第一章　随机事件与概率

1.1　基本概念

1.2　事件的运算与关系

1.3　概率的定义与基本性质

1.4　概率基本公式

1.4.1　条件概率

在事件 A 发生的情况下 B 发生的概率

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.4.2　乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

1.5　事件的独立性

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

1.6　全概率公式与贝叶斯公式

1.6.0.1　完备事件组

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

1.6.0.2　全概率公式

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

1.6.0.3　贝叶斯公式

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum P(A_i)P(B|A_i)}$$

1.7　三种常见的概型

1.7.1　古典概型

1.7.2　几何概型

1.7.3　n 重贝努利试验

$B_k = \{n次试验中A出现k次\}$

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

第二章　一维随机变量及其分布

2.1　随机变量、分布函数及性质

1. 随机变量 $X(\omega)$，也就是概率 $p = X(\omega)$

2. 分布函数

2.2　离散型

$P\{X = x_i\} = p_i$

表 2.1 离散型随机变量 X 的分布律

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} p_i$$

2.3　连续型

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.4 常见的

2.4.1 离散型

2.4.1.1 二项分布

定义 2.4.1 ($X \sim B(n,p)$)

$$P\{X=k\} = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

2.4.1.2 Poisson 分布

定义 2.4.2 ($X \sim P(k)$)

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

2.4.1.3 几何分布

定义 2.4.3 ($X \sim G(p)$)

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

2.4.1.4 超几何分布

定义 2.4.4 ($X \sim H(N,M,n)$)

$$P\{X=m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

2.4.2 连续型

2.4.3 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$\begin{array}{c|c} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \\ 0, \text{other} \end{cases} & F(x) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases} \end{array}$$

2.4.4 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda x\right) \\ 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\lambda x\right) \\ 0 \end{cases}$$

2.4.5 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{2.4.1}$$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4.2}$$

2.5 函数分布

$$Y = \varphi(X)$$

2.5.1 X 为离散型

$$P\{Y = y_j\} = P\{\varphi(X) = y_j\} = \sum_{\varphi(x_i)=y_j} P\{X = x_i\}$$

2.5.2 X 为连续型

2.5.2.1 Y 为离散型

先求出 Y 的可能取值，在通过 X 的概率分布求出 Y 的可能取值对应的概率。

2.5.2.2 Y 为连续型

$$\begin{cases} F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varphi(X) \leqslant y\} = \int_{\varphi(x) \leqslant y} f_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_y(y) = F_Y'(y) \\ f_Y(y) = f_X\left[h(y)\right]|h'|, \quad y = \varphi(x) x = h(y) \end{cases}$$

第三章　二维随机变量及其分布

3.1　联合分布与边缘分布

定义 3.1.1 (二维随机变量)

$$(X, Y)$$

定义 3.1.2 (联合分布函数)

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

定义 3.1.3

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leqslant x\} \\ F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} \end{cases}$$

3.2　离散型

3.2.1　联合分布律

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$$

3.2.2 边缘分布律

$$\begin{cases} P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i\cdot} \\ P\{Y = y_i\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{\cdot j} \end{cases}$$

3.3 连续型

定义 3.3.1 (联合密度函数 $f(x, y)$)

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dy$$

3.3.1 边缘分布

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy, & \text{边际密度函数} \\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y, & \text{边缘分布函数} \end{cases}$$

3.4 条件分布

$$\begin{cases} P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \\ f_{\frac{Y}{X}}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \end{cases}$$

3.5 随机变量的独立性

等价于

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$\begin{cases} p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \\ f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \end{cases}$$

3.6 常见的

3.7 函数分布

$U=\varphi(X,Y)$ U 的分布函数为 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{\varphi(X,Y)\leqslant u\}$

3.7.1 离散型

$$P\{U=u_k\}=\sum_{\varphi(x_i,y_j)=u_k} p_{ij}$$

3.7.2 连续型

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{\varphi(X,Y)\leqslant u\}=\iint_{\varphi(x,y)\leqslant u} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.7.3 常见的

3.7.3.1 max/min

$$U=\min\{X,Y\} \tag{3.7.1}$$

$$V=\max\{X,Y\} \tag{3.7.2}$$

$$F_U(u)=1-\big[1-F_x(u)\big]\times\big[1-F_Y(u)\big] \tag{3.7.3}$$

$$F_V(v)=F_X(v)\times F_Y(v) \tag{3.7.4}$$

3.7.3.2 $X+Y$

$$U=X+Y$$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy$$

特别地，

$$X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p) \qquad U \sim B(m+n,p) \tag{3.7.5}$$

$$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \qquad U \sim P(\lambda_1+\lambda_2) \tag{3.7.6}$$

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \qquad U \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{3.7.7}$$

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

4.2　方差

4.3　协方差、相关系数

第五章　大数定理与中心极限定理

5.1　切比雪夫不等式

5.2　大数定律

5.3　中心极限定理

第六章　数理统计的基本概念与基本原理

6.1　基本概念

6.2　三个重要的抽样分布

6.3　正态总体下常用的抽样分布

第七章　参数估计与假设检验

7.1　参数估计的种类

7.2　点估计

7.3　区间估计