3 octobre 2017

TP 1 - Évolution de la valeur d'un actif financier

UV : **RO05**
Branche : **Génie Informatique**
Filière : **Fouille de Données et Décisionnel**
Auteurs : **LU Han - SAUVENT Alexandre**

Table des matières

1. Contexte

Considérons une option Européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est S(t) pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option. Notons que $M \epsilon N^*$ le nombre de subdivision de l'intervalle [0,T] et h = T/M. notons également $S_n = S(nh)$, pour n = 0,1,...,M, les valeurs de l'actif aux instants t = nh. Léquation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n \tag{1.1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi N(0,1) indépendante de S_0.

2. Démonstration des exercices

2.1 Question 1

Monter que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n),$$

et en réduire

$$ln(\frac{S_M}{S_0}) = \sum_{n=0}^{M-1} ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n).$$

Démonstration :
Selon l'équation(1.1), nous utilisons la méthode de la multiplication continuée pour résoudre cette question :
quand n = 0, nous obtenons :

$$S_1 = S_0 + \mu h S_0 + \sigma h^{1/2} S_0 \xi_0 \tag{2.1}$$

et pour $S_0 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_1}{S_0} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0 \tag{2.2}$$

quand n = 1, nous obtenons :

$$S_2 = S_1 + \mu h S_1 + \sigma h^{1/2} S_1 \xi_1 \tag{2.3}$$

et pour $S_1 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1 \tag{2.4}$$

Nous obtenons les autres équations en utilisant la même transformation et pour la dernière équation, c'est quand $n = M - 1$, nous obtenons :

$$S_M = S_{M-1} + \mu h S_{M-1} + \sigma h^{1/2} S_{M-1} \xi_{M-1} \tag{2.5}$$

et pour $S_{M-1} \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_M}{S_{M-1}} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1} \tag{2.6}$$

Ensuite, nous multiplions des équations ensemble et obtenons l'équation finale :

$$
\begin{aligned}
\frac{S_M}{S_0} &= \frac{S_M}{\cancel{S_{M-1}}} * \frac{\cancel{S_{M-1}}}{\cancel{S_{M-2}}} * \cdots * \frac{\cancel{S_2}}{\cancel{S_1}} * \frac{\cancel{S_1}}{S_0} \\
&= (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_0) * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_1) * \cdots * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\
&= \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)
\end{aligned}
$$

Donc, nous trouvons le résultat suivant :

$$
S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n) \tag{2.7}
$$

Maintenant nous calculons $\ln(\frac{S_M}{S_0})$:

$$
\begin{aligned}
\ln(\frac{S_M}{S_0}) &= \ln \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n) \\
&= \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_0) + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_1) + \cdots + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_{M-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2}\xi_n)
\end{aligned}
$$