

---

# TP 1 - ÉVOLUTION DE LA VALEUR D'UN ACTIF FINANCIER

---

UV : **RO05**

Branche : **Génie Informatique**

Filière : **Fouille de Données et Décisionnel**

Auteurs : **LU Han - SAUVENT Alexandre**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Démonstration des exercices</b>	<b>3</b>
2.1	Question 1 . . . . .	3
2.2	Question 2 . . . . .	4
2.3	Question 3 . . . . .	5

# 1. Contexte

Considérons une option Européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps  $t$  est  $S(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$ , où  $T$  est le temps de l'exercice de l'option. Notons que  $M \in \mathbb{N}^*$  le nombre de subdivision de l'intervalle  $[0, T]$  et  $h = T/M$ . notons également  $S_n = S(nh)$ , pour  $n = 0, 1, \dots, M$ , les valeurs de l'actif aux instants  $t = nh$ . L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n \quad (1.1)$$

où  $\xi_n, n \geq 0$  est une suite de v.a. i.i.d de loi  $N(0,1)$  indépendante de  $S_0$ .

## 2. Démonstration des exercices

### 2.1 Question 1

Monter que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n),$$

et en réduire

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n).$$

**Démonstration :**

Selon l'équation(1.1), nous utilisons la méthode de la multiplication continuée pour résoudre cette question :  
quand  $n = 0$ , nous obtenons :

$$S_1 = S_0 + \mu h S_0 + \sigma h^{1/2} S_0 \xi_0 \quad (2.1)$$

et pour  $S_0 \neq 0$  nous obtenons :

$$\frac{S_1}{S_0} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0 \quad (2.2)$$

quand  $n = 1$ , nous obtenons :

$$S_2 = S_1 + \mu h S_1 + \sigma h^{1/2} S_1 \xi_1 \quad (2.3)$$

et pour  $S_1 \neq 0$  nous obtenons :

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1 \quad (2.4)$$

Nous obtenons les autres équations en utilisant la même transformation et pour la dernière équation, c'est quand  $n = M - 1$ , nous obtenons :

$$S_M = S_{M-1} + \mu h S_{M-1} + \sigma h^{1/2} S_{M-1} \xi_{M-1} \quad (2.5)$$

et pour  $S_{M-1} \neq 0$  nous obtenons :

$$\frac{S_M}{S_{M-1}} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1} \quad (2.6)$$

Ensuite, nous multiplions des équations ensemble et obtenons l'équation finale :

$$\begin{aligned}\frac{S_M}{S_0} &= \frac{S_M}{S_0} * \frac{S_1}{S_0} * \cdots * \frac{S_{M-1}}{S_0} * \frac{S_0}{S_0} \\ &= (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0) * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1) * \cdots * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \\ &= \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)\end{aligned}$$

Donc, nous trouvons le résultat suivant :

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \quad (2.7)$$

Maintenant nous calculons  $\ln(\frac{S_M}{S_0})$  :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) &= \ln \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \\ &= \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0) + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1) + \cdots + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)\end{aligned}$$

## 2.2 Question 2

En utilisant l'approximation  $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t.$$

Ici on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque  $h \rightarrow 0$ .

**Démonstration :**

Rappel :

La Loi des grands nombres : si  $X_1, \dots, X_n$  est une suite de v.a. indépendantes de même loi ayant une espérance  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$ , alors la suite  $(\bar{X}_n)$  définie par  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^n X_i$  vérifie :  $\bar{X}_n \rightarrow \mu$ .

On note que  $a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)$ , donc :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n$$

Et selon la loi des grands nombres, nous obtenons :

$$\prod_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)\bar{a}_n = (M-1)E(a_n).$$

Donc pour trouver la valeur de  $\prod_{n=0}^{M-1} a_n$ , il faut tout d'abord calculer  $E(a_n)$ .

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n \rightarrow 0$  et en utilisant l'approximation  $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$ , pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous pouvons

calculer l'approximation de  $a_n$  et la valeur de  $E(a_n)$  :

$$a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \approx \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} E(a_n) &= E(\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)) \\ &\approx E(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}) = E(\mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2) \\ &= \mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) E(\xi_n) - \frac{1}{2} \sigma^2 h E(\xi_n^2) \end{aligned}$$

Selon l'exercice, on a  $\xi_n, n \geq 0$  est une suite de v.a. i.i.d de loi  $N(0,1)$  indépendante de  $S_0$ , donc nous savons l'espérance de  $\xi_n$  :  $E(\xi_n) = 0$  et la variance de  $\xi_n$  :  $var(\xi_n) = 1$ . Et puis nous pouvons calculer  $E(\xi_n^2)$  en utilisant la formule :  $var(\xi_n) = E(\xi_n^2) - [E(\xi_n)]^2$  et nous trouvons que le résultat de  $E(\xi_n^2)$  est  $E(\xi_n^2) = var(\xi_n) - [E(\xi_n)]^2 = 1 - 0^2 = 1$ .

Donc la valeur de  $E(a_n)$  :

$$E(a_n) = \mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 h = h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{1}{2} \mu^2 h^2$$

quand  $h \rightarrow 0, h^2 \rightarrow 0$ , donc  $\frac{1}{2} \mu^2 h^2 \approx 0$  et  $E(a_n) = h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)$ .

finalement nous trouvons le résultat suivant :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \prod_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)E(a_n) \approx (M-1)h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) = t(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2).$$

## 2.3 Question 3

A l'aide du théorème de la limite central, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$