6 octobre 2017

TP 1 - Évolution de la valeur d'un actif financier

UV : **RO05**
Branche : **Génie Informatique**
Filière : **Fouille de Données et Décisionnel**
Auteurs : **LU Han - SAUVENT Alexandre**

Table des matières

1. Contexte

Considérons une option Européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est S(t) pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option. Notons que $M \epsilon N^*$ le nombre de subdivision de l'intervalle [0,T] et h = T/M. notons également $S_n = S(nh)$, pour n = 0,1,...,M, les valeurs de l'actif aux instants t = nh. Léquation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n \tag{1.1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi N(0,1) indépendante de S_0.

2. Démonstration des exercices

2.1 Question 1

Monter que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n),$$

et en réduire

$$ln(\frac{S_M}{S_0}) = \sum_{n=0}^{M-1} ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n).$$

Démonstration :

Selon l'équation(1.1), nous utilisons la méthode de la multiplication continuée pour résoudre cette question : quand n = 0, nous obtenons :

$$S_1 = S_0 + \mu h S_0 + \sigma h^{1/2} S_0 \xi_0 \tag{2.1}$$

et pour $S_0 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_1}{S_0} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0 \tag{2.2}$$

quand n = 1, nous obtenons :

$$S_2 = S_1 + \mu h S_1 + \sigma h^{1/2} S_1 \xi_1 \tag{2.3}$$

et pour $S_1 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1 \tag{2.4}$$

Nous obtenons les autres équations en utilisant la même transformation et pour la dernière équation, c'est quand $n = M - 1$, nous obtenons :

$$S_M = S_{M-1} + \mu h S_{M-1} + \sigma h^{1/2} S_{M-1} \xi_{M-1} \tag{2.5}$$

et pour $S_{M-1} \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_M}{S_{M-1}} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1} \tag{2.6}$$

Ensuite, nous multiplions des équations ensemble et obtenons l'équation finale :

$$\begin{aligned}
\frac{S_M}{S_0} &= \frac{S_M}{\cancel{S_{M-1}}} * \frac{\cancel{S_{M-1}}}{\cancel{S_{M-2}}} * \cdots * \frac{\cancel{S_2}}{\cancel{S_1}} * \frac{\cancel{S_1}}{S_0} \\
&= (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_0) * (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_1) * \cdots * (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\
&= \prod_{n=0}^{M-1} (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)
\end{aligned}$$

Donc, nous trouvons le résultat suivant :

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) \tag{2.7}$$

Maintenant nous calculons $\ln(\frac{S_M}{S_0})$:

$$\begin{aligned}
\ln(\frac{S_M}{S_0}) &= \ln \prod_{n=0}^{M-1} (1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n) \\
&= \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_0) + \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_1) + \cdots + \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)
\end{aligned}$$

2.2 Question 2

En utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$, pour $\varepsilon \to 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln(\frac{S(t)}{S_0}) \approx (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t.$$

Ici on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \to 0$.

Démonstration :

Rappel :

La Loi des grands nombres : si $X_1, \ldots, X_n$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi ayant une espérance μ et une variance σ^2, alors la suite $(\overline{X_n})$ définie par $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n} X_i$ vérifie : $\overline{X_n} \to \mu$.

On note que $a_n = \ln(1+\mu h+\sigma h^{1/2}\xi_n)$, donc :

$$\ln(\frac{S(t)}{S_0}) = \ln(\frac{S_n}{S_0}) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n$$

Et selon la loi des grands nombres, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)\overline{a_n} = (M-1)E(a_n).$$

Donc pour trouver la valeur de $\sum_{n=0}^{M-1} a_n$, il faut tout d'abord calculer $E(a_n)$.

Quand $h \to 0$, $\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n \to 0$ et en utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$, pour $\varepsilon \to 0$, nous pouvons calculer l'approximation de a_n et la valeur de $E(a_n)$:

$$a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n) \approx \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
E(a_n) &= E(\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)) \\
&\approx E(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2}) = E(\mu h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h\xi_n^2) \\
&= \mu h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})E(\xi_n) - \frac{1}{2}\sigma^2 hE(\xi_n^2)
\end{aligned}$$

Selon l'exercice, on a $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi N(0,1) indépendante de S_0, donc nous savons l'espérance de ξ_n : $E(\xi_n) = 0$ et la variance de ξ_n : $Var(\xi_n) = 1$. Et puis nous pouvons calculer $E(\xi_n^2)$ en utilisant la formule : $var(\xi_n) = E(\xi_n^2) - [E(\xi_n)]^2$ et nous trouvons que le résultat de $E(\xi_n^2)$ est $E(\xi_n^2) = Var(\xi_n) - [E(\xi_n)]^2 = 1 - 0^2 = 1$.
Donc la valeur de $E(a_n)$:

$$E(a_n) = \mu h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 h = h(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) - \frac{1}{2}\mu^2 h^2$$

quand $h \to 0, h^2 \to 0$, donc $\frac{1}{2}\mu^2 h^2 \approx 0$ et $E(a_n) = h(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$.
finalement nous trouvons le résultat suivant :

$$\ln(\frac{S(t)}{S_0}) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)E(a_n) \approx (M-1)h(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) = t(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2).$$

2.3 Question 3

A l'aide du théorème de la limite central, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln(\frac{S(t)}{S_0}) \sim N(((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t).$$

Démonstration :
Rappel :
Théorème de la Limite Centrale(TLC) : soit (X_n) une suite de v.a. iid d'espérance μ et de variance σ^2, et $(\overline{X}_n)$ la suite de terme général $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. On a : $\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$, ou, de manière équivalente : $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$.
Selon l'TLC, nous obtenons la formule suivante : $\frac{\sum_{n=0}^{M-1} a_n - (M-1)\mu}{\sigma\sqrt{M-1}} \to N(0,1)$, avec μ l'espérance de a_n et σ l'écart-type de a_n.
Donc $\ln\frac{S(t)}{S_0}$ suit une loi suivante :

$$\ln\frac{S(t)}{S_0} \sim N((M-1)E(a_n), (M-1)Var(a_n)).$$

Nous avons déjà calculé l'espérance de a_n : $E(a_n)$ dans Question 2 et maintenant nous allons calculer la variance de a_n : $Var(a_n)$.
Rappel :

» Nous trouvons l'approximation de a_n : $a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n) \approx \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2}$, avec $h \to 0$.

- Quelques propositions :
  1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$.
  2. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm Cov(X, Y)$, avec Cov(X, Y) la covariance entre X et Y.
  3. $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$.
  4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta Cov(X, Y)$.
- $\forall \alpha > 1$, quand $h \to 0, h^\alpha \to 0$.
- $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi N(0,1) indépendante de S_0, donc l'espérance de ξ_n : $E(\xi_n) = 0$ et la variance de ξ_n : $Var(\xi_n) = 1$.

Donc nous avons :

$$\begin{aligned}
Var(a_n) &= Var(\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)) \approx Var(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)^2}{2}) \\
&= Var[\mu h - \frac{1}{2}\mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2] \\
&= Var[(\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})\xi_n - \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2] \\
&= (\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})^2 Var(\xi_n) + (\frac{1}{2}\sigma^2 h)^2 Var(\xi_n^2) - 2Cov[(\sigma h^{1/2} - \mu\sigma h^{3/2})\xi_n, \frac{1}{2}\sigma^2 h \xi_n^2] \\
&= (\sigma^2 h - 2\mu\sigma^2 h^2 + \mu^2\sigma^2 h^3)Var(\xi_n) + \frac{1}{4}\sigma^4 h^2 Var(\xi_n^2) - (\sigma^3 h^{3/2} - \mu\sigma^3 h^{5/2})Cov(\xi_n, \xi_n^2) \\
&= \sigma^2 h Var(\xi_n) \\
&= \sigma^2 h
\end{aligned}$$

Donc nous trouvons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim N((M-1)E(a_n), (M-1)Var(a_n)) \\
\Leftrightarrow &\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim N((M-1)h(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), (M-1)h\sigma^2) \\
\Leftrightarrow &\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t).
\end{aligned}$$

2.4 Question 4

Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z),$$

où $Z \sim N(0, 1)$.

Démonstration :

Selon l'TCL, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln(\frac{S(t)}{S_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \sim N(0, 1) = Z \\
\Leftrightarrow &\ln(\frac{S(t)}{S_0}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + Z\sqrt{\sigma^2 t} \\
\Leftrightarrow &S(t) = S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z).
\end{aligned}$$

2.5 Question 5

Expliquer pourquoi la v.a. $S(T)/S(0)$ (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

Démonstration :
Rappel : une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si la variable $Y = \ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.
Nous notons que $X = \frac{S(T)}{S(0)}$ avec $S(T) = S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z)$, avec $Z \sim N(0,1)$ et $S(0) = S_0$.
Donc nous calculons la valeur de $\ln(X)$ et nous notons cette valeur à Y :

$$
\begin{aligned}
&Y = \ln(\frac{S(T)}{S(0)}) = \ln(exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z \\
\Leftrightarrow &\frac{Y - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = Z \sim N(0,1) \\
\Leftrightarrow &Y \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)
\end{aligned}
$$

Donc $\frac{S(T)}{S(0)}$ suit une loi log-normale avec l'espérance $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ et la variance $\sigma^2 T$.