
TP 1 - ÉVOLUTION DE LA VALEUR D'UN ACTIF FINANCIER

UV : **RO05**

Branche : **Génie Informatique**

Filière : **Fouille de Données et Décisionnel**

Auteurs : **LU Han - SAUVENT Alexandre**

Table des matières

1	Contexte	2
2	Démonstration des exercices	3
2.1	Question 1	3
2.2	Question 2	4
2.3	Question 3	5

1. Contexte

Considérons une option Européenne représentant un actif financier dont la valeur au temps t est $S(t)$ pour $0 \leq t \leq T$, où T est le temps de l'exercice de l'option. Notons que $M \in \mathbb{N}^*$ le nombre de subdivision de l'intervalle $[0, T]$ et $h = T/M$. notons également $S_n = S(nh)$, pour $n = 0, 1, \dots, M$, les valeurs de l'actif aux instants $t = nh$. L'équation d'évolution du prix de l'actif en temps discret s'écrit comme suit :

$$S_{n+1} = S_n + \mu h S_n + \sigma h^{1/2} S_n \xi_n \quad (1.1)$$

où $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi $N(0,1)$ indépendante de S_0 .

2. Démonstration des exercices

2.1 Question 1

Monter que

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n),$$

et en réduire

$$\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n).$$

Démonstration :

Selon l'équation(1.1), nous utilisons la méthode de la multiplication continuée pour résoudre cette question :
quand $n = 0$, nous obtenons :

$$S_1 = S_0 + \mu h S_0 + \sigma h^{1/2} S_0 \xi_0 \quad (2.1)$$

et pour $S_0 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_1}{S_0} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0 \quad (2.2)$$

quand $n = 1$, nous obtenons :

$$S_2 = S_1 + \mu h S_1 + \sigma h^{1/2} S_1 \xi_1 \quad (2.3)$$

et pour $S_1 \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1 \quad (2.4)$$

Nous obtenons les autres équations en utilisant la même transformation et pour la dernière équation, c'est quand $n = M - 1$, nous obtenons :

$$S_M = S_{M-1} + \mu h S_{M-1} + \sigma h^{1/2} S_{M-1} \xi_{M-1} \quad (2.5)$$

et pour $S_{M-1} \neq 0$ nous obtenons :

$$\frac{S_M}{S_{M-1}} = 1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1} \quad (2.6)$$

Ensuite, nous multiplions des équations ensemble et obtenons l'équation finale :

$$\begin{aligned}\frac{S_M}{S_0} &= \frac{S_M}{S_0} * \frac{S_1}{S_0} * \cdots * \frac{S_{M-1}}{S_0} * \frac{S_0}{S_0} \\ &= (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0) * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1) * \cdots * (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \\ &= \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)\end{aligned}$$

Donc, nous trouvons le résultat suivant :

$$S_M = S_0 \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \quad (2.7)$$

Maintenant nous calculons $\ln(\frac{S_M}{S_0})$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S_M}{S_0}\right) &= \ln \prod_{n=0}^{M-1} (1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \\ &= \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_0) + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_1) + \cdots + \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_{M-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)\end{aligned}$$

2.2 Question 2

En utilisant l'approximation $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, et la loi des grands nombres, montrer que

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \approx \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t.$$

Ici on a supposé que l'approximation proposée est valable lorsque $h \rightarrow 0$.

Démonstration :

Rappel :

La Loi des grands nombres : si X_1, \dots, X_n est une suite de v.a. indépendantes de même loi ayant une espérance μ et une variance σ^2 , alors la suite (\bar{X}_n) définie par $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ vérifie : $\bar{X}_n \rightarrow \mu$.

On note que $a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)$, donc :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n$$

Et selon la loi des grands nombres, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)\bar{a}_n = (M-1)E(a_n).$$

Donc pour trouver la valeur de $\sum_{n=0}^{M-1} a_n$, il faut tout d'abord calculer $E(a_n)$.

Quand $h \rightarrow 0$, $\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n \rightarrow 0$ et en utilisant l'approximation $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon - \varepsilon^2/2$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, nous pouvons

calculer l'approximation de a_n et la valeur de $E(a_n)$:

$$a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \approx \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} E(a_n) &= E(\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)) \\ &\approx E(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}) = E(\mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2) \\ &= \mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) E(\xi_n) - \frac{1}{2} \sigma^2 h E(\xi_n^2) \end{aligned}$$

Selon l'exercice, on a $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi $N(0,1)$ indépendante de S_0 , donc nous savons l'espérance de ξ_n : $E(\xi_n) = 0$ et la variance de ξ_n : $Var(\xi_n) = 1$. Et puis nous pouvons calculer $E(\xi_n^2)$ en utilisant la formule : $var(\xi_n) = E(\xi_n^2) - [E(\xi_n)]^2$ et nous trouvons que le résultat de $E(\xi_n^2)$ est $E(\xi_n^2) = Var(\xi_n) - [E(\xi_n)]^2 = 1 - 0^2 = 1$.

Donc la valeur de $E(a_n)$:

$$E(a_n) = \mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 h = h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{1}{2} \mu^2 h^2$$

quand $h \rightarrow 0, h^2 \rightarrow 0$, donc $\frac{1}{2} \mu^2 h^2 \approx 0$ et $E(a_n) = h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)$.

finalement nous trouvons le résultat suivant :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n = (M-1)E(a_n) \approx (M-1)h(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) = t(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2).$$

2.3 Question 3

A l'aide du théorème de la limite central, montrer que l'approximation ci-dessus peut se préciser plus par la relation

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right).$$

Démonstration :

Rappel :

Théorème de la Limite Centrale(TLC) : soit (X_n) une suite de v.a. iid d'espérance μ et de variance σ^2 , et (\bar{X}_n) la suite de terme général $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. On a : $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$, ou, de manière équivalente : $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$.

Selon l'TLC, nous obtenons la formule suivante : $\frac{\sum_{n=0}^{M-1} a_n - (M-1)\mu}{\sigma\sqrt{M-1}} \rightarrow N(0,1)$, avec μ l'espérance de a_n et σ l'écart-type de a_n .

Donc $\ln \frac{S(t)}{S_0}$ suit une loi suivante :

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim N((M-1)E(a_n), (M-1)Var(a_n)).$$

Nous avons déjà calculé l'espérance de a_n : $E(a_n)$ dans Question 2 et maintenant nous allons calculer la variance de a_n : $Var(a_n)$.

Rappel :

» Nous trouvons l'approximation de a_n : $a_n = \ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n) \approx \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}$, avec $h \rightarrow 0$.

» Quelques propositions :

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{Var}(X)$.
2. $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm \text{Cov}(X, Y)$, avec $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance entre X et Y .
3. $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$.
4. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta \text{Cov}(X, Y)$.

» $\forall \alpha > 1$, quand $h \rightarrow 0, h^\alpha \rightarrow 0$.

» $\xi_n, n \geq 0$ est une suite de v.a. i.i.d de loi $N(0,1)$ indépendante de S_0 , donc l'espérance de $\xi_n : E(\xi_n) = 0$ et la variance de $\xi_n : \text{Var}(\xi_n) = 1$.

Donc nous avons :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(a_n) &= \text{Var}(\ln(1 + \mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)) \approx \text{Var}(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n - \frac{(\mu h + \sigma h^{1/2} \xi_n)^2}{2}) \\
 &= \text{Var}[\mu h - \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2] \\
 &= \text{Var}[(\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) \xi_n - \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2] \\
 &= (\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2})^2 \text{Var}(\xi_n) + (\frac{1}{2} \sigma^2 h)^2 \text{Var}(\xi_n^2) - 2 \text{Cov}[(\sigma h^{1/2} - \mu \sigma h^{3/2}) \xi_n, \frac{1}{2} \sigma^2 h \xi_n^2] \\
 &= (\sigma^2 h - 2 \mu \sigma^2 h^2 + \mu^2 \sigma^2 h^3) \text{Var}(\xi_n) + \frac{1}{4} \sigma^4 h^2 \text{Var}(\xi_n^2) - (\sigma^3 h^{3/2} - \mu \sigma^3 h^{5/2}) \text{Cov}(\xi_n, \xi_n^2) \\
 &= \sigma^2 h \text{Var}(\xi_n) \\
 &= \sigma^2 h
 \end{aligned}$$

Donc nous trouvons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{S(t)}{S_0} &\sim N((M-1)E(a_n), (M-1)\text{Var}(a_n)) \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{S(t)}{S_0} &\sim N((M-1)h(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), (M-1)h\sigma^2) \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{S(t)}{S_0} &\sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)
 \end{aligned}$$