ES704 – Instrumentação Básica

02 – Análise de sinais I

Eric Fujiwara

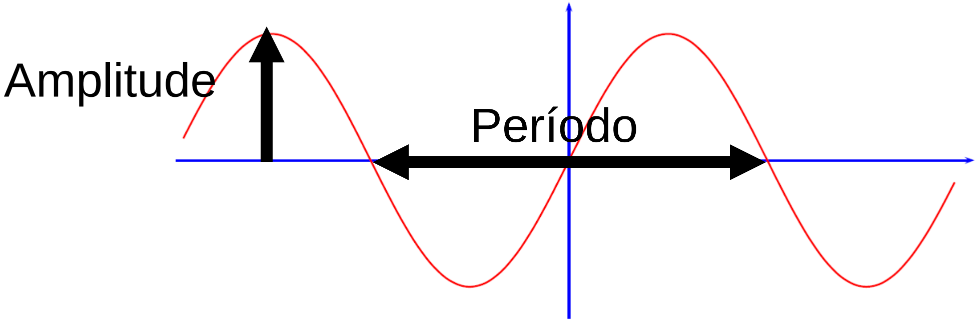
Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Sinais;
  - 2) Análise em frequência;
  - 3) Análise de sinais não-estacionários;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

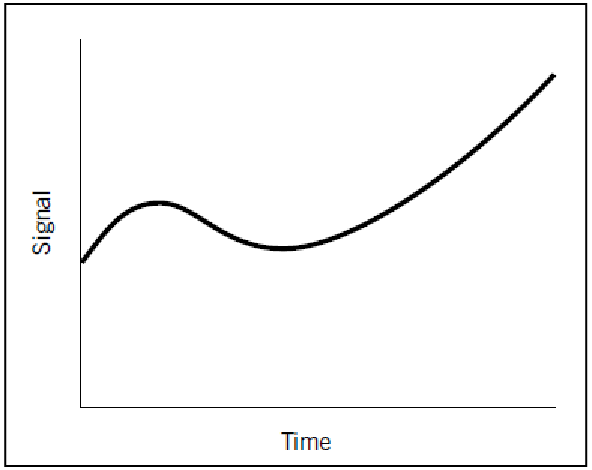
1. Sinais

- **1.1. Sinais:**
  - **Sinal:** informação física sobre a variável medida, transmitida entre um processo e o sistema de medição ou entre os estágios do sistema de medição;
  - **Forma de onda (waveform):** forma de um sinal;
    - **Magnitude ou amplitude:** “intensidade” do sinal de entrada;
    - **Frequência:** forma na qual o sinal varia no tempo.

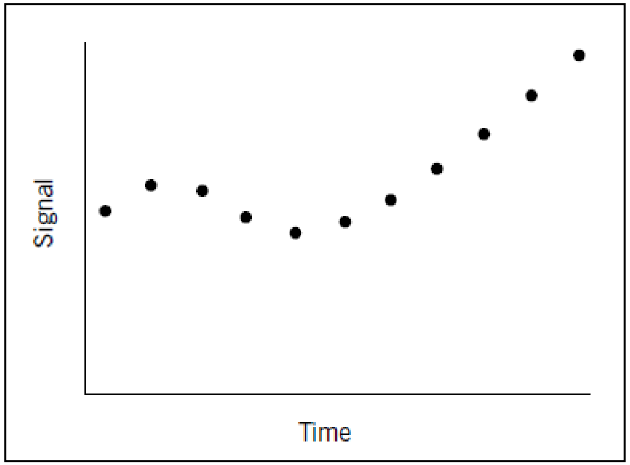


1. Sinais

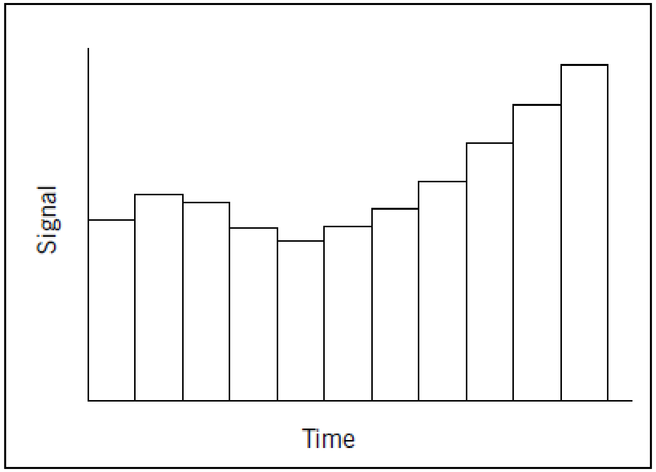
- **1.2. Tipos de sinais:**
  - **Analógico:** contínuo em magnitude e tempo;
  - **Discreto:** contínuo em magnitude e discretizado no tempo;
  - **Digital:** quantizado em magnitude e discretizado no tempo.



Analógico/contínuo



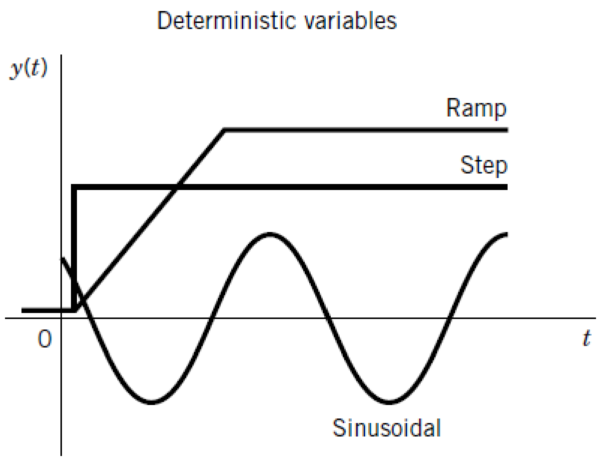
Discreto

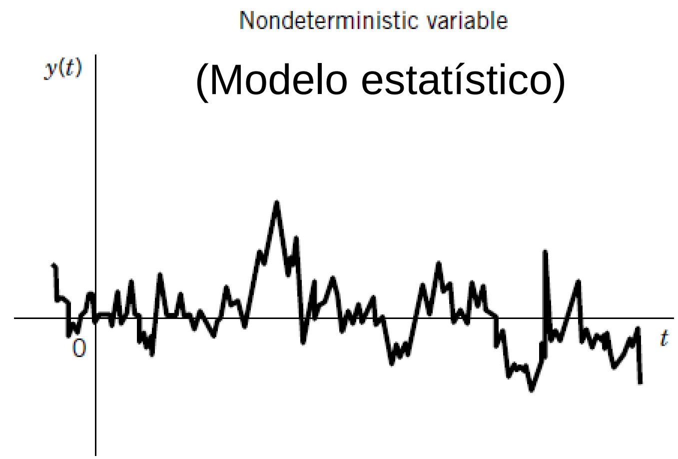


Digital

1. Sinais

- **1.2. Tipos de sinais:**
  - **Dinâmico/estático:** variação da magnitude no tempo;
  - **Periódico/aperiódico:** a forma de onda se repete em intervalos definidos;
  - **Determinístico/não-determinístico:** o sinal pode ser representado por uma expressão matemática;





1. Sinais

- **1.2. Tipos de sinais:**

Table 2.1 Classification of Waveforms

I.	Static	$y(t) = A_0$
II.	Dynamic	
	Periodic waveforms	
	Simple periodic waveform	$y(t) = A_0 + C\sin(\omega t + \phi)$
	Complex periodic waveform	$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n)$
	Aperiodic waveforms	
	Step[a]	$y(t) = A_0 U(t)$ $= A_0$ for $t > 0$
	Ramp	$y(t) = A_0 t$ for $0 < t < t_f$
	Pulse[b]	$y(t) = A_0 U(t) - A_0 U(t - t_1)$
III.	Nondeterministic waveform	$y(t) \approx A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \phi_n)$

[a] $U(t)$ represents the unit step function, which is zero for $t < 0$ and 1 for $t \geq 0$.

[b] t_1 represents the pulse width.

1. Sinais

- **1.3. Redução de dados:**
  - **Valor médio:** caracteriza a componente DC do sinal;

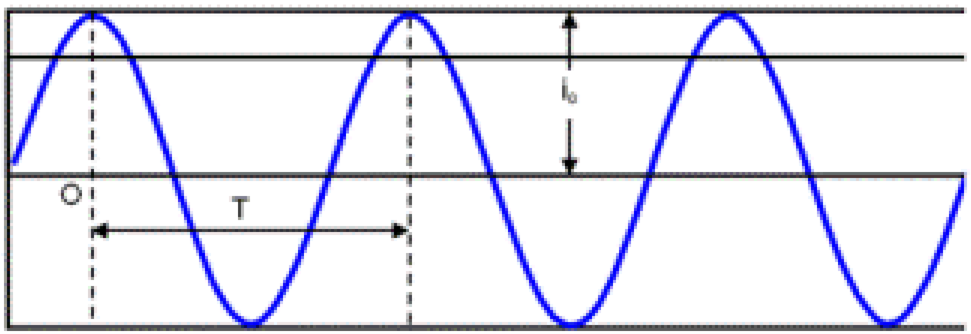
$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y(n)} \tag{2.1}$$

  - **Valor root-mean-square (rms):** caracteriza a componente AC do sinal;

$$\boxed{y_{\mathrm{rms}} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y(n)^2\right]^{1/2}} \tag{2.2}$$

1. Sinais

- **1.3. Redução de dados:**
  - Comparação entre valores médio e rms.



Valor de pico

Valor rms

Valor médio

2. Análise em frequência

- **2.1. Série de Fourier:**
  - Dado **sinal periódico** $y(t) = y(t+T)$ com **período** $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$;
  - O sinal pode ser representado através de uma série trigonométrica (**série de Fourier**):

$$\boxed{y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)} \tag{2.3}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)dt} \quad \boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos n\omega t\, dt} \quad \boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\sin n\omega t\, dt}$$

- Se $y(t)$ é par → $B_n = 0$;
- Se $y(t)$ é ímpar → $A_n = 0$.

2. Análise em frequência

- **2.2. Transformada de Fourier:**
  - Extensão da série de Fourier para sinais periódicos e aperiódicos;
  - **Transformada de Fourier (FT) direta:**

$$\boxed{Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt} \tag{2.4}$$

  - **Transformada de Fourier inversa:**

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega} \tag{2.5}$$

2. Análise em frequência

- **2.2. Transformada de Fourier:**
  - A FT é um número complexo da forma

$$\boxed{Y(\omega) = Y_{Re}(\omega) + jY_{Im}(\omega) = |Y(\omega)|\angle\phi(\omega)} \quad (2.6)$$

    - $|Y(\omega)|$: espectro de magnitude**;**
    - $\phi(\omega)$: espectro de fase**;**

  - **Densidade espectral de potência:**

$$\boxed{S_{YY}(\omega) = |Y(\omega)Y^*(\omega)|^2} \quad (2.7)$$

2. Análise em frequência

- **2.2. Transformada de Fourier:**
  - **Propriedades da FT:**
    - **Linearidade:**

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$$

$$\boxed{Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega)} \quad (2.8)$$

    - **Convolução:**

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) y_2(t-\tau)\, d\tau}$$

$$\boxed{Y(\omega) = Y_1(\omega) Y_2(\omega)} \quad (2.9)$$

2. Análise em frequência

- **2.2. Transformada de Fourier:**
  - **Propriedades da FT:**
    - **Deslocamento temporal:**

$$\boxed{\mathcal{F}[y(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}Y(\omega)} \tag{2.10}$$

    - **Fator de escala:**

$$\boxed{\mathcal{F}[y(at)] = \frac{1}{|a|}Y\left(\frac{\omega}{a}\right)} \tag{2.11}$$

    - **Derivação:**

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = j\omega Y(\omega)} \tag{2.12}$$

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Em quais situações é importante quantificar o valor ou a forma de onda de um sinal?
  - 2) Qualquer sinal pode ser representado por uma transformada de Fourier? Qual é o significado físico?
  - 3) Qual é a diferença entre série de Fourier e transformada de Fourier?

Referências

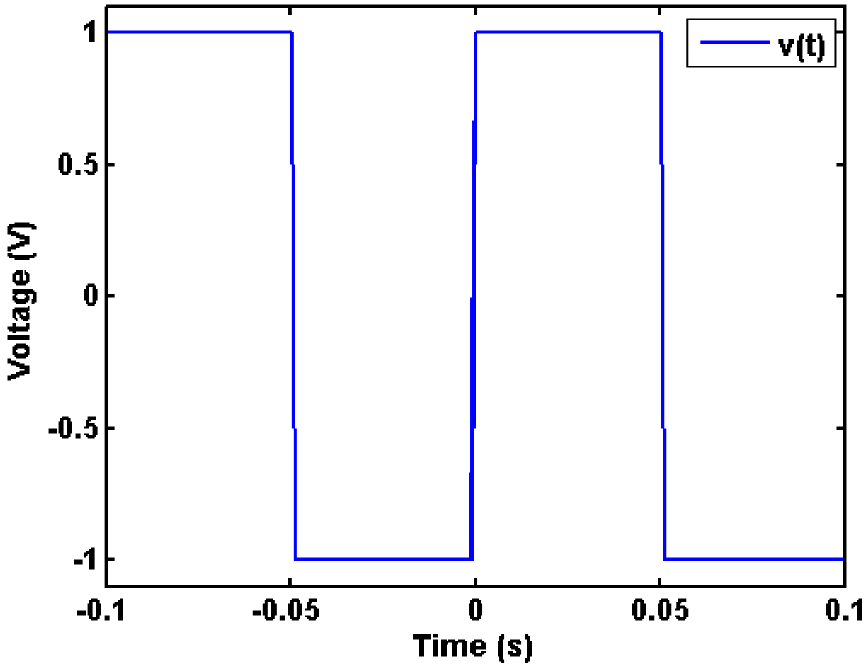
- **Referências:**

  - R.S. Figliola, D.E. Beasley, Theory and Design for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, Springer, 2011.
  - A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T. Young, Signals and Systems, Prentice Hall, 1983.
  - MATLAB – Wavelet Toolbox, Mathworks, 2007.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 2.1)** Seja o sinal de tensão $v(t)$ obtido a partir de um inversor de frequências.
  - a) Calcule os valores médio e rms de $v(t)$;
  - b) Obtenha a representação do sinal em uma série de Fourier;
  - c) Calcule a transformada de Fourier do sinal.



Exercícios

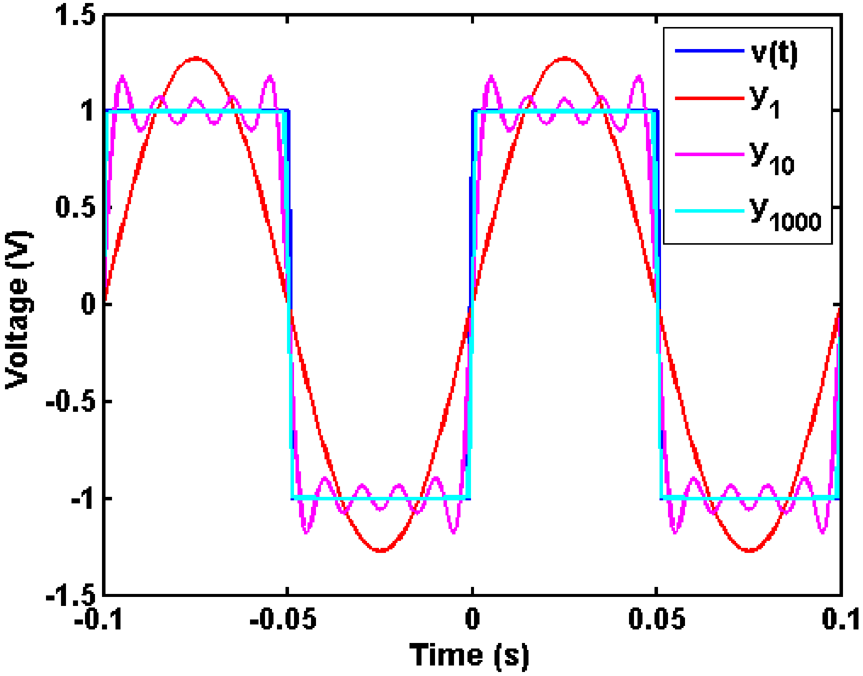
- **Ex. 2.1.a)** Caracterização do sinal
  - O sinal é periódico com $T = 0.1$ s e $f = 10$ Hz;
  - Valor médio:
    $V_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)dt = \frac{1}{0.1}\int_{-0.05}^{0.05} v(t)dt =$
    $\frac{1}{0.1}\left[\int_{-0.05}^{0}(-1)dt + \int_{0}^{0.05}(1)dt\right] = 0$ V;
  - Valor rms:
    $V_{rms} = \left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2(t)dt\right]^{1/2} =$
    $\left\{\frac{1}{0.1}\left[\int_{-0.05}^{0}(-1)^2dt + \int_{0}^{0.05}(1)^2dt\right]\right\}^{1/2} = 1$ V.

Exercícios

- **Ex. 2.1.b)** Série de Fourier
  - O sinal é ímpar pois $v(-t) = -v(t)$, portanto, $A_n = 0$ (verificar!);
  - $B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{4}{0.1n\omega}[1 - \cos(0.05n\omega)]$;
  - Série de fourier:
    $y(t) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin(n\omega t) =$
    $\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{0.1n\omega}[1 - \cos(0.05n\omega)]\sin(n\omega t) =$
    $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi n}[1 - \cos(\pi n)]\sin(20\pi n t)$;
  - Harmônica fundamental: $y_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi 10 t)$.

Exercícios

- **Ex. 2.1.b)** Série de Fourier
  - A série de Fourier $y(t)$ se aproxima do sinal $v(t)$ ao passo que $N \to \infty$;
  - A harmônica fundamental possui frequência de 10 Hz, amplitude de $\frac{4}{\pi}$, média nula, e valor rms $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.9$.

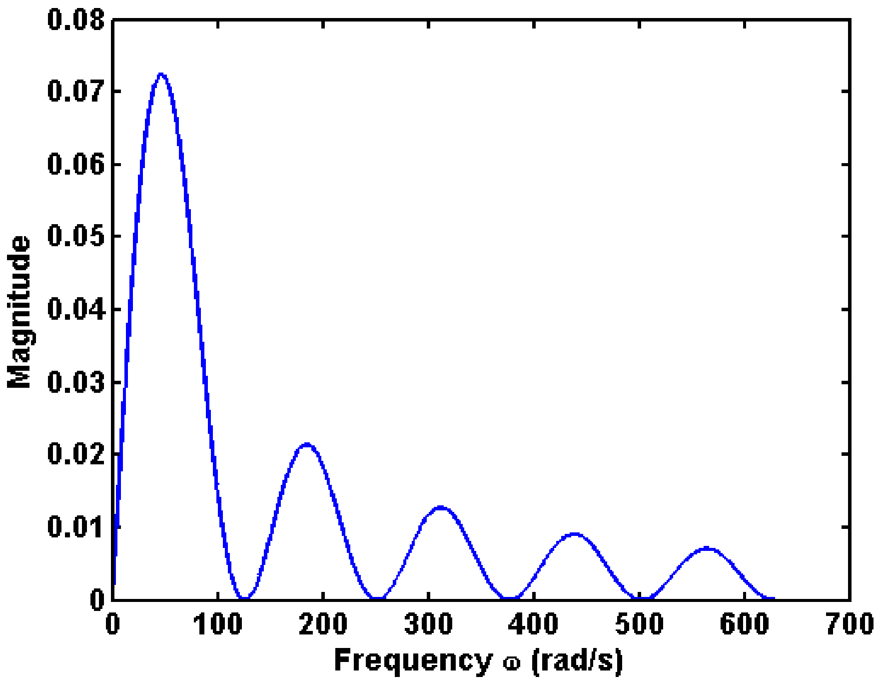


Exercícios

- **Ex. 2.1.c)** Transformada de Fourier
  - Vamos calcular a FT para somente um período para fins de simplificação (isso acarretará em erros de aproximação);
  - $Y(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \exp(-j\omega t)\, dt$;
  - $Y(\omega) = \int_{-T/2}^{0} - \exp(-j\omega t)\, dt + \int_{0}^{T/2} \exp(-j\omega t)\, dt = j\,\frac{2}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - 1\right]$.

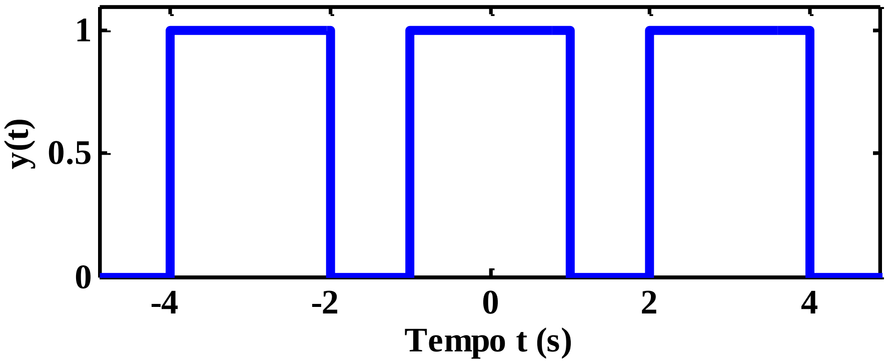
Exercícios

- **Ex. 2.1.c)** Transformada de Fourier
  - Espectro de magnitude:
    - O valor máximo ocorre para $\omega = 46.9$ rad/s;
    - A harmônica fundamental possui frequência $\omega_1 = 2\pi 10 = 62.8$ rad/s.



Exercícios

- **Ex. 2.2)** Obtenha a reconstrução do sinal abaixo através de uma serie de Fourier. Considere que o sinal é periódico ao longo de todo o tempo.



Exercícios

- **Ex. 2.2)** Série de Fourier
  - Identificação do sinal:
    - Período: $T = 1 - (-2) = 3$ s → Frequência: $\omega = 2\pi/3$ rad/s;
    - Sinal: $y(t) = 1$ se $-1 < t < 1$ s, senão $y(t) = 0$;
  - Coeficientes da série de Fourier:
    - $A_0 = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{1.5} y(t)dt = \frac{2}{3}$ → componente DC;
    - $A_n = \frac{2}{3}\int_{-1.5}^{1.5} y(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{3}\frac{\sin n\omega}{n\omega}$;
    - $B_n = 0$, pois $y(t)$ é par.

Exercícios

- **Ex. 2.2)** Série de Fourier
  - Série de Fourier:
    - $y(t) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\sin n\omega}{n\omega}\cos n\omega t\right]$;
    - Aproximação para $N = 20$: quando $N \to \infty$, a série de Fourier se aproxima do sinal original.