1. Экономика как объект изучения и как наука. Основные объекты изучения микроэкономики.

Экономика *как объект изучения* представляет собой совокупность или множество институтов, деятельность которых направлена на деятельность удовлетворения потребностей населения в ситуации ограниченных ресурсов.

Экономика *как наука* занимается изучением упомятых выше институтов с целью улучшения их деятельности. Как наука экономика по традиции разделяется на микроэкономику и макроэкономику.

Основными объектами микроэкономики являются:

1. Фирмы, производящие блага (товары или услуги) и продающие эти блага на рынке;
2. Домашние хозяйства являющиеся потребителями благ и в нашем курсе мы будем изучать методом математического моделирования поведение потребителей благ и фирм при их взаимодействии на рынке;

2. Метод математического моделирования изучения экономики: математическая модель, ее переменные; два класса моделей и две их формы.

В любом изучаемом экономическом объекте мы будем выделять известные характеристики: $x_1, x_2,..., x_k$(1) , искомые характристики $y_1, y_2,..., y_m$ (2) и взаимосвязи велчин (1) и (2) F($\vec{y}, \vec{x}$).

В методе математического моделирования изучения экономики упомянутые выше взаимосвязи описываются математическим языком и в результате такой записи возникает *математическая модель объекта.*

Известные характеристики (1) - это *экзогенные переменные* модели, искомые величины (2) - это *эндогенные переменные* модели.

Всё множество математических моделей, математических объектов можно разделить на два класса. В первый класс относятся модели, которые описывают изучаемые объекты такими какими эти объекты являются в реальности. Во второй класс включаются модели в которых отыскиваются такие значения эндогенных переменных, которые удовлетворяют некоторому требованию оптимальности

Структурная форма модели – модель, полученная в результате записи математическим языком взаимосвязей эндогенных и экзогенных переменных. П*риведённая форма* модели позволяет получить взаимосвязь заданных изменений экзогенных переменных с возникающими в ответ изменениями эндогенных переменных.

3. Предельные величины и эластичность в экономике.

Изменения эндогенных перменных в ответ на еденичные изменения экзогенных называют *предельными величинами*.

По мимо предельных велечин в экономике в процессе анализа объекта методом математического моделирования постоянно используется эластичность эндогенных переменных по экзогенным. Эластичность определяется по следующему правилу:

$$E_{yi}(xi) = \frac{\triangle y_i}{y_i} : \frac{\triangle x_j}{x_j}$$

является безразмерной велечиной, позволяет вычислить относительные изменения эндогенной переменной в ответ на заданное изменение соответствующей экзогенной переменной $\frac{\triangle x_j}{x_j}$. Эластичность имеет смысл относительного изменения эндогенной переменной в % в ответ на относительное изменение экзогенной переменной на 1%.

4. Потребитель, пространство благ и модель способности потребителя сопоставлять
наборы благ - отношение слабого предпочтения. Свойство транзитивности отношения
слабого предпочтения.

Модель способности потребителя сопоставлять наборы благ:

Занумеруем натуральными числами $1,\ 2,\ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*\right) \in R_n^+ = C \tag{1}$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)}\right) \in R_n^+ = C \\ \vec{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)}\right) \in R_n^+ = C \end{cases} \tag{2}$$

Зададимся вопросом почему потребитель предпочитает например набор $\vec{x}^{(1)}$ набору $\vec{x}^{(2)}$. Это означает, что потребитель умеет сопоставлять любые два набора благ и в итоге сопаставления давать себе отчёт какой из этих наборов предпочтительней. Сделанный выше вывод мы оформим ввиде следующей модели способности потребителя. Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A = \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} = \vec{x}^{(1)}$ хуже $\vec{x}^{(2)}$

$$wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \begin{cases} A = \left(\vec{x}^{(1)} \text{ не хуже чем } \vec{x}^{(2)}\right) \\ \overline{A} = \left(\vec{x}^{(1)} \text{хуже } \vec{x}^{(2)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

В итоге сопоставления потребитель делает одно из следующий утверждений. В математике функции двух элементов называются бинарными отношениями и областью определения таких функций служит декартово произведение C^2 *пространство благ*. Множеством изменения такой функции такого бинарного отношения является набор из двух словестных альтернатив $(A,\ \overline{A})$.

$$wpr : C^2 \to (A,\ \overline{A}) \tag{4}$$

Свойство транзитивности отношения слабого предпочтения.

Аксиома транзитивности. Пусть $\vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$, а $\vec{x}^{(2)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(3)}$, тогда $\vec{x}^{(1)}$ набор предпочтительнее $\vec{x}^{(3)}$:

$$\begin{cases} wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(3)}\right) = A. \tag{5}$$

5. Безразличные наборы благ и отношение безразличия на пространстве благ. Свойства
множеств безразличия.

Если из двух наборов $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$ потребитель не может выбрать предпочтительный для него набор благ, то такие наборы называются *безразличными.* Вот определение:

$$\begin{cases} wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(1)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)}. \tag{6}$$

wpr порождает *отношение безразличия*, которое определено соотношением (7).

$$rin\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \begin{cases} \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)} = B, \\ \overline{B}. \end{cases} \tag{7}$$

6. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: возрастание по каждому аргументу и закон Госсена (на примере логарифма Бернулли).

Теорема Дебре.

Занумеруем натуральными числами $1,\ 2,\ \cdots,n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*\right) \in R_n^+ = C \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_n^{(1)}\right) \in R_n^+ = C \\ \vec{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_n^{(2)}\right) \in R_n^+ = C \end{cases} \qquad (2)$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A = \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} = \vec{x}^{(1)}$хуже $\vec{x}^{(2)}$

$$wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = \begin{cases} A = \left(\vec{x}^{(1)} \text{ не хуже чем } \vec{x}^{(2)}\right) \\ \overline{A} = \left(\vec{x}^{(1)} \text{хуже } \vec{x}^{(2)}\right) \end{cases} \qquad (3)$$

Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вверх, такая, что

$$\text{если } wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \text{ то}$$
$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Свойства функции полезности:

1.Функция полезности является возрастающей функцией по каждому аргументу, дополнительное количество любого блага увеличивает значение функции полезности

$$u \uparrow x_i \qquad (2)$$

2. Предельная полезность блага убывает по мере увеличения количесва этого блага при фиксированных значения остальных благ в наборе.

Закон Госсена. Выпуклость вверх означает, что каждая следующая еденица блага приносит дополнительную полезность меньшую чем предыдущая дополнительная еденица. Это означает убывание предельной полезности любого блага при фиксированных значениях остальных благ.

Определение предельной полезности блага:

$$\triangle u = M_u(x_i) = u(x_1,\ \cdots,\ x_i + 1,\ \cdots,\ x_n) - u\,(x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n) > 0 \qquad (4)$$

Согласно теореме Дебре, предельная полезность всегда положительна. Добавим, что с позиции математики предельная полезность - это приращение функции полезности в ответ на прирощении аргумента x_i. И поэтому предельную полезность удобно вычислить по правилу:

$$M_u(x_i) \ = \ \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

На примере логарифма Бернулли:

$$u(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 \ , \ a_1 > 0, \ a_2 > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{a_i}{x_i} > 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = -\dfrac{a_i}{x_i^2} < 0; \end{cases} \blacksquare$$

Следовательно, логарифм Бернулли удовлетворяет свойствам функции полезности.

7. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: выпуклость вверх (на примере неоклассической функции полезности).

Занумеруем натуральными числами $1, \ 2, \ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^* \ = \ \left(x_1^*, \ x_2^*, \ \cdots \ , \ x_n^*\right) \ \in R_n^+ \ = C \qquad (5)$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} \ = \ \left(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \cdots \ , \ x_n^{(1)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \\ \vec{x}^{(2)} \ = \ \left(x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \ \cdots \ , \ x_n^{(2)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \end{cases} \qquad (6)$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A \ = \ \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} \ = \ \vec{x}^{(1)}$хуже $\vec{x}^{(2)}$

Теорема Дебре. Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вврех, такая, что

$$\text{если } wpr \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) \ = A, \text{ то}$$

$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Определение предельной полезности блага:

$$\triangle u \ = \ M_u(x_i) \ = \ u(x_1, \ \cdots \ , \ x_i \ + \ 1, \ \cdots \ , \ x_n) \ - \ u\,(x_1, \ \cdots \ , \ x_i, \ \cdots \ , \ x_n) \ > 0$$

Согласно теоремы Дебре предельная полезность всегда положительна. Добавим, что с позиции математики предельная полезность - это приращение функции полезности в ответ на прирощении аргумента x_i. И поэтому предельную полезность удобно вычислить по правилу:

$$M_u(x_i) \ = \ \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Закон Госсена

Вернёмся к теореме Дебре; выпуклость вверх функции полезности обозначает отрицательный знак второй производной по каждому аргументу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \ < \ 0 \qquad (7)$$

Пример неоклассической функции полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ 0 < a_1 < 1; \ 0 < a_2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a_0 \cdot a_i \cdot x_i^{a_i - 1} > 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} = a_0 \cdot a_i \cdot (a_i - 1) \cdot x_i^{a_i - 2} < 0; \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Следовательно, неоклассическая функция удовлетворяет свойствам функции полезности. И закону Госсена

8. Теорема Дебре о функции полезности. Свойства функции полезности: кривые безразличия и предельные нормы замещения благ (на примере неоклассической функции полезности).

Занумеруем натуральными числами $1, \ 2, \ \cdots, n$ те виды благ, которые интересуют потребителя. Различные наборы данных благ мы будем обозначать $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$.

$$\vec{x}^{*} \ = \ \left(x_1^*, \ x_2^*, \ \cdots, \ x_n^*\right) \ \in R_n^+ \ = C \qquad (8)$$

$$\begin{cases} \vec{x}^{(1)} \ = \ \left(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \ \cdots, \ x_n^{(1)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \\ \vec{x}^{(2)} \ = \ \left(x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)}, \ \cdots, \ x_n^{(2)}\right) \ \in R_n^+ \ = C \end{cases} \qquad (9)$$

Потребитель сопоставляя наборы $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ приходит к одному из двух выводов:

1. $A \ = \ \vec{x}^{(1)}$ не хуже чем $\vec{x}^{(2)}$
2. $\overline{A} \ = \ \vec{x}^{(1)}$ хуже $\vec{x}^{(2)}$

Теорема Дебре. Если wpr транзитивно, непрерывно, удовлетворяет аксиомам ненасыщенности и выпуклости, то существует непрерывная на C скалярная функция $u(\vec{x})$, возрастающаяпо каждому аргументу и выпуклая вврех, такая, что

$$\text{если } wpr \ \left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) \ = A, \text{ то}$$

$$u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$$

То есть если $\vec{x}^{(1)}$ предпочтительнее $\vec{x}^{(2)}$, то на наборе $\vec{x}^{(1)}$ $u\left(\vec{x}^{(1)}\right) \ \geq u\left(\vec{x}^{(2)}\right)$.

Говорят, что два набора благ *безразличны* потребителю, если они для него одинаково полезны, т.е.

$$\begin{cases} wpr\left(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\right) = A, \\ wpr\left(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(1)}\right) = A \end{cases} \Rightarrow \vec{x}^{(1)} \sim \vec{x}^{(2)} \tag{10}$$

$$u(\overrightarrow{x'}) = u(\overrightarrow{x''}) \Leftrightarrow \overrightarrow{x'} \sim \overrightarrow{x''} \tag{8}$$

Обозначим символом:

$$I(\vec{x})' = \{\, \vec{x} \mid \vec{x} \in C,\ u(\vec{x}) = u(\overrightarrow{x'}) = u_0 \} \tag{9}$$

Множеством безразличия для набора $\overrightarrow{x'}$ принято называть наборы благ значение функции полезности у которых совпадают со значением функции полезности для набора $\overrightarrow{x'}$.

Рассматривая определение функции безразличия мы можем записать уравнение, которому удовлетворяет любой элемент из множества i.

$$u(x_1,\ x_2) = u_0 = u(\overrightarrow{x'}) \tag{10}$$

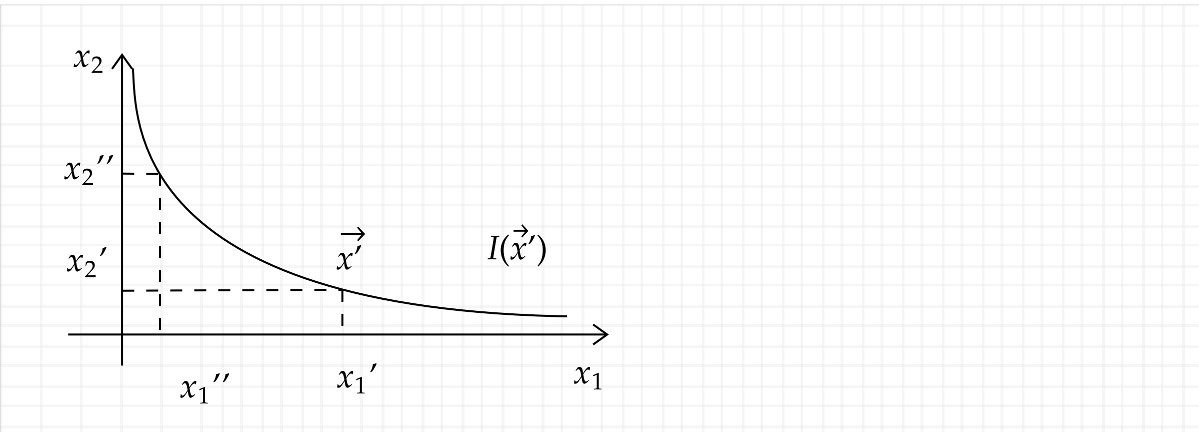
Рассматривая (10), что множество безразичия это ничто иное, как поверхность (линия) заданного уровня полезности (линия уровня). Если разрешить уравнение (10) относитель x_2, то сможем построить график линии уровня или гафик кривой безразличия.

$$x_2 = x_2(x_1\ ; u_0) \tag{11}$$

Пример кривой безразличия для неоклассической функции полезности

$$a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = u_0$$

$$x_2 = \sqrt[a2]{\frac{u_0}{a_0 \cdot x_1^{a_1}}}$$



Предельная норма замещение $MRS_{1,\,2}$ первого блага вторым. Это величина имеет смысл дополнительного количества второго блага, которое заменит потерю еденицы первого блага.

$$MRS_{1,\,2} = MRSx_2(x_1) = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} \qquad (13)$$

Выведем в общем случае для неоклассической функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}$$

$$MRS_{1,2} = MRSx_2(x_1) = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}}{a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}} = \frac{a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1}}{a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1}}$$

9. Модель Маршалла-Вальраса поведения потребителя и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности). Свойство функции спроса по Маршаллу-Вальрасу.

Экзогенные величины модели:

1. C – пространство благ и их цены $(p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n)$;
2. $u(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ – функция полезности;
3. M – доход потребителя.

Эндогенные переменные модели: наилучший и доступный потребителю набор благ:

$$\left(x_1^*,\ x_2^*,\ \dots,\ x_n^*\right).$$

Структурная форма модели (потребитель пытается найти такой набор благ, который наиболее полезен ему, но и по карману):

$$\begin{cases} u\ =\ u(x_1,\ \dots,\ x_n)\ \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\ \le\ M \\ (x_1\ \ge\ 0,\ \dots,\ x_n\ \ge 0)\ \in C \end{cases} \qquad (11)$$

К приведённой форме модель (1) трансформируется методом Лагранжа:

1. Составляется функция Лагранжа: $L = u(x_1,\ \dots,\ x_n)\ +\ l\left(M - \sum\limits_i p_i\, x_i\right)$

2. Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i}\ =\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - l \cdot p\ =\ 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial l}\ =\ M - \sum\limits_i p_i\, x_i\ =\ 0; \\ i\ =\ (1,\ \dots,\ n) \end{cases} \qquad (12)$$

3. Эти условия представляют систему $n+1$ уравнений с $n+1$ переменной. Система (3) решается либо аналитически, либо численно.

Итогом решения является: $\vec{x}^{D} = \vec{x}^{*} = \vec{x}^{D}\ (M, p_1,\ \dots,\ p_n)$ и множитель Лагранжа

$l\ =\ l\,(M, p_1,\ \ldots,\ p_n)\,.$

Набор эндогенных переменных расчитанных по Маршаллу-Вальрасу принято называть *спросом потребителя* по Маршаллу-Вальрасу.

Справедливо следующее равенство, расскрывающее **смысл множителя Лагранжа:**

$$\frac{\partial u^*}{\partial M}\ =\ l^*; \tag{13}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \ -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{14}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

Свойства функции спроса по Маршаллу-Вальрасу

Если все цены и доход изменяются в одно и тоже количество раз m, то спрос потребителя не меняется, т.е. функция спроса является однородной нулевой степени:

$$\begin{cases} \vec{x}^{*} = \vec{x}^{D}(m\ \cdot \vec{p}, m\ \cdot M) = \vec{x}^{D}(\vec{p},\ M) \\ m\ >\ 0; \end{cases}$$

На примере неоклассической функции полезности:

Математическая запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} u\ = \underset{=1}{a_0} \cdot x_1^{a1}\ \cdot\ x_2^{a2}\ \ \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i\ \le\ M \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы рассчитать спрос потребителя необходимо трансформировать модель к приведённой форме методом Лагранжа:

$$L\ = x_1^{a1}\ \cdot\ x_2^{a2} + l \cdot (M\ - p_1 x_1\ - p_2 x_2)$$

Составляется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a_1 x_1^{a1-1} x_2^{a2}\ - p_1 l\ = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a_2 x_2^{a2-1} x_1^{a1}\ - p_2 l\ = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = M\ - p_1 x_1\ - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Решим эту систему методом подстановки:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{p_1}$$

Делаем подстановку во второе уравнение:

$$a_2 x_2^{a_2-1} x_1^{a_1} - p_2 \frac{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}}{p_1} = 0$$

$$\frac{a_2 x_2^{a_2-1} x_1^{a_1} p_1}{a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} p_2} = 1 \Rightarrow \frac{a_2 x_1 p_1}{a_1 x_2 p_2} = 1 \Rightarrow x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2}$$

Подствалям в третье уравнение:

$$M - \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} - p_2 x_2 = 0 \Rightarrow M - p_2 x_2 \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} \right) = 0$$

$$\frac{M a_2}{a_1 + a_2} = p_2 x_2 \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}}$$

Теперь вычислим x_1^* :

$$x_1 p_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2} \Rightarrow x_1 = \frac{a_1 x_2 p_2}{a_2 p_1} \Rightarrow x_1^* = \frac{a_1 \frac{M a_2}{(a_1+a_2)p_2} p_2}{a_2 p_1} = \boxed{\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}}$$

Подставим значения x_1^*, x_2^* и получаем приведённую форму :

$$\begin{cases} u = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2} \right)^{a_2} \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{a_i M}{(a_1 + a_2) p_i} \le M \end{cases}$$

10. Косвенная функция полезности и смысл множителя Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности).

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в моделе Маршалла-Вальраса**:

$$u = u^* \left(\vec{x}^* \right) = u^*(\vec{p},\ M) \tag{15}$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Справдливо следующее равенство, расскрывающее **смысл мнодителя Лагранжа:**

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = l^*; \tag{16}$$

В левой части этого равенства находится велечина называемая *предельной полезностью по доходу* и имеющая смысл: *дополнительной полезности потребителя в ответ на дополнительную единицу дохода.* Завершая обсуждение модели Маршалла-Вальраса отметим следующее равенство:

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = \; -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \tag{17}$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная.

На примере неоклассической функции полезности:

Приведённая форма модели поведения потребителя Самуэльсона-Хикса:

$$\begin{cases} u = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\dfrac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1}\right)^{a1} \cdot \left(\dfrac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2}\right)^{a2} \to \max \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{a_i M}{(a_1 + a_2)p_i} \le M \end{cases}$$

Множитель Лагранжа имеет следующий вид:

$$l = \frac{a_1 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}}{p_1} = \frac{a_1 \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1}\right)^{a_1 - 1} \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2}\right)^{a_2}}{p_1} =$$

$$= \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)}\right)^{a_1 + a_2 - 1} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{a_2}$$

$$u^* = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2}\right)^{a_2} =$$

$$= \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)}\right)^{a_1 + a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{a_2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = \left(\frac{M}{(a_1 + a_2)}\right)^{a_1 + a_2 - 1} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2}{p_2}\right)^{a_2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial M} = l^* \blacksquare$$

11. Косвенная функция полезности и тождество Роя (на примере неоклассической функции полезности).

Косвенная функция полезности потребителя экономисты называют **приведённую форму функцию полезности в моделе Маршалла-Вальраса**:

$$u = u^*\left(\vec{x}^*\right) = u^*(\vec{p},\ M) \qquad (1)$$

Значение косвенной функции полезности равно *уровню полезности*.

Пусть $u^*(M, p)$ — косвенная функция полезности, где p — вектор цен на блага, а M — доход потребителя

$$\frac{\partial u^*}{\partial p_i} = -x_i^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial M} \qquad (2)$$

которое принято называть *тождеством Роя.* Предельная полезность отрицательная. Тождество Роя — в микроэкономике связь функции спроса (спрос по Маршалу-Вольрасу) и косвенной функции полезности.

Возьмем неоклассическую функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$$

Составим задачу на максимизацию полезности:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \to \max \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant M \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Составляем ф-ию Лагранжа, необходимые условия экстремума, решаем эту систему и получаем спрос по М-В:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}$$

$$x_2^* = \frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}$$

(Смотри пункт 9)

Подставляем эти иксы в неоклассическую функцию полезности и получаем косвенную функцию полезности.

$$u = \underset{=1}{a_0} \cdot \left(\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2) p_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2) p_2}\right)^{a_2}$$

12. Модель Хикса поведения потребителя и её трансформация к приведённой форме методом Лагранжа (на примере неоклассической функции полезности). Свойство функции спроса по Хиксу.

Суть модели – потребитель потребитель выбирает такой набор благ, который имеет наименьшую стоимость и обеспечивает заданный уровень полезности u_0.

$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ u(x_1, \ \dots, \ x_n) = u_0 \\ x_1 \ \geq 0, \ \dots, \ x_n \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

где экзогенные переменные:

$$\vec{p} = (p_1, \ \dots, \ p_n), \ u(x_1, \ \dots, \ x_n), \ u_0 \tag{4}$$

Эндогенные переменные:

$$\vec{x} = (x_1, \ \dots, \ x_n) \ - \ \text{значение благ потребителя} \tag{5}$$

На примере неоклассической функции полезности структурная форма выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} M = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min \\ u(x_1, x_2) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} = u_0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Составляем ф-ию Лагранжа $L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + l \cdot \left(u_0 - a_0 \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2}\right)$, необходимые условия экстремума, решаем эту систему и получаем спрос по Хиксу: x_1 и x_2, а также l – дополнительная полезность по Хиксу, которая возникает на дополнительное изменение на единицу денежных средств.

$$x_1^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a2}}$$

$$x_2^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}}$$

Тогда приведённая форма:

$$\begin{cases} M = p_1 \cdot \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}} + p_2 \cdot \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}} \\ u(x_1, x_2) = a_0 \cdot \left(\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}\right)^{\frac{a_1}{a_1 + a_2}} \cdot \left(\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}\right)^{\frac{a_2}{a_1 + a_2}} = u_0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Свойства функции спроса по Хиксу:

$$\begin{cases} \vec{x}^H = \vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^H(m \cdot \vec{p}, u_0); \\ m > 0 \end{cases}$$

Функция спрса по Хиксу является однородной функцией нулевой степени по ценам благ. Если цены всех раз изменить в m раз, то спрос не меняется и остаётся на уровне полезности u_0.

$$x_1^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{m\cdot p_2 a_2}{m\cdot p_1 a_1}\right)^{a_2}} = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_2 a_2}{p_1 a_1}\right)^{a_2}} \blacksquare$$

$$x_2^* = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{m\cdot p_1 a_1}{m\cdot p_2 a_2}\right)^{a_1}} = \sqrt[a_1+a_2]{\frac{u_0}{a_0}\left(\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2}\right)^{a_1}} \blacksquare$$

13. Функция расходов потребителя и её свойства.

Функция расходов потребителя показывает уровень расходов, минимально необходимый в имеющейся ценовой ситуации для достижения заданного уровня полезности, представляя собой тем самым функцию минимальных значений расходов от параметров p и u_0.

Приведённая форма целевой функции модели Хикса называется *функцией расходов потребителя* и её значение это *стоимость спроса по Хиксу:*

$$M^* = \sum_{i=1} p_i x_i^H = M^*(\vec{p}, u_0) \quad (6)$$

Отметим свойства:

1. Если все цены изменяются одновременно в m раз, то значение функции расходов возрастает в m раз:

$$M^*(m\cdot\vec{p}, u_0) = m \cdot M^*(\vec{p}, u_0),\ m > 0$$

2. Функция возрастает по цене данного блага;

3. Функция расходов выпукла вверх, то есть предельная полезность блага (доп. полезность возникающая в ответ на доп единицу i-ого блага) убывает по мере увеличен:

$$\frac{\partial^2 M^*}{\partial p_i^2} < 0 \quad (7)$$

4. Возрастает по каждому аргументу x_i.

14. Лемма Шепарда и тип благ в спросе по Хиксу (на примере неоклассической функции полезности).

$$\frac{\partial M}{\partial \vec{p}_j} = \vec{x}_j^{D} = \vec{x}_j^{H} - \text{Лемма Шепарда}$$

Даём классификацию блага в спросе потребителя называется ***ценным или благом высшей категории***, если спрос на это благо возрастает с ростом доходом потребителя:

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial M^*} \geq 0$$

Вот примеры таких благ: автомобили, жильё (квартиры).

Благо называется ***малоценным***, если справедливо следующее неравенство, если спрос на благо снижается по мере роста дохода потребителя (маргарин):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial M^*} < 0$$

Благо называется ***нормальным***, если спрос на него снижается в ответ на рост цены (пиво):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} < 0$$

Экономисты считают, что практически все блага являются нормальными. В спросе по Хиксу и Маршалу-Вальрасу все блага нормальны.

Благо в спросе нызвается ***гиффиновым***, если в ответ на рост цены спрос на него повышается (валюта):

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} \geq 0$$

15. Матрица Слуцкого и экономический смысл её элементов.

Теорема. Пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right) \tag{11}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)\right) = u_0 \tag{12}$$

Следствие из теоремы (уравнение Слуцкого). Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество (11) по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = S - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена следующая матрица, которая называется матрицей Слуцкого и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}} \right) \cdot \triangle \vec{p}$$

Уравнения Слуцкого $\left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \right)$ задают взаимосвязь предельного спроса по Маршаллу-Вальраса и Хикса и называются основными теориями полезности.

$\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p}$ – эффект замещения (характеризует влияние изменения цены на вызванное им перераспределение в структуре приобретаемых потребителем благ при условии неизменного бюджета покупок)

$\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p}$ – эффект дохода (характеризует изменение спроса на $i-$ ое благо в зависимости от изменения потребительского бюджета, вызванного изменением цены на k – ое благо)

16. Двойственный характер моделей поведения потребителя: теорема о двух тождествах.

Следущая теорема устанавливает взаимосвязь моделей поведения потребителя.

Теорема. Вернёмся к $\vec{x}^D(\vec{p},\ M)$ и пусть теперь уровень дохода потребителя совпадает со стоимостью спроса по Хиксу. Тогда справедливы два тождества:

1) Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p}, u_0)$:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right) \tag{1}$$

2)Тождество по экзогенным переменным $(\vec{p})$:

$$u\left(\vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)\right) = u_0 \tag{2}$$

17. Уравнения Слуцкого (на примере неоклассической функции полезности).

Наша цель состоит в установлении взаимосвязи изменений спроса по Хиксу и Маршаллу-Вальрасу в ответ на изменение цен благ. Продифференцируем тождество:

$$\vec{x}^H(\vec{p}, u_0) = \vec{x}^D\left(\vec{p},\ M^*(\vec{p}, u_0)\right)$$

по ценам и в итоге получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = S - \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Подробная запись:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Символом S обозначена следующая матрица, которая называется **матрицей Слуцкого** и имеет смысл *предельного спроса Хикса по ценам*:

$$S = \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} \cdot \triangle \vec{p} = \left(\frac{\partial \vec{x}^H}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \vec{x}^H}{\partial M^*} \cdot \frac{\partial M^*}{\partial \vec{p}}\right) \cdot \triangle \vec{p}$$

Пусть $u(x_1, x_2) = a_0(=1) \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \to \max$.

Как нам известно спрос потребителя по М-В при данной функции спроса рассчитывается по сдедующим формулам:

$$x_1^* = \frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1}; x_2^* = \frac{M a_2}{(a_1 + a_2)p_2};$$

Тогда

$$\frac{\partial x_1^D}{\partial p_1} = -\frac{a_1 M}{(a_1 + a_2)p_1^2}; \frac{\partial x_1^D}{\partial p_2} = 0;$$
$$\frac{\partial x_1^D}{\partial p_1} = 0; \frac{\partial x_2^D}{\partial p_2} = -\frac{a_2 M}{(a_1 + a_2)p_2^2};$$

$$\text{В матричной форме:}$$

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial x_i^D}{\partial p_j} = \triangle \vec{x}^D = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_2 M}{(a_1+a_2)p_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} = \frac{a_i}{(a_1+a_2)p_i};$$

$$\text{В матричной форме:}$$

$$\frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M^*} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix};$$

$$\text{Тогда спрос по Хиксу:}$$

$$\vec{x}^H = \triangle \vec{x}^D + \triangle \vec{x}^{YE}$$

$$\text{, где } \triangle \vec{x}^{YE} = \frac{\partial \vec{x}^D}{\partial M} \cdot \vec{x}^{D\,T} \cdot \triangle \vec{p}$$

$$\vec{x}^H = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_2 M}{(a_1+a_2)p_2^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 M}{(a_1+a_2)p_1} \\ \dfrac{M a_2}{(a_1+a_2)p_2} \end{pmatrix}^T \cdot \triangle \vec{p}$$

18. Классификация благ в спросе потребителя (на примере неоклассической функции полезности).

Подробная запись уравнения Слуцкого:

$$\frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial \vec{p}_j} = s_{ij} - \frac{\partial \vec{x}_i^D}{\partial M^*} \cdot \left(\vec{x}^D\right)^T$$

Нам остаётся осуществить классификацию благ в спросе потребителя.
Даём классификацию блага в спросе потребителя называется ***ценным или благом высшей категории***, если спрос на это благо возрастает с ростом доходом потребителя:

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} \geq 0$$

Вот примеры таких благ: автомобили, жильё (квартиры).
Благо называется ***малоценным***, если справедливо следующее неравенство, если спрос на благо снижается по мере роста дохода потребителя (маргарин):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial M^*} < 0$$

Благо называется ***нормальным***, если спрос на него снижается в ответ на рост цены (пиво):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} < 0$$

Экономисты считают, что практически все блага являются нормальными. В спросе по Хиксу и Маршалу-Вальрасу все блага нормальны.
Благо в спросе нызвается ***гиффиновым***, если в ответ на рост цены спрос на него повышается (валюта):

$$\frac{\partial x_i^D}{\partial p_i} \geq 0$$

Пример расчёта произодных для неоклассической функции полезности смотри в пункте 17. Остаётся просто проверить знак. (Блага будут являться нормальными и ценными)

19. Модель производства фирмой товаров и услуг (производственная функция фирмы). Свойства производственной функции (ПФ) и её основные характеристики.

Приступая к моделированию поведения фирмы на рынке благ обсудим, лежащую в основании поведении фирмы *модель производства фирмой уровней её продукции*. *Уровень продукции или блага фирмы* создаваемый за определённый отрезок времени обозначим q, в процессе создания q фирма использует факторы производства, которые занумеруем $1, 2, \ldots, n$, например:

1. Основной капитал (средство труда - здание, станки, компьютеры);
2. Живой труд (кол-во работников, кол-во человекочасов и т.д.);
3. Предметы труда (сырьё, материалы, полуфабрикаты);

....(1)

4. Финансовый капитал.

Два упомянутых выше первых факторов производства принято называть *основными факторами.* Уровни факторов производства мы обозначим по традиции $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При помощи принятой технологии F уровни фаткоров производсва трансформируются в уровень q выпуска продукции;
Вот краткая запись последней записи:

$$q = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

Математическая модель выражения (2) и носит название *производственной функции фирмы.* Ниже нам будет удобно обсуждать упомянутую модель, как функцию двух основных факторов:

$$q = F(x_1, x_2)$$

Всё что будет сказано в такой ситуации переносится без изменений на случай произвольного кол-ва факторов.

Свойства производственной функции

Свойство 1. Если уровни всех факторов свойства равны 0, то и значение функции равно 0.

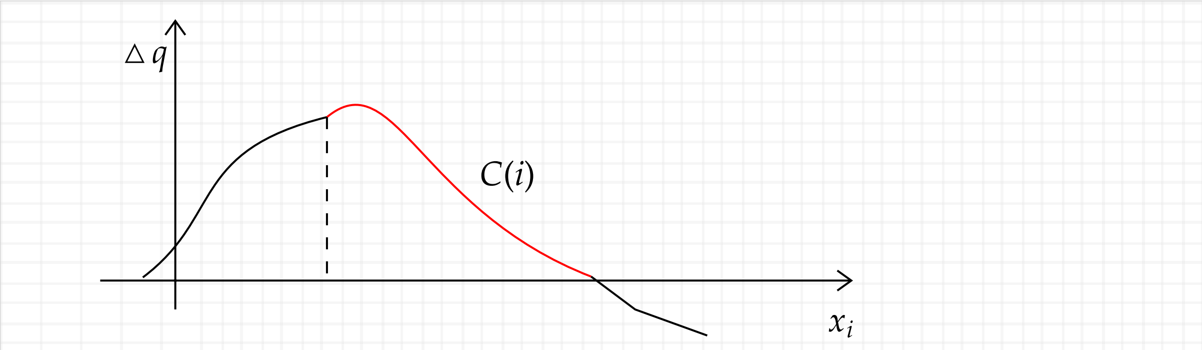
Свойство 2. Производственная функция не убывает по каждому аргументу.

Предельный выпуск фирмы по каждому фактору не отрицательный.

Свойство 3. Предельные продукты убывают с ростом факторов, то есть справедливо соотношение:

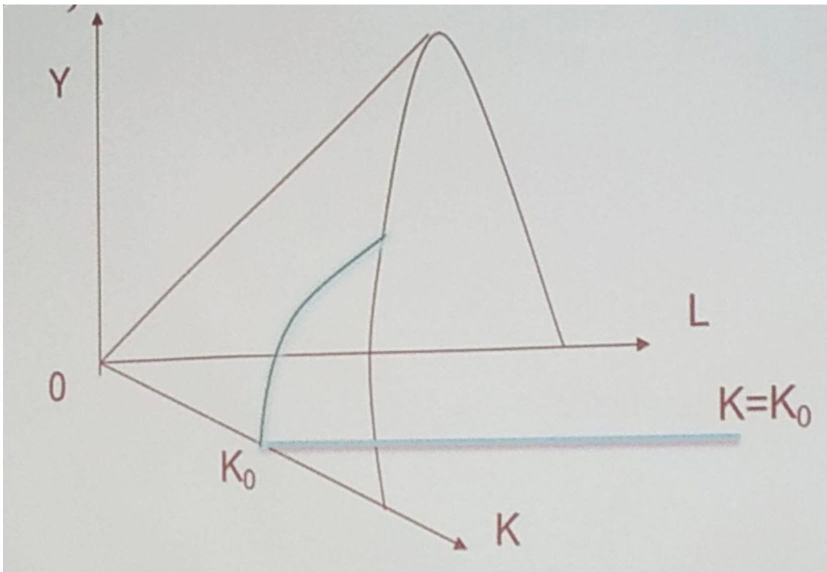
$$M_q(x_i) \to 0 \text{ при } x_i \to +\infty$$

Упомянутые свойства производсвенной функции справедливы в некоторой области C положительного орнтанта R_n^+ в R_n. И эта область называется *экономической областью.* За пределами экономической области упомянутые свойства производственной функции могут не соблюдаться вот типичный график:

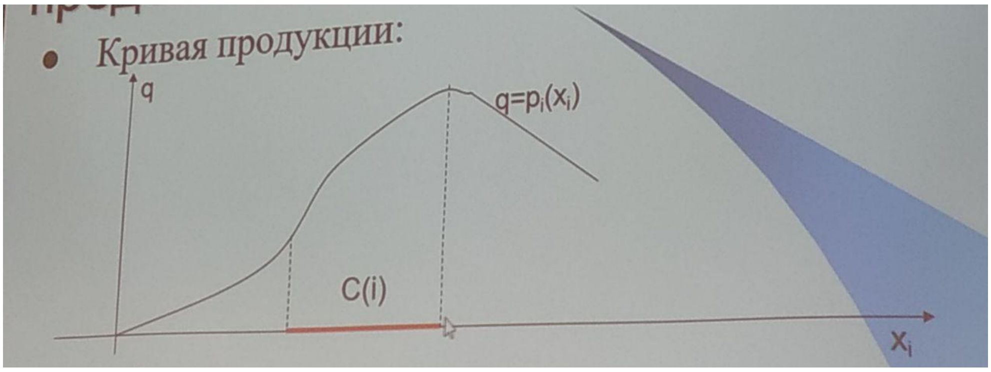


Обсудим два основных примера производсвенной функций:

$$\begin{cases} Y = F_{C-D}(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \\ A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$



Кривая линия на графике производсвенной функции Коббла-Дугласа, это график производсвенной функции при фиксированном значении капитала, такой график носит назваение *кривой продукции* фактора L.



Вторым примером производстенной функции является CES - функция. (Семинар №8)

20. Производственная функция Кобба-Дугласа, смысл её коэффициентов и уравнение изокванты.

$y\ =\ f\left(x_1\ \left(=\text{основной капитал}\right),\ x_2\left(=\text{живой труд}\right)\right).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y\ =\ a_0\ \cdot x_1^{a1}\cdot x_2^{a2} \\ a_0\ >0,\ 0\ <a_1\ <1; 0<a_2<1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Основные характеристики функции Кобба-Дугласса

1. Предельный выпуск фирмы по правилу производсва: $M_y(x_i)\ \approx \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$(7). Также называют *предельным продуктом фактора x_i.*

2. Средним продуктом фактора производства $A_y(x_i)$ экономисты называют дробь $\dfrac{y}{x_i}$.

$$A_y(x_i)\ = \frac{y}{x_i}$$

Средний продукт фактора производства - это кол-во выпуска продукции, приходящаяся на одну единицу данного фактора.

3. Эластичность выпуска по факторам производства расчитывается по правилу:

$$E_y(x_i) = M_y(x_i) : A_y(x_i)$$

Эластичность выпуска функции Коббла-Дугласа равна показателю степени a_i.

4. Изокванты заданного уровня y_0 экономисты называют *линию уровня функции,* т.е. множество различных комбинаций факторов производства при которых уровень выпуска продукции остаётся неизменным и равным заданной велечине y_0. Изокванту удобно изучать разрешив уравнение (*) относительно переменной например x_1, т.е. привратив переменную x_1 в функцию переменной x_2 зависящей, как от параметра.

$$x_1 = \left(\frac{y}{a_0 \cdot x_2^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \cdot x_2^{-\frac{a_2}{a_1}} \; (x_2 > 0)$$

21. Производственная функция Кобба-Дугласа, расчёт предельных продуктов факторов производства и доказательство их убывания.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Расчёт предельных продуктов факторов:

$$y = a_0 \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2}$$

$$M_y(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \text{где } M_y(x_i) - \text{предельный выпуск по фактору производства } x_i$$

Предельный выпуск экономисты называют ***предельным продуктом*** по фактору x_i.

Предельный продукт по 1-ому фактору:

$$M_y(x_1) = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2}$$

Предельный продукт по 2-ому фактору:

$$M_y(x_2) = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{a_2 - 1} \cdot x_1^{a_1}$$

С ростом уровня x_i – фактора его предельная продукция убывает.

$$M_y(x_1) \downarrow = a_0 \cdot a_1 \cdot x_1^{\overset{<0}{a_1 - 1}} \uparrow \cdot x_2^{a_2}$$

$$M_y(x_2) \downarrow = a_0 \cdot a_2 \cdot x_2^{\overset{<0}{a_2 - 1}} \uparrow \cdot x_1^{a_1}$$

Каждая дополнительная единица фактора менее полезна предыдущей доп. единицы. $M_y(x_i) \downarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} = a_0 \cdot a_1 \cdot \Big(\overset{<0}{a_1 - 1}\Big) \cdot x_1^{\overset{<0}{a_1 - 2}} \uparrow \cdot x_2^{a_2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = a_0 \cdot a_2 \cdot \Big(\overset{<0}{a_2 - 1}\Big) \cdot x_2^{\overset{<0}{a_2 - 2}} \uparrow \cdot x_1^{a_1} < 0$$

22. Производственная функция Кобба-Дугласа, расчёт предельной нормы технологического замещения факторов производства.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2\big(= \text{живой труд}\big)\Big).$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \\ a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{array}} \qquad (*)$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Предельной нормой технологического замещения фактора x_1 фактором x_2 называется такая дополнительная велечина $\triangle x_2$, которая компенсирует выбытие из строя еденицы фактора x_1. Принято обозначать $MRTS_{1,2} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2}$.

Следствие. Пусть уравнение изокванты представленно в виде (4):

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \tag{4}$$

Тогда

$$MRTS_{1,2} = -\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} \tag{5}$$

Пусть моделью производсвтенной функции фирмы служит функция Кобба-Дугласа:

$$y = a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$$

Получить уравнение $MRTS_{1,2}$

Решение:

1. Записываем уравнение изокванты: $a_0 \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} = y_0$
2. Трансформируем к виду (4): $x_2 = \sqrt[\beta]{\frac{y_0}{a_0 \cdot x_1^{\alpha}}} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ (4')
3. Вычисляем по правилу (5) предельную норму замещения $MRTS_{1,2}$.

$$-\frac{\partial x_2(x_1; y_0)}{\partial x_1} = -\left(-\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)}$$

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x_2(x_1; y_0)}{x_1} \tag{6}$$

23. Производственная функция Кобба-Дугласа, эластичность замещения факторов производства.

$y = f\Big(x_1 \ \big(= \text{основной капитал}\big),\ x_2 \big(= \text{живой труд}\big)\Big)$.

$$\boxed{\begin{aligned} & y = a_0 \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \\ & a_0 > 0,\ 0 < a_1 < 1; 0 < a_2 < 1 \end{aligned}} \tag{*}$$

Производственная фукций (*) называется *производственной функцией Кобба-Дуглоса.*

Эластичностью замещение $i-$ого фактора $j-$ым называется относительное изменение на изокванте отношения факторов производства в ответ на относительное изменение предельной нормы технологического замещение на 1%.

Вот математическое выражение данного определения:

$$\sigma_{ij} = \frac{d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\frac{x_j}{x_i}} : \frac{d\,MRTS_{i,j}}{MRTS_{i,j}} \tag{8}$$

Вычислим эластичность замещения Кобба-Дугласса первого фактора вторым. Согласно формулы (8) мы сначала найдём числитель делимого, то есть абсолютное изменение отношения:

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \tag{9}$$

2. Находим дифференциал

$$\triangle\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \approx d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle\, x_1 \tag{10}$$

3.

$$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-2} \cdot \triangle\, x_1}{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\triangle\, x_1}{x_1} \tag{11}$$

4.

$$MRTS_{1,2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}}{x_1} \tag{6}$$

5.

$$\triangle\, MRTS_{1,2} \approx \frac{\partial MRTS_{1,2}}{\partial x_1} \triangle\, x_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}\right)'_{x_1} \cdot \triangle\, x_1 = \tag{7}$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)} \cdot \frac{\triangle\, x_1}{x_1}$$

6.

$$\frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}} \cdot \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \cancel{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}}{\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}} \cdot \cancel{\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \cancel{x_1^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)}}} = -\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}$$

7.

$$\sigma_{1,2} = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} : \frac{d\,MRTS_{1,2}}{MRTS_{1,2}} = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}}{-\frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}} = 1\%$$

24. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES – функция) и её свойства.

Рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \quad (1)$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \quad (2)$$

которая называется *производственной функцией с постоянной эластичностью замещения*.

Изучим основные **свойства** CES функции:

☑ **Свойство 1.**

$$F_{CES}(0,0) = 0 \quad (3)$$

Рассматривая уравнение (1) при $n = 2$, мы обнаружим, что в точке 0 функция (1) неопределена, то есть имеет особенность. Мы сейчас покажем, что в 0 CES функция имеет устранимую особенность это значит, что

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0^+ \\ x_2 \to 0^+}} F_{CES}(x_1, x_2) = 0 \quad (3')$$

Перепишем уравнение (1):

$$y = \frac{a_0}{\left(\frac{a_1}{x_1^{\rho}} + \frac{a_2}{x_2^{\rho}}\right)^{-\frac{h}{\rho}}} \quad (1')$$

Пусть в знаменателе уравнения (1') переменная x_1 стремится к 0^+, тогда $\frac{a_i}{x_i^{\rho}}$ стремится к ∞ и весь знаменатель следоваетельно стремится к ∞. Тогда вся дробь стремится к 0.Тогда

$$y = \begin{cases} a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}, \text{при } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 \text{ при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

Обратим внимание каждый производственный фактор необходим в том смысле, что при нулевом уровне какого-то из этих факторов, весь выпуск равен 0.

☑ **Свойство 2.** Выпуск продукции возрастает при росте факторов:

$$M_y(x_i) > 0 \tag{4}$$

$M_y(x_i)$ *предельный продукт* i-ого фактора. Добавим предельные величины рассчитываются как производные:

$$\frac{\partial F_{CES}(x_1, x_2)}{\partial x_i} > 0$$

Удобно прологорифмировать уравнение CES функции:

$$\ln y = -\frac{h}{\rho} \ln\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + \ln a_0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} = \left(-\frac{h}{\rho}\right) \cdot \frac{(-\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$$

☑ **Свойство 3.** С ростом уровня $x_i \uparrow$ фактора его предельный выпуск убывает $M_y(x_i) \downarrow$. Каждая дополнительная еденица фактора менее полезна, чем предыдущая дополнительная еденица.

Вычислим вторую производную по каждому фактору:

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_1^2} = h \cdot a_1 \left(\frac{x_1^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}}\right)'_{x_1} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot x_1^{-(2+\rho)} \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) + x_1^{-(1+\rho)} \cdot a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-(1+\rho) \cdot \left(x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{\left(-(1+\rho) \cdot x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}\right) + a_1 \cdot \rho \cdot x_1^{-2(1+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$= h \cdot a_1 \frac{-x_1^{-2(1+\rho)} a_1 - (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} =$$

$$-h \cdot a_1 \frac{x_1^{-2(1+\rho)} a_1 + (1+\rho) \cdot a_2 \cdot x_2^{-\rho} \cdot x_1^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

$$\frac{\partial^2 \ln y}{\partial x_2^2} = h \cdot a_2 \left(\frac{x_2^{-(1+\rho)}}{a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}} \right)'_{x2} =$$

$$= -h \cdot a_2 \frac{x_2^{-2(1+\rho)} a_2 + (1+\rho) \cdot a_1 \cdot x_1^{-\rho} \cdot x_2^{-(2+\rho)}}{\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^2} < 0 \blacksquare$$

Следовательно, производственная функция выпукла вверх, что доказывает третье свойство.

Итог: CES функция удовлетворяет основным требованиям производсвенных функций фирмы.

25. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES – функция) и уравнение её изокванты.

Рассмотрим функцию со следующим уравнением:

$$y = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + \ldots + a_n \cdot x_n^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}} \quad (5)$$

$$a_i > 0,\ \rho > 0, h > 0, i = 1, 2,\ \ldots, n \quad (6)$$

которая называется *производственной функцией с постоянной эластичностью замещения*.

Уравнение изокванты

Вспомним понятие изокванты производственной функции так принято называть множество комбинаций значений факторов производства при которых уровень выпуска остаётся неизменным. Обозначим символом y_0. Тогда уравнение изокванты для производсвтенной функции имеет вид:

$$F_{CES}(x_1, x_2) = y_0 \quad (6)$$

Мы можем данное уравнение разрешить относительно велечины x_2, то есть найти:

$$x_2 = x_2(x_1; y_0) \quad (6')$$

Задача. Построить уравнение изокванты CES функции:

1. $y_0 = a_0 \cdot \left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{h}{\rho}}$

2. $\left(a_1 \cdot x_1^{-\rho} + a_2 \cdot x_2^{-\rho}\right) = \left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}}$

3. $x_2^{-\rho} = \frac{1}{a_2}\left(\left(\frac{y_0}{a_0}\right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho}\right)$

4. $$x_2 = \left(\frac{1}{a_2} \left(\left(\frac{y_0}{a_0} \right)^{-\frac{\rho}{h}} - a_1 \cdot x_1^{-\rho} \right) \right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (6'')$$

(6'') - *уравнение изокванты.* У изокванты имеются асимптоты.

26. Учёт в ПФ фирмы научно-технологического прогресса (НТП).

Пусть $q_t; x_{1t}, \ldots, x_{nt}$ – уровень выпуска фирмы и значения факторов производства в период времени t. В технологии F фирмы присутствует НТП, если при неизменных уровнях $x_{1t}, \ldots, x_{nt}$ выпуск фирмы q_t со временем возрастает.

$q_t = F(x_{1t}, \ldots, x_{nt}, A_t),\ A_t \geq 1,\ A_t \uparrow t$

Три варианта:

- Нейтральный по Хиксу $q_t = A_t F(K_t, L_t)$
- Капиталосберегающий по Солоу $q_t = F(A_t \cdot K_t, L_t)$
- Трудосберегающий по Харроу $q_t = F(K_t, A_t \cdot L_t)$

27. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией – правила расчёта дохода, издержек и предельного дохода. Структурная и приведённая форма модели поведения фирмы в долгосрочном периоде. Спрос фирмы на факторы производства.

Рынок называется **конкурентным**, если ни продавцы блага, ни покупатели не в состоянии влиять на цену блага p_0, то есть ни фирма, ни покупатели не имеют власти над рынком.

p_0 – цена блага, которое фирма поставляет на рынок, экзогенная переменная.

Доход фирмы: $y = p_0 q = p_0 F(x_1, \ldots, x_n)$

Издержки, возникающие в процессе выпуска q: $c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Предельный доход $M_y(q) = p_0$

Долгосрочный период – нет ограничений на уровни факторов производства, то есть фирма всегда имеет время выбрать уровни факторов для максимизации прибыли.

Структурная форма:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot F(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to max \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

Необходимое условие максимума прибыли:

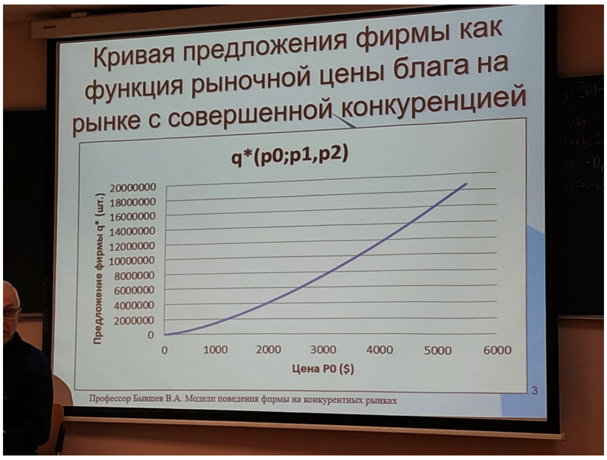
$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Приведенная форма:

$\vec{x}^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)^T = \vec{x}^*(p_0, \vec{p})$ – спрос фирмы на факторы производства или локальное рыночное равновесие фирмы.

$q_* = F\left(\vec{x}^*(p_0, \vec{p})\right) = q_*(p_0, \vec{p})$ – оптимальный выпуск или предложение фирмы.

$$q_* \uparrow = q_*(p_0 \uparrow, \vec{p})$$



с ростом цены блага p_0 будет увеличиваться и оптимальный уровень предложения фирмы.
Экономистыназвают переменную q_* как функцию аргумента p_0 кривой предложения.

28. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией. Структурная и приведённая форма модели поведения фирмы в долгосрочном периоде. Кривая предложения фирмы.

Рынок называется **конкурентным**, если ни продавцы блага, ни покупатели не в состоянии влиять на цену блага p_0, то есть ни фирма, ни покупатели не имеют власти над рынком.
p_0 – цена блага, которое фирма поставляет на рынок, экзогенная переменная.
Доход фирмы: $y = p_0 q = p_0 F(x_1, \dots, x_n)$

Издержки, возникающие в процессе выпуска q: $c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Предельный доход $M_y(q) = p_0$
Долгосрочный период – нет ограничений на уровни факторов производства, то есть фирма всегда имеет время выбрать уровни факторов для максимизации прибыли.
Структурная форма:

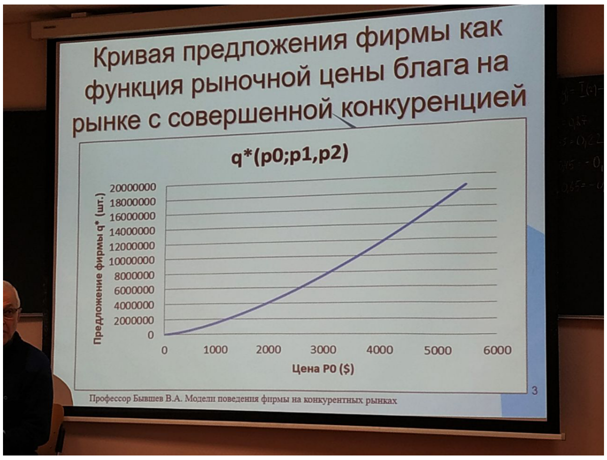
$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot F(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to max \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

Необходимое условие максимума прибыли:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i = 0,\ i = 1, \dots, n$$

Приведенная форма:
$\vec{x}^* = \left(x_1^*, \dots, x_n^*\right)^T = \vec{x}^*(p_0, \vec{p})$ – спрос фирмы на факторы производства или локальное рыночное равновесие фирмы.
$q_* = F\left(\vec{x}^*(p_0, \vec{p})\right) = q_*(p_0, \vec{p})$ – оптимальный выпуск или предложение фирмы.

$$q_* \uparrow = q_*(p_0 \uparrow, \vec{p})$$



с ростом цены блага p_0 будет увеличиваться и оптимальный уровень предложения фирмы.

Экономисты назвают переменную q_* как функцию аргумента p_0 кривой предложения.

29. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией. Структурная и приведённая форма

модели поведения фирмы в краткосрочном периоде. Кривая предложения фирмы.

Рынок называется конкурентным, если ни продавцы блага, ни покупатели не в состоянии влиять на цену блага p_0, то есть ни фирма, ни покупатели не имеют власти над рынком.

p_0 – цена блага, которое фирма поставляет на рынок, экзогенная переменная.

Краткосрочный период – существуют ограничения на уровни факторов производства.

Структурная форма:

$$\begin{cases} \pi = p_0 F(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i * x_i \to max \\ \vec{f}(\vec{x}) \leqslant \vec{b} \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_1^0$ – частный случай

Необходимое условие максимума прибыли:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} - p_0 = 0, \ i = 1, \dots, n$$

Необходимое условие максимума прибыли:

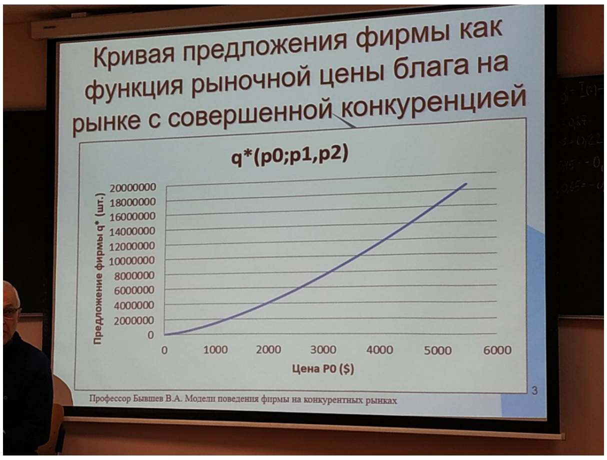
$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i = 0, \ i = 1, \dots, n$$

Приведенная форма:

$\vec{x}^* = \left(x_1^*, \ \dots, \ x_n^*\right)^T = \vec{x}^*(p_0, \vec{p})$ – спрос фирмы на факторы производства или локальное рыночное равновесие фирмы.

$q_* = F\left(\vec{x}^*(p_0, \vec{p})\right) = q_*(p_0, \vec{p})$ – оптимальный выпуск или предложение фирмы.

$$q_* \uparrow = q_*(p_0 \uparrow, \vec{p})$$



с ростом цены блага p_0 будет увеличиваться и оптимальный уровень предложения фирмы.

Экономисты назвают переменную q_* как функцию аргумента p_0 кривой предложения.

30. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией. Структурная форма модели минимизации издержек в долгосрочном периоде. Спрос фирмы на факторы производства по Хиксу.

Рынок называется конкурентным, если ни продавцы блага, ни покупатели не в состоянии влиять на цену блага p_0, то есть ни фирма, ни покупатели не имеют власти над рынком.

p_0 – цена блага, которое фирма поставляет на рынок, экзогенная переменная.

Долгосрочный период – нет ограничений на уровни факторов производства, то есть фирма всегда имеет время выбрать уровни факторов для максимизации прибыли.

Структурная форма:

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i * x_i \rightarrow min \\ F(x_1, \dots, x_n) = q_0 \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Модель (1) имеет ту же аналитическую форму, что и модель Хикса. И поэтому уровни факторов производства называются спросом по Хиксу.

$\vec{x}^* = \left(x_1^*, \dots, x_n^*\right)^T = \vec{x}^*(q_0, \vec{p})$

31. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией.
Структурная форма модели минимизации издержек фирмы в краткосрочном периоде. Условный спрос фирмы на факторы производства по Хиксу.

Рынок называется с **совершенной конкуренцией**, если ни продавцы, ни покупатели не в состоянии влиять на велечину p_0 (цена блага).
В ситации конкурентного рынка **доход фирмы** от реализации её выпуска q:

$$y = p_0 \cdot q = p_0 \cdot F(x_1,\ \dots, x_n)$$

c **издержки** фирмы:

$$c = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

$p_1, p_2,\ \cdots, p_n$ - **цены факторов производства**
Валовая **прибыль** фирмы:

$$\pi = \pi(x_1, x_2,\ \dots, x_n) = y - c$$

Краткосрочный период - период, когда у фирмы есть ограничение на приобретение соответствующих уровней факторов (капитал, работники, оборудование) производства.

Бывают ситуации, когда фирма вынуждена формировать оптимальные уровни факторов производства при заданном объеме выпуска продукции. И тогда спрос фирмы на факторы производства в долгосрочном периоде подчиняется концепции минимизации издержек.
Структурная форма модели спроса фирмы:

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ F(x_1,\ \dots, x_n) = q_0 \end{cases} \tag{1}$$

$$(q_0,\ p_1,\ \dots, p_n)\ - \text{экз. пер}$$

$$\begin{cases} \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{спрос на факторы производства}},\ c_*,\ y_*,\ \pi_* \\ y_* = p_0 \cdot q_0;\ \pi_* = y_* - c_*; \end{cases} - \text{энд. пер}$$

Модель (1) имеет туже аналитическую форму, что и модель Хикса и поэтому уровни факторов производства, вычисленные по этой модели экономисты называют **спросом фирмы на факторы производства по Хиксу.**
Модель минимизации издержек в кроткосрочном периоде базируется на том, что на ресурсы фирмы накладываются определённые ограничения, например, ввиде заданного уровня каких-то факторов производтсва и тогда модель (1) принимает вид:

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min \\ F(x_1, \dots, x_n) = q_0; \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_1; \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \leqslant b_m; \\ x_1, \dots, x_n \geqslant 0; \end{cases} \tag{2}$$

Вычисленные по модели (2) уровни спроса экономисты называют **спросом по Хиксу в краткосрочном периоде или спрос по Хиксу.**

32. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией.
Модель предложения фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы.
Функции условного спроса на факторы производства и условного предложения.
Свойство.
Долгосрочный путь развития фирмы.

Рынок называется с **совершенной конкуренцией**, если ни продавцы, ни покупатели не в состоянии влиять на велечину p_0 (цена блага).
В ситации конкурентного рынка **доход фирмы** от реализации её выпуска q:

$$y = p_0 \cdot q = p_0 \cdot F(x_1, \dots, x_n)$$

c **издержки** фирмы:

$$c = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ **- цены факторов производства**
Валовая **прибыль** фирмы:

$$\pi = \pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = y - c$$

Модель поведения фирмы в долгосрочном периоде:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1, \dots, x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

В модели (3) предполагается, что фирма может позволить себе любой уровень издержек c при котором максимизируется прибыль. На практике уровень издержек ограничивается сверху некоторой велечиной c_0. Тогда модель (3) трансформируется в следующую оптимизационную модель на условный экстремум:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot \underbrace{F(x_1,\dots,x_n)}_{y} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \to \max \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \leqslant c_0; \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

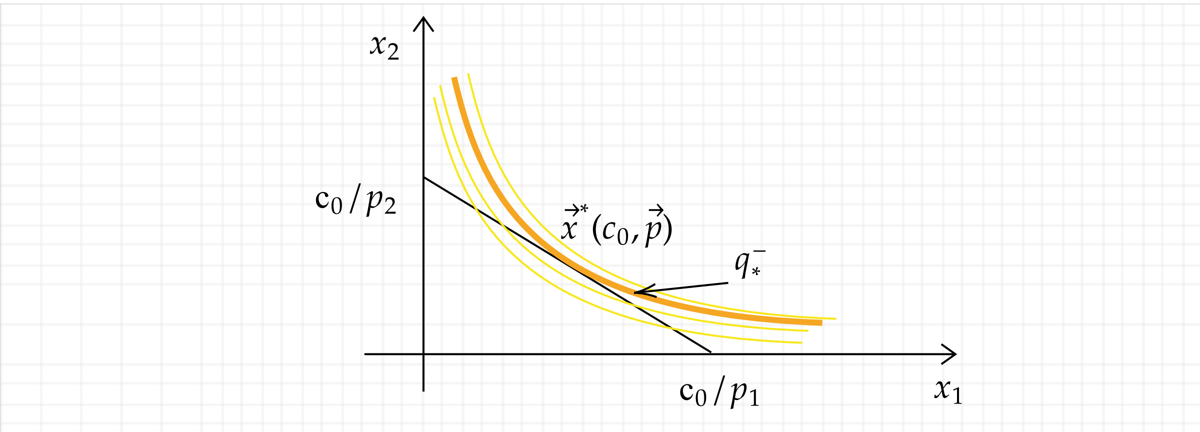
$$\underbrace{p_0}_{\text{(цена блага)}}; \quad \underbrace{p_1,\dots,p_n}_{\text{(цены факторов производства)}}; \quad \underbrace{c_0}_{\text{заданный уровень издержек}} \text{ – экзогенные переменные}$$

$$\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\text{уровни факторов пр–ва}} \text{ – эндогенная переменная}$$

Модель со спецификацией (4) равносильна следующей модели предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы.

Модель предложения выпуска фирмы при заданном уровне затрат на ресурсы:

$$\begin{cases} q = \underbrace{F(x_1,\dots,x_n)}_{y} \to \max \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}_{c} \leqslant c_0; \\ x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$



Отрезок прямой линии это изокоста уровня c_0. Оранжевой линией обозначена такая изокванта, которая во-первых имеет максимальный уровень x^*, а во вторых касается изокосты уровня c_0. Точка касания $\vec{x}^*(c_0,\vec{p})$ это и есть решение задачи. Это решение мы представим ввиде

$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(c_0,\vec{p})$$

Находится методом Лагранжа и носит название у**словного спроса фирмы на факторы производства**. В свою очередь функция условного предложения фирмы получается в результате подстановки в производственную функцию фирмы:

$$q_* = F\left(\vec{x}^*\right) = q_*(c_0,\vec{p})$$

Функция условного предложения фирмы является монотонно возрастающей функцией заданного уровня издержек c:

$$q_*(c,\ \vec{p}) \uparrow c$$

Следствие. Существует обратная функция к функции условного предложения:

$$c = c(q; \vec{p})$$

которая так же является возрастающая и называется функцией издержек фирмы.

Вернёмся к уравнению условного спроса фирмы и будем рассматривать $\vec{x}^* = \vec{x}^*(c_0, \vec{p})$ при фиксированных ценах на факторы производства. Изменение вектора $\vec{x}^*$ в ответ на увелечение переменной c экономисты называют долгосрочным путём расширения фирмы.

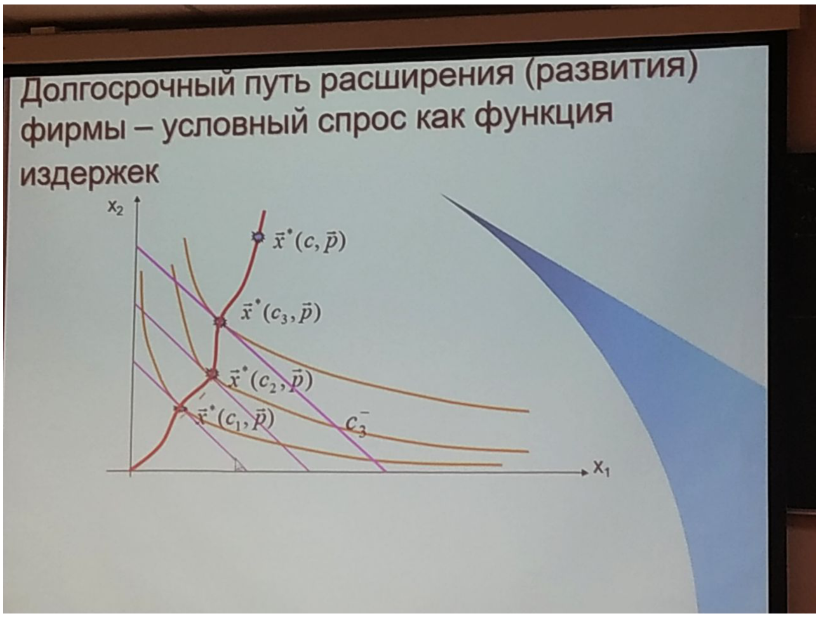


Figure 1: Догосрочный путь развития фирмы

$c_1 < c_2 < c_3 < \ \dots$

33. Фирма на рынке с совершенной конкуренцией.
Модель предложения фирмы при известной функции издержек.
Критерий максимума прибыли.

Рынок называется **конкурентным**, если ни продавцы, ни покупатели не в состоянии влиять на велечину p_0 (цена блага).
В такой ситации (конкурентного рынка) доход фирмы от реализации её выпуска q:

$$y = p_0 \cdot q = p_0 \cdot F(x_1,\ \dots, x_n)$$

c издержки фирмы (затраты) возникающие в процессе выпуска q блага фирмы

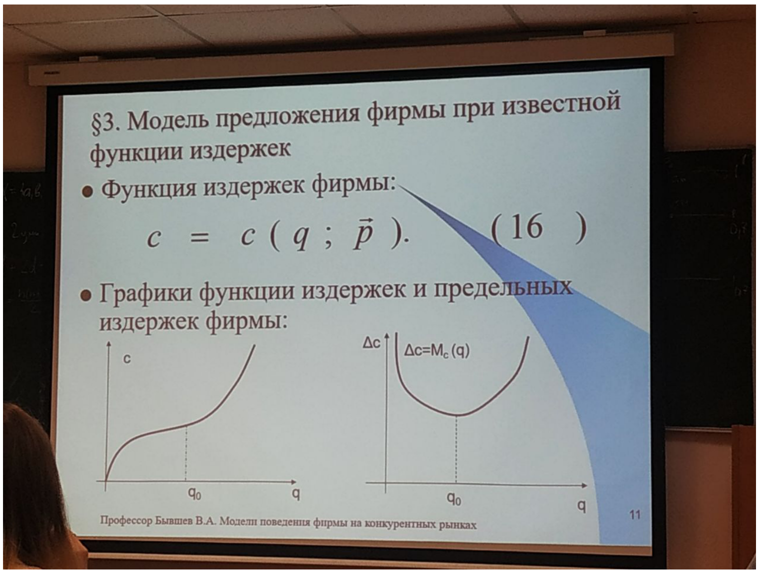
$$c = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

$p_1, p_2,\ \cdots, p_n$ - цены факторов производства

Валовая прибыль фирмы:

$$\pi = \pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = y - c$$

Модель предложения фирмы при известной функции издержек.



слева график издержек, справа график предельных издержек.
Модель предложения фирмы:

$$\begin{cases} \pi = p_0 \cdot q - c(q; \vec{p}) \to \max \\ q \geqslant 0 \end{cases}$$

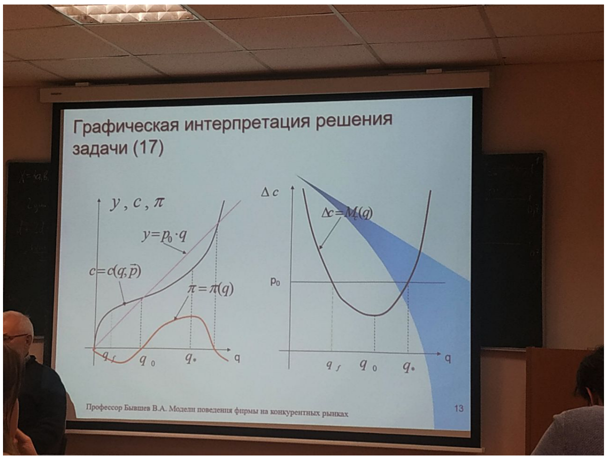
Необходимое условие максимума прибыли:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p_0 - \frac{\partial c}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial q} = M_c(q) = p_0 = M_y(q)$$

Это равенство означает, что необходимым условием максимума прибыли служит совпадение предельных издержек $M_c(q)$ с рыночной ценой блага p_0, то есть с предельным доходом фирмы $M_y(q)$.
Критерий максимума прибыли фирмы:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0; \frac{\partial \pi^2}{\partial q^2} = -\frac{\partial c^2}{\partial q^2} = -\frac{dM_c(q)}{dq} < 0$$

Изобразим на графике все участвующие в этой модели функции:



Розовый график - график дохода. Чёрная линия - это затраты фирмы. Оранжевый цвет - это график прибыли.

34. Фирма на рынке с несовершенной конкуренцией.
Рынок нормального блага, функция спроса, обратная функция спроса (закон спроса на благо монополиста) и её две простейшие модели.
Доход монополиста и его предельный доход.
Характер изменения предельного дохода монополиста в ответ на увеличения предложения
блага.

Несовершенная конкуренция — согласно экономической теории, это такая ситуация, в которой структура рынка не соответствует условиям для существования совершенной конкуренции.
Обратимся к моделям поведения потребителя Маршалла-Вальраса и отметим уравнение спроса потребителя на любое благо входящее в его спрос

$$x_i = \underbrace{d_i}_{=\frac{a_i}{a_1+a_2}} \cdot \frac{M}{p_i} \downarrow,\ i = 1,2 \qquad (5)$$

На том же занятии мы отметили следующее свойство потребителя:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{d_i M}{p_i^2} < 0 \qquad (6)$$

Это неравенство означает, что с ростом цены блага, спрос на него снижается. Такое благо называется *нормальным*. Экономисты подчёркивают, что практически все блага являются нормальными.
спрос является монотонной функцией цены, а это значит, что существует обратная функция:

$$p = p(x) = \frac{d_i \cdot M}{x_i} \qquad (7)$$

Ниже мы обозначим символом q спрос на нормальное благо на рынке с несовершенной конкуренцией и отметим две простейшие модели обратной функции спроса:

$$\begin{cases} p(q) = d_0 + d_1 \cdot q;\ d_1 < 0\ (4.1) \\ p(q) = d_0 \cdot e^{d_1 \cdot q};\ d_1 < 0\ (4.2) \end{cases} \quad (8)$$

на рынке нормально блага уровень спроса находится в обратной зависимости от цены блага и с ростом цены снижается.

Монополист, как любая фирма при определении уровней факторов производства стремится получить максимальную прибыль и поэтому модель поведения монополиста имеет следующую структурную форму:

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \\ q = F(x_1, \ldots, x_n) \\ x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$p_1, \ldots, p_n - \text{экз}$$

$$x_1, \ldots, x_n, \pi, q, y, c - \text{энд.}$$

Модель (6) трансформируется к приведённой форме методом Лагранжа. Приведенная форма является функцией

$$\vec{x}^* = \left(x^*, \ldots, x_n^*\right) = \vec{x}^*(\vec{p}) \quad (10)$$

$$q_* = F\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = q_*(\vec{p}) \quad (11)$$

$$y_* = p(q_*) \cdot q_* = y_*(\vec{p}) \quad (12)$$

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = c_*(\vec{p}) \quad (13)$$

$$\pi_* = y_* - c_* = \pi_*(\vec{p}) \quad (14)$$

35. Фирма на рынке с несовершенной конкуренцией.
Структурная и приведённая форма модели поведения монополиста в долгосрочном периоде. Необходимое условие максимума прибыли монополиста.

36. Фирма на рынке с несовершенной конкуренцией. Необходимое условие максимума прибыли монополиста. Есть ли у монополиста кривая предложения?

Несовершенная конкуренция — согласно экономической теории, это такая ситуация, в которой структура рынка не соответствует условиям для существования совершенной конкуренции.

Модель поведения монополиста в догосрочном периоде имеет структурную форму (7):

$$\begin{cases} \pi = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \\ q = F(x_1, \ldots, x_n) \\ x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \ \geqslant 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$p_1, \ldots, p_n - \text{экз}$$

$$x_1, \ldots, x_n, \pi, q, y, c - \text{энд.}$$

К приведённой форме модель (7) трансформируется методом Лагранжа. Спрос монополиста на факторы производтсва мы обозначи $x(\vec{p})$. Подставляя этот спрос в производственную функцию монополиста находим монополный объём предложения (это функция только цен факторов производства, не зависит от рыночной цены блага). Поэтому говорят, что монополист лишён кривой предложения. Так же как и в сиуации предложение на конкурентом рынке (смотри лекцию № 7). **Необходимое условие оптимального предложения монополиста имеет вид:**

$$M_y(q_*) = M_c(q_*) \tag{12}$$

37. Фирма на рынке с несовершенной конкуренцией: олигополия, обратная функция спроса олигополии, доход и прибыль олигополиста, отличие уравнения прибыли олигополиста от уравнения прибыли монополиста.

Рынок является **олигопольным**, если небольшое число фирм поставляют на этот рынок идентичные блага или незначительно отличающиеся блага. Например, к таким рынкам относится рынок нефти, рынок операционных систем.

Обозначим кол-во таких фирм символом n, а символами

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

будем обозначать уровень предложения данного блага этими фирмами. Общий уровень поставки блага на рынок определяется по правилу:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \tag{15}$$

Мы полагаем, что данное благо является нормальным и известно обратная функция спроса рынком данного блага.

Обратная функция спроса олигополии:

Извесен уровень спроса олигополиста:

$$p(q(q_1, q_2, \ldots, q_n)) \tag{16}$$

Отличие уравнения прибыли олигополиста от уравнения прибыли монополиста:

Доход и прибыли олигополиста определяются по правилу (17)

$$y_i = p(q(q_1, q_2, \dots, q_n)) \cdot q_i$$
$$\pi_i = y_i - c_i \tag{17}$$

Отличие №1. Предполагается, что данное благо является нормальным и это значит, что цена блага на рынке является убывающей функцией его предложения. В отличие от монопольного рынка на формирование рыночной цены оказывают воздействие уровни предложения всех фирм.

$$p(q) \downarrow q$$
$$\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{1}$$

Отличие №2. Доход одной из олигополий вычисляется по правилу:

$$y_i = p\left(\sum_{j=1}^{n} q_j\right) \cdot q_i \tag{2}$$

– это значит, что на доход воздействуют все фирмы на этом рынке.

38. Модель олигополии Курно: предпосылки и явный вид приведенной формы предложения олигополистов. Рыночная цена и ее значение при неограниченном увеличении количества олигополистов.

Модель олигополии Курно:

Рынок является олигопольным, если небольшое число фирм поставляют на этот рынок идентичные блага или незначительно отличающиеся блага. Например, к таким рынкам относится рынок нефти, рынок операционных систем.

Предпосылка №1.

Обозначим кол-во таких фирм символом n, а символами

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

будем обозначать уровень предложения данного блага этими фирмами. Общий уровень поставки блага на рынок определяется по правилу:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \tag{15}$$

Мы полагаем, что данное благо является нормальным и известно обратная функция спроса рынком данного блага.

Предпосылка №2.

Извесен уровень спроса олигополиста:

$$p(q(q_1, q_2, \dots, q_n)) \tag{16}$$

Предпосылка №3.

Доход и прибыли олигополиста определяются по правилу (17)

$$y_i = p(q(q_1, q_2, \dots, q_n)) \cdot q_i$$
$$\pi_i = y_i - c_i \tag{17}$$

Предположение модели олигополии Курно

Предположение №1.

Обратная функция спроса является линейной:

$$p = b_0 + b_1 \cdot q$$

Предположение №2.

Функции издержек являются линейными и одникавыми у всех олигополистов:

$$c_i = d + m \cdot q_i \tag{18}$$

Замечание. Постоянный член в выражении (18) называют постоянными издержками, которые независят от уровня выпустка. Второе слагаемое называется переменными издержками, котрые возрастают в ответ на увеличение продукции q_i при этом коэффициент m имеет смысл. Причем коэффициент m имеет смысл предельных издержек.

Предположение №3.

Отсутсвует сговор олигополистов:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \underset{\substack{1 \text{ при } i=j \\ 0 \text{ при } i \neq j}}{\delta_{ij}} \text{ – символ Кранекера} \tag{19}$$

Поясним смысл предпосылки (19) двумя примерами. Пусть $i = j = 1$, тогда $\frac{\partial q_1}{\partial q_1}$ – это изменение в ответ на изменение величины q_1 на 1. $\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$ – это означает, что величина q_1 не зависит от величины q_2. Экономисты назвают предполагаемыми вариациями.

Модель олигополии Курно

Структруная форма

$$\begin{cases} \pi_i = p(q) \cdot q - c_i \to \max \\ q = q_1 + \ldots + q_n \\ q_i \geqslant 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{20}$$

b_i, m_i, d_0, d_1 – экзогенные переменные

$(q_1, \ldots, q_n), (y_1, \ldots, y_n), (c_1, \ldots, c_n), (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ – эндогенные переменные

Замечание. В этой форме содержится n задач на безусловный экстремум. Эти задачи связаны между собой аргументом $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

Таким образом, эндогенными переменными в этой моделе являются уровни $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Поставок блага на рынок монополистами. Значения по модели Курно выбираются такими, чтобы прибыль каждого олигополиста оказалась максимальной. Необходимое условие прибыли каждой фирмы имеет вид (21):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 \\ i = 1, 2, \ \dots, n \end{cases} \tag{21}$$

(21) образует систему алгебраический n уравнений.

Справедлива следующая теорема.

1. Решение системы (21) имеет вид (22):

$$q_i^* = \frac{b_0 - m}{b_1 \cdot (n+1)} \tag{22}$$

2. Рыночная цена блага в ситуации (22) определяется по правилу (23):

$$p = \frac{b_0 + n \cdot m}{n+1} \tag{23}$$

3. С увеличением кол-ва фирм на олигопольном рынке, рыночная цена имеет пределом величину m:

$$p \to m \text{ при } n \to \infty$$

То есть рынок всё время приближается к конкурентному.

39. Обобщение модели олигополии Курно. Явный вид приведённой формы предложения олигополистов при $n = 2$.

Пусть олигопольный рынок контролируют 2 фирмы $n = 2$. Обратная функция спроса имеет следующие коэффициенты

$$\begin{cases} d_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25 \cdot 10^{-15}; \end{cases}$$

Функция издержек олигополистов имеют следующие коэффициенты:

$$b_1 = 0.5; \ m_1 = 2.1 \cdot 10^{-8};$$
$$b_2 = 0.3; \ m_2 = 5.9 \cdot 10^{-8};$$

Требуется по модели Курно рассчитать:

1. Оптимальное для олигополистов уровня монополистов фирмы (q_1^*, q_2^*)
2. Уровни дохода (y_1^*, y_2^*)
3. Оптимальные уровни издержек (c_1^*, c_2^*)
4. Оптимальные уровни прибыли (π_1^*, π_2^*)

Запишем уравнение прибыли каждой фирмы:

$$\pi_1 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1)$$
$$\pi_2 = p(\underset{q_1+q_2}{q}) \cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2)$$

Формируем необходимое условие прибыли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_1}}_{1} \cdot q_1 + \underbrace{p(q)}_{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_1}{\partial q_1}}^{=1} - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_2}}_{1} \cdot q_2 + \underbrace{p(q)}_{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_2}{\partial q_2}}^{=1} - m_2 = 0; \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = d_1 q_1 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = d_1 q_2 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 q_1 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_1 - d_0; \\ d_1 q_2 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_2 - d_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \dfrac{m_1 - d_0}{d_1}; \\ q_1 + 2q_2 = \dfrac{m_2 - d_0}{d_1}; \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{a_{1,1} = 2, a_{1,2} = 1, a_{1,0} = \frac{m_1 - d_0}{d_1}}$$

$$\boxed{a_{2,1} = 1, a_{2,2} = 2, a_{2,0} = \frac{m_2 - d_0}{d_1}}$$

Подставим свои данные:

$b_i(k) = b_i + 0.1 \cdot k; m_1(k) = m_1 + 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$

номер по журналу $m_2(k) = m_2 - 0.1 \cdot k \cdot 10^{-8}$

$$k = 1$$

$$\begin{cases} d_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}; \\ d_1 = -1.25 \cdot 10^{-15}; \\ b_1 = 0.5 + 0.1 = 0.6; \\ m_1 = 2.1 \cdot 10^{-8} + 0.1 \cdot 10^{-8} = 2.2 \cdot 10^{-8}; \\ b_2 = 0.3 + 0.1 = 0.4; \\ m_2 = 5.9 \cdot 10^{-8} + 0.1 \cdot 10^{-8} = 6.0 \cdot 10^{-8}; \end{cases}$$

вычислим q_1, q_2:

$$q_1^* = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right) + 2q_2 = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} + 3q_2\right) = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{m_2 - d_0}{d_1}\right) - \frac{m_1 - d_0}{d_1}\right)$$

40. Обобщение модели олигополии Курно $(n = 2)$**. Предельное предложение олигополии по её предельным издержкам.**

Запишем уравнение прибыли каждой фирмы:

$$\pi_1 = p(\underbrace{q}_{q_1+q_2})\cdot q_1 - (b_1 + m_1 \cdot q_1)$$

$$\pi_2 = p(\underbrace{q}_{q_1+q_2})\cdot q_2 - (b_2 + m_2 \cdot q_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_1}}_{1} \cdot q_1 + \underbrace{p(q)}_{d_0 + d_1 \cdot (q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_1}{\partial q_1}}^{=1} - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial q}}_{d_1} \cdot \underbrace{\dfrac{\partial q}{\partial q_2}}_{1} \cdot q_2 + \underbrace{p(q)}_{d_0 + d_1 \cdot (q_1+q_2)} \cdot \overbrace{\dfrac{\partial q_2}{\partial q_2}}^{=1} - m_2 = 0; \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = d_1 q_1 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = d_1 q_2 + d_0 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) - m_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 q_1 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_1 - d_0; \\ d_1 q_2 + d_1 \cdot (q_1 + q_2) = m_2 - d_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \dfrac{m_1 - d_0}{d_1}; \\ q_1 + 2q_2 = \dfrac{m_2 - d_0}{d_1}; \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{a_{1,1} = 2, a_{1,2} = 1, a_{1,0} = \frac{m_1 - d_0}{d_1}}$$

$$\boxed{a_{2,1} = 1, a_{2,2} = 2, a_{2,0} = \frac{m_2 - d_0}{d_1}}$$

вычислим q_1^*, q_2^*:

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1-d_0}{d_1}-q_2\right)+2q_2 = \frac{m_2-d_0}{d_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1-d_0}{d_1}+3q_2\right) = \frac{m_2-d_0}{d_1}$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{m_2-d_0}{d_1}\right)-\frac{m_1-d_0}{d_1}\right) = \frac{2m_2-2d_0-m_1+d_0}{3d_1} = \boxed{\frac{2m_2-m_1-d_0}{3d_1}}$$

$$q_1^* = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m_1-d_0}{d_1}-\frac{2m_2-m_1-d_0}{3d_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3m_1-3d_0-2m_2+m_1+d_0}{3d_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4m_1-2m_2-2d_0}{3d_1}\right) = \boxed{\left(\frac{2m_1-m_2-d_0}{3d_1}\right)}$$

Предельное предложение олигополии по её предельным издержкам:

$$\frac{\partial q_i^*}{\partial m_i} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3d_1} & -\frac{1}{3d_1} \\ -\frac{1}{3d_1} & \frac{2}{3d_1} \end{pmatrix}$$

41. Обобщение модели олигополии Курно $(n = 2)$**. Предельное предложение олигополии по её постоянным издержкам.**

Запишем уравнение прибыли каждой фирмы:

$$\pi_1 = \underset{q_1+q_2}{p(q)}\cdot q_1-(b_1+m_1\cdot q_1)$$

$$\pi_2 = \underset{q_1+q_2}{p(q)}\cdot q_2-(b_2+m_2\cdot q_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \underset{d_1}{\dfrac{\partial p}{\partial q}}\cdot\underset{1}{\dfrac{\partial q}{\partial q_1}}\cdot q_1+\underset{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)}{p(q)}\cdot\overset{=1}{\dfrac{\partial q_1}{\partial q_1}}-m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \underset{d_1}{\dfrac{\partial p}{\partial q}}\cdot\underset{1}{\dfrac{\partial q}{\partial q_2}}\cdot q_2+\underset{d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)}{p(q)}\cdot\overset{=1}{\dfrac{\partial q_2}{\partial q_2}}-m_2 = 0; \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = d_1q_1+d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)-m_1 = 0; \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = d_1q_2+d_0+d_1\cdot(q_1+q_2)-m_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1q_1+d_1\cdot(q_1+q_2) = m_1-d_0; \\ d_1q_2+d_1\cdot(q_1+q_2) = m_2-d_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \dfrac{m_1 - d_0}{d_1}; \\ q_1 + 2q_2 = \dfrac{m_2 - d_0}{d_1}; \end{cases}$$

Таким образом:

$$\boxed{a_{1,1} = 2, a_{1,2} = 1, a_{1,0} = \frac{m_1 - d_0}{d_1}}$$

$$\boxed{a_{2,1} = 1, a_{2,2} = 2, a_{2,0} = \frac{m_2 - d_0}{d_1}}$$

вычислим q_1^*, q_2^*:

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - q_2\right) + 2q_2 = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} + 3q_2\right) = \frac{m_2 - d_0}{d_1}$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{m_2 - d_0}{d_1}\right) - \frac{m_1 - d_0}{d_1}\right) = \frac{2m_2 - 2d_0 - m_1 + d_0}{3d_1} = \boxed{\frac{2m_2 - m_1 - d_0}{3d_1}}$$

$$q_1^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_1 - d_0}{d_1} - \frac{2m_2 - m_1 - d_0}{3d_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3m_1 - 3d_0 - 2m_2 + m_1 + d_0}{3d_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4m_1 - 2m_2 - 2d_0}{3d_1}\right) = \boxed{\left(\frac{2m_1 - m_2 - d_0}{3d_1}\right)}$$

Предельное предложение олигополии по её предельным издержкам:

$$\frac{\partial q_i^*}{\partial b_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$