RO05 - TP 1A
Évolution de la valeur d'un actif financier

Considérons une option européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option. Notons $M \in \mathbb{N}^*$ le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, T]$ et $h = T/M$. Notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, 1, ..., M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$.

L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. iid de loi $N(0, 1)$ indépendante de S_0.

1. Monter que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n),$$

   et en déduire

$$\ln\Big(\frac{S_M}{S_0}\Big) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n).$$

2. En utilisant l'approximation $\ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$, pour $\varepsilon \to 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\Big(\frac{S(t)}{S_0}\Big) \approx (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t.$$

   Ici on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \downarrow 0$.

3. A l'aide du théorème de la limite central, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\Big(\frac{S(t)}{S_0}\Big) \sim N\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t\Big).$$

4. Conclure de la question précédente que

$$S(t) = S_0 \exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z\Big),$$

   où $Z \sim N(0, 1)$.

5. Expliquer pourquoi la v.a. $S(T)/S(0)$ (T fixé) suit-elle une loi log-normale ? Spécifier ses paramètres.

6. Donner un intervalle de confiance de la valeur de l'option au temps d'exercice au niveau α.

7. *Monte Carlo.* Effectuer 1000 réalisations des v.a. S_n, pour $n = 0, 1, ..., M$, et donner l'évolution moyenne de la valeur de l'actif. Les données sont : $T = 1$, $h = 0,05$, $S_0 = 1$, $\mu = 0.05$ et $\sigma = 0,3$.