2. Живой труд (кол-во работников, кол-во человекочасов и т.д.);
3. Предметы труда (сырьё, материалы, полуфабрикаты);

....(1)

4. Финансовый капитал.

Два упомянутых выше первых факторов производства принято называть *основными факторами.* Уровни факторов производства мы обозначим по традиции $x_1, x_2, \dots, x_n$. При помощи принятой технологии F уровни фаткоров производсва трансформируются в уровень q выпуска продукции; Вот краткая запись последней записи:

$$q = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2}$$

Математическая модель выражения (2) и носит название *производственной функции фирмы.* Ниже нам будет удобно обсуждать упомянутую модель, как функцию двух основных факторов:

$$q = F(x_1, x_2)$$

Всё что будет сказано в такой ситуации переносится без изменений на случай произвольного кол-ва факторов.

Замечание. Если в качестве фирмы рассматривается вся начальная экономика, то уровень её продукции по традиции обозначается символом Y и носит название ***ВВП***; этот продукт измеряется в денежной мере, и в денежной мере всегда измеряется основной капитал K и на фирме и в стране. Количество живого труда в производственной функции национальной экономике всегда измеряется в количестве занятых в экономике и обозначается символом L. Производственные функции фирмы - это математическая модель уровень выпуска продукции уровнями факторов производсва.

Свойства производственной функции

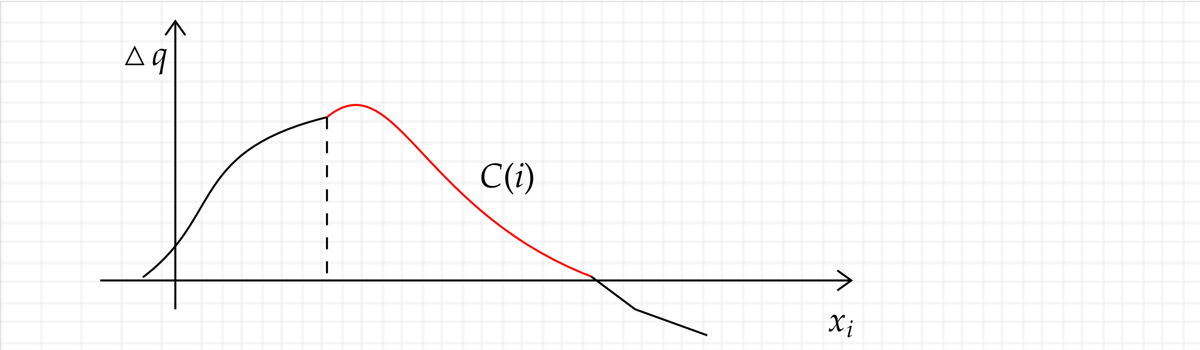
Свойство 1. Если уровни всех факторов свойства равны 0, то и значение функции равно 0.

Свойство 2. Производственная функция не убывает по каждому аргументу. Предельный выпуск фирмы по каждому фактору не отрицательный.

Свойство 3. Предельные продукты убывают с ростом факторов, то есть справедливо соотношение:

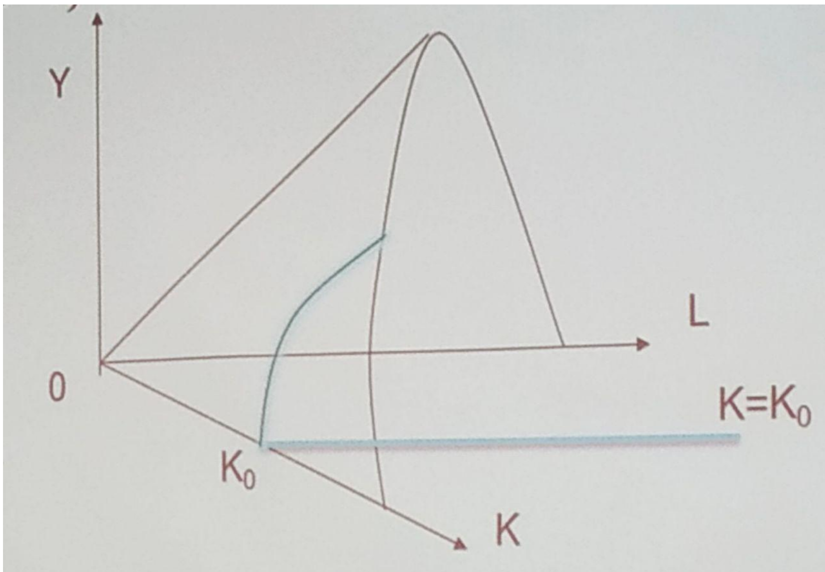
$$M_q(x_i) \to 0 \text{ при } x_i \to +\infty$$

Упомянутые свойства производсвенной функции справедливы в некоторой области C положительного орнтанта R_n^+ в R_n. И эта область называется *экономической облапстью.* За пределами экономической области упомянутые свойства производственной функции могут не соблюдаться вот типичный график:

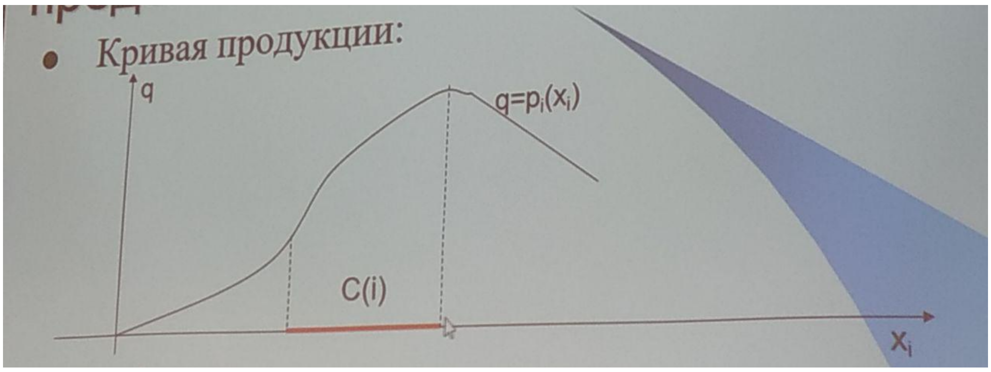


Вывод обслудили 3 основных свойства производственной функции и отметили, что эти свойства справедливы в некоторой области C.
Обсудим два основных примера производсвенной функций:

$$\begin{cases} Y = F_{C-D}(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \\ A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$



Кривая линия на графике производсвенной функции Коббла-Дугласа, это график производсвенной функции при фиксированном значении капитала, такой график носит назваение *кривой продукции* фактора L.



Вторым примером производстенной функции является CES - функция. (Семинар №8)

Предельные, средние продукты факторов производства и эластичность выпуска

По правилу (12) рассчитываются предельные продукты

$$M_q(x_i) \approx \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (12)$$

По правилу (13) расчитаваются средние продукты:

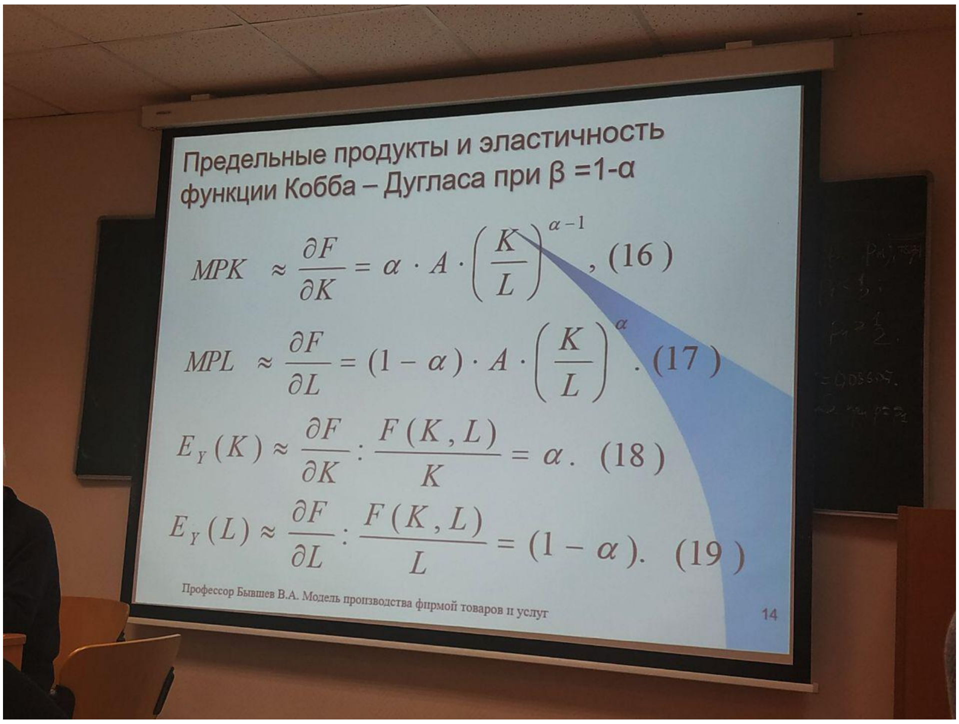
$$A_q(x_i) = \frac{q}{x_i} = \frac{F(\vec{x})}{x_i} \qquad (13)$$

Эластичность выпуска расчитывается по следующему правилу:

$$E_q(x_i) = \frac{\triangle q}{q} : \frac{\triangle x_i}{x_i} = \frac{\triangle q}{\triangle x_i} : \frac{q}{x_i} \approx M_q(x_i) : A_{ij}(x_i)$$

Сумма значений эластичности выпуска по факторам производства называется *эластичностью выпуска продукции:*

$$E_q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} E_q(x_i) = 1$$



Предельные продукты, средние продукты и эластичность выпуска являются основными характеристиками производсвенной функции.

Лекция №5

Предельная норма технологичного замещения и эластичность факторов производства

План

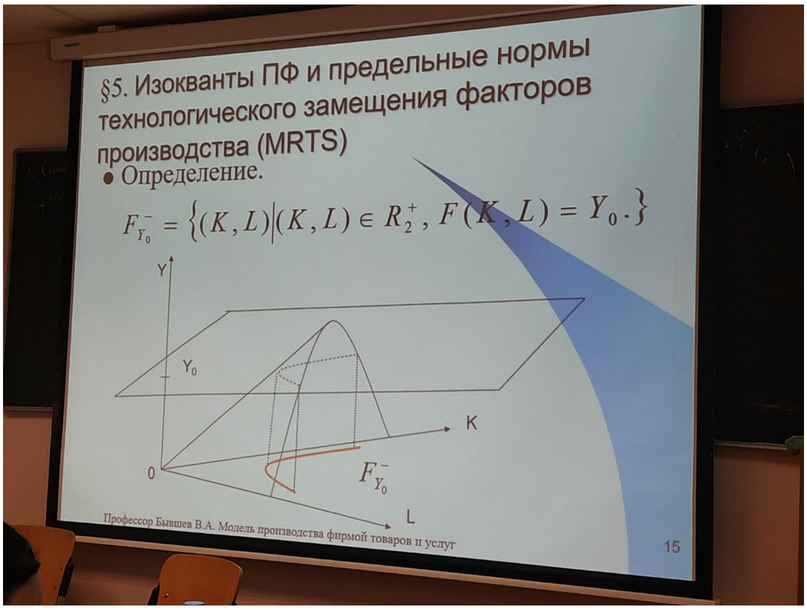
1. Изокванты производственной функции и предельные нормы замещения факторов (Обсудили на практическом занятии);
2. Эластичность замещения факторов производства;
3. Отражение научно-технологического прогресса в производственной функции фирмы;
4. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлой лекции обсудили понятие производственной функции, свойство производственной функции и её основные характеристики (предельные продукты). Там же отметили 2 примера производственной функции: Кобба-Дугласа и функция CES (ПФ Солоу).

Сейчас определим понятие изокванты как множетсва различных различных комбинаций факторов производства приводящих к одинаковому выпуску:

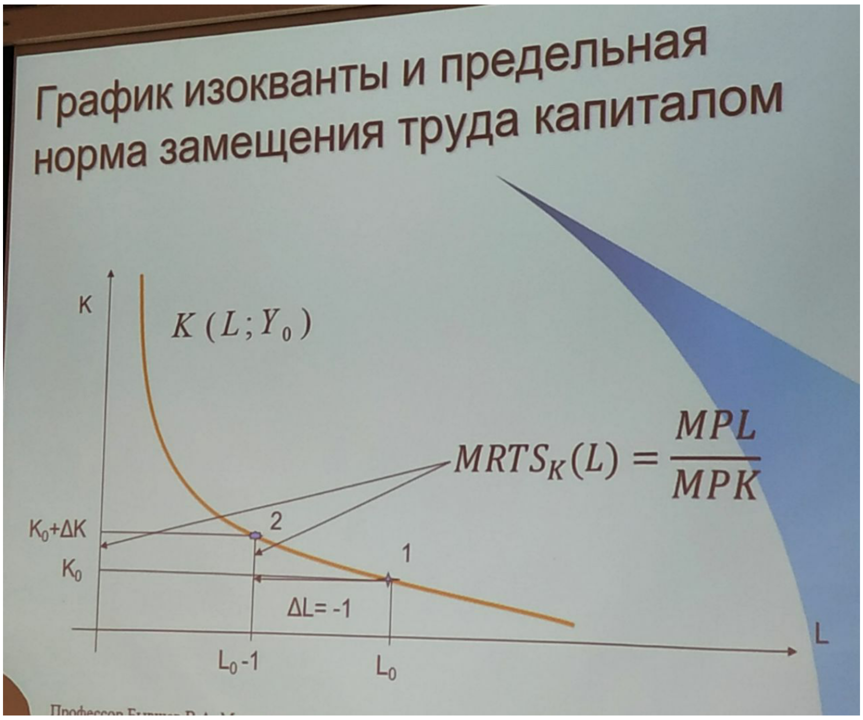
$$F^-_{Y_0} = \left\{(K,\ L)|(K,\ L) \in R^+_2,\ F(K,L) = Y_0.\right\}$$

На следующем графике изображена изокванта.



Изокванта выделена оранжевым цветом

С изоквантой связано понятие предельной нормы технологического замещения. Значение нормы показано на следующем графике.



Уровень выпуска $K(L; Y_0)$. Представим, что мы увольняем сотрудника и для того, чтобы не нести потери произовдства мы увеличим капитал на:

$$MRTS_K(L) = \frac{MPL}{MPK}(MPL, MPK \text{ были в лекции №5})$$

Подчеркнём, что для функции Кобба-Дугласа значение этой формы вычисляется довольно просто $\boxed{\text{ДЗ}}$ Рассчитать это значение.

Итог: *Изокванта* - это множество комбинаций факторов производства приводящая к одному уровню выпуска. *Изокванта* - это линия уровня производственной функции.

Эластичность замещения факторов производства

Определение эластичности:

$$\sigma_K(L) = \frac{\triangle\left(\frac{K(L;Y_0)}{L}\right)}{\left(\frac{K(L;Y_0)}{L}\right)} : \frac{\triangle\, MRTS_K(L)}{MRTS_K(L)}$$

Эластичность замещения факторов производства обозначается символом σ; эта эластичность связывает между собой относительное изменение на изокванте отношение факторов производства и относительное изменение предельной нормы технологического замещение $MRTS$. Рассматривая это определение, что σ это относительное изменение факторов производства на изокванте выраженное в процентах, в ответ на относительное изменение предельной нормы замещения на изокванте на 1%.

Пример. Для CES функции эластичность постоянна и вычисляется по следущей формуле:

$$\sigma_K(L) = \frac{1}{1+\rho}$$

Для функции Кобба-Дугласа эластичность равна единице $\sigma_K(L) = 1.$

Учёт научно-технологического прогресса в производственной функции фирмы

Пусть $q_t;\ x_{1,t},\ \dots, x_{n,t} -$ уровень выпуска фирмы и значения факторов производства в период t. В технологии F фирмы присутствует НТП, если при неизменных уровнях $x_{1,t},\ \dots, x_{n,t}$ выпуск фирмы q_t с ходом времени возрастает.

Влияние фирмы научно-технологического прогресса моделируется при помощи включения в производственную функции фирмы индекса $A_t \geqslant 1$ и возрастает с ходом времени t.

$$q_t = F(x_{1,t},\ \dots, x_{n,t}, A_t)\ A_t \geqslant 1,\ A_t \uparrow t.$$

Отметим три варианта включния индекса НТП в производственную функцию:

1. $q_t = A_t \cdot F(K_t, L_t) -$ нейтральный по Хиксу НТП.
2. $q_t = F(A_t \cdot K_t, L_t) -$ капиталосберегающий по Солоу НТП.
3. $q_t = F(K_t, A_t \cdot L_t) -$ трудосберегающих по Харроду НТП.

Лекция №6

Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде

План

1. Вклад научно-технологического прогресса в темп прироста выпуска фирмы;
2. Определение конкурентного рынка и цели фирмы на рынке;
3. Изокосты и предельный доход фирмы на конкурентном рынке;
4. Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде;

В конце прошлой лекции мы обсудили модели учёта в производственной функции фирмы научно-технологического прогресса.

Обсудим модель воздействия технологического прогресса на темп прироста выпуска фирмы.

Теорема. Пусть $q_t = F(x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}, A_t) -$ производственная функция расширенная индексом научно-технологического прогресса, тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{\triangle q_t}{q_{t-1}} = E_q(x_{1,t}) \cdot \frac{\triangle x_{1,t}}{x_{1,t}} + \ldots + E_q(x_{n,t}) \frac{\triangle x_{n,t}}{x_{n,t}} + E_q(A) \frac{\triangle A}{A_{t-1}}$$

В левой части темп прироста выпуска, а в правой части расчёт темпа прироста, где $E_q(x_{i,t})$.

Пример. (Нейтральный технологический прогресс.) Пусть производственная функция фирма является функцией Кобба-Дугласа с нейтральным по Хиксу технологическим прогрессом.

$$q_t = A_t \cdot F_{C-D}(K_t, L_t) = A_t \cdot a_0 \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{\beta}$$

В качестве индекса научно-технологического прогресса выберем следующую показательную функцию:

$$A_t = e^{\gamma t},\ \gamma > 0 \rightarrow \frac{\triangle A_t}{A_{t-1}} = \gamma \qquad (1)$$

Задача. Доказать формулу (1) и дать трактовку коэффициенту γ. В России этот коэффициент примерно $0{,}015$.

Тогда утверждение теоремы преобретёт конкретный вид:

$$\frac{\triangle q_t}{q_{t-1}} = \alpha \cdot \frac{\triangle K_t}{K_{t-1}} + \beta \cdot \frac{\triangle L_t}{L_{t-1}} + \gamma \qquad (2)$$

Обсудили обсуждение производсвенной функции которая понадобится при дальнейшем изучении микроэкономике

Определение конкурентного рынка и цели фирмы на рынке

Приступая к моделированию поведения фирмы на конкурентном рынке дадим следующее определение этого рынка. Обазначим символом p_0 цену блага, которая доставляет фирма на рынок (цена сливочного масла). Рынок называется конкурентным, если ни продавцы, ни покупатели не в состоянии влиять на велечину p_0; то есть другими словами ни фирма ни покупатели не имеют власти над рынком. В обсуждаемой ниже модели велечина p_0 будет приниматься как экзогенная переменная. В такой ситации (конкурентного рынка) доход фирмы от реализации её выпуска q:

$$y = p_0 \cdot q = p_0 \cdot F(x_1, \ \dots, x_n) \tag{3}$$

Обозначим символом c издержки фирмы (затраты) возникающие в процессе выпуска q блага фирмы; Величина определяется следующим образом:

$$c = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{4}$$

символом $p_1, p_2, \ \cdots, p_n$ мы обозначаем цены факторов производства; Мы полагаем, что рынок тоже является конкурентным и в нашей будущей модели цены факторов будут играть роль экзогенных переменных. Валовая прибыль фирмы на заданном отрезке времени рассчитываются по правилу:

$$\pi = \pi(x_1, x_2, \ \dots, x_n) = y - c \tag{5}$$

В нашей будущей модели мы будем постурировать, что *цель присутсвия фирмы на рынке это максимизация фирмы.*

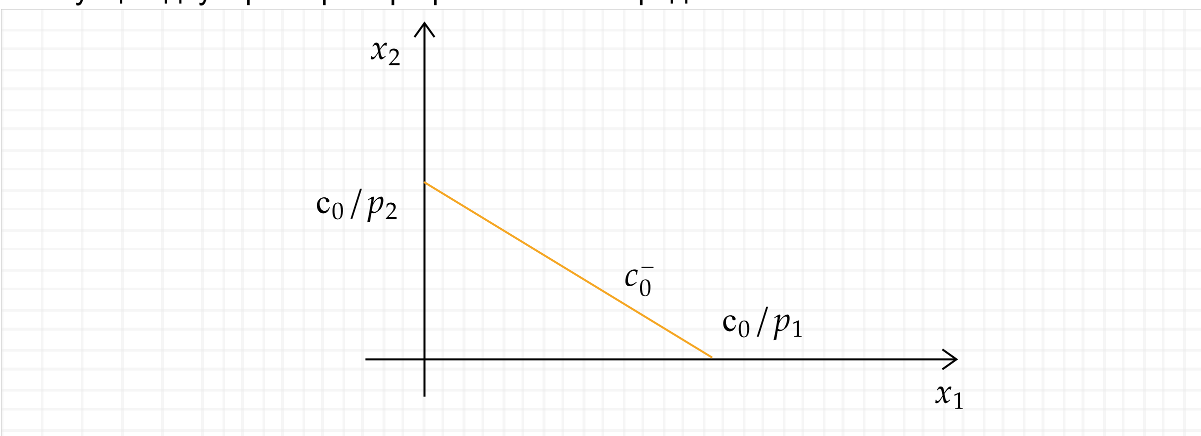
Изокосты и предельный доход фирмы

Изкостой заданного уровня называют линию уровня функции издержек фирмы на факторы производства, то есть линию уровня функции (4)

Вот определение изокосты и её график:

$$c_0^- = \left\{ (x_1, x_2, \ \dots, x_n) | \sum_1^n p_i \cdot x_i = c_0 \right\} \tag{6}$$

В ситуации двух факторов график изокосты предствален ниже



с позиции экономиста изокоста это комбинаций факторов производства приводящая к одному и тому же уровню затрат c_0.

Задача. Опираясь на формулу (3) доказать, что предельный доход фирмы на конкурентном рынке совпадает с рыночной ценой блага

$$M_y(q) = p_0$$

$M_y(q)$ – дополнительный доход который получит фирма в ответ на измение единицы продукции.

Решение уравнений (7) численное или аналитическое мы обозначим символами (8):

$$\vec{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) = \vec{x}\left(p_0, \vec{p}\right) \tag{8}$$

И подчеркнём во-первых, что это приведённая форма модели (7), а во-вторых отметим, что экономисты назвают это решение *спросом фирмы на факторы производства или ещё локальным рыночным равновесием фирмы.*

Следствие. Подствая спрос фирмы в её производственную функцию мы получим уравнение (9) оптимального выпуска фирмы:

$$q_* = F\left(\vec{x}, \left(p_0, \vec{p}\right)\right) = q_*\left(p_0, \vec{p}\right) \tag{9}$$

Другими словами выражение (9) это приведённая форма функции продукции фирмы.

Вывод: Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде при совершенной конкуренции является оптимизационной задачей (6) на безусловный экстремум. Решением этой задачи является спрос фирмы на факторы производства.

Лекция №6
Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде
План

1. Вклад научно-технологического прогресса в темп прироста выпуска фирмы;
2. Определение конкурентного рынка и цели фирмы на рынке;
3. Изокосты и предельный доход фирмы на конкурентном рынке;
4. Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде;

В конце прошлой лекции мы обсудили модели учёта в производственной функции фирмы научно-технологического прогресса.
Обсудим модель воздействия технологического прогресса на темп прироста выпуска фирмы.
Теорема. Пусть $q_t = F(x_{1,t}, \ \dots, x_{n,t}, A_t) -$ производственная функция расширенная индексом научно-технологического прогресса, тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{\triangle q_t}{q_{t-1}} = E_q(x_{1,t}) \cdot \frac{\triangle x_{1,t}}{x_{1,t}} + \ldots + E_q(x_{n,t}) \frac{\triangle x_{n,t}}{x_{n,t}} + E_q(A) \frac{\triangle A}{A_{t-1}}$$

В левой части темп прироста выпуска, а в правой части расчёт темпа прироста, где $E_q(x_{i,t})$.
Пример. (Нейтральный технологический прогресс.) Пусть производственная функция фирма является функцией Кобба-Дугласа с нейтральным по Хиксу технологическим прогрессом.

$$q_t = A_t \cdot F_{C-D}(K_t, L_t) = A_t \cdot a_0 \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{\beta}$$

В качестве индекса научно-технологического прогресса выберем следующую показательную функцию:

$$A_t = e^{\gamma t}, \ \gamma > 0 \rightarrow \frac{\triangle A_t}{A_{t-1}} = \gamma \tag{1}$$

Задача. Доказать формулу (1) и дать трактовку коэффициенту γ. В России этот коэффициент примерно $0,015$.
Тогда утверждение теоремы преобретёт конкретный вид:

$$\frac{\triangle q_t}{q_{t-1}} = \alpha \cdot \frac{\triangle K_t}{K_{t-1}} + \beta \cdot \frac{\triangle L_t}{L_{t-1}} + \gamma \tag{2}$$

Обсудили производсвенную функцию, которая понадобится при дальнейшем изучении микроэкономики.

Определение конкурентного рынка и цели фирмы на рынке

Приступая к моделированию поведения фирмы на конкурентном рынке дадим следующее определение этого рынка. Обазначим символом p_0 цену блага, которая доставляет фирма на рынок (цена сливочного масла). Рынок называется конкурентным, если ни продавцы, ни покупатели не в состоянии влиять на велечину p_0; то есть другими словами ни фирма ни покупатели не имеют власти над рынком. В обсуждаемой ниже модели велечина p_0 будет приниматься как экзогенная переменная. В такой ситации (конкурентного рынка) доход фирмы от реализации её выпуска q:

$$y = p_0 \cdot q = p_0 \cdot F(x_1, \ \dots, x_n) \tag{3}$$

Обозначим символом c издержки фирмы (затраты) возникающие в процессе выпуска q блага фирмы; Величина определяется следующим образом:

$$c = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{4}$$

символом $p_1, p_2, \ \cdots, p_n$ мы обозначаем цены факторов производства; Мы полагаем, что рынок тоже является конкурентным и в нашей будующей модели цены факторов будут играть роль экзогенных переменных. Валовая прибыль фирмы на заданном отрезке времени рассчитываются по правилу:

$$\pi = \pi(x_1, x_2, \ \dots, x_n) = y - c \tag{5}$$

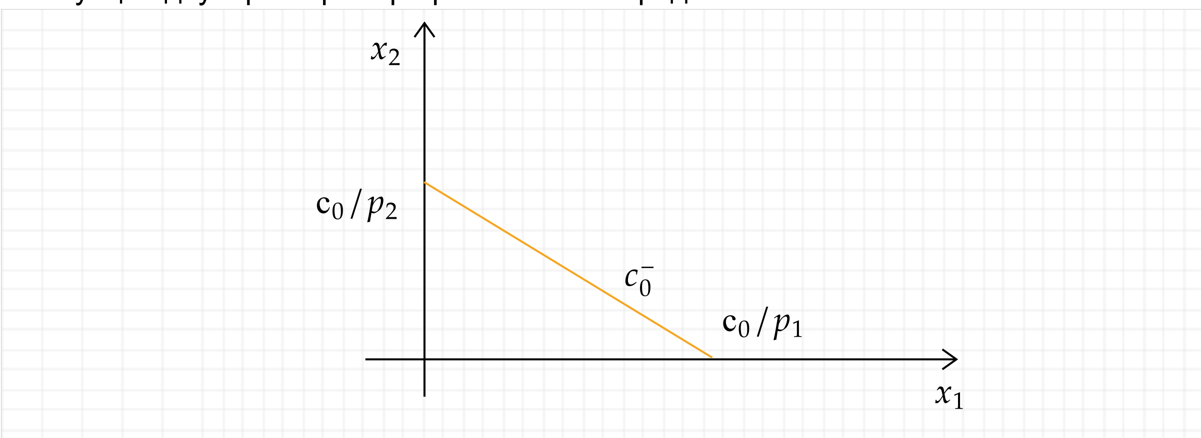
В нашей будущей модели мы будем постурировать, что *цель присутсвия фирмы на рынке это максимизация прибыли фирмы.*

Изокосты и предельный доход фирмы

Изокостой заданного уровня называют линию уровня функции издержек фирмы на факторы производства, то есть линию уровня функции (4)
Вот определение изокосты и её график:

$$\bar{c_0} = \left\{ (x_1, x_2, \ \dots, x_n) | \sum_1^n p_i \cdot x_i = c_0 \right\} \tag{6}$$

В ситуации двух факторов график изокосты предствален ниже:



с позиции экономиста изокоста - это *комбинаций факторов производства приводящая к одному и тому же уровню затрат* c_0.

Задача. Опираясь на формулу (3) доказать, что предельный доход фирмы на конкурентном рынке совпадает с рыночной ценой блага:

$$M_y(q) = p_0$$

$M_y(q)$ – дополнительный доход который получит фирма в ответ на измение единицы продукции.

Решение уравнений (7) численное или аналитическое мы обозначим символами (8):

$$\vec{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\right) = \vec{x}\left(p_0, \vec{p}\right) \qquad (8)$$

И подчеркнём во-первых, что это приведённая форма модели (7), а во-вторых отметим, что экономисты называют это решение *спросом фирмы на факторы производства или ещё локальным рыночным равновесием фирмы.*

Следствие. Подставляя спрос фирмы в её производственную функцию мы получим уравнение (9) оптимального выпуска фирмы:

$$q_* = F\left(\vec{x}, \left(p_0, \vec{p}\right)\right) = q_*\left(p_0, \vec{p}\right) \qquad (9)$$

Другими словами выражение (9) - это *приведённая форма функции продукции фирмы.*

Вывод: Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде при совершенной конкуренции является оптимизационной задачей (6) на безусловный экстремум. Решением этой задачи является спрос фирмы на факторы производства.

Лекция №7

Модель поведения фирмы в краткосрочном периоде и договременный путь развития фирмы

План

1. Модель предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы;
2. Договременный путь развития фирмы;
3. Модель предложения фирмы при известной функции издержек;
4. Модель поведения фирмы в догосрочном периоде;

На прошлой лекции обсудили модель поведения фирмы в долгосрочном периоде:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1,\ldots,x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

В этой моделе предполагается, что фирма может себ позволить любой уровень издержек c при котором максимизируется прибыль. На практике нередко уровень издержек ограничивается сверху некоторой велечиной c_0. Тогда модель (6) трансформируется в следующую оптимизационную модель на условный экстремум:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1,\ldots,x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \leqslant c_0; \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{11}$$

Экзогенными переменными в этой модели являются:

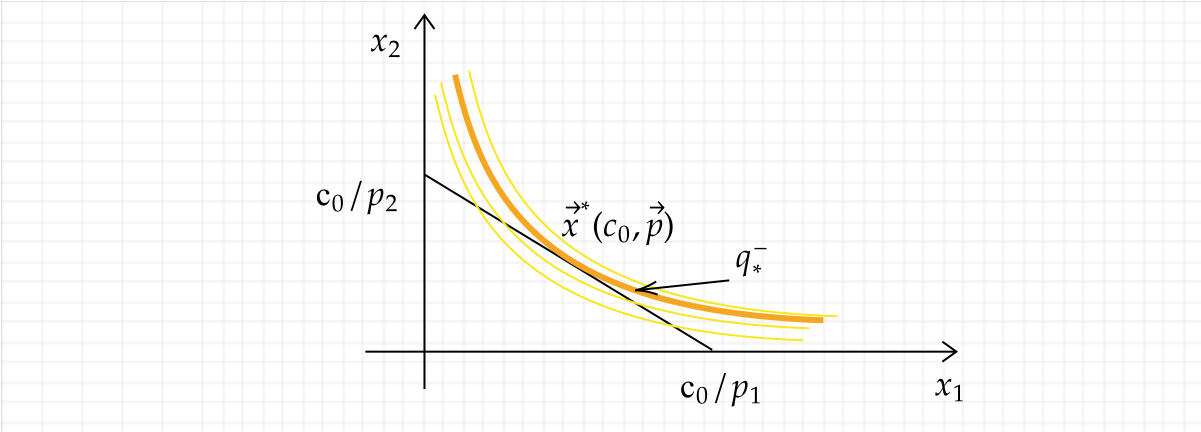
$$\underbrace{p_0}_{\text{(цена блага)}};\quad \underbrace{p_1,\ldots,p_n}_{\text{(цены факторов производства)}};\quad \underbrace{c_0}_{\text{заданный уровень издержек}} \text{ – экзогенные переменные}$$

$$\underbrace{(x_1,\ldots,x_n)}_{\text{уровни факторов пр–ва}} \text{ – эндогенная переменная}$$

Следствие. Модель со спецификацией (11) равносильна следующей модели предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы.

Модель предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы:

$$\begin{cases} q = \underbrace{F(x_1,\ldots,x_n)}_{y} \to \max \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \leqslant c_0; \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,x_n \geqslant 0 \end{cases}$$



Отрезок прямой линии это изокоста уровня c_0. Оранжевой линией обозначена такая изокванта, которая во-первых имеет максимальный уровень x^*, а во вторых касается изокосты уровня c_0. Точка касания $\vec{x}^*(c_0,\vec{p})$ это и есть решение задачи (12). Это решение мы представим ввиде

$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(c_0,\vec{p}) \tag{13}$$

Находится методом Лагранжа и носит название *условного спроса фирмы на факторы производства.* В свою очередь функция условного предложения фирмы получается в результате подстановки в производственную функцию фирмы:

$$q_* = F\left(\vec{x}^*\right) = q_*(c_0,\vec{p}) \tag{14}$$

Справедлива следующая теорма. функция условного предложения фирмы является монотонно возрастающей функцией заданного уровня издержек c. Вот лаконичная запись этой теоремы:

$$q_*(c,\ \vec{p}) \uparrow c \tag{15}$$

Следствие. Существует обратная функция к функции условного предложения:

$$c = c(q;\vec{p})$$

которая так же является возрастающая и называется функцией издержек фирмы.

Вернёмся к уравнению (13) условного спроса фирмы и будем рассматривать $\vec{x}^* = \vec{x}^*(c_0,\vec{p})$ при фиксированных ценах на факторы производства. Изменение вектора $\vec{x}^*$ в ответ на увеличение переменной c экономисты называют долгосрочным путём расширения фирмы. Вот геометрическая интерпритация:

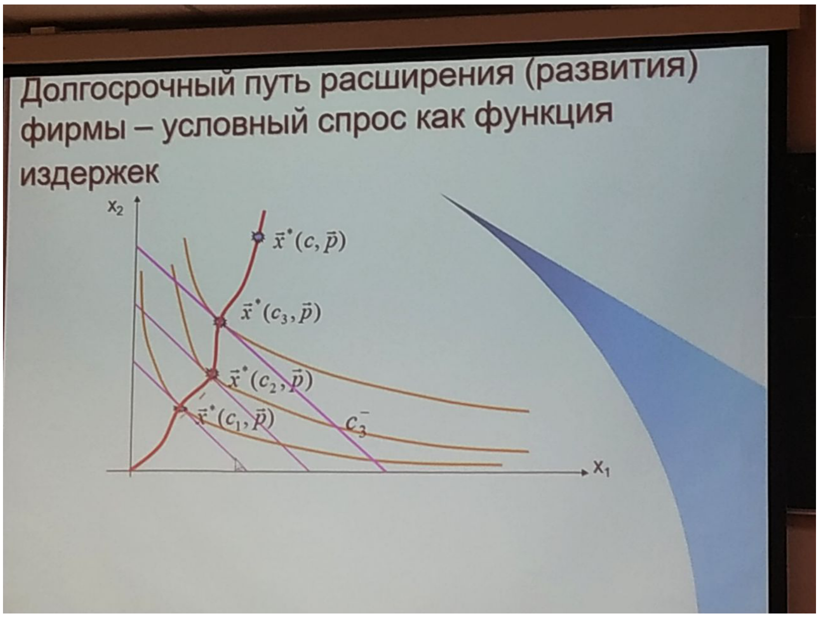
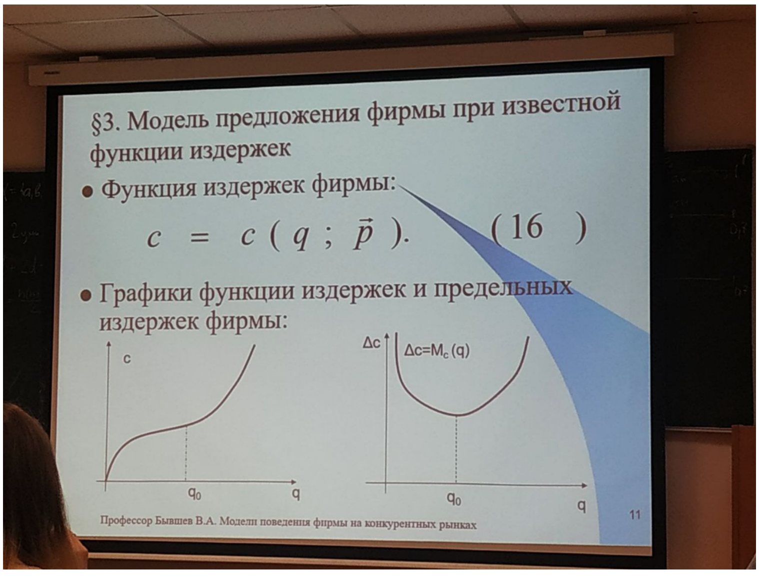


Figure 1: Догосрочный путь развития фирмы

$c_1 < c_2 < c_3 < \ \dots$
Модель предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы с математической точки зрения эквивалентно модели Маршалла-Вальраса поведения потребителя. Роль производтсвенной функции в моделе Маршалла-Вальраса играет функция полезности, в качестве бюджета уровень издержек.
Модель предложения фирмы при известной функции издержек;
Мы продолжаем рассматривать функцию издержек, как функцию выпуска продукции:



слева график издержек, справа график предельных издержек.
Если известна функция (16), то модель предложения фирмы можно представить ввиде (17):

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot q - c(q; \vec{p}) \to \max \\ q \geqslant 0 \end{cases}$$

Необходимое условие максимума прибыли:

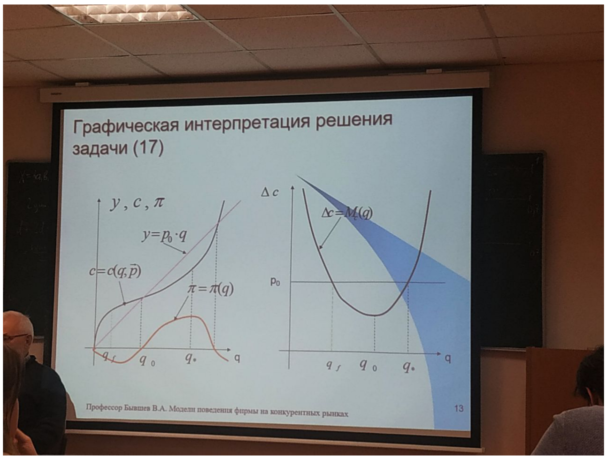
$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p_0 - \frac{\partial c}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial q} = M_c(q) = p_0 = M_y(q) \qquad (18)$$

Это равенство означает, что необходимым условием максимума прибыли служит совпадение предельных издержек $M_c(q)$ с рыночной ценой блага p_0, то есть с предельным доходом фирмы $M_y(q)$.

Отметим критерий максимума прибыли фирмы:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0; \frac{\partial \pi^2}{\partial q^2} = -\frac{\partial c^2}{\partial q^2} = -\frac{dM_c(q)}{dq} < 0 \qquad (19)$$

Завершая этот пункт изобразим на графике все участвующие в этой модели функции:



Розовый график - график дохода. Чёрная линия - это затраты фирмы. Оранжевый цвет - это график прибыли.

В короткосрочном периоде такие ограничения часто присутствуют и тогда модель поведения фирмы в структурной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1, \ldots, x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ f_1(x_1, \ldots, x_n) \leqslant b_1 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

π - прибыль, y - доход, c - издержки фирмы. Экзогенные переменные модели:

$$p_0; p_1, \ldots, p_n; b_1, \cdots, b_m$$

Эдогенные переменные:

$$x_1, \dots, x_n$$

Ограничения на уровни факторов производства описываются m неравенствами, которые в частности могут принимать вид равенств.

Лекция №9

Рынки с невершенной конкуренцией монополия

План

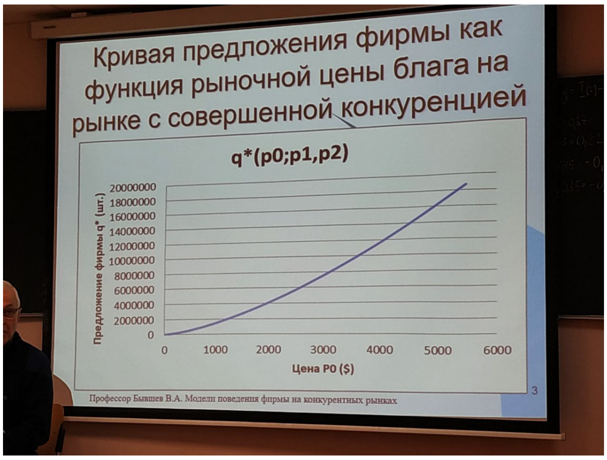
1. Ещё один взгляд на рынок с совершенной конкуренцией;
2. Рынок нормального блага, обратная функция спроса и её простейшие модели;
3. Монополия (Microsoft). Доход монополиста и его придельный доход;
4. Модели поведения монополиста и необходимое условие максимума прибыли монополиста;

Вернёмся к модели поведения фирмы на конкурентом рынке и отметим, что на этом рынке рыночная цена блага p_0 принимается, как данная величина и фирмой и потребителями; p_0
это экзогенная переменная и эта переменная присутствует, как одна из объясняющих переменных в приведённой форме спроса фирмы и в приведённой форм её предложения:

$$\vec{x}^*(p_0,\vec{p}),\ q_*(p_0,\vec{p})$$

с ростом цены блага p_0 будет увеличиваться и оптимальный уровень предложения фирмы.

Экономисты назвают переменную q_* как функцию аргумента p_0 кривой предложения. Вот график:



Кривой называют функцию двух аргументов. Ниже мы покажем, что монополист лишён кривой предложения.

Рынок нормального блага функция спроса обратная функция спроса и её простейшие модели

Вернёмся к моделе Маршалла-Вальраса поведения потребителя на рынке благ и рассмотрим приведённую форму спроса потребителя (смотри занятие №4) в виде следующего уравнения:

$$x_i = \underbrace{d_i}_{=\frac{a_i}{a_1+a_2}} \cdot \frac{M}{p_i} \downarrow,\ i = 1,2$$

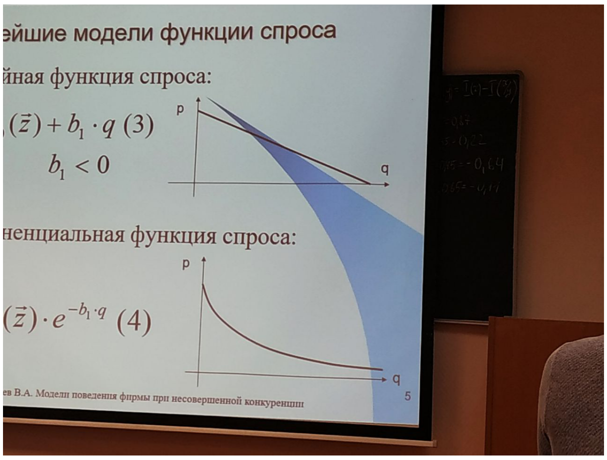
На занятии отмечали что предельный спрос по цене блага уменьшается при росте цены. Такое благо назвается нормальным. Экономисты считают, что в основном все

виды благ являются нормальными.
Обазначим спрос на благо символом q и подчеркнем, что из монотонного характера зависимости q от p следует существование обратной функции спроса. z обозначаем какие-то переменные от которых зависит спрос; в набор z обычно входят цены сопутсвующих благ, заменителей данного блага и так далее. Вот типичный график обратной функции спроса на обратное благо.

Вот две простешие модели и их графики обратной функции спроса

$$\begin{cases} p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0 \\ p(q) = d_0 \cdot e^{d_1 \cdot q}; d_1 < 0 \end{cases}$$

Вывод: у любого нормального блага существует обратная функция спроса, которая является убывающей от нормальной функции спроса.



Рынок некоторого блага, например софта называется рынком с несовершенной конкуренцией, если производитель данного блага способен оказывать влияние на рыночную цену блага (фирма) спобна оказывать воздействие на рыночный уровень цены. Рынок нормального блага называется монопольным, если только один производитель поставляет это благо на рынок.
Сформируем уравнение дохода монополиста, как функции уровня предложения данного блага:

$$y = p(q) \cdot q \tag{5}$$

, где символом $p(q)$ обозначена обратная функция спроса.
Используя (5) определим предельный доход пономолиста:

$$M_y(q) = \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial p}{\partial q} \cdot q + p(q) < p(q) \qquad (6)$$

В силу неравенства (2') видим, что предельный доход монополиста ниже средней ценых блага средней цены блага. Отметим, что предельный доход в точности совпадает с рыночной ценой блага, а в монопольном нет.

Модель поведения монополиста и необходимое условие максимума прибыли

Модель поведения монополиста в догосрочном периоде имеет структурную форму (7):

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \rightarrow \max \\ q = F(x_1, \ldots, x_n) \\ x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \ \geqslant 0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$p_1, \ldots, p_n - \text{экз}$$

$$x_1, \ldots, x_n, \pi, q, y, c - \text{энд.}$$

К приведённой форме модель (7) трансформируется методом Лагранжа. Спрос монополиста на факторы производтсва мы обозначи $x(\vec{p})$. Подставляя этот спрос в производственную функцию монополиста находим монополный объём предложения (это функция только цен факторов производства, не зависит от рыночной цены блага). Поэтому говорят, что монополист лишён кривой предложения. Так же как и в сиуации предложение на конкурентом рынке (смотри лекцию №7). Необходимое условие оптимального предложения монополиста имеет вид:

$$M_y(q_*) = M_c(q_*) \qquad (12)$$

Модель поведения монополиста при заданном уровне издержек. Если задан уровень издержек c_0, то модель (7) превращается в модель (13).

$$\begin{cases} y = p(q) \cdot q \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant c_0; \\ q \ = F(\vec{x}); \\ x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \ \geqslant 0; \end{cases} \qquad (13)$$

Трансформация к приведённой форме осуществляется методом Лагранжа и спрос фирмы на факторы производства и монопольный уровень предложения теперь оказываются функциями заданного уровня издержек и цен факторов производства.

Моедель поведения монополии в краткосрочном периоде

В краткосрочном периоде на уровни факторов производства монополиста могут быть наложены опрделённые ограничения, которые описываются системой m неравенств:

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \rightarrow \max \\ q = F(x_1, \dots, x_n) \\ f_j(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_j; j = 1, 2, \dots, m \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0; \end{cases} \tag{13'}$$

приведённая форма расчитавается методом Лагранжа и имеет следующий вид:

$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(\vec{p}, \vec{b}); q^* = F\left(\vec{x}^*\right) = q^*(\vec{p}, \vec{b}) \tag{14}$$

Вывод: модели поведения монополистов аналогичны соответсвующим моделям поведения фирмы на конкурентном рынке с той лишь разницей, что уровень дохода монополиста на рынке определяется функцией спроса на данное благо (обратной функцией спроса (часто)).

Лекция №10

Рынки с несовершенной конкуренцией; олигополия

План

1. Определение олигопольного рынка; Доход олигополиста и функция его издержек;
2. Модель олигополии Курно;

На предыдущей лекции мы обсудили определение монопольного рынка и модели поведения монополиста. Важным элементом этих моделей является предположение о том, что благо на данном рынке является нормальным и известно обратная функция спроса на данное благо.

Рынок является олигопольным, если небольшое число фирм поставляют на этот рынок идентичные блага или незначительно отличающиеся блага. Например, к таким рынкам относится рынок нефти, рынок операционных систем.

Предпосылка №1.

Обозначим кол-во таких фирм символом n, а символами

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

будем обозначать уровень предложения данного блага этими фирмами. Общий уровень поставки блага на рынок определяется по правилу:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \qquad (15)$$

Мы полагаем, что данное благо является нормальным и известно обратная функция спроса рынком данного блага.

Предпосылка №2.

Извесен уровень спроса олигополиста:

$$p(q(q_1, q_2, \dots, q_n)) \qquad (16)$$

Предпосылка №3.

Доход и прибыли олигозполиста определяются по правилу (17)

$$\begin{gathered} y_i = p(q(q_1, q_2, \dots, q_n)) \cdot q_i \\ \pi_i = y_i - c_i \end{gathered} \qquad (17)$$

Предположение модели олигополии Курно

Предположение №1.

Обратная функция спроса является линейной:

$$p = b_0 + b_1 \cdot q$$

Предположение №2.

Функции издержек являются линейными и одникавыми у всех олигополистов:

$$c_i = d + m \cdot q_i \qquad (18)$$

Замечание. Постоянный член в выражении (18) называют постоянными издержками, которые независят от уровня выпустка. Второе слагаемое называется переменными издержками, котрые возрастают в ответ на увеличение продукции q_i при этом коэффициент m имеет смысл. Причем коэффициент m имеет смысл предельных издержек.

Предположение №3.
Отсутсвует сговор олигополистов:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \underset{\substack{1 \text{ при } i=j \\ 0 \text{ при } i \neq j}}{\delta_{ij}} \text{ – символ Кранекера} \tag{19}$$

Поясним смысл предпосылки (19) двумя примерами. Пусть $i = j = 1$, тогда $\frac{\partial q_1}{\partial q_1}$ – это изменение в ответ на изменение величины q_1 на 1. $\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$ – это означает, что величина q_1 не зависит от величины q_2. Экономисты назвают предполагаемыми вариациями.

Модель олигополии Курно

Структруная форма

$$\begin{cases} \pi_i = p(q) \cdot q - c_i \rightarrow \max \\ q = q_1 + \ldots + q_n \\ q_i \geqslant 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{20}$$

b_i, m_i, d_0, d_1 – экзогенные переменные

$(q_1, \ldots, q_n), (y_1, \ldots, y_n), (c_1, \ldots, c_n), (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ – эндогенные переменные

Замечание. В этой форме содержится n задач на безусловный экстремум. Эти задачи связаны между собой аргументом $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

Таким образом, эндогенными переменными в этой моделе являются уровни $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Поставок блага на рынок монополистами. Значения по модели Курно выбираются такими, чтобы прибыль каждого олигополиста оказалась максимальной. Необходимое условие прибыли каждой фирмы имеет вид (21):

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{21}$$

Смотри (семинар №15) (21) образует систему алгебраический n уравнений.
Справедлива следующая теорема.
1. Решение системы (21) имеет вид (22):

$$q_i^* = \frac{b_0 - m}{b_1 \cdot (n+1)} \tag{22}$$

2. Рыночная цена блага в ситуации (22) определяется по правилу (23):

$$p = \frac{b_0 + n \cdot m}{n+1} \tag{23}$$

3. С увеличением кол-ва фирм на олигопольном рынке, рыночная цена имеет пределом величину m:

$$p \to m \text{ при } n \to \infty$$

То есть рынок всё время приближается к конкурентному.

Метод математического моделирования изучения экономики.

План

1. Известные и искомые характеристики изучаемого объекта, запись взаимосвязей этих характеристик математическим языком. Спецификация (подробное описание математической модели) модели Баумоля-Тобина спроса на наличные деньги (модель управления наличностью, модель оптимального остатка денежных средств на счёте);

2. Трансформация модели Баумоля-Тобина к приведённой форме методом Лагранжа;

3. Домашнее задание;

Изучение экономики (и реально мира вобще) базируется на записи мат. языком взаимосвязей известных характеристик изучаемого объекта (экзогенных переменных) и искомых характеристик (эндогенных переменных). Такая запись именуется записью **экономической моделью** и в этой модели искомые и известные характеристики связаны между собой воедино. В процессе записи математическим языком возникает структурная форма модели и если во взаимосвязях содержится некоторое требование оптимальности у искомым значениям эндогенных переменных, то такая модель называется оптимизационной.

$$\begin{cases} P(\vec{y},\vec{x}) \to ext(\min|\max) \\ \vec{y} \in Y_{\vec{x}} \end{cases} \tag{1}$$

В верхней строчке записано требование оптимальности искомых значений к эндогенным переменным.
В экономики (везде) требование минимальных издержек или требование максимального дохода.
Во второй строчке лаконично записано условие допустимости значения эндогенных переменных, которое это условие содержит также во взаимосвязях. Символом Y мы обозначили множество допустимых значений $\vec{y}$ и это множество в общем случае зависит от экзогенных переменных $\vec{x}$. В математике такие задачи называются *задачами математического программирования*. Добавим, что слева от стрелки находится функция экзогенных и эндогенных переменных, которая в математике называется *целевой* и в экономике значение этой функции всегда имеют смысл, либо издержек, либо дохода.
Задача Баумоля-Тобина. Изучаемым объектом является опреционная деятельность (по производству сметаны), которая требует в наличных денег.

1. M - требуемый уровень денежных средств в течение года (M = \$52 млн.) Для обеспечения денежными средствами фирма в начале года открывает в банке расчетный счёт и размещает на этом счёте некоторое кол-во денег m. Как правило эти деньги фирма берёт в кредит или же получает в итоге продажи своих ценных бумаг. При такой продаже фирма имеет издержки на известном уровне c малое.

2. c - величина издержек. (c = \$0.05 млн.) Деньги m находящиеся на расчётном счёте не приносят ей доход, а между тем, если эти деньги фирма разместила на депозите (инвестировала в депозит), то эти деньги приносили бы доход r малое и называется у экономистов нормой альтернативных затрат.

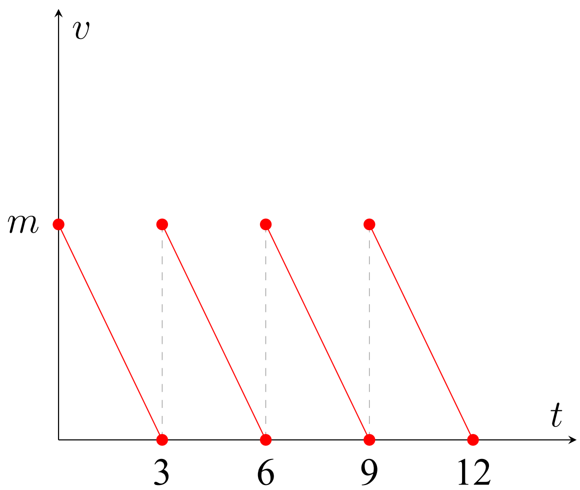
3. r - норма альтернативных затрат (r = 0.07 = 7%). Деньги размещённые на счёте фирмы не приносят доход и этот доход носит название альтернативных затрат, альтернативные затраты всегда экономисты включают в общие затраты фирмы. Таким образом исходными данными являются:

- M - требуемый уровень денежных средств в течение года (M = \$52 млн.)
- c - величина издержек. (c = \$0.05 млн.)
- r - норма альтернативных затрат (r = 0.07 = 7%)

Искомыми величинами:

1. Величина остатка денежных средств на счёте в момент его пополнения (m)

2. Кол-во пополнений (на рис ниже n = 4)



В начале года остаток m, по мере расчёта остаток снижается до 0 и затем пополняется. m и n - эндогенные переменные. Взаимосвязи отражены словесно:

1. Общие затраты фирмы (ϕ) должны быть минимальными.

2. Величины m и n должны быть такими чтобы они удовлетворяли требуемому уровню M.

Начнём с записи общих затрат ϕ помня, что эти слагаемые состоят из двух частей: ϕ_1 и это слагаемое состоит из общей величины издержек $\phi_1 = c \times n$, второе слагаемое это упущенный доход (альтернативные издержки) (ϕ_2)
$\phi = \phi_1 + \phi_2$
$\phi_1 = c \cdot n,$
$\phi_2 = \frac{m}{2} \cdot r$

Оптимизированная модель Баумоля в структурной форме:

$$\begin{cases} \phi = c \cdot n + \dfrac{r}{2} \cdot m \to \min \\ n \cdot m = M, \\ n \geq 0, m \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

С точки зрения математики оптимизационная модель Баумоля-Тобеля отпносится к классическим задачам математического программирования на условный экстремум. Решить такую задачу означает трансформировать модель к приведённой форме.

Метод Лагранжа состоит из 3 шагов:

- Составляется функция Лагранжа на условный экстремум:

$$L = c \cdot n + \frac{r}{2} \cdot m + l \cdot (M - n \cdot m) \tag{3}$$

  В функции символом l обозначен множитель Лагранжа.

- Для функции Лагранжа все производные должны быть равны нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial n} = c - l \cdot m = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial m} = \dfrac{r}{2} - l \cdot n = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M - n \cdot m = 0 \end{cases} \tag{4}$$

- Составленная система решается численно (на практике как правило), либо аналитически.

Приведённая форма модели Баумоля:
Формулы Уилсона

$$\begin{cases} m = \dfrac{c}{l}, \\ n = \dfrac{r}{2 \cdot l}, \\ M - \dfrac{r}{2 \cdot l} \cdot \dfrac{c}{l} = 0 \Rightarrow l^2 = \dfrac{r \cdot c}{2 \cdot M} \Rightarrow l = \sqrt{\dfrac{r \cdot c}{2 \cdot M}}. \end{cases} \tag{5}$$

Приведённая форма модели (формулы Уилсона):

$$m^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot M}{r}}, n^* = \sqrt{\frac{r \cdot M}{2 \cdot c}} \tag{6}$$

$\boxed{\text{Д/з.}}$ С упомянутыми значениями экзогенных переменных расчитать эндогенные значения m^* и n^*. Подставить правые части формул Уилсона в уравнение формул издержек и получить значение, как явную функцию экзогенных переменных. Отдельно рассчитать издержки и упущенный доход (ϕ_1 и ϕ_2). Рассчитать по формуле значение множителей Лагранжа.

Семинар №2: Предельные величины в экономике и значение эластичности

План

1. Расчёт предельных издержек фирмы на поддержание расчётного счёта (при помощи модели Баумоля-Тобина);
2. Расчёт эластичности издержек фирмы по поддержанию расчётного счёта;
3. Обсуждение ДЗ;

На прошлом занятии познакомились с методом математического моделирования изучения экономики в процессе составления и расчётов модели Баумоля управления наличностью фирмы:

$$\begin{cases} \phi = c \cdot n + \dfrac{r}{2} \cdot m \to \min \\ n \cdot m = M, \\ n \geq 0, m \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Подчеркнём, что это структурная форма модели; методом Лагранджа эту форму мы трансформировали к приведённой форме:

$$m^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot M}{r}}, n^* = \sqrt{\frac{r \cdot M}{2 \cdot c}} \tag{2}$$

Формулу (2) можно использовать для проверки размерности. В домашнем задании получена приведённая форма.

$$\phi = \sqrt{2crM} \tag{3}$$

Подчеркнём, что каждая эндогенная переменная выражена через экзогенные

$$(M, c, r) \tag{4}$$

Предельными величинами в экономике принято называть изменения эндогенных переменных возникающие в ответ на единичные изменения экзогенных переменных.

Познакомимся с этим понятием в процессе решения **задачи**:
Пусть $M = \$52$ млн.
$c = \$0,05$ млн.
$r = 0,07 = 7\%$
Требуется определить:

$$\triangle\phi = \phi(M + 1(\triangle M), c, r) - \phi(M, c, r) \tag{5}$$

Величина $\triangle\phi$ и есть *предельный величинина*.
Решение: Прежде всего обратим внимание, что величина $\triangle\phi$ – это частное приращение функции, возникающее в ответ на изменение аргумента M на величину $\triangle M = 1$. Вычислим его при заданных значениях экзогенных переменных.

$$\triangle\phi = 0,6090977 - 0,6033241 = 0,0057736 \approx 0,0058$$

Имея ввиду смысл величины ϕ мы можем сказать, что величина $\triangle\phi$ вычисленная по правилу (5) имеет смысл *цены денежных ресурсов* фирмы, более точно это *предельная цена ресурса*. Мы обозначим эту величину $\phi = M_\phi(M) = 0,0058$.

Правила расчёта предельных велечин в экономике Вернёмся к выражению (5) и воспользуемся понятием дифференциала функции, как главной части приращения

$$\triangle\phi = \frac{\partial\phi}{\partial M} \cdot 1(\triangle M) \tag{6}$$

Именно при помощи дифференциала (частного дифференциала) все прикладники вычисляют приращение функции. Рис.1. иллюстрирует формулу (6).

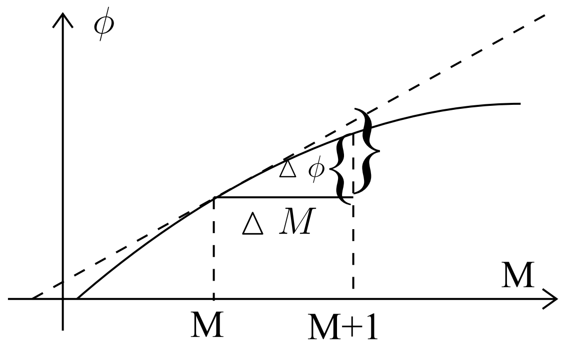


Рис. 1: Иллюстрация формулы (6)

Задача 2. Вычислить издержки по правилу (6) и сравнить с точным ответом.
Решение:

$$\frac{\partial\phi}{\partial M} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2crM}\right) \cdot 2cr = \sqrt{\frac{cr}{2M}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0.07}{2 \cdot 52}} = 0,0058012$$

Сопоставляя расчёты по формулам (5) и (6) мы убеждаемся в достаточной точности формулы (6), которая использунтся во всех приложениях. Предельные значения эндогенных переменных принято вычислять, как частные производные эндогенных переменных по экзогенным.

Добавим к сказанному, что при помощи дифференциала, также удобно вычислять изменения по поддержанию счёта в ответ на заданные изменения любой экзогенной переменной , например дополнительные издержки, которые возникают в ответ на одну транзакцию, удобно посчитать по правилу

$$\triangle\phi = \frac{\partial\phi}{\partial c} \cdot \triangle c \tag{7}$$

Задача 3. На прошлом занятии трансформируя модель (1) к приведённой форме (2) мы определили значениме множителя Лагранжа l и вычислили в ДЗ на прошлом занятии.

$$\frac{\partial\phi}{\partial M} \ = \ l \ = \ \sqrt{\frac{cr}{2M}} \tag{8}$$

Видим, что выражению (8) предельные издержки по M это ни что иное, как множитель Лагранжа. Следовательно, множитель Лагранжа имеет экономический смысл предельной цены ресурса M. Множитель Лагранжа имеет смысл предельной цены денежных средств.

Эластичность в экономике

Значения эластичности – это велечины, которые связывают <u>относительные</u> изменения эндогенных переменных в ответ на заданные относительные изменения экзогенных переменных. С понятием эластичности познакомимся в итоге решения следующей **задачи**:

Пусть фирме потребовались дополнительные денежные ресурсы в размере 3% от принятого ранее уровня денежных ресурсов. Спрашивается на сколько процентов в ответ возрастёт уровень оптимальных затрат фирмы по поддежанию счёта?

Вернёмся к определению эластичности и запишем это определение математическим языком:

$$\frac{\triangle\phi}{\phi} = E_\phi(M)\frac{\triangle M}{M} \tag{9}$$

это выражение мы можем переписать так:

$$E_\phi(M) = \frac{\triangle\phi}{\phi} : \frac{\triangle M}{M} = \frac{\triangle\phi}{\triangle M}\frac{M}{\phi} = \frac{\triangle\phi}{\triangle M} : \frac{\phi}{M} \tag{10}$$

Последний член $\dfrac{\phi}{M}$ имеет *смысл средней цены денежных средств*, т.е. это тот уровень издержек, который приходится на одну единицу требуемых денежных средств. Мы обозначим эту велечину

$$\frac{\phi}{M} = A_\phi(M) \tag{11}$$

Формулу (10) легко запомнить, а именно эластичность – это отношение предельных издержек к средним.

Решение: Вернёмся к выражению (9), множитель которой равен $\dfrac{\triangle M}{M} = 3\%$, выразим эластичность по формуле (10):

$$E_\phi(M) \;=\; \frac{\triangle\,\phi}{\phi} : 0,03 \;=\; \frac{0,0058}{0,6}\; : 0,03 \;=\; 0,5$$

Значение $E_\phi(M) = 0,5$ имеет следующий смысл: если велечину M увеличить на 1%, то оптимальные издержки фирмы возрастут на полпроцента.

Значение $E_\phi(M)$ имеет следующий смысл: относительное изменение ϕ в ответ на изменение велечины (M) на 1%.

$\boxed{\text{Д/з}}$ Вычислить предельное значение эндогенных переменных m и n по экзогенной переменной M и дать трактовку m и n. Пусть транзакционные издержки возрастают на 2% во сколько в ответ в относительной мере (%) увеличится велечина m.

Семинар №3: Функция полезности потребителя и её основные свойства

План

1. Наборы благ потребителя и пространство благ (множество благ). Функция полезности и два её свойства;

2. Множество (кривые) безразличия и предельная норма замещения благ;

3. Обсуждение домашних заданий;

Рассмотрим некоторого потребителя (семья или физическое лицо), который интересуется на рынке некоторыми благами, которые мы занумеруем натуральными числами $N = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$. Пусть: 1 - ”хлеб 2 - ”молоко ... , n - развлечения. Символом x_1 обозначим количество первого блага, которого может приобрести потребитель, аналогично остальные.

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

Описанная выше формула - это набор благ, которые может приобрести потребитель. $\vec{x} \in C \sqsubset R_n^+$ - положительные ортант n-мерного евклидова пространства. При $n = 2$ график будет выглядить следующим образом:

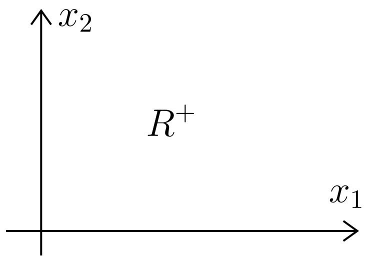


Рис. 1: R^+

Какие блага мы будем обозначать $\overrightarrow{x'} = (x_1', x_2', \cdots, x_n',)$, $\overrightarrow{x}'' = (x_1'', x_2'', \cdots, x_n'',)$

Доказано, что для любого потребителя можно построить числовую функцию, определённую на множнстве C: $u = u\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)$ значения которой равны уровням полезности для потребителя любого набора благ из множества C. Экономисты называют такую функуцию *функцией полезности потребителя.*

Отметим два свойства этой функции и обсудим две модели формулы полезности удовлетворяющие этим свойствам:

$\overrightarrow{x}' = (1,\ 3)$, $\overrightarrow{x''} = (2,\ 3)$, набор $\overrightarrow{x''}$ полезнее потребителю и это значит, что функция полезности будет: $u(2,\ 3) > u(1, 3)$.

1. Функция полезности является возрастающей функцией по каждому аргументу, дополнительное количество любого блага увеличивает значение функции полезности
$$u \uparrow x_i \tag{1}$$

2. Предельная полезность блага убывает по мере увеличения количесва этого блага при фиксированных значения остальных благ в наборе.

Понятие предельных велечин в экономике.

Вспомним понятие предельного значения эндогенной переменной по экзогенной. Предельной полезностью i - ого блага

$$M_u(x_i) \ = \triangle\ u = \ u(x_1, \ \cdots\ , \ x_j + 1\ , \ \cdots\ , \ x_n) - u(x_1, \ \cdots\ , \ x_j, \ \cdots\ , \ x_n) \ \approx \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2}$$

экономисты называют приращение функции полезности (дополнительную полезность) в ответ на дополнительную единицу i -ого блага. Согласно занятию 2 значение $M_u(x_i) \ \approx \ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Замечание. *Свойство (2) возрастание функции по каждому аргументу в аналитической записи означает положительное значение каждой производной:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \ = \ M_u(x_i) > 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial M_u(x_i)}{\partial x_i} \ = \ \frac{\partial^2\ u}{\partial\ x_i^2} \ < \ 0 \tag{4}$$

Задача №1.

$$u(x_1, \ x_2) \ = \ a_1 \ \ln x_1 \ + \ a_2 \ \ln x_2, \ a_1 > 0, \ a_2 > 0 \tag{5}$$

(такое уравнение называют *уравнение Бернулли.*)

Доказать, что уравнение (5) обладает двумя свойствами полезности проверить неравенство (3) и (4):

1.
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \ = \ \frac{a_1}{x_1} \ > 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \ = \ \frac{a_2}{x_2} \ > \ 0 \tag{7}$$

2.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \ = \ -\frac{a_i}{x_i^2} \ < 0$$

Дейтсвительно функция (5) обладает двумя свойствами полезности.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ **Задача №2.**

Пусть в моделе (5), коэффициент $a_1 = 0,1 + 0,02\,i,\ a_2 = 0.2 + 0.02i,\ x_1 = 2,\ x_2 = 0.5$, где $i-$ это номер по списку. Вычислить полезность набора и предельную полезность первого блага.

Задача №3.

Проверь, что

$$u(x_1,\ x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \tag{8}$$

может служить показателем функции полезности. Экономисты называют функцию (6) *неоклассической*. Свойтво (4) экономисты называют законом Госсена.

Кривые безразличия и прельная норма замещения благ

Вернёмся к примеру и предположим, что второй аргумент имеет вместо 3 значение 2:

$$\overrightarrow{x}' = (1,\ 3),\ \overrightarrow{x''} = (2,\ 2) \tag{9}$$

Говорят, что два набора благ *безразличны* потребителю, если они для него одинаково полезны, т.е.

$$u\left(\overrightarrow{x'}\right) = u\left(\overrightarrow{x'}'\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{x'} \sim \overrightarrow{x''} \tag{10}$$

Обозначим символом:

$$I\left(\vec{x}\right)' = \{\ \vec{x} \mid \vec{x} \in C,\ u\left(\vec{x}\right) = u\left(\overrightarrow{x'}\right) = u_0\} \tag{11}$$

Множеством безразличия для набора $\overrightarrow{x'}$ принято называть наборы благ значение функции полезности у которых совпадают со значением функции полезности для набора $\overrightarrow{x'}$.

Рассматривая определение функции безразличия мы можем записать уравнение, которому удовлетворяет любой элемент из множества i.

$$u(x_1,\ x_2) = u_0 = u\left(\overrightarrow{x'}\right) \tag{12}$$

Рассматривая (10), что множество безразичия это ничто иное, как поверхность (линия) заданного уровня полезности (линия уровня). Если разрешить уравнение (10) относитель x_2, то сможем построить график линии уровня или гафик кривой безразличия.

Задача №4.

Построить график кривой безразличия для логорифма Бернулли (5) по второй переменной.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Дома построить график кривой безразличия для логорифма Бернулли (5) по второй переменной, принимая аргументы $a_1 = 0,1 + 0,02\,i,\ a_2 = 0.2 + 0.02i$.

1) $a_1 \ \ln x_1 \ + \ a_2 \ \ln x_2 \ = \ u_0$ (10)
2) $\ln\left(x_1^{a_1} \ \cdot \ x_2^{a_2}\right) \ = \ u_0$
3) Теперь воспользуемся определением логорифма $x_1^{a_1} \ \cdot \ x_2^{a_2} \ = \ e^{u_0}$
4)

$$x_2 \ = \ e^{\frac{u_0}{a_2}} \ \cdot \ x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} \ = \ K_0 \ \cdot \ x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} \tag{13}$$

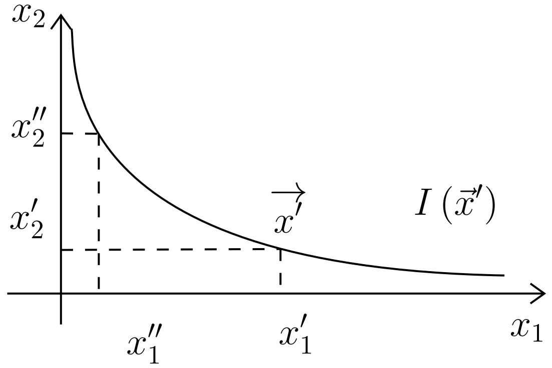


Рис. 2: Множество безразличия

Предельная норма замещения первого блага вторым

Рассмотрим Рис. 2 и выберем точку на линии слева от $\overrightarrow{x_1'}$. Наш выбор мы можем интерпретировать так в наборе $\overrightarrow{x'}$ количество первого блага сократилось на $\triangle \ x_1' : \ x_1 \ = \ x_1' - \ \triangle \ x_1'$.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ В безразличном наборе $\vec{x}$ больше на $\triangle \ x_2$ можно показать, что связаны так:

$$\triangle \ x_2' \ = \ \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \ \triangle \ x_1' \ = \ MRS_{1,\,2} \ \triangle \ x_1' \tag{14}$$

Предельная норма замещение $MRS_{1,\,2}$ первого блага вторым. Это величина имеет смысл дополнительного количества второго блага, которое заменит потерю еденицы первого блага.

Задача №5

Рассчитать предельную норму замещения первого блага вторым.

Решение:
$\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \ = \dfrac{a_1}{x_1}; \ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \ = \dfrac{a_2}{x_2} \ \Rightarrow MRS_{\ 1,\,2} \ = \ \dfrac{a_1 \ x_2}{a_2 \ x_1} \ = \ \dfrac{0.1}{0.2} \, \dfrac{0.5}{1} \ = \ 0.25.$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Вычислить предельную норму замещения с данными из задачи с коэффициентами второго блага первым для неоклассической функции полезности (6).

Итог. Кривые безразличия - это равноценные для потребителя наборы благ, предельные нормы замещения имеют смысл дополнительного количества одного блага, которое компенсирует потерю еденицы другого.

План

1. Структурная форма модели Маршалла-Вальраса;

2. Функция косвенной полезности;

3. Проверка $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии мы обсудили понятие функции полезности. И отметили её свойства. Сейчас это понятие мы привлечём в процессе обсуждения модели поведения потребителя. Суть этой модели следующая:

Потребитель приобретает такой набор благ: $\vec{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, который с одной стороны ему максимально полез, а с другой стороны по карману (модель Маршалла-Вальраса):

$$\begin{cases} u = u(x_1, \ldots, x_n) \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

Экзогенными переменными в этой модели Маршалла-Вальраса являются:

$$(M \text{ -- бюджет}, p_1, \ldots, p_n \ (\text{-- цена})) \tag{2}$$

Эндлогенными переменными в этой модели Маршалла-Вальраса являются наборы благ:

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Модель (1) служит примером задачи математического программирования на условный экстремум (Смотри lec_01).

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = u(x_1, \ldots, x_n) + l\left(M - \sum\limits_i p_i\, x_i\right)$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = 0; \\ i = (1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3}$$

3. Эти условия представляют систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ переменной.

Система (3) решается либо аналитически, либо численно. Итогом решения является: $\vec{x}^* = \vec{x}^{M-B}(M, p_1, \ldots, p_n)$ и множитель Лагранжа $l = l(M, p_1, \ldots, p_n)$.

Задача.

Пусть функцией полезности потребителя служит логарифм Бернулли в ситуации двух благ эта функция имеет уравнение:

$$u = a_1 (= 0.1) \cdot \ln x_1 + a_2 (= 0.2) \cdot \ln x_2$$

Дано:

$\vec{x} = (x_1 \ (= \text{молоко}),\ x_2 \ (= \text{хлеб}))$

$M = 200$

$p_1 = 50$ р/кг

$p_2 = 75$ р/л

Найти:

Набор благ который приобретёт потребитель.

$$u = a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2 + l(M - (50x_1 + 75x_2)) =$$
$$= a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln x_2 + Ml - 50x_1 l - 75x_2 l$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1} - 50l = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2} - 75l = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = M - 50x_1 - 75x_2 = 0; \end{cases}$$

$$M - \frac{50a_1}{50l} - \frac{75a_2}{75l} = 0$$

$$M = \frac{a_1}{l} + \frac{a_2}{l}$$

$$Ml = a_1 + a_2$$

Таким образом по правилам (5) рассчитывается спрос потребителя по Маршалу-Вальрасу. Доведём до чисел:

$$l = \frac{a_1 + a_2}{M} = \frac{0.3}{200} = 0.0015 \tag{4}$$

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1} = \frac{0.1 \times 200}{0.3 \times 50} = 1.3 \tag{5}$$

$$x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2} = \frac{0.2 \times 200}{0.3 \times 75} = 1.77 \tag{5'}$$

Рассчитаем значение функции полезности:

$$u \;=\; a_1\;\ln x_1\;+\;a_2\;\ln x_2\;=\;0.1\;\ln\;1.3\;\;+\;0.2\;\ln 1.77\;=\;0.14$$

Замечание. Подстановка вектора $\overrightarrow{x^*}$ превращает эту функцию:

$$u \;=\; u\,(x_1^*,\;\cdots\;,\;x_n^*)\;=\;u(M,\;p_1,\;\cdots\;,\;p_n) \tag{6}$$

в функцию экзогенных переменных. Экономисты называют эту функцию *функцией косвенной полезности* потребителя, в нашем примере значение этой косвенной функции полезности оказалось равной значению 0.14.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ рассчитать спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса принимая в качестве функции полезности неоклассическую функцию:

$$u \;=\; a_0\,(a_0\;=1)\;\cdot\;x_1^{a_1}\;\cdot\;x_2^{a_2} \tag{6$'$}$$

Параметры этой функции и значения переменных принять такими же как в аудиторных задачах.

Свойства спроса потребителя по модели Маршала-Вальраса

Показать что спрос потребителя остаётся неизменным, если его бюджет и цены благ изменяются одновременно в некоторое кол-во k.

Доказательство привести с помощью формулы (5):

$$x_1^*\;=\frac{a_1\;Mk}{(a_1+a_2)p_1k} \tag{7}$$

$$x_2^*\;=\;\frac{a_2\;Mk}{(a_1+a_2)p_2k} \tag{7$'$}$$

Следовательно спрос не изменится. Свойство (7) остаётся справедливым для любой функции полезности. Математики называют такое свойство *свойством однородности нулевой степени по Маршалу-Вальрасу*.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Показать, что и для неоклассической функции свойство однородности сохраняется.

$$u \;=\; a_0\,(a_0\;=1)\;\cdot\;x_1^{a_1}\;\cdot\;x_2^{a_2}$$

Задача

Вычислить экономический смысл множителя Лагранджа (l). (Заглянем в 1 и 2 занятие).

Решение:

Вернёмся к выражению

$$u\;=a_1\cdot\;\ln x_1\;+\;a_2\cdot\;\ln\;x_2$$

и с учётом выражения (5) получим выражение этой функции:

$$u^* = a_1 \ \cdot \ln\left(\frac{a_1 \ M}{(a_1 + a_2)p_1}\right) \ + a_2 \ \cdot \ln\left(\frac{a_2 \ M}{(a_1 + a_2)p_2}\right) \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Можно показать, что предельное значение y^* по бюджету потребителя в точности равно множителю Лагранджа.

Дадим трактовку множителю l. $l -$ дополнительная полезность по Маршалу-Вальрасу, которая возникает в ответ на дополнительную еденичу денежных средств (M).

Лекция №6
Модель Хикса потребления потребителя на рынке благ
План

1. Модель поведения потребителя Хикса в структурной форме и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (задача математического программирования);

2. Функция расходов потребителя и её свойства

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Модель поведения потребителя Хикса

В моделе Хикса заложенно следующее утверждение: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую *стоимость*, а с другой стороны предоставляет потребителю *заданные уровень полезности*.

Вот математическая запись идей Хикса:

$$\begin{cases} M \ = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1,\ \ldots,\ x_n) \ = u_0 \\ x_1 \ \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1,\ \ldots,\ p_n),\ u_0\ - \text{экзогенные переменные}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)\ -\ \text{эндогенные переменные}$$

Выражение (1) - это структурная форма модели Хикса. С позиции математики модель (1) - это задача математического программирования на условный экстремум и решать такую задачу можно методом Лагранжа. Метод Лагранжа состоит из следующий шагов:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = \sum\limits_{i} p_{\ i}\ x_i\ +\ l(M\ -\ u(x_1,\ \ldots,\ x_n))$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} \ = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} \ = \ 0; \\ i \ = \ (1,\ 2, \ldots,\ n) \end{cases} \tag{2}$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной.

Система (4) решается либо аналитически, либо численно.

$$\vec{x}^H = \left(x_1^H,\ \ldots,\ x_n^H\right) = \vec{x}^H\left(\vec{p},\ u_0\right) \tag{3}$$

$$l^* = l^*\left(\vec{p}, u_0\right) \tag{4}$$

Задача. Пусть пространство благ двухметрно $\vec{x} = (x_1,\ x_2) \in C \sqsubseteq R_2^+$.

Пусть функцией полезности потребителя служит логарифм Бернулли в ситуации двух благ эта функция имеет уравнение:

$$u = a_1\,(=\ 0.1) \cdot \ln x_1 + a_2(=\ 0.2) \cdot \ln\ x_2$$

Дано:

$\vec{x} = (x_1\ (= \text{молоко})\,,\ x_{\ 2}\ (= \text{хлеб}))$
$M = 200$
$p_1 = 50$ р/кг
$p_2 = 75$ р/л

На предшействующем семинаре мы отсыскали спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса, задавшись значение $M = 200$ руб.. Там же мы рассчитали уровень полезность спроса по Маршалу-Вальрассу:

$$u = a_1\ \ln x_1 + a_2\ \ln x_2 = 0.1\ \ln\ 1.3 + 0.2\ \ln 1.77 = 0.14$$

Найти:

Методом Лагранжа трансформировать к приведённой форме модель Хикса, зная, что $u_0 = 0.14$. Вычислить спрос по Хиксу и стоимость спроса по Хиксу ($M^* = \sum\limits_{i=1}^{2} p_i x_i^H$(7)).

Решение:

1. Функция Лагранжа:

$$L(x_1,\ x_2,\ l) = p_1x_1 + p_2x_2 + l(u_0 - (a_1 \cdot \ln x_1 + a_2 \cdot \ln\ x_2))$$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 + l\frac{a_1}{x_1} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 + l\frac{a_2}{x_2} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial l} = u_0 - a_1 \cdot \ln x_1 - a_2 \cdot \ln\ x_2 = 0; \end{cases}$$

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$ Решить систему и доказать, что решение этой системы методом подстановки имеет следующий вид:

$$x_1^* = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{3'}$$

$$x_2^* \;=\; \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}} \tag{3'}$$

$$l^* = \alpha \;\cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{4'}$$

Рассчитать численно значение спроса по Хиксу и параметры выше.

Функция рассходов потребителя и её свойства

Функцией **рассходов потребителя** можно называть стоимость спроса по Хиксу, как функцию экзогенных переменных модели.

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = \; M^*\left(\vec{p}, u_0\right) \tag{7}$$

Задача. Подстваит правые части из уравнения (3') в выражение (7) и получим следующее уравнение:

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Убедиться в правильности формулы (8):

$$M^* \;=\; \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить справедливость уравнения (8), рассчитать M^* и сравнить полученное значение со значением $M_0 = 200$ оуб..

Задача. Показать, что:

1. $M^* \uparrow u_0$; (9)
2. $M^* \uparrow p_i$;

Решение:

Докажем (9):

$$\frac{\partial M^*}{\partial u_0} > 0$$

$$M^{*\prime}_{u_0} = \psi \;\cdot \frac{1}{\sum a_i} \;\cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \;\cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} > 0$$

$$M^{*\prime}_{p_i} \;=\; \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot \frac{a_1}{\sum a_i} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}-1}$$

Кроме свойств 1 и 2 функция расходов потребителя является выпуклой вверх функцией:

$$\boxed{\text{ДЗ}}\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} > 0$$

Семинар №6. Двойственный характер модели поведения потребителя и уравнение Слутского

План

1. Взаимосвязь спроса потребителя по Маршаллу-Вальрассу и по Хиксу. Уравнение Слутского;

2. Рассчёт изменения спроса потребителя (по уравнениям Слутского) в ответ на изменнение цен благ;

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На 4-ом и 5-ом занятиях рассчитали соответственно спрос потребителя по Маршалу-Вальрассу:

$$\begin{cases} \vec{x}^{M-B}\left(\vec{p}, M\right) = \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u\left(\vec{x}^{D}\right) = 0.14; \\ M = 200\text{руб.}; \\ p_1 = 50;\ p_2 = 75; \end{cases} \tag{1}$$

$$\boxed{u = a_1\,(= 0.1)\cdot \ln x_1 + a_2 (= 0.2)\cdot \ln\, x_2}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{H} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}; \\ u_0 = \underline{0.14},\ p_1 = 50,\ p_2 = 75; \\ M^* = M\left(\vec{p}, u_0\right) = p_1 x_1^H + p_2 x_2^H = 200 \text{ руб.}; \end{cases} \tag{2}$$

Случайно ли это? Совпадение спроса по Хиксу со спросом по Маршалу-Вальрассу в ситуации, когда экзогенно заданный уровень дохода потребителя равен стоимости спроса по Хиксу $M = M\left(\vec{p}, u_0\right) = M^*$ совпадение не случайно. Справедливо слудующее тождество по p и u_0:

$$\boxed{\vec{x}^{D}\left(\vec{p}, M\left(\vec{p}, u_0\right)\right) \equiv \vec{x}^{H}\left(\vec{p},\ u_0\right)} \tag{3}$$

Тождество можно дифференцировать по p:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n \times n) + \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n \times 1) \cdot \frac{\partial M}{\partial \vec{p}}(1\ \times n) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n) \tag{4}$$

Уравнение (4) носит название основных уравнений теории полезностей или уравнение Слутского.

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^D}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\ i = 1, 2,\ \ldots n, \tag{4'}$$

Уравнение Слутского связывают между собой значение предельного спроса по Хиксу (правая часть) со значением предельного спроса по Маршаллу-Вальрассу.

Замечание. Можно показать, что в левой части уравнения (4) производная $\dfrac{\partial M}{\partial p_j}$ в точности равна спросу по Хиксу и в силу тождества (3):

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} = x_j^H = x_j^D \tag{5}$$

Экономисты называют уравнение (5) леммой Шепорта.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ (необязательное). Доказать уравнение (5) опираясь; проверить справедливость (5) в условиях домашней задачи. Продифференцировать по $p_1x_1^H + p_2x_2^H$. С учётом равенства (5) уравнение Слутского приобретает следующий вид (с учётом (5)):

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}}(n \times n) \ = \ \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n) \ - \ \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n \times 1) \ \cdot (\vec{x}^D)^T (1 \times n) \tag{4''}$$

Вывод: модели Маршалла-Вальрасса и Хикса связаны между собой тождеством двойсвтенности (3). Дифференцирование этого тождества по p приводит к уравнению Слутского (4), которые связывают между собой предельный спрос по Маршаллу-Вальрасу с предельным спросом по Хиксу. В правой части равенства (4) находится симетричная матрица, которая назвается матрицей Слусткого и обозначается:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}(n \times n)$$

Рассчёт изменение спроса потребителя в ответ на изменение цен товара (по уравнениям Слутского)

Вернёмся к условиям наших задач отмеченных в выражениях (1) и (2) и предположим, что цены изменились на некоторую величину $\triangle\ \vec{p}$; предположим, что $\triangle\ \vec{p}_1$ не изменилась, $\triangle\ \vec{p}_2$ увеличилось.

$$\triangle\ \vec{p}\ = \begin{pmatrix} \triangle\ \vec{p}_1 \\ \triangle\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix};$$

Требуется рассчитать изменение спрос по М-В и Хиксу.

Порядок рассчёта:

1.

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle\ \vec{p}\ \big(= \triangle\ \vec{x}^D\big) = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}}\ \cdot \triangle\ \vec{p}\ \big(= \vec{x}^H\big) - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M}(n{\times}1) \cdot (\vec{x}^D)^T (1{\times}n) \cdot \triangle\ \vec{p}\ \big(=\triangle\ \vec{x}^{YE}\big) \tag{6}$$

$\triangle\ \vec{x}^{YE}$ вычитаемое экономисты называют эффектом дохода. $\vec{x}^H = \vec{x}^{SE}$ – эффект замещения. $\vec{x}^D = \vec{x}^{GE}$- генеральное.

2.

$$\triangle\ \vec{x}^D = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_1} \\ \frac{a_2}{\sum a_i} \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} \\ 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{M}{p_1} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{M}{p_2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Дать экономескую трактовку столбцам матрицы

$$\triangle\ \vec{x}^D = \triangle\ \vec{x}^{GE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 0.33 \cdot \frac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & 0.67 \cdot \frac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle\ x_1^D \\ \triangle\ x_2^D \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Посчитать.

3. Вернёмся к (6). Нам будет удобно на третьем шаге рассчитать вычиатемое в правой части (6) эффект дохода.

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \\ \frac{0.67}{p_2} \end{pmatrix} (= S)\ ;\ \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot (\vec{x}^D)^T = \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \\ \frac{0.67}{p_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.3 & 1.8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0.33}{p_1} \cdot 1.3 & \frac{0.33}{p_1} \cdot 1.8 \\ \frac{0.67}{p_2} \cdot 1.3 & \frac{0.67}{p_2} \cdot 1.8 \end{pmatrix} (9)$$

$$\triangle\ \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot (\vec{x}^D)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. $\boxed{\text{ДЗ}}$ Вычисляем вычисление спроса по Хиксу по правилу:

$$\vec{x}^H = \vec{x}^{SE} = \triangle\ \vec{x}^D + \triangle\ \vec{x}^{YE}$$

Семинар №7

Производственная функция фирмы и её примеры: Кобба-Дуглоса, линейная и Леонтьева

План

1. Понятие производственной функции фирмы, её основные свойства и три примера;

2. Основные характерстики производственной функции: предельные продукты факторов производства, эластичность выпуска по факторам производства, средние продукты факторов, изокванты производственной функции;

3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Приступаем к моделированию поведения фирмы при производстве благ (товар или услуга). Обозначим символом *y кол-во продукции (блага)*, которое производит фирма на заданном отрезке времени; в процессе производства этого блага фирма использует *факторы производства* и уровни этих факторов мы будем обозначать сиволоми: $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Пусть x_1-основной капитал средство производства, второй фаткор x_2 $-$ это кол-во живого труда, x_3-запасы, полуфабрикаты, x_n $-$ финансовый капитал.

В процессе выбора фирма использует технология f при помощи которой факторы производства трансформируются в уровень продукции y. Вот лаконичная запись такой трансформации:

$$y,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ f \tag{1}$$

$$y\ =\ f\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \tag{2}$$

Математическое выражение (2) называется *производственной функцией фирмы*.

Отметим основые **свойства** производственной функции:

1. При нулевых факторах производства, то и выпуск 0. $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

2. Производственная функция возрастает по каждому фактору производства $f\ \uparrow\ x_i$, т.е. $f\ \uparrow\ x_i\ \Leftrightarrow\ M_y(x_i)$. $M_y(x_i)-$предельное значение выпуска по i-ому фактору, т.е. это дополнительный выпуск продукции в ответ на дополнительную еденицу i-ого фактора.

3. С ростом уровня $x_i\uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i)\downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Приведем три примера производсвенный функций, удовлетворяющих в той или иной мере свостам производственной функции.

Пример 1. $y = f\left(x_1 \ (= \text{основной капитал}),\ x_2 \,(= \text{живой труд})\right).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \tag{4}$$

Производсвенная фукций (4) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Пример 2. Линейная проиводственная функция:

$$\begin{gathered} y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_1 > 0;\ a_2 > 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Пример 3. Производсвенная функция Леонтьева.

$$\begin{gathered} y = a_0 \min(x_1,\ x_2) \\ a_0 > 0 \end{gathered} \tag{6}$$

$\boxed{\text{ДЗ №1}}$ Проверить справедливость свойств производственной функции для (4), (5), (6).

Основные характерстики производсвенной функции Коббла-Дугласа.

$$y = 0.45 x_1^{0.5}\,(\text{млрд. долл.})\, x_2^{0.1}\,(\text{тыс. человек}) \tag{4'}$$

1. Предельный выпуск фирмы по правилу производсва: $M_y(x_i) \approx \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$(7). Также называют *предельным продуктом фактора* x_i.

Решим задачу. Определить уравнение предельного продукта $M_y(x_i)$ по первому фактору и рассчитать значние этого предельного продукта $x_1 = 6,\ x_2 = 17$:

$$M_y(x_i) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.45{\cdot}0.5{\cdot}x_1^{0.5-1}x_2^{0.1} = 0.45{\cdot}0.5\, x_1^{-0.5}x_2^{0.1} = 0.45{\cdot}0.5\, 6^{-0.5}17^{0.1} = 0.12 \tag{8}$$

Величина $M_y(x_i) = 0.12$ $-$это значение дополнительного выпуска продукции в ответ использование в процессе производства дополнительной еденицы совокупного капитала.

$\boxed{\text{ДЗ № 2}}$ Получить уравнение предельного продукта второго фактора и дать интерпритацию.

При помощи уранения (8) в $\boxed{\text{ДЗ № 1}}$ **можно проверить справедливость второго свойства проиводсвенной функции.**

Средний продукт фактора производства.

2. Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\dfrac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i) = \frac{y}{x_i} \tag{9}$$

Средний продукт фактора производсва - это кол-во выпуска продукции приходящаяся на одну единицу данного фактора.

Задача №2. Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта первого фактора и посчитать его значение применитльно уравнения (4').

$$A_y(x_1) \ = \frac{y}{x_1} = \frac{0.45 \cdot 6^{0.5} \cdot 17^{0.1}}{6} \ = 0.24 \tag{11}$$

У данной фирмы на одну единицу совокупного капитала приходится в среднем 0.24 млрд. продукции.

$\boxed{\text{ДЗ № 3}}$ Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта **второго** фактора и посчитать его значение применительно уравнения (4').

3. **Эластичность выпуска по факторам производства** расчитаывается по правилу (смотри занятие №2):

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Задача №3. Расчитать значение эластичности в рамках формулы (4') по формуле (11):

$$E_y(x_1) = 0.12 : 0.24 = 0.5$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_1. Следовательно коэффициент a_1 в уравнении (4') - это эластичность функции выпуска.

$\boxed{\text{ДЗ № 4}}$ Определить эластичность выпуска по второму фактору.

4. **Изокванты** заданного уровня y_0 экономисты называют *линию уровня функции,* т.е. множество различных комбинаций факторов производства при которых уровень выпуска продукции остаётся неизменным и равным заданной велечине y_0. Изокванту удобно изучать разрешив уравнение (13) относительно переменной например x_1, т.е. привратив переменную x_1 в функцию переменной x_2 зависящей, как от параметра.

Задача №4. Получить уравнение изокванты и построить график этой изокванты для функции (4') принимая значение $y_0 = 2$.

Решение. Аналогом изокванты является функция безразличия и мы можем воспользоваться домашней задачей № 3.

$$x_1 \ = \ \left(\frac{y}{a_0 \ \cdot x_2^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} \ = \ \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot x_2^{-\frac{a_2}{a_1}} \ (x_2 > 0)$$

Производственная функция с постоянной эластичностью замещения. Функция Соллоу или CES.

План

1. Уравнение CES функции и иследование её основных свойств.
2. Уравнение изоквант CES функции.
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии обсудили понятие производственной функции и рассмотрели три примера (Функция Кобба-Дугласа, функция Леонтьева и линейная).
На сегодняшнем мы рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \tag{1}$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \tag{2}$$

которая называется производственной функцией с постоянной эластичностью замещения. Можно показать, что обсуждённые на прошлом занятии функции получены из уравнения (1), как предельные значения по параметру ρ.
Изучим основные **свойства** CES функции:

☑ **Свойство 1.**

$$F_{CES}(0, 0) = 0 \tag{3}$$

Рассматривая уравнение (1) при $n = 2$, мы обнаружим, что в точке 0 функция (1) неопределена, то есть имеет особенность. Мы сейчас покажем, что в 0 CES функция имеет устранимую особенность это значит, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0^+ \\ x_2 \to 0^+}} F_{CES}(x_1, x_2) = 0 \tag{3'}$$

Перепишем уравнение (1):

$$y = \frac{a_0}{\left(\frac{a_1}{x_1^{\rho}} + \frac{a_2}{x_2^{\rho}}\right)^{-\frac{h}{\rho}}} \tag{1'}$$

Пусть в знаменателе уравнения (1') переменная x_1 стремится к 0^+, тогда $\frac{a_i}{x_i^{\rho}}$ стремится к ∞ и весь знаменатель следоваетельно стремится к ∞. Тогда вся дробь стремится к 0.Тогда

$$y = \begin{cases} a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}, \text{при } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание каждый проищведственный фактор необходим в том смысле, что при нулевом уровне какого-то из этих факторов, весь выпуск равен 0.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить, что в функции Коббла-Дугласа и Леонтьева, каждый фактор необходим. ? Так ли это в линейной функции.

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \tag{4}$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно прологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho} \ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_1 \cdot x^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Проверить предельное значение выпуска по второму фактору. А так же доказать **третье свойство** производсвенной функции. $M_y(x_i) \downarrow x_i \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$

Другими словами производсвенная функция выпукла вверх.

Итог: CES функция удовлетворяет основным требованиям производсвенных функций фирмы.

Уравнение изокванты

Вспомним понятие изокванты производственной функции так принято называть множество комбинаций значений факторов производства при которых уровень выпуска остаётся неизменным. Обозначим символом $y_0 \ = 2$. Тогда уравнение изокванты для производсвтенной функции имеет вид:

$$F_{CES}(x_1, x_2) = y_0 \tag{6}$$

Мы можем данное уравнение разрешить относительно велечины x_2, то есть найти:

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{6'}$$

Задача. Построить уравнение изокванты CES функции:

1. $y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}$
2. $\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) = \left(\dfrac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}}$
3. $x_2^{-\rho} = \dfrac{1}{a_2}\left(\left(\dfrac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)$

4. $x_2 = \left(\frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ (6'')

(6'') - *уравнение изокванты.* У изокванты имеются асимптоты.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Исследовать (6'') уравнение изокванты и найти её горизонтальную и вертикальную ассимптоты. Построить график изокванты при значениях:

$$y_0 = 2,\ a_0 = 0.45,\ a_1 = 0.5, a_2 = 0.1, \rho = h = 1$$

Семинар №9

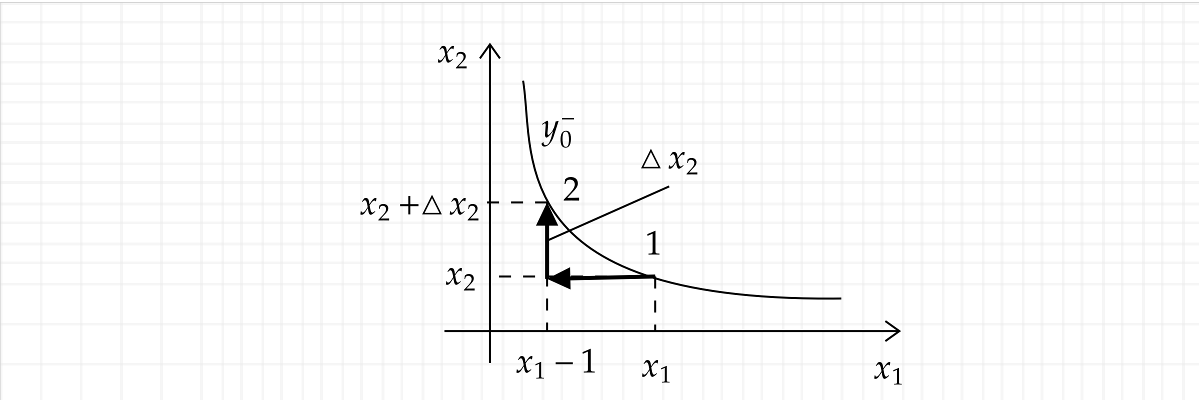
Предельные нормы и эластичность и замена факторов производства

План

1. Предельная норма технологического замещения факторов производства $MRTS_{ij}$
2. Эластичность замещения факторов производства σ_{ij}
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Опр. Пусть $y = F(x_1, x_2)$ – производственная функция фирмы

$$y_0^{-} = \{(x_1,\ x_2)|\ F(x_1, x_2) = y_0\} - (\text{изокванта производственной функции})$$



Предельной нормой технологического замещения фактора x_1 фактором x_2 называется такая дополнительная велечина $\triangle x_2$, которая компенсирует выбытия из строя еденицы фактора x_1. Принято обозначать $MRTS_{1,2} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} : \dfrac{\partial F}{\partial x_2}$.

Следствие. Пусть уравнение изкванты представленно в виде (4):

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{4}$$

Тогда

$$MRTS_{1,2} = -\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} \tag{5}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Обосновать формулу (5) (факультативно\ не обязательно)

Задача. Пусть моделью производсвтенной функции фирмы служит функция Кобба-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$$

Получить уравнение $MRTS_{1,2}$

Решение:

1. Записываем уравнение изокванты: $a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} = y_0$
2. Трансформируем к виду (4): $x_2 = \sqrt[\beta]{\dfrac{y_0}{a_0 \cdot x_1^{\alpha}}} = \left(\dfrac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ (4')
3. Вычисляем по правилу (5) предельную норму замещения $MRTS_{1,2}$.

$$-\frac{\partial x_2(x_1;y_0)}{\partial x_1} = -\left(-\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}$$

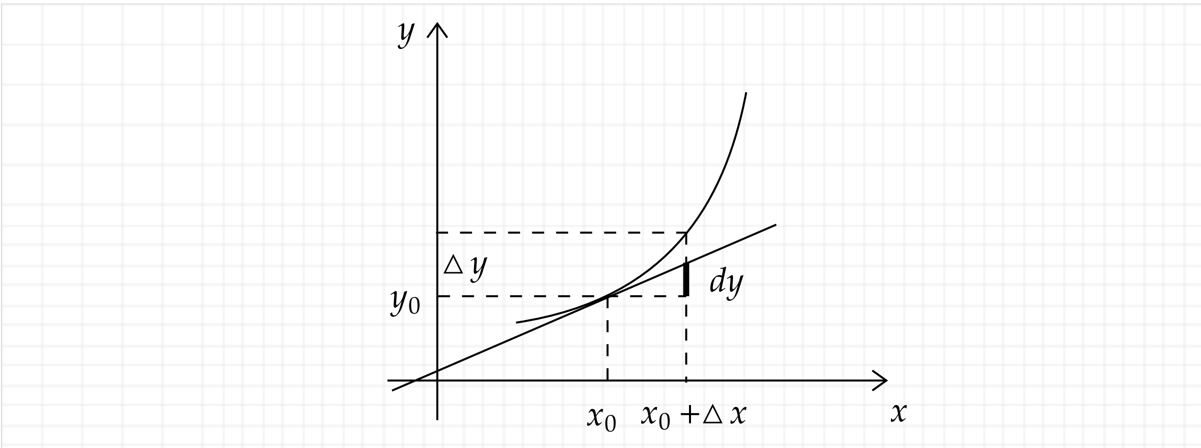
$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_2 = x_2(x_1;y_0))}{x_1} \tag{6}$$

ДЗ Расчитать значение предельной нормы замещения капитала трудом производственной фукции одной из американских с производственной функцией Кобба-Дугласа с параметрами из задачи выше $x_1 = 6$ по формуле (6).

ДЗ Пользуясь формулой (6) показать, что изменения предельной нормы технологического замещения на изокванте вычисляется по правилу:

$$\triangle MRTS_{1,2} \approx d\, MRTS_{1,2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1} \tag{7}$$

, где $\frac{\triangle x_1}{x_1}$ – отсительное изменение, которое парадило изменение предельной нормы замещения.



Итог. Предельная норма технологического замещения - это такое изменение фактора $\triangle x_2$, которое компенсирует выбытие из строя единицы первого фактора (смотри рисунок 1)

Эластичность замещения факторов производства σ_{ij}

Эластичностью замещение i-ого фактора j-ым называется относительное изменение на изокванте отношения факторов производства в ответ на относительное изменение предельной нормы технологического замещение на 1%; Вот математическое выражение данного определения:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} : \frac{d\, MRTS_{i,j}}{MRTS_{i,j}} \tag{8}$$

Задача. Вычислить эластичность замещения Кобба-Дугласа первого фактора вторым.

Решение:

1. Согласно формулы (8) мы сначала найдём числитель делимого, то есть абсолютное изменение отношения.

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \tag{9}$$

2. Находим дифференциал

$$\triangle\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \approx d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle\, x_1 \tag{10}$$

3.

$$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle\, x_1}{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle\, x_1}{x_1} \tag{11}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ С учётом выражений (6) и (7) выразить делитель правой и вычислить эластичность $\sigma_{1,2} - ?$

Итог: Эластичность замещения первого фактора вторым определяется по формуле (8) и имеет смысл относительного изменения на изокванте отношения второго фактора первому в ответ на относительно изменение на изокванте предельной нормы замещения на 1%.

Семинар №10

План

1. Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде;
2. $\boxed{\text{ДЗ}}$;

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1,\ldots,x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ x_1 \geqslant 0,\ \ldots,x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\underset{(\text{цена блага})}{p_0};\quad \underset{(\text{цены факторов производства})}{p_1,\ldots,p_n} \text{ – экзогенные переменные}$$

$$\underset{\text{уровни факторов пр–ва}}{(x_1,\ldots,x_n)} \text{ – эндогенная переменная}$$

Период к которому относится данная модель называется *долгосрочной*, если на уровни факторов производства не накладываются никакие ограничение (кроме ограничения неотрицательности), то есть фирма способная выбрать такие уровни этих факторов при которых её прибыль оказывается максимальной. Это оптимизационная модель с точки зрения экономики, а с точки зрения математики это задача на безусловный экстремум.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_0 \cdot \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - p_i = 0 \\ i = 1,\ \ldots,n \end{cases}$$

Искомые факторы уровня производства:

$$1)\ \vec{x}^* = \left(x_1^*,\ \ldots,x_n^*\right) = \vec{x}^*\left(p_0,\vec{p}\right) \qquad (5)$$

Эти уровни экономисты называют *спросом фирмы на уровень производства или локальным рыночным равновесием в долгосрочном периоде.*

Уровень оптимального выпуска фирмы:

$$2)\ q_* = F\left(x_1^*,\ \ldots,x_n^*\right) = q_*\left(p_0,\vec{p}\right) \qquad (6)$$

Велечина q_* называется *предложением фирмы.*

Оптимальный уровень доходности:

$$3)\ y_* = p_0 \cdot q_* = y_*\left(p_0,\vec{p}\right) \qquad (7)$$

Оптимальный уровень издержек:

$$4)\ c_* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = c_*\left(p_0,\vec{p}\right) \qquad (8)$$

Оптимальный предполагаемый уровень прибыли фирмы:

$$5)\ \pi_* = y_* - c_* = \pi_*\left(p_0,\vec{p}\right) \qquad (9)$$

Задача.

Пусть производственная функция фирмы, является функция двух основных факторов производсва

$$q = F(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta},\ a_0 = 4.5 \cdot 10^5;\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.1$$

Пусть $p_0 = 10^{-6}$млрд $\$; p_1 = 10\% = 0.1$. Рассчитаем цену живого труда $p_2 - ?$. Для этого нам потребуется зарплата одного работника $w_m = 2000\$$ в год $w_y = w_m \cdot 12$, тогда все зарплаты $\underset{p_2}{w} = 1000 \cdot w_y = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-9} = 24 \cdot 10^{-3} = 0.024$ млрд. $\$$. Следовательно все экзогенные переменные определены.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_0 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} - p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_0 \cdot \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0 \end{cases} \qquad (4')$$

Перенесём цены в правые части:

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} = \dfrac{p_1}{p_0} \\ \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} = \dfrac{p_2}{p_0} \end{cases} \qquad (4'')$$

Поделим в (4'') первое на второе:

$$\frac{\alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta}}{\beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha \cdot x_2}{\beta \cdot x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \qquad (11)$$

$$\text{Подставим}:$$

$$q = a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot \left(\frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \right)^{\beta} = \frac{p_1}{p_0} \qquad (12)$$

$$x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \qquad (13)$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

$$x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \qquad (14)$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2$.

Проанализировать в какой зависимости будут уровни x_1^*, x_2^* от изменений 1) рыночной цены блага $p_0 \uparrow$ 2) на рост цен факторов производства. Исходя из (13) и (14) оптимального уровня предложения фирмы и оптимального уровня издержек фирмы.

Вывод. Модель оптимальног поведения имеет вид (1) трансформация её к приведённой форме позволяет получить: 5), 6), 7), 8)

Семинар №11

Модель поведения фирмы на конкурентном рынке в краткосрочном периоде

План

1. Модель поведения фирмы в краткосрочном периоде (при ограничениях на факторы производства) на конкурентном рынке;
2. Использование функции "поиск решения" Excel для определения спроса фирмы на факторы производства;
3. ДЗ

На прошлом занятии обсудили модель поведения фирмы на рынке совершенной конкуренции в долгосрочном периоде. Так принято называть период, когда у фирмы нет ограничений на приобретение соответствующих уровней факторов (капитал, работники, оборудование) производства. В короткосрочном периоде такие ограничения часто присутствуют и тогда модель поведения фирмы в структурной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \pi = \underbrace{p_0 \cdot F(x_1,\dots,x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_m \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

π - прибыль, y - доход, c - издержки фирмы. Экзогенные переменные модели:

$$p_0; p_1, \dots, p_n; b_1, \cdots, b_m$$

Эдогенные переменные:

$$x_1, \dots, x_n$$

Ограничения на уровни факторов производства описываются m неравенствами, которые в частности могут принимать вид равенств.

Трансформация к приведённой формы модели осуществляется методом Лагранжа в резулитате следующих шагов:

Шаг 1.

$$Z = \pi + \sum_{j=1}^{m} l_j (b_j - f_j(x_1, \dots, x_n)) \tag{2}$$

l_j - множитель Лагранжа.

Шаг 2. Необходимое условия экстремума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial l_j} = 0 \\ i = 1, \dots, n; \ j = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{3}$$

Шаг 3. Система решается либо аналитически, либо численно. Решение этой системы:

$$\vec{x}^* = \left(x_1^*, \ \cdots, x_n^*\right) = \vec{x}^*(p_0, \vec{p}, \vec{b}) \tag{4}$$

называется *спросом фирмы на факторы производства в краткосрочном периоде* или *локальным рыночным равновесием в кратскострочном периоде*.

$$1)\ q_* = (\vec{x}_*); 2)\ y_* = p_0 \cdot q_*; 3)\ c_* = \sum p_i \cdot x_i^*; 4)\ \pi_* \tag{5}$$

Все величины (5) это функции экзогенных переменных модели.

Задача. Вернёмся к теме предшествующего занятия и конкретно к той задаче, которую начали решать на занятии и продолжили в домашнем задании. Пусть у данной фирмы нет времени на изменения уровня совокупного капитала и этот уровень фиксирован:

$$x_1 = x_1^o = 6 \text{ млрд } \$$$

Это обстоятельство означается, что моделью поведения данной фирмы является модель (1), где ограничения выражаются одним равенством:

$$f(x_1, x_2) = b_1 = x_1^o = 6 \text{ млрд } \$ \tag{6}$$

$f(x_1, x_2)$ - функция, которая задаёт ограничения. Тогда модель выглядит так:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta - (p_1 x_1 + p_2 x_2) \to \max \\ x_1 = x_1^o \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1'}$$

Трансформируем модель (1') методом Лагранжа:

$$Z = p_0 \cdot a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta - (p_1 x_1 + p_2 x_2) + l_1\left(x_1^o - x_1\right) \tag{2'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = p_0 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^\beta - p_1 - l_1 = 0; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} = p_0 \cdot a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot \beta \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial l_1} = x_1^o - x_1 = 0 \end{cases} \tag{3'}$$

Решаем эту систему методом подстановки:

$$x_1^* = x_1^o \tag{7}$$

подставлям во второе уравнение и из него находим x_2^*:

$$p_0 \cdot a_0 \cdot \left(x_1^o\right)^\alpha \cdot \beta \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0$$

$$x_2^* = x_2^*\left(p_0, p_1, p_2, x_1^o\right) \tag{8}$$

подставим (7) и (8) в первое уравнение и находим l_1:

$$l_1 = l_1\left(p_0, p_1, p_2, x_1^o\right) \tag{9}$$

Множитель Лагранжа имеет смысл *дополнительного уровня прибыли фирмы, возникающего в ответ на дополнительную единицу первого фактора* *производства.*

ДЗ Получить явный вид уравнений (8), (9) и рассчитать по этим уравнениям спрос фирмы, предложение, доход, издержеи и прибыль.

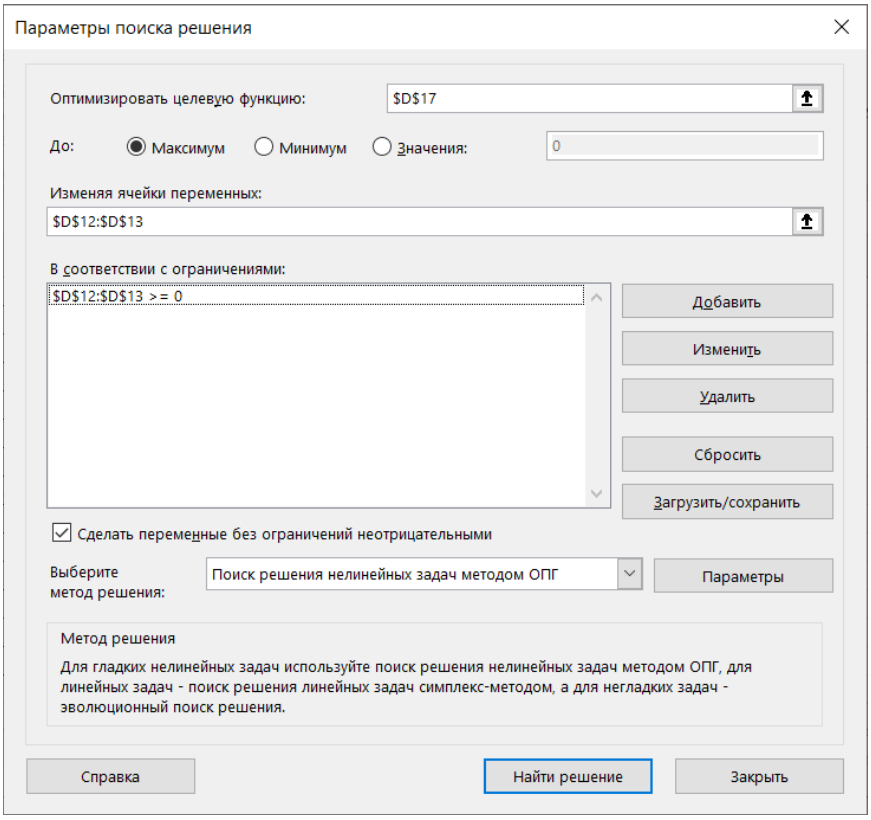
Рассчёт в долгосрочном периоде при помощи функции "поиск решения" Excel

Шаг 1. Сейчас мы проведём в Excel рассчёты по модели поведения фирмы в долгосрочном периоде занятие №10 ДЗ в домашнем задании следует провести рассчёты по модели (1') при помощи функции поиск решения.

Шаг 2. Подготовим данные коэффициенты производственной функции:

Исходные данные	
a0	450000
a	0.5
b	0.1
p0	0.000001
p1	0.1
p2	0.024
Искомые величины	
x1	21
x2	1
q	2062159
y	2.062159
c	2.124
π	-0.06184

Шаг 3. Введя ограничения мы подготовили всё необходимое для функции поиск решения:



Исходные данные	
a0	450000
a	0.5
b	0.1
p0	0.000001
p1	0.1
p2	0.024
Искомые величины	
x1	7.255392
x2	6.046153
q	1451078
y	1.451078
c	0.870647
π	0.580431

Семинар №12

Модели минимизации издержек фирмы в долгосрочном и краткосрочном периоде

План

1. Структурная форма модели минимазации издержек в долгосрочном периоде и рассчёт по модели при помощи функции "поиск решений";
2. Модель минимазция издержек в краткосрочном периоде
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии мы обсудили модель поведения фирмы на конкурентном рынке в основании которой заложена концепция максимизация прибыли. Бывают ситуации, когда фирма вынуждена формировать оптимальные уровни факторов приозводства при заданном объеме выпуска продукции. И тогда спрос фирмы на факторы производства в долгосрочном периоде подчиняется концепции минимизации издержек. Вот модель спроса фирмы в такой ситуации:

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ E(x_1, \dots, x_n) = q_0 \end{cases} \tag{1}$$

$$(q_0, p_1, \dots, p_n) - \text{экз. пер}$$

$$\begin{cases} \underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\text{спрос на факторы производства}}, c_*, y_*, \pi_* \\ y_* = p_0 \cdot q_0; \; \pi_* = y_* - c_*; \end{cases} - \text{энд. пер} \tag{2}$$

Модель (1) имеет туже аналитическую форму, что и модель Хикса и поэтому уровни факторов производства вычисленные по этой модели экономисты называют *спросом фирмы на факторы производства по Хиксу*

Замечание. Подчеркнем, что аналитический вид приведённой формы модели Хикса мы получили в процессе занятия № 5 на котором роль издержек играла функция расходов потребителя, а роль прибыли - принятый уровень полезности.

Задача. Вычислить спрос фирмы в долгосрочном периоде при ценах факторов производства, производственной функции из аудиторной задачи на занятии №12 и значение $q_0 = 1.451$ млн. .

Решение:

Открываем файл созданный на занятии 11. Символами $a_0,\ a,\ b$ - обозначены параметры модели Коблла-Дугласа. Добавим заданный уровень выпуска продукции $q_0 = 1451000.$

Исходные данные	
a0	450000
a	0.5
b	0.1
p0	0.000001
p1	0.1
p2	0.024
q0	1451000
Искомые величины	
x1	7.254445
x2	6.046831
q	1451000
y	1.451
c	0.870568
π	0.580431

Эти величины можно было рассчитать по приведённой форме модели, что и отмечено в замечании выше.

Модель минимизации издержек в кроткосрочном периоде

Модель минимизации издержек в кроткосрочном периоде базируется на том, что на ресурсы фирмы накладываются определённые ограничения, например, ввиде заданного уровня каких-то факторов производтсва и тогда модель (1) принимает вид:

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ F(x_1, \dots, x_n) = q_0; \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_m \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

При двух факторах производтсва модель (4) имеет вид:

$$\begin{cases} c = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ F(x_1, x_2) = q_0 \\ x_1 = b_1 = x_1^o \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{4'}$$

$$(q_0, p_1, \dots, p_n, b_1, \dots, b_n) - \text{экз. пер}$$
$$(x_1, \dots, x_n), y, c, \pi - \text{энд. пер}$$
$$\vec{x}^* = ()$$

Вычисленные по модели (4) уровни спроса экономисты называют *спросом по Хиксу в краткосрочном периоде или спрос по Хиксу.*

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Рассчитать с исп. Excel спрос по Хиксу в краткосрочном периоде используя функцию Кобба-Дугласса из предыдущей задачи и след. исходные данные:

$$a_1 = 450000 + 10 \cdot i$$
$$\alpha = a = 0.5 \ - 0.01 \cdot i$$
$$\beta = b = 0.1 + 0.01 \cdot i$$
$$p_0 = 10^{-6} + 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot i$$
$$p_1 = 0.1 + 0.01 \cdot i$$
$$p_2 = 0.024 + 0.01 \cdot i$$
$$q_0 = 14151000 - 100 \cdot i$$
$$b_1 = x_1^{(o)} = 6 + 0.1 \cdot i$$

Трансформация к приведённой форме осуществляется методом Лагранжа.

Шаг 1. Составляется функция Лагранжа

Шаг 2. Составляется необходимое условия экстремума функции Лагранжа

Шаг 3. Решается либо аналитически, либо численоо.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Для моделей (1), (4') составить функции Лагранжа и необходимое условие экстремума, решать не нужно

Семинар №13

Модель поведения монополиста в долгосрочном периоде

План

1. Функция спроса потребителей на нормальное благо и обратная функция спроса;
2. Производственная функция компании Microsoft и обратная функция спроса на её продукцию (благо). Модель поведения монополиста на рынке нормального блага в долгосрочном периоде;
3. ДЗ

Обратимся к моделям поведения потребителя Маршалла-Вальраса и отметим уравнение спроса потребителя на любое благо входящее в его спрос

$$x_i = \underbrace{d_i}_{=\frac{a_i}{a_1+a_2}} \cdot \frac{M}{p_i} \downarrow,\ i = 1,2 \qquad (1)$$

На том же занятии мы отметили следующее свойство потребителя:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{d_i M}{p_i^2} < 0 \qquad (2)$$

Это неравенство означает, что с ростом цены блага, спрос на него снижается. Такое благо называется *нормальным*. Экономисты подчёркивают, что практически все блага являются нормальными.

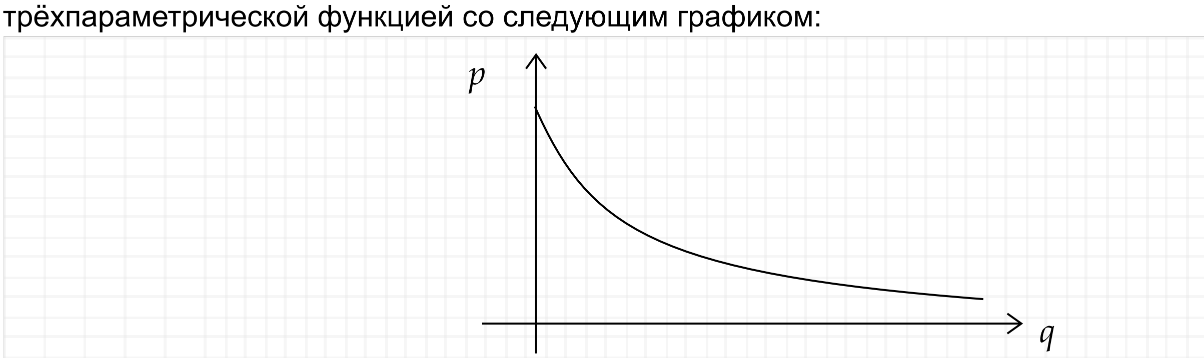
Вернёмся к выражения (1) и подчеркнём, что спрос является монотонной функцией цены, а это значит, что существует обратная функция:

$$p = p(x) = \frac{d_i \cdot M}{x_i} \qquad (3)$$

Ниже мы обозначим символом q спрос на нормальное благо на рынке с несовершенной конкуренцией и отметим две простейшие модели обратной функции спроса:

$$\begin{cases} p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0 \ (4.1) \\ p(q) = d_0 \cdot e^{d_1 \cdot q}; d_1 < 0 \ (4.2) \end{cases} \qquad (4)$$

ДЗ Вернёмся к обратной функции спроса (3) и обобщим эту функцию слелав её трёхпараметрической функцией со следующим графиком:



Вычислить экономический смысл d_1 в обеих моделях (4) обратной функции спроса.

Замечание. В моделе (4) (4.1) имеют следующие параметры:

$$(4.1)\begin{cases} d_0 = 0.8\cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25\cdot 10^{-15}; \end{cases}$$

$$(4.2)\begin{cases} d_0 = 1.1\cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -3.4\cdot 10^{-9}; \end{cases}$$

В моделях (4) уровень спроса это количество изделий которые предоставляют на рынок, а цена p выражается в млрд. $\$$.

Вывод: на рынке нормально блага уровень спроса находится в обратной зависимости от цены блага и с ростом цены снижается.

Производственная функция компании Microsoft и модель поведения монополиста на рынке нормального блага в долгосрочном периоде

Производственная функция Кобба-Дугласа компании Microsoft имеет следующие параметры:

$$\begin{gathered} q = a_0 K^{\alpha}\cdot L^{\beta} \\ K - \text{уровень основного капитала} \\ L - \text{кол} - \text{во работающих} \\ a_0 = 2.2\cdot 10^6 \\ \alpha = 0.3 \\ \beta = 0.8 \\ p_1 = 0.015 = 1.5\% \\ p_2 = 0.048\ \text{млрд.} \end{gathered} \tag{5}$$

Монополист, как любая фирма при определении уровней факторов производства стремится получить максимальную прибыль и поэтому модель поведения монополиста имеет следующую структурную форму:

$$\begin{cases} \pi = p(q)\cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \\ q = F(x_1,\ \dots,x_n) \\ x_1 \geqslant 0,\ \dots,\ x_n \geqslant 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$p_1,\ \dots,p_n - \text{экз}$$

$$x_1,\ \dots,x_n,\pi,q,y,c - \text{энд.}$$

Модель (6) трансформируется к приведённой форме методом Лагранжа.

Приведенная форма является функцией

$$\vec{x}^* = \left(x^*,\ \dots,x_n^*\right) = \vec{x}^*(\vec{p}) \tag{7}$$

$$q_* = F\left(x_1^*,\ \dots,x_n^*\right) = q_*(\vec{p}) \tag{8}$$

$$y_* = p(q_*)\cdot q_* = y_*(\vec{p}) \tag{9}$$

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = c_*(\vec{p}) \tag{10}$$

$$\pi_* = y_* - c_* = \pi_*(\vec{p}) \tag{11}$$

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Полагая, что производственная функция монополистов является функцией двух факторов (капитал, труд) осуществить первые два шага метода Лагранжа трансформации модели (6) к приведённой форме.

Задача. Используя, производственную функцию компании Microsoft и выбираем модель (4.2) обратной функции спроса рассчитать спрос монополиста на уровни основного капитала и затрат живого труда. Так же рассчитать уровень предложения, как функции цены блага производства доход, издержки и прибыль. Рассчёты выполнить при помощи функции Excel.

Решение:

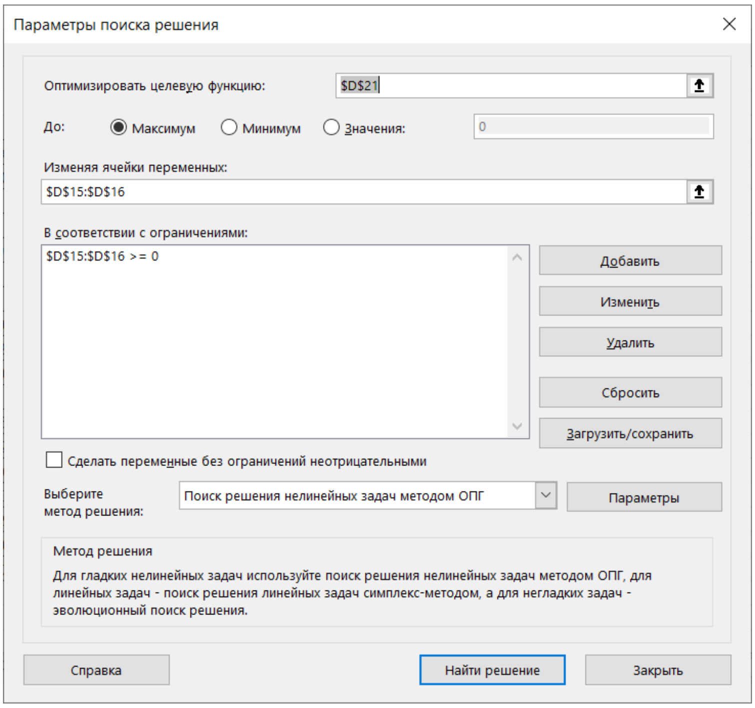
Шаг 1. Заносим исходные данные:

Исходные данные	
a0	2200000
a	0.3
b	0.8
p0	0.000001
p1	0.015
p2	0.048
d0	0.0000011
d1	-3.4E-09
q0	1451000

Шаг 2. Искомые величины:

Искомые величины	
x1	7.254445439
x2	6.04683064
q	16820007.71
p(q)	1.03886E-06
y	17.47360168
c	0.399064552
π	17.07453712

Шаг 3. Решаем систему:



Шаг 3. Используем функцию "поиск решения":

Искомые величины	
x1	94.28315553
x2	78.56922275
q	282458650
p(q)	4.21031E-07
y	118.9237984
c	5.185570025
π	113.7382283

Подчеркнём, что расчёты по модели поведения монополиста выполняются при заданных моделях обратной функции спроса и значит чем точнее модели проищволственной функции и обратной к ней тем реалистичнее окажутся оптимальные уровни спроса монополиста на факторы производства.

ДЗ Осуществить расчёты модели (5) привлекая линейную обратную функцию спроса (4.1).

Семинар №14
Модель поведения монополиста в краткосрочном периоде
План

1. Рассчёт по модели поведения монополиста в краткосрочном периоде;
2. $\boxed{\text{ДЗ}}$

На прошлом занятии и на прошлой лекции мы обсудили модель поведения монополиста на рынке нормального блага в долгосрочном периоде. Провели расчёты привлекая две простейшие модели обратной функции спроса потребителей на благо поставляемое на рынок монополистами.

Модель поведения монополиста в краткосрочном периоде включает в себя предположение, что на уровни факторов производства монополиста наложены ограничения и одно из которых, как правило состоит в заданном уровне основного капитала компании

$$\pi = p(q) \cdot q - \sum_{1}^{n} p_i \cdot x_i \to \max$$
$$q = F(x_1, \dots x_n)$$
$$f_j(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_j$$
$$x_i \geqslant 0; j = 1, 2, \dots, m$$

Спрос монополиста на основые факторы производства $\vec{x}^* = \vec{x}^*(\vec{p}, \vec{b})$ называется условным и является функцией цен факторов производства и заданный уровень цен на эти факторы. При помощи производственной функции монолиста вычисляется уровень предложения блага монополиста $q^* = F\left(\vec{x}^*\right) = q^*(\vec{p}, \vec{b})$ (монополист лишён кривой предложения).

Задача. При помощи функции Excel найти спрос компании Microsoft при заданном уровне. Её основного капитала в 70 млрд. долларов. Уравнение производственной функции Microsoft и параметры двух моделей её обратной функции спроса принять такими же, как и на предыдущем занятии.

Решение:

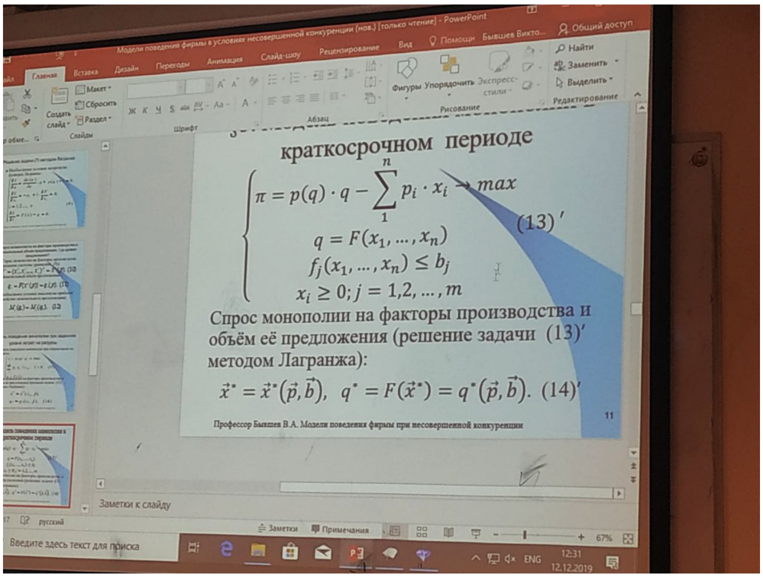
Открываем файл модель поведения фирмы и переходим на лист "Монополист".

Исходные данные	
a0	2200000
a	0.3
b	0.8
p0	0.000001
p1	0.015
p2	0.048
d0	0.0000011
d1	-3.4E-09

d_0 – коэффициент при экспонинциальной функции спроса. d_1 – второй коэффициент обратной фукнции спроса.

К исходным данным мы добавляем ограничение на основной капитал $b_1 = x_1^0 = 70$ млрд. \$.

Введём искомые данные.



$\boxed{\text{ДЗ}}$ Выяснить экономический смысл множителей Лагранжа. Провести расчёт привлекая линейну модель обратной функции спроса (4.1).

Семинар №15

Олигопольный рынок и модедь Курно поведения олигополии

План

1. Олигопольный рынок нормального блага и доход олигополии;
2. Модель Курно поведения олигополии;
3. $\boxed{\text{ДЗ}}$

Олигопольным рынком некоторого нормального блага называют рынок который контролируют небольшое число фирм, поставляющих идентичные или близкие по свойствам блага.

Предполодение №1. Мы полагаем, что общий уровень предложения блага равен сумме:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \tag{1}$$

фирм поставляющих это благо на данный рынок, причём количество n этих фирм небольшое.

Предполодение №2. Предполагается, что данное благо является нормальным и это значит, что цена блага на рынке является убывающей функцией его предложения. В отличие от монопольного рынка на формирование рыночной цены оказывают воздействие уровни предложения всех фирм.

$$p(q) \downarrow q$$
$$\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2}$$

Предполодение №3. Доход одной из олигополий вычисляется по правилу:

$$y_i = p\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right) \cdot q_i \tag{3}$$

-это значит, что на доход воздействуют все фирмы на этом рынке.

Модель олигополии Курно

Обратная функция спроса является линейной функцией

$$1)\ p(q) = d_0 + d_1 \cdot q; d_1 < 0 \tag{4}$$
$$2)\ c_i = b_i + m_i \cdot q_i \tag{5}$$

b_i – потсоянные издержки, m_i – имеет смысл предельных издержек, второе слагаемое $m_i \cdot q_i$ именуются переменными издержками.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Вычислить экономический смысл коэффициента m_i.

Структруная форма

$$\begin{cases} \pi_i = p(q) \cdot q - c_i \to \max \\ q = q_1 + \ldots + q_n \\ i = 1, 2, \ \ldots, n \end{cases} \tag{6}$$

b_i, m_i, d_0, d_1 – экзогенные переменные

$(q_1, \ \ldots, q_n), (y_1, \ \ldots, y_n), (c_1, \ \ldots, c_n), (\pi_1, \ \ldots, \pi_n)$ – эндогенные переменные

Необходимое условие прибыли каждой фирмы имеет вид (7):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \quad (7) \\ i = 1, 2, \dots, n \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} = \underset{\substack{1 \text{ при } i=j \\ 0 \text{ при } i \neq j}}{\delta_{ij}} \quad (8) \end{cases}$$

В остновании этого необходимого условия лежит предпосылка №4 об отсутствии сговора.
Необходимое условие экстремума (7 - 8) имеют вид системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $q_1, q_2, \dots, q_n$.
Задача №1. Пусть олигопольный рынок контролируют 2 фирмы $n = 2$. Обратная функция спроса имеет следующие коэффициенты

$$\begin{cases} d_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25 \cdot 10^{-15}; \end{cases}$$

Функция издержек олигополистов имеют следующие коэффициенты:

$$b_1 = 0.5;\ m_1 = 2.1 \cdot 10^{-8};$$
$$b_2 = 0.3;\ m_2 = 5.9 \cdot 10^{-8};$$

Требуется по модели Курно рассчитать:

1. Оптимальное для олигополистов уровня монополистов фирмы $\left(q_1^*, q_2^*\right)$
2. Уровни дохода $\left(y_1^*, y_2^*\right)$
3. Оптимальные уровни издержек $\left(c_1^*, c_2^*\right)$
4. Оптимальные уровни прибыли $\left(\pi_1^*, \pi_2^*\right)$

Замечание. В той части в которой требуется выполнить в ДЗ принять следующие коэффициенты функции издержек используя номер по журналу:

$$b_i(k) = b_i + 0.1 \cdot k; m_1(k) = m_1 + 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$$
номер по журналу $m_2(k) = m_2 - 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$

Запишем уравнение прибыли каждой фирмы:

$$\pi_1 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1)$$
$$\pi_2 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2)$$

Формируем необходимое условие прибыли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_1}}_{1} \cdot q_1 + \underbrace{p(q)}_{d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_1}{\partial q_1}}^{=1} - m_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_2}}_{1} \cdot q_2 + \underbrace{p(q)}_{d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_2}{\partial q_2}}^{=1} - m_2 = 0 \end{cases} \quad (7')$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в (7') получим эти уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot q_1 + a_{1,2} \cdot q_2 = a_{1,0} \\ a_{2,1} \cdot q_1 + a_{2,2} \cdot q_2 = a_{2,0} \end{cases} \quad (7'')$$

Система решается методом Гаусса.

$\boxed{\text{ДЗ}}$ Найти коэффициенты в системе (7'') рассчитать подставляя свои данные эндогенные перменные.

Микроэкономика

Домашняя работа №2 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Вычислить предельное значение эндогенных переменных m и n по экзогенной переменной M и дать трактовку $\triangle m$ и $\triangle n$.

Решение:

Для начала предлагаю вычислить точное предельное значение эндогенных переменных m и n по экзогенной переменной M. Для этого воспользуемся следующими формулами:

$$\triangle m = m(M + \triangle M(=1), c, r) - m(M, c, r) \quad (1)$$

$$\triangle n = n(M + \triangle M(=1), c, r) - n(M, c, r) \quad (2)$$

Перепишем эти форму в другом виде:

$$\triangle m = \sqrt{\frac{2c(M + \triangle M)}{r}} - \sqrt{\frac{2cM}{r}} \quad (1')$$

$$\triangle n = \sqrt{\frac{r(M + \triangle M)}{2c}} - \sqrt{\frac{rM}{2c}} \quad (2')$$

Воспользуемся формулами (1') и (2'), подставив в них значения $M = 52,\ c = 0.05,\ r = 0.07$.

$$\triangle m = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.05 \cdot 53}{0.07}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 0.05 \cdot 52}{0.07}} = 0.08248$$

$$\triangle n = \sqrt{\frac{0.07 \cdot 53}{2 \cdot 0.07}} - \sqrt{\frac{0.07 \cdot 52}{2 \cdot 0.07}} = 0.04879$$

Теперь вычислим предельные значения использую дифференциал от функций m и n по M и подставим экзогенные переменные $(M,\ c,\ r)$:

$$\frac{\partial m}{\partial M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2c}{r} \cdot \sqrt{\frac{r}{2cM}} = \sqrt{\frac{c}{2rM}} = \sqrt{\frac{0.05}{2 \cdot 0.07 \cdot 52}} = 0.828$$

$$\frac{\partial n}{\partial M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2c} \cdot \sqrt{\frac{2c}{rM}} = \sqrt{\frac{r}{8cM}} = \sqrt{\frac{0.07}{8 \cdot 0.05 \cdot 52}} = 0.058$$

Дадим *трактовку* полученных результатов:

$\triangle m -$ предельный остаток денежных средств на счёте в момент его пополнения по требуемому уровню денежных средств.

$\triangle n -$ предельное количество пополнений счёта в течение года по требуемому уровню денежных средств.

Задача №2. Пусть транзакционные издержки (c) возрастают на 2% во сколько в относительной мере $(\%)$ увеличится велечина m.

Решения:

Для решения поставленной задачи нам понадобится понятие эластичности.

Значения эластичности - это велечины, которые связывают <u>относительные</u> изменения эндогенных переменных в ответ на заданные <u>относительные</u> изменения экзогенных переменных.

Запишем определение эластичности в виде следующей формулы

$$E_m(c) = \frac{\triangle m}{\triangle c} : \frac{m}{c} = \left[\triangle m = \frac{\partial m}{\partial c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2M}{r} \sqrt{\frac{r}{2cM}} = \sqrt{\frac{M}{2cr}}; \frac{m}{c} = \sqrt{\frac{2M}{cr}} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{M}{2cr}} \triangle c : \sqrt{\frac{2M}{cr}} = \frac{\triangle c}{2} = 1$$

Следовательно, $E_m(c)$ в нашей задаче имеет следующее значение: относительное изменение величины m в ответ на относительное изменение величины c на 2%.

Микроэкономика

Домашняя работа №3 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Пусть в следующей моделе (уравнение Бернулли):

$$\begin{cases} u(x_1,\ x_2) \ = \ a_1 \ln x_1 \ + \ a_2 \ln x_2 \\ a_1 > 0,\ a_2 > 0 \end{cases}$$

$a_1 \ = \ 0.1 \ + \ 0.02\, i,\ a_2 \ = \ 0.2 \ + \ 0.02i,\ x_1 \ = \ 2,\ x_2 \ = \ 0.5$, где $i -$ это номер по списку. В моём случае $i \ = \ 1$. Вычислить полезность набора и предельную полезность первого блага.

Решение:

Для начала вычислим значение коэффициентов $a_1,\ a_2$:

$$a_1 \ = \ 0.1 \ + \ 0.02\, i \ = 0.1 \ + \ 0.02 \ = 0.12$$

$$a_2 \ = \ 0.2 \ + \ 0.02i \ = \ 0.2 \ + \ 0.02 \ = 0.22$$

Тогда подсавив значение в уравнение Бернулли вычислим *полезность набора*:

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ a_1 \ln x_1 \ + \ a_2 \ln x_2 \ = 0.12 \ln 2 \ + 0.22 \ln 0.5 = -0.069315$$

Для вычисления *предельной полезности первого блага* воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1} = \frac{0.12}{2} = 0.06$$

Задача №2. Построить график прямой безразличия для логорифма Бернулли:

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ a_1 \ln x_1 \ + \ a_2 \ln x_2$$

по второй переменной принимая значения агрументов:

$$a_1 \ = \ 0.1 \ + \ 0.02\, i \ = 0.1 \ + \ 0.02 \ = 0.12$$

$$a_2 \ = \ 0.2 \ + \ 0.02i \ = \ 0.2 \ + \ 0.02 \ = 0.22$$

Выполним следующие преобразования:

1) $a_1 \ln x_1 \ + \ a_2 \ln x_2 \ = \ u_0$

2) $\ln\left(x_1^{a_1} \ \cdot \ x_2^{a_2}\right) \ = \ u_0$

3) Теперь воспользуемся определением логорифма $x_1^{a_1} \ \cdot \ x_2^{a_2} \ = \ e^{u_0}$

4) $x_2 \ = \ e^{\frac{u_0}{a_2}} \ \cdot \ x_1^{-\frac{a_1}{a_2}} \ = \ K_0 \ \cdot \ x_1^{-\frac{a_1}{a_2}}$

5) Подставим значение аргументов a_1, a_2: $x_2 \ = K_0 \ \cdot \ x_1^{-\frac{0.12}{0.22}}$

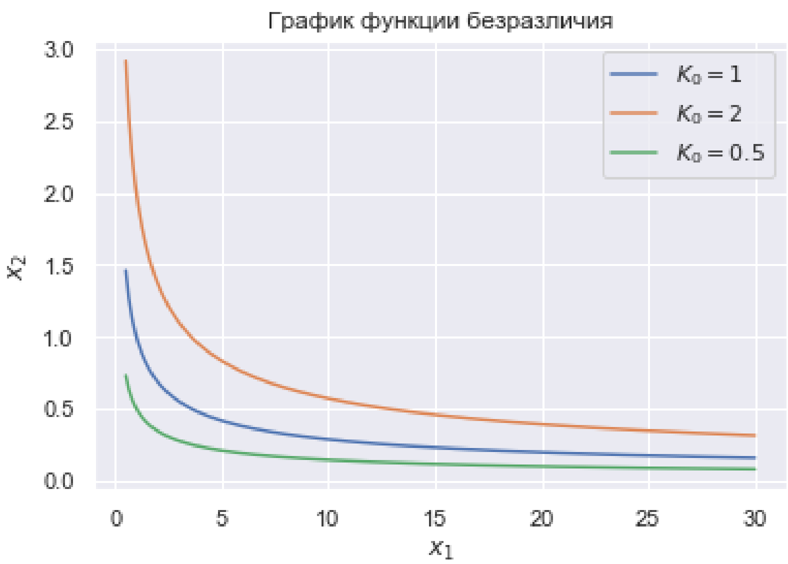
Воспользуемся Python 3 и постпроим график функции при $K_0 \ = 1, 2, 0.5$:

```
# библиотеки
import pandas as pd
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
sns.set(style="darkgrid")

```

```
# обозначим аргументы
a1 = 0.12
a2 = 0.22
K0 = [1, 2, 0.5]
# 200 значений x1 от 0.5 до 30 с равными интервалами
x1 = np.linspace(0.5, 30, 200)
# K0 = 1
plt.plot(x1, K0[0]*x1**(-a1/a2), label = r"$K_0 = 1$")
# K0 = 2
plt.plot(x1, K0[1]*x1**(-a1/a2), label = r"$K_0 = 2$")
# K0 = 0.5
plt.plot(x1, K0[2]*x1**(-a1/a2), label = r"$K_0 = 0.5$")
plt.xlabel(r"$x_1$")
plt.ylabel(r"$x_2$")
plt.title('График функции безразличия')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show() # отображение
```

Результатом работы программы будет следующий график:

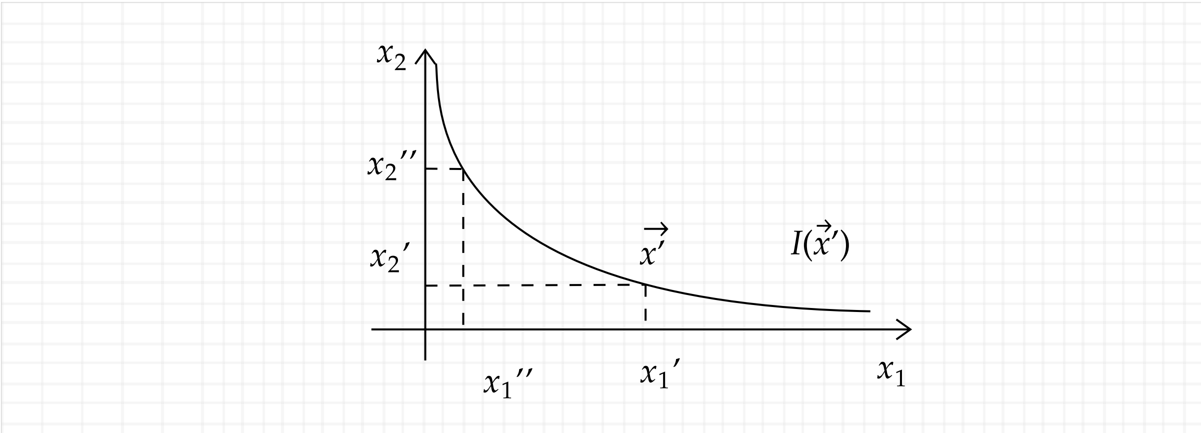


Задача №3. В безразличном наборе $\vec{x}$, один из наборов больше на $\triangle x_2$ чем другой, можно показать, что они связаны так:

$$\triangle x_2{}' = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \triangle x_1{}' = MRS_{1,2} \triangle x_1{}'$$

Решение:

Построим график функции безразличия:



При движении вдоль прямой безразличия совокупная полезность остаётся неизменной. Дополнительная полезность, приобретаемая или теряемая потребителем, есть ни что иное как предельная полезность рассматриваемых товаров.

Таким образом получается:

$$\triangle x_2' M_u(x_2) = \triangle x_1' M_u(x_1)$$

то есть:

$$\triangle x_2' = \frac{M_u(x_1)}{M_u(x_2)} \triangle x_1' = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \triangle x_1' = MRS_{1,\,2} \ \triangle x_1' \ \blacksquare$$

Задача №4. Вычислить предельную норму замещения с данными из задачи с коэффициентами второго блага первым для неоклассической функции полезности:

$$u(x_1,\ x_2) \ = \ a_0 \ \cdot x_1^{\ a_1} \ \cdot \ x_2^{\ a_2}$$

Воспользуемся формулой для вычисления предельной нормы замещения:

$$MRS_{2,\,1} \ = \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

Вычислим производные функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_0 \cdot a_1 x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{\ a_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_0 \cdot a_2 x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{\ a_1}$$

Подставим в формулу $MRS_{2,1}$ получим:

$$MRS_{2,\,1} \ = \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a_0 \cdot a_2 x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{\ a_1}}{a_0 \cdot a_1 x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{\ a_2}} = \frac{a_2 x_1}{a_1 x_2} = 7.33$$

Микроэкономика

Домашняя работа №4 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Рассчитать спрос потребителя по модели Маршала-Вальраса принимая в качестве функции полезности *неоклассическую* функцию:

$$u = a_0\ (a_0 = 1) \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$

Параметры этой функции и значения переменных принять такими же как в аудиторных задачах.

Решение:

Для начала в качестве напоминания приведём определение модели Маршала-Вальраса. **Суть** этой модели следующая: потребитель приобретает такой набор благ $\vec{x}^* = \left(x_1^*, \ \dots, \ x_n^*\right)$, который с одной стороны ему максимально полез, а с другой стороны по карману. Математическая запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} u = u(x_1, \ \dots, \ x_n) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \\ x_1 \ge 0, \ \dots, \ x_n \ge 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы расчитать спрос потребителя необходимо трансформировать модель к приведённой форме методом Лагранжа:

$$L = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} + l(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} - p_1 l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} - p_2 l = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1}$$

Делаем подстановку во второе уравнение:

$$a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} - p_2 \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1} = 0$$

$$\frac{a_2 x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} p_1}{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} p_2} = 1 \Rightarrow \frac{a_2 x_1 p_1}{a_1 x_2 p_2} = 1 \Rightarrow x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2}$$

Подствалям в третье уравнение:

$$M-\frac{a_1x_2p_2}{a_2}-p_2x_2=0\Rightarrow M-p_2x_2\left(\frac{a_1+a_2}{a_2}\right)=0$$

$$\frac{Ma_2}{a_1+a_2}=p_2x_2\Rightarrow\boxed{x_2^*=\frac{Ma_2}{(a_1+a_2)p_2}}$$

Теперь вычислим x_1^*:

$$x_1p_1=\frac{a_1x_2p_2}{a_2}\Rightarrow x_1=\frac{a_1x_2p_2}{a_2p_1}\Rightarrow x_1^*=\frac{a_1\frac{Ma_2}{(a_1+a_2)p_2}p_2}{a_2p_1}=\boxed{\frac{a_1M}{(a_1+a_2)p_1}}$$

Подставим значения в x_1^*, x_2^*:

$$x_1^*=\frac{a_1M}{(a_1+a_2)p_1}=\frac{0.1\cdot 200}{0.3\cdot 50}=1.33$$

$$x_2^*=\frac{Ma_2}{(a_1+a_2)p_2}=\frac{200\cdot 0.2}{(0.1\ +0.2)\cdot 75}=1.77$$

Расчитаем функцию полезности:

$$u\ =\ x_1^{a_1}\ \cdot\ x_2^{a_2}\ =1.33^{0.1}\cdot 1.77^{0.2}=1.15340...$$

Задача №2. Показать, что и для неоклассической функции свойство однородности сохраняется.

Решение:

Требуется показать, что спрос потребителя остаётся неизменным, если его бюджет и цены благ изменяются одновременно в некоторое кол-во k.

Для этого воспользуемся ранее полученными результами и увериличим p и M в k раз:

$$x_1^*=\frac{a_1M}{(a_1+a_2)p_1}\ \Rightarrow\frac{a_1M\cdot k}{(a_1+a_2)p_1\cdot k}=\frac{a_1M}{(a_1+a_2)p_1}$$

$$x_2^*=\frac{Ma_2}{(a_1+a_2)p_2}\ \Rightarrow\frac{a_2M\cdot k}{(a_1+a_2)p_2\cdot k}=\frac{a_2M}{(a_1+a_2)p_2}\ \blacksquare$$

Задача №3. Можно показать, что предельное значение u^* по бюджету потребителя M в точности равно множителю Лагранжа.

Решение:

Вычислим производую от неоклассической функции потребления по бюджету M:

$$u\ =a_1\ \cdot\ \ln x_1\ +\ a_2\ \cdot\ \ln x_2$$

$$u^*=a_1\ \cdot\ln\left(\frac{a_1\ M}{(a_1+a_2)p_1}\right)\ +a_2\cdot\ \ln\left(\frac{a_2\ M}{(a_1+a_2)p_2}\right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M}=\frac{a_1}{M}+\frac{a_2}{M}=\frac{a_1\ +\ a_2}{M}\ =\frac{0.3}{200}=0.0015\ \blacksquare$$

Трактовка множителя l следующая: это дополнительная полезность по Маршалу-Вальрасу, которая возникает в ответ на дополнительную еденичу денежных средств

M.

Микроэкономика

Домашняя работа №5 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 + l\dfrac{a_1}{x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 + l\dfrac{a_2}{x_2} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = u_0 - a_1 \cdot \ln x_1 - a_2 \cdot \ln x_2 = 0; \end{cases}$$

Решить систему и доказать, что решение этой системы методом подстановки имеет следующий вид:

$$x_1^* = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

$$x_2^* = \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}}$$

$$l^* = \alpha \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Рассчитать численно значение спроса по Хиксу и параметры выше.

Решение:

Напомним суть модели Хикса. В моделе Хикса заложенно следующее утверждение: потребитель выбирает такой набор благ, который с одной стороны имеет наименьшую *стоимость*, а с другой стороны предоставляет потребителю *заданные уровень полезности*.

Перейдём непосредственно к решению задачи.

Выразим множитель Лагранжа l:

$$l = -\frac{p_1 x_1}{a_1}$$

$$l = -\frac{p_2 x_2}{a_2}$$

Приравняем:

$$\frac{p_1 x_1}{a_1} = \frac{p_2 x_2}{a_2}$$

$$x_1 = \frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1}$$

Подставим в третье уравнение:

$$u_0 - a_1 \cdot \ln\frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1} - a_2 \cdot \ln x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_0 - a_1 \cdot \left(\ln \frac{p_2 a_1}{a_2 p_1} + \ln x_2\right) - a_2 \cdot \ln x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_0 - a_1 \ln \frac{p_2 a_1}{a_2 p_1} - \ln x_2 (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_2 = \frac{u_0 - a_1 \ln \frac{p_2 a_1}{a_2 p_1}}{a_1 + a_2} = \frac{u_0}{a_1 + a_2} - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\left(\ln p_2 + \ln \frac{a_1}{a_2} - \ln p_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_2 = \frac{u_0}{a_1 + a_2} - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \ln p_2 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \ln p_1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \ln \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow$$

$$x_2^* = \boxed{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}} = \gamma \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{\sum a_i}}$$

Найдём x_1^*:

$$x_1^* = \frac{p_2 x_2 a_1}{a_2 p_1} = \frac{p_2 a_1}{a_2 p_1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} =$$

$$= \boxed{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1 + a_2}}} = \beta \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Найдём множитель Лагранжа l:

$$l^* = -\frac{p_2 x_2}{a_2} = -\frac{p_2}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} =$$

$$= \boxed{-a_2^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot a_1^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}}} =$$

$$= \alpha \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \blacksquare$$

Вычислим численно:

$$x_1^* = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1 + a_2}} = 1.31637...$$

$$x_2^* = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} = 1.75516...$$

$$l^* = -a_2^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot a_1^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = -76.9818...$$

Задача №2.1. Убедиться в правильности функциии рассходов потребителя:

$$M^* = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

Решение:

Подставим в следующую формулу найденные значения x_1^*, x_2^*:

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{-\frac{a_2}{a_1+a_2}} +$$

$$+p_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} =$$

$$= \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}}\right) \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}} \blacksquare$$

Задача №2.2. Проверить справедливость уравнения

$$M^* = \psi \cdot e^{\frac{u_0}{\sum a_i}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{\sum a_i}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{\sum a_i}}$$

рассчитать M^* и сравнить полученное значение со значением $M_0 = 200$ руб..

Решение:

$$M^* = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1+a_2}}\right) \cdot e^{\frac{u_0}{a_1+a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot p_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} = [Python\ 3] = 197.45...$$

Задача №3. Показать, что $M^* \uparrow p_i$.

Решение: Для того, чтобы показать, что $M^* \uparrow p_i$ необходимо:

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i} > 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i^2} < 0$$

Вычислим производные:

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i} = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \right) e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \frac{a_1}{a_1 + a_2} p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2} - 1} > 0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial p_i^2} = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{-\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \right) e^{\frac{u_0}{a_1 + a_2}} \cdot p_2^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} \underset{< 0}{\frac{-a_1 a_2}{a_1 + a_2}} p_1^{\frac{a_1}{a_1 + a_2} - 2} < 0 \blacksquare$$

Микроэкономика

Домашняя работа №6 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задание №1. Посчитать до конца:

$$\triangle \vec{x}^{D} = \triangle \vec{x}^{GE} = \frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \begin{pmatrix} -0.33 \cdot \dfrac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & -0.67 \cdot \dfrac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle x_1^D \\ \triangle x_2^D \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\triangle \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} -0.33 \cdot \dfrac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & -0.67 \cdot \dfrac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.0264 & 0 \\ 0 & -0.0238 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1191 \end{pmatrix}$$

Задание №2. Вычисляем вычисление спроса по Хиксу по правилу:

$$\triangle \vec{x}^{H} = \triangle \vec{x}^{SE} = \triangle \vec{x}^{D} + \triangle \vec{x}^{YE}$$

Решение. В прошлой задаче мы вычислили $\triangle \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1191 \end{pmatrix}$. Рассчитаем $\triangle \vec{x}^{YE}$ по формуле:

$$\triangle \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^{D}}{\partial M} \cdot {\vec{x}^{D}}^{T} \cdot \triangle \vec{p}$$

$$\triangle \vec{x}^{YE} = \begin{pmatrix} \dfrac{0.33}{p_1} \\ \dfrac{0.67}{p_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.3 & 1.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{0.33}{50} \\ \dfrac{0.67}{75} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.3 & 1.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0.00858 & 0.01188 \\ 0.01161 & 0.01608 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0594 \\ 0.0804 \end{pmatrix}$$

Таким образом $\vec{x}^{SE}$:

$$\triangle \vec{x}^{SE} = \triangle \vec{x}^{D} + \triangle \vec{x}^{YE} = \triangle \vec{x}^{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1191 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0594 \\ 0.0804 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0594 \\ -0.0387 \end{pmatrix}$$

Задача №3. Проверить справедливость $\dfrac{\partial M}{\partial p_j} = x_j^H = x_j^D$ в условиях домашней задачи.

Решение. Возьмём производнык по p_1 и p_2 от $M = p_1 x_1^H + p_2 x_2^H$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial p_1} = x_1^H \\ \dfrac{\partial M}{\partial p_2} = x_2^H \end{cases}$$

Вспомним, что $\vec{x}^H = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^D = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.8 \end{pmatrix}$. Получаем, что:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial p_1} = \vec{x}_1^H = \vec{x}_1^D = 1.3 \\ \dfrac{\partial M}{\partial p_2} = \vec{x}_2^H = \vec{x}_2^D = 1.8 \end{cases} \blacksquare$$

Задача №4. Дать экономескую трактовку столбцам матрицы:

$$\triangle \vec{x}^D = \triangle \vec{x}^{GE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \begin{pmatrix} -0.33 \cdot \dfrac{200}{50^2} & 0 \\ 0 & -0.67 \cdot \dfrac{200}{75^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle x_1^D \\ \triangle x_2^D \end{pmatrix}$$

Решение. Экономисты присвают следующий смысл данной матрице общего эффекта изменения объема спроса на товар под влиянием изменения цены этого товара, при этом первый столбец показывает изменение спроса для первого товара, второй стобец для второго.

Микроэкономика
Домашняя работа №7 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Проверить справедливость свойств производственной функции для (1), (2), (3).

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \tag{1}$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1$$
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{2}$$
$$a_1 > 0;\ a_2 > 0$$
$$y = a_0 \min(x_1,\ x_2) \tag{3}$$
$$a_0 > 0$$

Решение:

Вспомним *свойства* производственной функции:

1. При нулевых факторах производства, то и выпуск 0. $f(0, 0, \dots, 0) = 0$;
2. Производственная функция возрастает по каждому фактору производства $f \uparrow x_i$, т.е. $f \uparrow x_i \Leftrightarrow M_y(x_i)$. $M_y(x_i)$ – предельное значение выпуска по i-ому фактору, т.е. это дополнительный выпуск продукции в ответ на дополнительную еденицу i-ого фактора.
3. С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Проверим эти свойства для **(1)** производственной функции:

☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2 = 0$, тогда

$y = f(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = a_0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

☑ **Свойство 2.** Для того, чтобы проверить второе свойство найдём производные функции по x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2} > 0; \text{ при } x_1 > 0,\ x_2 > 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1} x_1^{a_1} > 0; \text{при } x_1 > 0,\ x_2 > 0$$

Таким образом, производственная функция (1), действительно, возрастает по каждому фактору производства.

☑ **Свойство 3.** Для проверки третьего свойства необходимо найти вторую производную по каждому аргументу x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1^2} = a_0 \cdot a_1 \cdot (\underbrace{a_1 - 1}_{<0}) \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2} < 0;$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2^2} = a_0 \cdot a_2 \cdot (\underbrace{a_2 - 1}_{<0}) \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{a_1} < 0;$$

Таким образом производственной функции возрастает и выпукла вверх.

Аналогично проверим и для второй функции:

☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2\ = 0$, тогда
$y\ =\ f(x_1, x_2) = a_1x_1\ +\ a_2x_2 = a_1\cdot 0\ +\ a_2\cdot 0 = 0$
☑ **Свойство 2.** Для того, чтобы проверить второе свойство найдём производные функции по x_i:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 > 0;\ \text{верно так как } a_1 > 0 \text{ по условию}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2 > 0;\ \text{верно так как } a_2 > 0 \text{ по условию}$$

☑ **Свойство 3.** Так как линейная функция является одновременно и выпуклой и вогнутой, то свойство 3 выполняется.
И наконец последняя производственная функция.
☑ **Свойство 1.** Пусть $x_1,\ x_2\ = 0$, тогда
$y\ =\ f(x_1, x_2) = a_0\min(x_1,\ x_2) = a_0\min(0,\ 0) = 0$
☑ **Свойство 2.** Очевидно фунция возрастает при росте x_1, если $x_1\ > x_2$, аналогично и для x_2
☑ **Свойство 3.** Так как линейная функция является одновременно и выпуклой и вогнутой, то свойство 3 выполняется.
Задача №2. Получить уравнение предельного продукта второго фактора и дать интерпритацию.

$$y\ = 0.45\cdot x_1^{0.5}\left(\text{млрд. долл.}\right)\cdot x_2^{0.1}\left(\text{тыс. человек}\right) \qquad (*)$$

Решение:
Выльзуемся определением *предельного продукта фактора* x_i и вычислим его:

$$M_y(x_i) \approx \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.45\cdot 0.1\cdot x_2^{-0.9}x_1^{0.5} = 0.45\cdot 0.1\cdot 17^{-0.9}6^{0.5} \approx 0.0086$$

Величина $M_y(x_2)\ = 0.0086$ – это значение дополнительного выпуска продукции в ответ на использование в процессе произвоства дополнительной еденицы живого труда.
Задача №3. Для функции Кобба-Дугласа вычислить значение предельного продукта *второго* фактора и посчитать его значение применительно уравнения (*).
Решение:
Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\frac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i)\ = \frac{y}{x_i} \qquad (9)$$

Средний продукт фактора производства - это кол-во выпуска продукции, приходящаяся на одну единицу данного фактора.
Вычислим средний продукт второго фактора производства

$$A_y(x_2)\ = \frac{y}{x_2} = \frac{0.45\cdot 6^{0.5}\cdot 17^{0.1}}{17}\ \approx 0.086$$

У данной фирмы на одну единицу совокупного капитала приходится в среднем 0.086 тысяч человек.

Задача №3. Определить эластичность выпуска по второму фактору.

Решение:

Эластичность выпуска по факторам производства расчитывается по правилу:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Воспользуемся ранее полученными результатами и получим:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i) \ = 0.0086 \ : 0.086 \approx 0.1$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_2.

Задача №4. Получить уравнение изокванты и построить график этой изокванты для функции (*) принимая значение $y_0 = 2$.

Решение:

Выразим уравнение изокванты для функции потребления Коббла-Дугласса:

$$y_0 \ = \ a_0 \ \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \ \Rightarrow x_2^{a_2} = \frac{y_0}{a_0 \ \cdot x_1^{a_1}} = \sqrt[a_2]{\frac{y_0}{a_0 \ \cdot x_1^{a_1}}}$$

Для построения функции воспользуемся языком программирования Python 3:

```
# библиотеки
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
sns.set(style="darkgrid")

# обозначим аргументы
a0 = 0.45
a1 = 0.5
a2 = 0.1
y0 = 2
# 200 значений x1 от 5 до 30 с равными интервалами
x1 = np.linspace(5, 30, 200)
# строим график
plt.plot(x1, (y0/(a0*x1**a1))**(1/a2))
plt.xlabel(r"$x_1$")
plt.ylabel(r"$x_2$")
plt.title('График изокванты')
plt.show()
```

В результате получим следующий график функции:

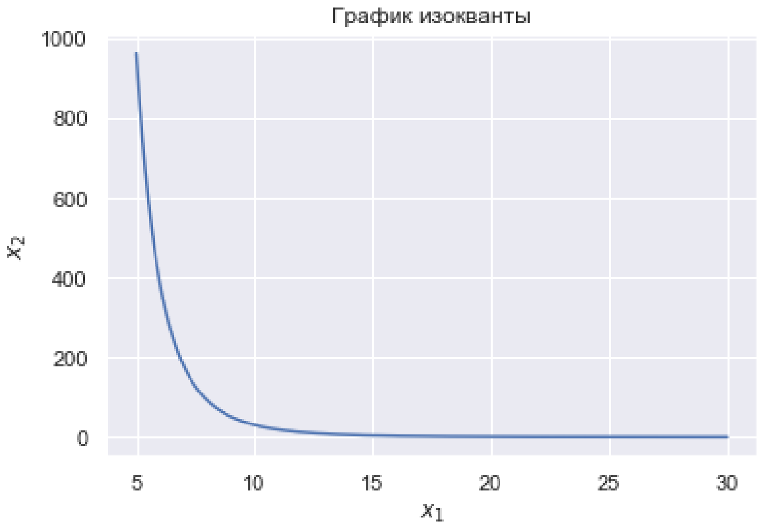


График изокванты
1000
800
600
400
200
0
x_2
5
10
15
20
25
30
x_1

Микроэкономика
Домашняя работа №8 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Проверить, что в функции Коббла-Дугласа и Леонтьева, каждый фактор необходим. Так ли это в линейной функции?

Решение: Для того, чтобы доказать, что в производсенной функции каждый фактор необходим, достаточно проверить, что при нулевом уровне из этих факторов, весь выпуск равен 0.

☑ Проверим для фукции Коббла-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1$$

Действительно, если любой из факторов равен 0, то и всё уравнение равно 0:

$$y = f(x_i = 0) = 0$$
$$a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \ \blacksquare$$

☑ Аналогично, проверим для функции Леонтьева:

$$y = a_0 \min(x_1,\ x_2)$$
$$a_0 > 0$$

Действительно, если любой из факторов равен 0, то и всё уравнение равно 0:

$$y = f(x_i = 0) = 0$$
$$a_0 > 0 \ \blacksquare$$

☐ Для линейной производсенной функции данное правило не выполняется.

Док-во:

Пусть $x_1 = 0$, тогда линейная производсенная функция примет следующий вид:

$$y = a_1 \cdot 0 + a_2 x_2 = a_2 x_2$$
$$a_1 > 0;\ a_2 > 0$$

Что не равно нулю при $\forall x_2 \neq 0$. $\blacksquare$

Задача №2. Проверить предельное значение выпуска по второму фактору. А так же доказать **третье свойство** производсенной функции. $M_y(x_i) \downarrow x_i \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$

Другими словами производсенная функция выпукла вверх.

Решение:

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \tag{1}$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно пронологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho}\ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

Таким образом предельное значение выпуска по первому и второму фактору > 0. ■

☑ **Свойство 3.** С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Вычислим вторую производную по каждому фактору:

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_1^2} = h \cdot a_1 \left(\frac{x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x1} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot x_1^{-(2+\rho)} \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + x_1^{-(1+\rho)} \cdot a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot \left(x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{\left(-(1+\rho) \cdot x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$-h \cdot a_1 \frac{x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_2^2} = h \cdot a_2 \left(\frac{x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x2} =$$

$$= -h \cdot a_2 \frac{x_2^{-2(1+\rho)} a_2 + (1+\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-\rho} \cdot x_2^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

Следовательно, производственная функция выпукла вверх, что доказывает третье свойство.

Задача №3.

$$x_2 = \left(\frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)\right)^{-\frac{1}{\rho}} \tag{6''}$$

Исследовать (6") уравнение изокванты и найти её горизонтальную и вертикальную ассимптоты. Построить график изокванты при значениях:

$$y_0 = 2,\ a_0 = 0.45,\ a_1 = 0.5, a_2 = 0.1, \rho = h = 1$$

Построим график функции для этого сначала упростим уравнение (6"):

$$x_2 = \left(\frac{1}{0.1}\left(\left(\frac{2}{0.45}\right)^{-1} - 0.5 \cdot x_1^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(10\left(0.225 - \frac{1}{2x_1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left(10\left(\frac{0.45x_1 - 1}{2x_1}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{2.25x_1 - 5}{x_1}\right)^{-1} = \frac{x_1}{2.25x_1 - 5}$$

Воспользуемся Python 3:

```python
# библиотеки
import numpy as np
import seaborn as sns
import matplotlib.pyplot as plt
sns.set(style="darkgrid")


# 1000 значений x1 от -200 до 200 с равными интервалами
x1 = np.linspace(2, 3, 1000)
# строим график
plt.plot(x1, x1/(2.25*x1-5))
plt.xlabel(r"$x_1$")
plt.ylabel(r"$x_2$")
plt.title('График изокванты')
plt.show()
```

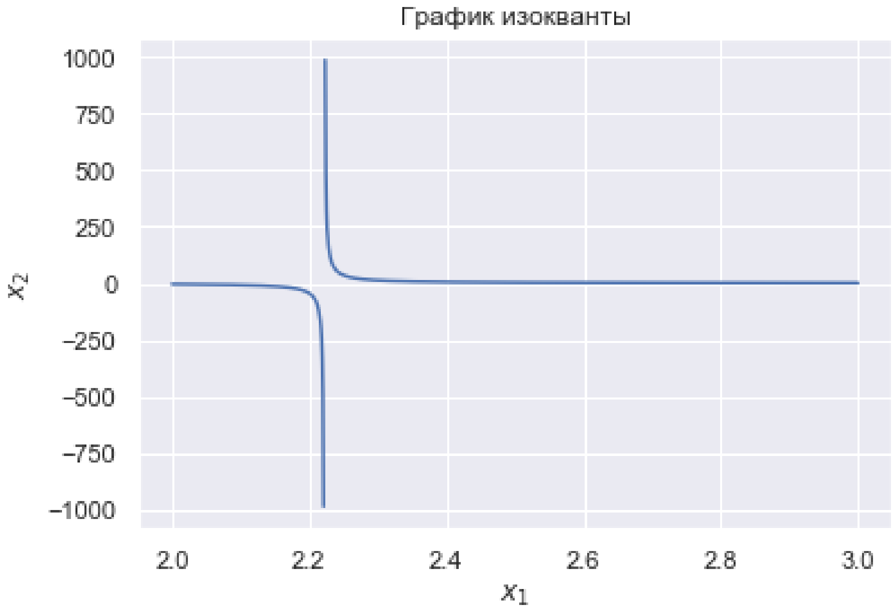


График имеет точку разрыва при $x_1 = 2.22$ сдедовательно вертикальная ассимтота прямая проходящая через $x_1 = 2.22$. Для того, чтобы рассчитать горизонтальную ассимптоту вычислим предел:

$$x_2 = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{x_1}{2.25x_1 - 5} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{2.25x_1^2 + 5}{2.25^2 x_1^2 - 25} = 0.444444$$

Сдевательно вертикальная ассимптота расположена вдоль прямой $x_2 = 0.444444$.

Микроэкономика

Домашняя работа №9 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задание №1. Расчитать значение предельной нормы замещения капитала трудом производственной фукции одной из американских с производственной функцией Кобба-Дугласа с параметрами из домашней задачи на семинаре №7

$$a_0 = 0.45,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.1, y_0 = 2$$

при $x_1 = 6$ по формуле (6).

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_2 = x_2(x_1; y_0))}{x_1} \tag{6}$$

Решение:

Подставив известные значения в форму (6) получим:

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{0.5}{0.1} \cdot \left(\frac{2}{0.45}\right)^{\frac{1}{0.1}} \cdot 6^{-\left(\frac{0.5}{0.1}+1\right)} \approx 322.282943$$

Вывод: таким образом для того, чтобы компенсировать потерю одной единицы бюджета потребуется 322 тыс. людей.

Задача №2. Пользуясь формулой (6)

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_2 = x_2(x_1; y_0))}{x_1} \tag{6}$$

показать, что изменения предельной нормы технологического замещения на изокванте вычисляется по правилу:

$$\triangle MRTS_{1,2} \approx d\, MRTS_{1,2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1} \tag{7}$$

, где $\frac{\triangle x_1}{x_1}$ – отсительное изменение, которое парадило изменение предельной нормы замещения.

Решение:

Как нам известно для того, чтобы вычислить изменение предельной величины достаточно просто вычислить производную, тогда воспользуемся следующей формулой:

$$\triangle MRTS_{1,2} \approx \frac{\partial MRTS_{1,2}}{\partial x_1} \triangle x_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}\right)'_{x_1} \cdot \triangle x_1 =$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1} \blacksquare$$

Задача №3. С учётом выражений (6) и (7) выразить делитель правой части и вычислить эластичность $\sigma_{1,2}$.

$$\frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \cancel{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1}}{\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}} \cdot \cancel{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1}$$

Таким образом эластичность $\sigma_{1,2}$:

$$\sigma_{1,2} = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} : \frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1}}{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle x_1}{x_1}} = 1\%$$

Вывод: Эластичностью замещение 1-ого фактора 2-ым называется относительное изменение на изокванте отношения факторов производства в ответ на относительное изменение предельной нормы технологического замещение на 1%, в нашем случае изменится на 1%.

Микроэкономика

Домашняя работа №10 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$.

$$x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2}$$

Решение:

Решим оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}}_{y} - \underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2)}_{c} \to \max \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

Запишем необходимое усовие экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = p_0 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} - p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = p_0 \cdot \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Перенесём цены в правые части:

$$\begin{cases} \alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta} = \dfrac{p_1}{p_0} \\ \beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1} = \dfrac{p_2}{p_0} \end{cases} \tag{3}$$

Поделим в (3) первое уравнение на второе:

$$\frac{\alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta}}{\beta \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\alpha \cdot x_2}{\beta \cdot x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \tag{4}$$

$$\alpha \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1\right)^{\beta} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow a_0 \cdot p_0 \cdot x_1^{\alpha+\beta-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot \left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^{\alpha+\beta-1} = \frac{1}{a_0} \cdot p_0^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{1-\beta} \cdot \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{\beta} \Rightarrow x_1^{\alpha+\beta-1} = \frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}} \cdot p_0^{-1} \cdot p_1^{1-\beta} \cdot p_2^{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^* = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$\left[\boxed{b_1 = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}, \boxed{\gamma_0 = -\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\gamma_1 = \frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\gamma_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

$$\Rightarrow x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \qquad (*)$$

Задача №2. Определить формулы для расчёта коэффициентов $b_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2$

$$x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2}$$

Решение:

Воспользуемся формулой для x_1^*, найденной нами в *задаче №1*:

$$x_1^* = \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}$$

Как мы знаем по формулу (4): $x_2 = \dfrac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{p_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot p_2} \cdot \left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^* = \beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}} \cdot \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot a_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow$$

$$x_2^* = \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\left[\boxed{b_2 = \left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha} \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}, \boxed{\delta_0 = -\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\delta_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}, \boxed{\delta_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

$$\Rightarrow x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \qquad (**)$$

Задача №3. Проанализировать в какой зависимости будут уровни x_1^*, x_2^* от изменений:

1) рыночной цены блага $p_0 \uparrow$;

2) на рост цен факторов производства;

Исходя из (*) и (**) найти оптимальный уровень предложения фирмы и оптимальный уровень издержек фирмы.

Решение:

При увеличении рыночной цены блага $p_0 \uparrow$ значения:

$$x_1^* \uparrow = b_1 \cdot \left(\frac{1}{p_0 \uparrow}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}=-2.5} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2}$$

$$x_2^* \uparrow = b_2 \cdot \left(\frac{1}{p_0 \uparrow}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}=-2.5} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2}$$

Значения x_1^*, x_2^* будет зависеть от знака степени в задаче дано, что $\alpha = 0.5,\ \beta = 0.1$, тогда значения x_1^*, x_2^* будут увеличиваться.

При росте цен факторов производства $p_1 \uparrow, p_2 \uparrow$:

$$x_1^* = b_1 \cdot p_0^{\gamma_0} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}=-2.25} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}=-0.25}$$

$$x_2^* = b_2 \cdot p_0^{\delta_0} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}=-1.25} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}=-1.25}$$

Увеличение или уменьшения значений факторов производства x_1^*, x_2^* будет зависеть от знака в степени. В нашей задаче при значениях: $\alpha = 0.5,\ \beta = 0.1$ степени имеют отрицательный знак следовательно $x_1^* \downarrow, x_2^* \downarrow$ будут уменьшаться.

Выведем формулы для оптимального уровня издержек и предложения фирмы:

Уровень оптимального выпуска фирмы:

$$q_* = F\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = q_*(p_0, \vec{p})$$

Велечина q_* называется *предложением фирмы.*

Оптимальный уровень издержек:

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = c_*(p_0, \vec{p})$$

Подставим ранее найденные значения $x_1^*,\ x_2^*$ для оптимального уровня предложения:

$$q_* = F(x_1, x_2) = a_0 \cdot \left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0 \cdot \beta^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right)^{\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha \cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\right)^{\beta} =$$

$$= a_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} =$$

$$= \boxed{\left(a_0 \alpha^\alpha \beta^\beta\right)^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}.$$

Подставим ранее найденные значения $x_1^*,\ x_2^*$ для оптимального уровня издержек:

$$c_* = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1\left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0\cdot\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_1^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right)+$$

$$+\,p_2\left(\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}\cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0\cdot\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}+$$

$$+\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}\cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}=$$

$$=\boxed{\left(\left(\frac{\alpha^{\beta-1}}{a_0\cdot\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}+\left(\frac{\beta^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}\cdot a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\right)\cdot p_0^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\cdot p_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}\,.$$

Микроэкономика
Домашняя работа №11 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

$$x_2^* = x_2^*\left(p_0, p_2, x_1^o\right) \tag{8}$$

$$l_1 = l_1\left(p_0, p_1, p_2, x_1^o\right) \tag{9}$$

Задача №1. Получить явный вид уравнений (8), (9) и рассчитать по этим уравнениям спрос фирмы, предложение, доход, издержки и прибыль.

Решение:

Выведем формулу для спроса фирмы на второй фактор производства x_2^*:

$$p_0 \cdot a_0 \cdot \left(x_1^o\right)^\alpha \cdot \beta \cdot x_2^{\beta-1} - p_2 = 0 \Rightarrow x_2^{\beta-1} = \frac{p_2}{p_0 \cdot a_0 \cdot \left(x_1^o\right)^\alpha \cdot \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2^* = a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{1}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}}$$

вычислим (9):

$$p_0 \cdot a_0 \cdot \alpha \cdot \left(x_1^o\right)^{\alpha-1} \cdot a_0^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} - p_1 - l_1 = 0$$

$$\boxed{l_1^* = \alpha \cdot a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}} - p_1}$$

Рассчитаем предложение фирмы:

$$q_* = a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta = a_0 \cdot \left(x_1^o\right)^\alpha \cdot a_0^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} =$$

$$= a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}$$

Рассчитаем доход фирмы:

$$y_* = a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}$$

Рассчитаем издержки фирмы:

$$c = p_1x_1 + p_2x_2 = p_1 \cdot x_1^o + a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}$$

Рассчитаем прибыль фирмы:

$$\pi = p_0 \cdot a_0 \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta - (p_1x_1 + p_2x_2) = a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}} -$$

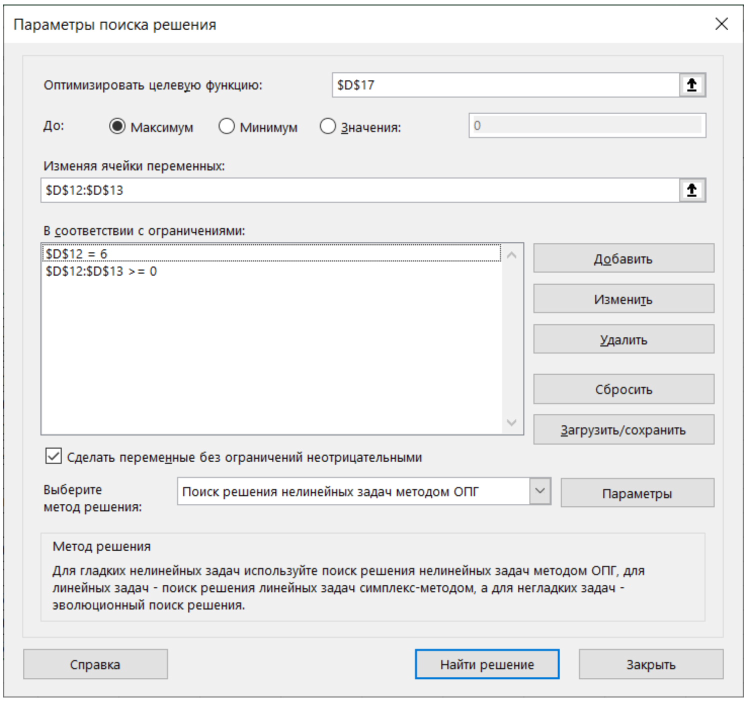
$$- p_1 \cdot x_1^o - a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}} =$$

$$= a_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot p_0^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot p_2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \cdot \left(x_1^o\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}(1-\beta) - p_1x_1^o$$

Задача №2. В домашнем задании следует провести рассчёты по модели (1') при помощи функции поиск решения.

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} - (p_1 x_1 + p_2 x_2) \to \max \\ x_1 = x_1^{o} \\ x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1')$$

Воспользуемся подготовленным в классе решением и добавим ограничение для $x_1 = 6$:



В результе получим:

Исходные данные	
a0	450000
alpha	0.5
beta	0.1
p0	0.000001
p1	0.1
p2	0.024
Искомые величины	
x1	6
x2	5.440527
q	1305727
y	1.305727
c	0.730573
π	0.575154

Микроэкономика

Домашняя работа №12 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача № 1. Рассчитать с исп. Excel спрос по Хиксу в краткосрочном периоде используя функцию Кобба-Дугласса из предыдущей задачи и след. исходные данные:

$$a_0 = 450000 + 10 \cdot i$$
$$\alpha = a = 0.5 - 0.01 \cdot i$$
$$\beta = b = 0.1 + 0.01 \cdot i$$
$$p_0 = 10^{-6} + 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot i$$
$$p_1 = 0.1 + 0.01 \cdot i$$
$$p_2 = 0.024 + 0.01 \cdot i$$
$$q_0 = 1451000 - 100 \cdot i$$
$$b_1 = x_1^{(o)} = 6 + 0.1 \cdot i$$

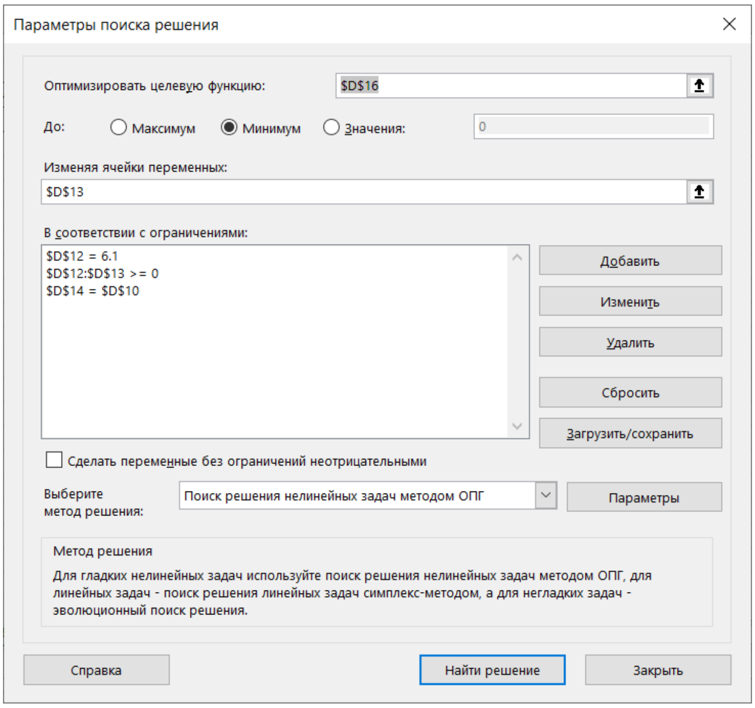
Решение:

Изменим ранее введённые данные на заданные в задаче, мой номер по списку: $i = 1$. Тогда получим следующие исходные данные:

Исходные данные			Номер по списку
a0	450010	i	1
a	0.49		
b	0.11		
p0	0.0000012		
p1	0.11		
p2	0.034		
q0	1450900		

Далее введём ограничение на первый фактор произовдства $x_1^{(o)} = 6 + 0.1 \cdot i$. И воспользуемся функцией Excel "Поиск решения":

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ F(x_1, \dots, x_n) = q_0; \\ b_1 = x_1^{(o)} = 6 + 0.1 \cdot i; \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0; \end{cases}$$



В итоге получим:

Исходные данные			Номер по списку
a0	450010	i	1
a	0.49		
b	0.11		
p0	0.0000012		
p1	0.11		
p2	0.034		
q0	1450900		
Искомые величины			
x1	6.1		
x2	13.294438		
q	1450900		
y	1.74108		
c	1.1230109		
π	0.6180691		

Таким образом спрос по Хиксу равен $\vec{x}^* = (6.1, 13.294438)$. При этом издержки составят $c = 1.1230109$.

Задача №2.

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ F(x_1, \dots, x_n) = q_0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} c = p_1x_1 + p_2x_2 \\ F(x_1, x_2) = q_0 \\ x_1 = b_1 = x_1^o \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad (4')$$

Для моделей (1), (4') составить функции Лагранжа и необходимое условие экстремума, решать не нужно.

Решение:

Составим функцию Лагранжа и необходимое условие экстремума для (1):

$$L(x_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda(q_0 - F(x_1, \dots, x_n))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = p_i - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = q_0 - F(x_1, \dots, x_n) = 0; \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0; \end{cases}$$

Теперь составим функцию Лагранжа и необходимое условие экстремума для (4'):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(q_0 - F(x_1, x_2))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = q_0 - F(x_1, x_2) = 0; \\ x_1 = b_1 = x_1^o; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$

Микроэкономика

Домашняя работа №13 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Полагая, что производственная функция монополистов является функцией двух факторов (капитал, труд) осуществить первые два шага метода Лагранжа трансформации модели (6) к приведённой форме.

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \\ q = F(x_1, \dots, x_n) \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$p_1, \dots, p_n - \text{экз}$$

$$x_1, \dots, x_n, \pi, q, y, c - \text{энд.}$$

Решение:

Составим необходимое условие экстремума:

$$L = p(q) \cdot q - p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda(F(x_1, x_2) - q)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p(q) \cdot q'_{x1} - p_1 + \lambda F(x_1, x_2)'_{x1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p(q) \cdot q'_{x2} - p_2 + \lambda F(x_1, x_2)'_{x2} = 0 \\ F(x_1, x_2) - q = 0 \end{cases}$$

Задача №2. Осуществить расчёты модели (5) привлекая линейную обратную функцию спроса (4.1).

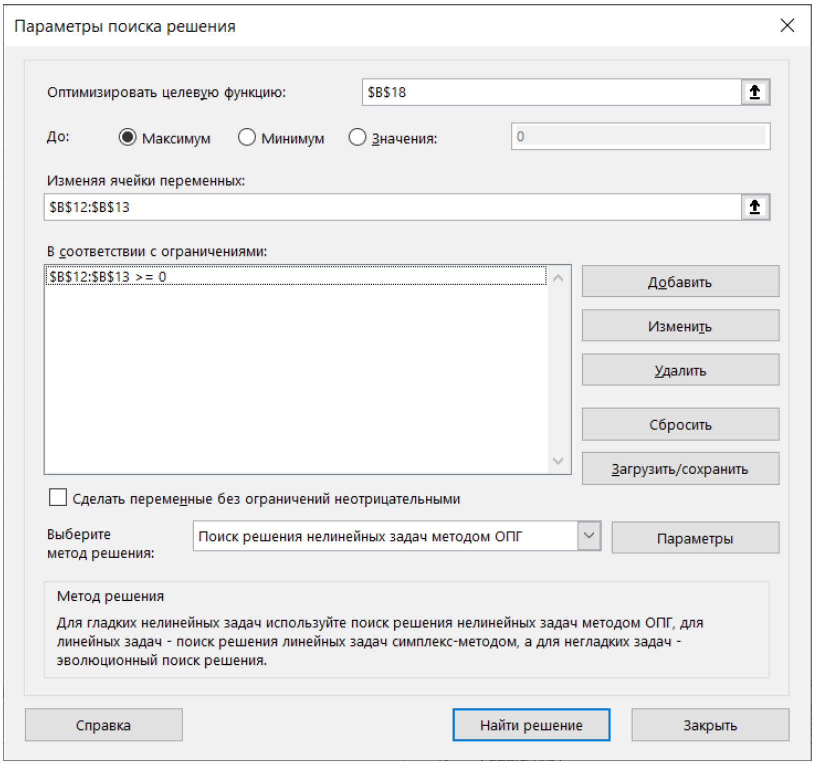
Решение:

Воспользуемся файлом Excel сделанном на семинарском занятии и заменим:

$$p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0\ (4.1)$$

$$(4.1) \begin{cases} d_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25 \cdot 10^{-15}; \end{cases}$$

Воспользуемся функцией "поиск решения", получим следующее решение:



Исходные данные	
a0	2200000
a	0.3
b	0.8
p0	0.000001
p1	0.015
p2	0.048
d0	8E-07
d1	-1.3E-15
Искомые величины	
x1	103.6242
x2	86.35244
q	3.13E+08
p(q)	4.08E-07
y	127.9453
c	5.69928
π	122.2461

Таким образом спрос на фаткоры производства равны:
$x_1 = 103.6242,\ x_2 = 86.35244.$

Задача № 3. Вычислить экономический смысл d_1 в обеих моделях (*) обратной функции спроса.

$$\begin{cases} p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0\ (4.1) \\ p(q) = d_0 \cdot e^{d_1 \cdot q};\ d_1 < 0\ (4.2) \end{cases} \qquad (*)$$

Решение: для выявляения экономического смысла d_1 вычислим частную производную по q от обратной функции спроса:

$$(4.1)\ \frac{\partial p(q)}{\partial q} = d_1$$

Возьмём логарифм от обратной функции спроса (4.2) :

$$\ln(p(q)) = \ln d_0 + d_1 \cdot q \cdot \ln e = \ln d_0 + d_1 \cdot q$$

$$(4.2)\frac{\partial \ln(p(q))}{\partial q} = d_1$$

Вывод: d_1 – это то на сколько изменится обратная функция спроса изменении выпуска q на 1 единицу.

Микроэкономика

Домашняя работа №14 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Провести расчёт привлекая линейну модель обратной функции спроса (4.1).

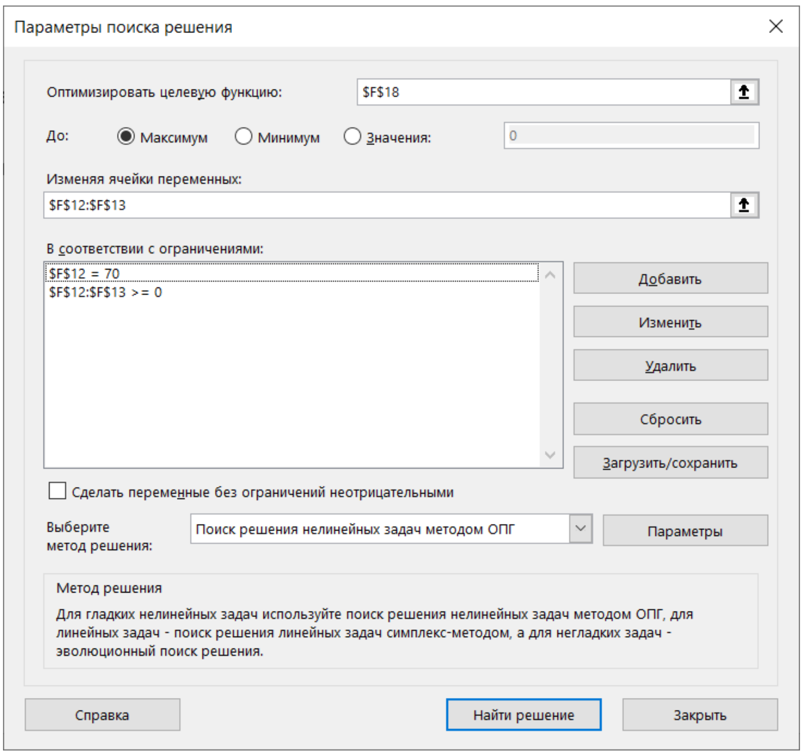
$$p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0\ (4.1)$$

Решение:

Введём все исходные данные и искомые величины:

ДЗ №14	Исходные данные	
	a0	2200000
	a	0.3
	b	0.8
	p0	0.000001
	p1	0.015
	p2	0.048
	d0	8E-07
	d1	-1.3E-15
	$b1=x1^0$	70
	Искомые величины	
	x1	70
	x2	86.35244
	q	2.79E+08
	p(q)	4.52E-07
	y	125.8569
	c	5.194917
	π	120.662

К исходным данным мы добавляем ограничение на основной капитал $b_1 = x_1^0 = 70$ млрд. $.



В результате получим:

Искомые величины	
x1	70
x2	99.62161
q	3.12E+08
p(q)	4.1E-07
y	127.9268
c	5.831837
π	122.0949

Задача №2. Выяснить экономический смысл множителей Лагранжа.
Решение:

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{1}^{n} p_i \cdot x_i \to \max \\ q = F(x_1, \dots x_n) \\ f_j(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_j \\ x_i \geqslant 0; j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = p(q) \cdot q - \sum_{1}^{n} p_i \cdot x_i + \lambda_1(F(x_1, \dots x_n) - q) + \lambda_2(f_j(x_1, \dots, x_n) - b_j)$$

λ_1 – предельное значение издержек при уменьшении уровня выпуска;
λ_2 – предельное значение прибыли, возникающее в ответ на дополнительную еденицу 1-ого фактора производства.

Микроэкономика
Домашняя работа №15 (Аверьянов Тимофей ПМ 3-1)

Задача №1. Вычислить экономический смысл коэффициента m_i.

$$c_i = b_i + m_i \cdot q_i$$

Решение:

m_i – имеет смысл предельных издержек. А конкретно:

$$\frac{\partial c_i}{\partial q_i} = m_i;$$

Следовательно, при изменении уровня предложения на благо на 1 единицу издержки изменятся на велечину m_i.

Задача № 2. Найти коэффициенты в системе (7") рассчитать подставляя свои данные эндогенные перменные.

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot q_1 + a_{1,2} \cdot q_2 = a_{1,0} \\ a_{2,1} \cdot q_1 + a_{2,2} \cdot q_2 = a_{2,0} \end{cases} \tag{7''}$$

Решение:

Запишем уравнение прибыли каждой фирмы:

$$\pi_1 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1)$$
$$\pi_2 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2)$$

Формируем необходимое условие прибыли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_1}}_{1} \cdot q_1 + \underbrace{p(q)}_{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_1}{\partial q_1}}^{=1} - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_2}}_{1} \cdot q_2 + \underbrace{p(q)}_{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_2}{\partial q_2}}^{=1} - m_2 = 0; \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = d_1 q_1 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = d_1 q_2 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 q_1 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_1 - d_0; \\ d_1 q_2 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_2 - d_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \dfrac{m_1 - d_0}{d_1}; \\ q_1 + 2q_2 = \dfrac{m_2 - d_0}{d_1}; \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{a_{1,1} = 2, a_{1,2} = 1, a_{1,0} = \frac{m_1 - d_0}{d_1}}$$

$$\boxed{a_{2,1} = 1, a_{2,2} = 2, a_{2,0} = \frac{m_2 - d_0}{d_1}}$$

Подставим свои данные:

$$b_i(k) = b_i + 0.1 \cdot k; m_1(k) = m_1 + 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$$

номер по журналу $m_2(k) = m_2 - 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$

$$k = 1$$

$$\begin{cases} d_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25 \cdot 10^{-15}; \\ b_1 = 0.5 + 0.1 = 0.6; \\ m_1 = 2.1 \cdot 10^{-8} + 0.1 \cdot 10^{-8} = 2.2 \cdot 10^{-8}; \\ b_2 = 0.3 + 0.1 = 0.4; \\ m_2 = 5.9 \cdot 10^{-8} + 0.1 \cdot 10^{-8} = 6.0 \cdot 10^{-8}; \end{cases}$$

вычислим q_1, q_2:

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right) + 2q_2 = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} + 3q_2\right) = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$q_2 = \frac{2}{3}\frac{m_2 - d_0}{d_1} - \frac{m_1 - d_0}{d_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6.0 \cdot 10^{-8} - 0.8 \cdot 10^{-6}}{-1.25 \cdot 10^{-15}} - \frac{2.2 \cdot 10^{-8} - 0.8 \cdot 10^{-6}}{-1.25 \cdot 10^{-15}} =$$

$$= -2.27733 \cdot 10^{8}$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.2 \cdot 10^{-8} - 0.8 \cdot 10^{-6}}{-1.25 \cdot 10^{-15}} - \left(-2.27733 \cdot 10^{8}\right)\right) = 425066500$$

вычислим c_1, c_2:

$$c_i = b_i + m_i \cdot q_i$$

$$c_1 = b_1 + m_1 \cdot q_1 = 0.6 + 2.2 \cdot 10^{-8} \cdot 425066500 = 9.951463$$

$$c_2 = b_2 + m_2 \cdot q_2 = 0.4 + 6.0 \cdot 10^{-8} \cdot \left(-2.27733 \cdot 10^{8}\right) = -13.26398$$

$$\pi_1 = \underset{q_1+q_2}{p(q)} \cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1) = (d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2)) \cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1) =$$

$$= \left(0.8 \cdot 10^{-6} - 1.25 \cdot 10^{-15} \cdot \left(425066500 - 2.27733 \cdot 10^{8}\right)\right) \cdot 425066500 -$$

$$- \left(0.6 + 2.2 \cdot 10^{-8} \cdot 425066500\right) = 225.2519117778125$$

$$\pi_2 = \underset{q_1+q_2}{p(q)} \cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2) = (d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2)) \cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2) =$$

$$= \left(0.8 \cdot 10^{-6} - 1.25 \cdot 10^{-15} \cdot \left(425066500 - 2.27733 \cdot 10^{8}\right)\right) \cdot \left(-2.27733 \cdot 10^{8}\right) -$$

$$-\left(0.4 + 6.0 \cdot 10^{-8} \cdot \left(-2.27733 \cdot 10^{8}\right)\right) \;=\; -112.748232555625$$