概率论基础讲义

管华

2017-09-01 更新

目录

第一章　随机事件与概率

1.1　基本概念

1.2　事件的运算与关系

1.3　概率的定义与基本性质

1.4　概率基本公式

1.4.1　条件概率

在事件 A 发生的情况下 B 发生的概率

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.4.2　乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

1.5　事件的独立性

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

1.6　全概率公式与贝叶斯公式

1.6.0.1　完备事件组

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$$

1.6.0.2　全概率公式

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

1.6.0.3　贝叶斯公式

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum P(A_i)P(B|A_i)}$$

1.7　三种常见的概型

1.7.1　古典概型

1.7.2　几何概型

1.7.3　n 重贝努利试验

$B_k = \{n\text{次试验中}A\text{出现}k\text{次}\}$

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

第二章　一维随机变量及其分布

2.1　随机变量、分布函数及性质

1. 随机变量 $X(\omega)$，也就是概率 $p = X(\omega)$

2. 分布函数

2.2　离散型

$P\{X = x_i\} = p_i$

表 2.1 离散型随机变量 X 的分布律

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} p_i$$

2.3　连续型

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.4 常见的

2.4.1 离散型

2.4.1.1 二项分布

定义 2.4.1 ($X \sim B(n,p)$)

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2.4.1.2 Poisson 分布

定义 2.4.2 ($X \sim P(k)$)

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

2.4.1.3 几何分布

定义 2.4.3 ($X \sim G(p)$)

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

2.4.1.4 超几何分布

定义 2.4.4 ($X \sim H(N,M,n)$)

$$P\{X=m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

2.4.2 连续型

2.4.3 均匀分布 $X \sim U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \\ 0, \text{other} \end{cases} \quad \Bigg| \quad F(x) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases}$$

2.4.4 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) \\ 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) \\ 0 \end{cases}$$

2.4.5 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{2.4.1}$$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4.2}$$

2.5 函数分布

$$Y = \varphi(X)$$

2.5.1 X 为离散型

$$P\{Y = y_j\} = P\{\varphi(X) = y_j\} = \sum_{\varphi(x_i) = y_j} P\{X = x_i\}$$

2.5.2 X 为连续型

2.5.2.1 Y 为离散型

先求出 Y 的可能取值，在通过 X 的概率分布求出 Y 的可能取值对应的概率。

2.5.2.2　Y 为连续型

$$\begin{cases} F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varphi(X) \leqslant y\} = \int_{\varphi(x) \leqslant y} f_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_y(y) = F'_Y(y) \\ f_Y(y) = f_X\left[h(y)\right]|h'|, \quad y = \varphi(x) x = h(y) \end{cases}$$

第三章　二维随机变量及其分布

3.1　联合分布与边缘分布

定义 3.1.1 (二维随机变量)

$$(X, Y)$$

定义 3.1.2 (联合分布函数)

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

定义 3.1.3

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leqslant x\} \\ F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} \end{cases}$$

3.2　离散型

3.2.1　联合分布律

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$$

3.2.2　边缘分布律

$$\begin{cases} P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p_{i\cdot} \\ P\{Y=y_i\}=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=p_{\cdot j} \end{cases}$$

3.3　连续型

定义 3.3.1 (联合密度函数 $f(x,y)$)

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy$$

3.3.1　边缘分布

$$\begin{cases} f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} dy, \quad \text{边际密度函数} \\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{边缘分布函数} \end{cases}$$

3.4　条件分布

$$\begin{cases} P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \\ f_{\frac{Y}{X}}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} \end{cases}$$

3.5　随机变量的独立性

等价于

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$\begin{cases} p_{ij}=p_{i\cdot}\times p_{\cdot j} \\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \end{cases}$$

3.6 常见的

3.7 函数分布

$U=\varphi(X,Y)$ U 的分布函数为 $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{\varphi(X,Y)\leqslant u\}$

3.7.1 离散型

$$P\{U=u_k\}=\sum_{\varphi(x_i,y_j)=u_k}p_{ij}$$

3.7.2 连续型

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{\varphi(X,Y)\leqslant u\}=\iint_{\varphi(x,y)\leqslant u}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

3.7.3 常见的

3.7.3.1 max/min

$$U=\min\{X,Y\} \tag{3.7.1}$$

$$V=\max\{X,Y\} \tag{3.7.2}$$

$$F_U(u)=1-\big[1-F_x(u)\big]\times\big[1-F_Y(u)\big] \tag{3.7.3}$$

$$F_V(v)=F_X(v)\times F_Y(v) \tag{3.7.4}$$

3.7.3.2 $X+Y$

$$U=X+Y$$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy$$

特别地,

$$X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p) \qquad U \sim B(m+n,p) \tag{3.7.5}$$

$$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \qquad U \sim P(\lambda_1+\lambda_2) \tag{3.7.6}$$

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \qquad U \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{3.7.7}$$

第四章　随机变量的数字特征

4.1　数学期望

4.1.1　概念

4.1.1.1　一维

$Y = \phi(X)$

1. 离散型

$$E\,X = \sum x_i p_i$$
$$E\,Y = \sum \phi(x_i) p_i$$

2. 连续型

$$E\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$E\,Y = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

$f(x)\ \mathrm{d}x = x_i$

4.1.1.2　二维

$Z = \phi(X, Y)$

$$E\,Z = \sum \sum \phi(x_i, y_i) p_{ij}$$
$$E\,Z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

4.1.2　性质

1. $E(aX \pm bY) = aEX \pm bEY$

2. 独立 $\Rrightarrow E\,XY = (E\,X)(E\,Y)$ &uad 反之不对!

4.2 方差

4.2.1 性质

1. $D(aX+b) = a^2DX$

2. 独立 $\Rrightarrow D(aX+bY) = a^2DX + b^2DY$

4.2.2 常见的

常见随机变量的数学期望及方差

表 4.1 常见随机变量的数学期望及方差

分布	分布函数/密度函数	期望	方差
$X \sim B(n,p)$	$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$X \sim \pi(\lambda)$	$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k i}{k!}\exp(-\lambda)$	λ	λ
$X \sim G(p)$	$P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim U(a,b)$	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim E(\lambda)$	$f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$ $F(x) = 1-\exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$	μ	σ^2

4.3 协方差、相关系数

4.3.1 协方差

4.3.1.1 定义

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$$

4.3.1.2 计算公式

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$$

4.3.1.3 性质

$$\operatorname{cov}(X,X)=DX \tag{4.3.1}$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X) \tag{4.3.2}$$
$$\operatorname{cov}(aX+bY,Z)=a\operatorname{cov}(X,Z)b\operatorname{cov}(Y,Z) \tag{4.3.3}$$
$$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y) \tag{4.3.4}$$
$$\text{不独立}\Rrightarrow D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\operatorname{cov}(X,Y) \tag{4.3.5}$$

4.3.2 相关系数

4.3.2.1 定义

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

4.3.2.2 性质

$|\rho_{XY}|\leqslant 1$

$$\rho_{XY}\leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad EXY=EX\times EY \tag{4.3.6}$$
$$\rho_{XY}=1 \quad\Longleftrightarrow\quad Y=aX+b,\ a>0 \tag{4.3.7}$$
$$\rho_{XY}=-1 \quad\Longleftrightarrow\quad Y=aX+b,\ a<0 \tag{4.3.8}$$
$$\tag{4.3.9}$$

第五章　大数定理与中心极限定理

5.1　切比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu| \geqslant \epsilon\} \leqslant \frac{DX}{\epsilon^2} \tag{5.1.1}$$

$$P\{|X-\mu| < \epsilon\} \geqslant 1-\frac{DX}{\epsilon^2} \tag{5.1.2}$$

5.2　大数定律

- 切比雪夫大数定律
- 独立同分布大数定律
- 辛钦大数定律

定理 5.2.1

所有的大数定律都是指随机变量组在独立的条件下，若干个随笔建立的平均值依概率收敛到其数学期望的平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{独立}} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mu \tag{5.2.1}$$

更进一步，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\text{独立}} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \mu \tag{5.2.2}$$

5.3　中心极限定理

第六章　数理统计的基本概念与基本原理

第七章 参数估计与假设检验

7.1 参数估计的种类

7.2 点估计

7.3 区间估计