ES704 – Instrumentação Básica

02 – Análise de sinais II

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

- **Índice:**
  - 1) Sinais;
  - 2) Análise em frequência;
  - 3) Análise de sinais não-estacionários;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

Análise de Fourier

- **Série de Fourier:**

$$\boxed{y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + Bn \sin n\omega t)}$$

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)dt} \quad \boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos n\omega t\, dt} \quad \boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\sin n\omega t\, dt}$$

- **Transformada de Fourier:**

$$\boxed{Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - Seja um **sinal discreto** $y(n\Delta t) \approx y(n)$, onde Δt é o incremento temporal;
  - A **transformada de Fourier discreta (DFT)** é dada por:

$$\boxed{Y(k\Delta f) \approx Y(k) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j2\pi nk/N}} \qquad (2.13)$$

  - $k = 0,1, \ldots M$;
  - $\Delta f = \frac{1}{M\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ é o incremento espectral.

2. Análise em frequência

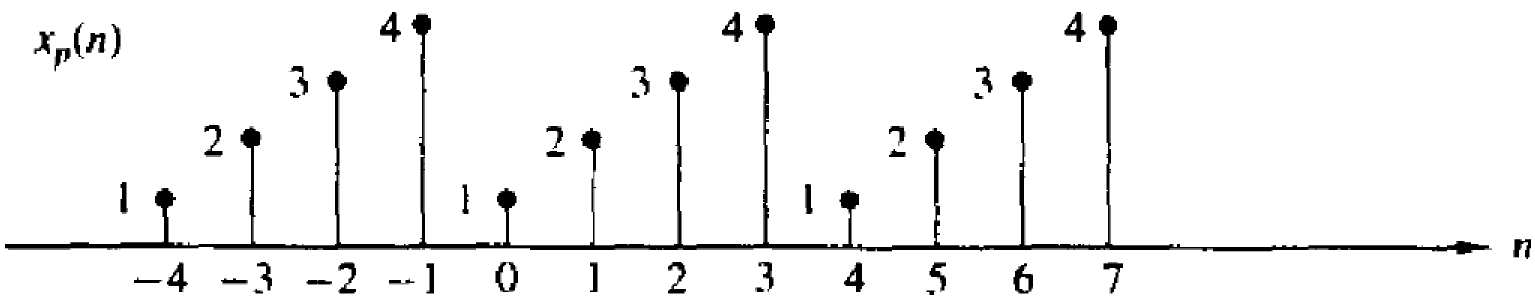
- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - A **resolução espectral** da DFT é dada por $\Delta f = \frac{1}{M\Delta t}$;
  - Por ser uma transformada unidimensional, a frequência máxima é limitada a $f_{\max} = \frac{M-1}{2}\Delta f$;
  - A DFT é calculada computacionalmente pelo algoritmo **fast Fourier transform (FFT)** → utilizar M como uma potência de 2;
  - Para evitar vazamento espectral (leakage), aplicar uma **função de janelamento** $w(n)$ antes de processar a FFT: $Y(k) = \mathcal{F}[w(n)y(n)]$.

2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Seja um sinal $x(n)$ com $n = 0,1 \ldots N - 1$ e tamanho N;
    - Exemplo: $x(n) = \{1,2,3,4\}$, $N = 4$.

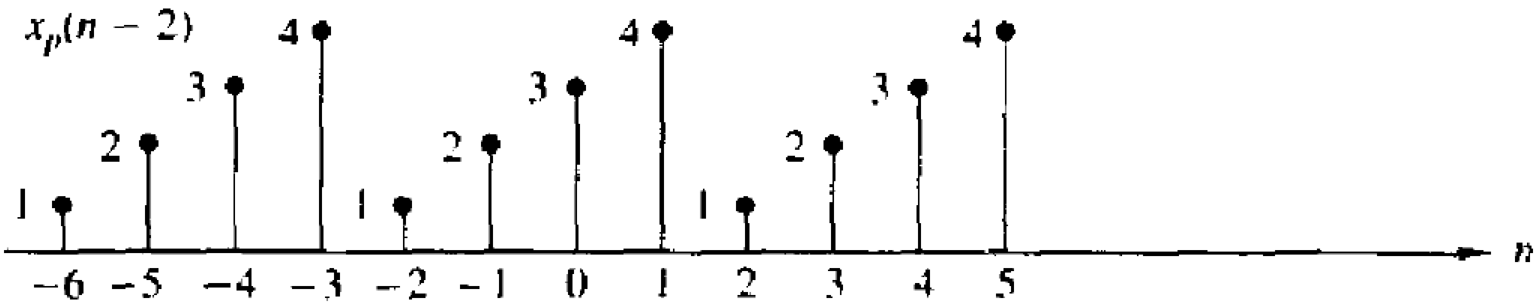
2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Seja $x_p(n)$ uma expansão infinita de $x(n)$ com período N;
    - $x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$;
    - Exemplo: $x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - l4) = \{\dots, 1,2,3,4,1,2,3,4, \dots\}$.



2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Seja $x_p'(n) = x_p(n-k)$ um sinal deslocado de k;
    - $x_p'(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-k-lN)$;
    - Exemplo: para $k = 2$,
      $x_p'(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-2-l4) = \{\ldots, 3,4,1,2,3,4,1,2 \ldots\}$.



2. Análise em frequência

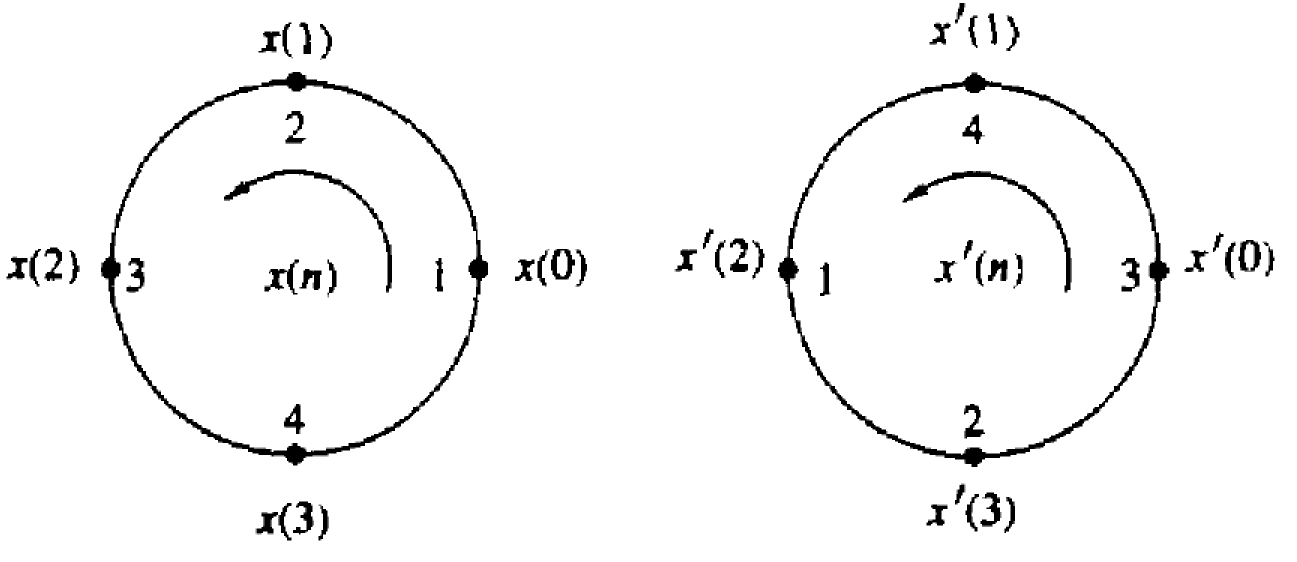
- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Seja $x'(n)$ o sinal janelado para uma repetição de $x_p{}'(n)$;
    - Exemplo: $x'(n) = \{3,4,1,2\}$.

2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Note que $x'(n) = x(n-k, \mathrm{mod}\, N) = x\big((n-k)\big)_N$;
    - Exemplo: $x(n) = \{1,2,3,4\}$, $x'(n) = \{3,4,1,2\}$, $N = 4$ e $k = 2$;
      - $x'(0) = x(-2, \mathrm{mod}\, 4) = x(2) = 3$;
      - $x'(1) = x(-1, \mathrm{mod}\, 4) = x(3) = 4$;
      - $x'(2) = x(0, \mathrm{mod}\, 4) = x(0) = 1$;
      - $x'(3) = x(1, \mathrm{mod}\, 4) = x(1) = 2$.

2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Deslocamento circular:**
    - Assim, $x'(n)$ é um deslocamento circular de $x(n)$.



2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Propriedades da DFT:**
    - **Linearidade:**

$$\boxed{y(n) = y_1(n) + y_2(n)}$$

$$\boxed{Y(k) = Y_1(k) + Y_2(k)} \qquad (2.14)$$

    - **Convolução circular:**

$$\boxed{Y(k) = Y_1(k)Y_2(k)}$$

$$\boxed{y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(m-n+pN)} \qquad (2.15)$$

– Onde $m = 0,1,\dots,N-1$ e p é um inteiro.

2. Análise em frequência

- **2.3. Transformada de Fourier discreta:**
  - **Propriedades da DFT:**
    - **Deslocamento temporal circular:**

$$\boxed{DFT[y(n-l+pN)] = Y(k)\exp(-j2\pi kl/N)} \tag{2.16}$$

    - **Deslocamento espectral circular:**

$$\boxed{DFT[y(n)\exp(j2\pi ln/N)] = Y(k-l+pN)} \tag{2.17}$$

2. Análise em frequência

- **2.4. Transformada Hilbert:**
  - Seja um sinal expresso na forma:

$$\boxed{y(t) = A(t)\cos\phi(t) = x(t) + j\hat{x}(t)} \qquad (2.18)$$

    - onde $A(t) = [x^2 + \hat{x}^2]^{1/2}$ é o **envelope** do sinal $x(t)$;
  - **Transformada Hilbert:**

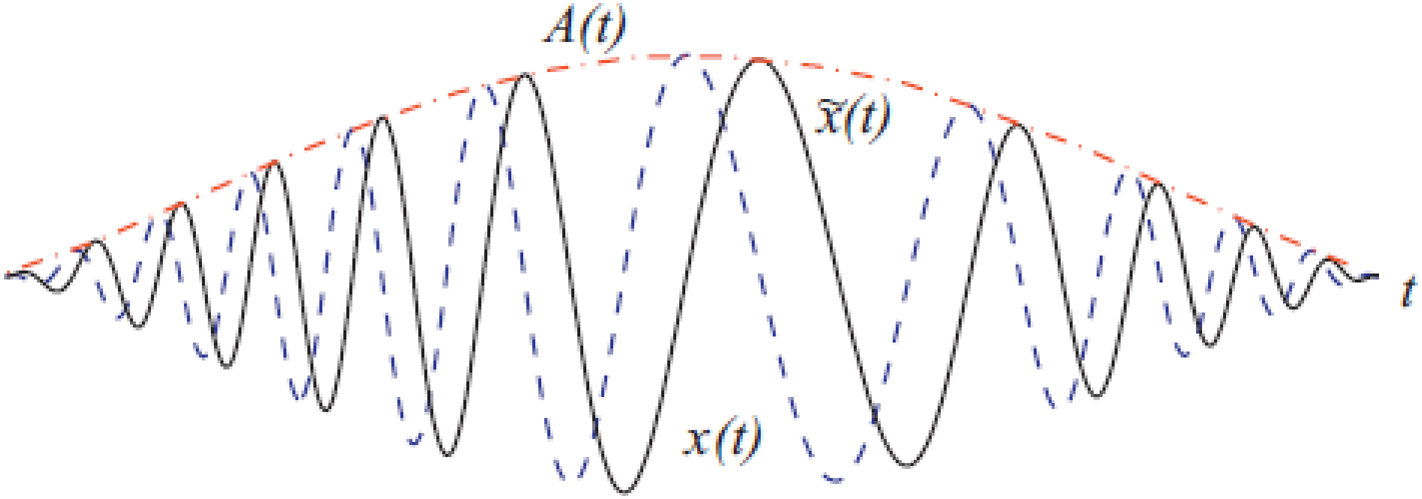
$$\boxed{\hat{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi\tau} * x(t)} \qquad (2.19)$$

    - onde

$$\boxed{\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = -j\mathrm{sgn}(\omega)X(\omega)} \qquad (2.20)$$

2. Análise em frequência

- **2.4. Transformada Hilbert:**
  - $A(t)$ é o envelope de $x(t)$.



3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.1. Sinais não-estacionários:**
  - Em sinais não-estacionários, a magnitude e a frequência de oscilação varia em função do tempo. Exemplos incluem sinais de música, voz, e abalos sísmicos;
  - Embora a TF permita identificar as componentes espectrais que compõe o sinal, ela não possibilita localizar a ocorrência dos eventos no âmbito temporal.

3. Análise de sinais não-estacionários

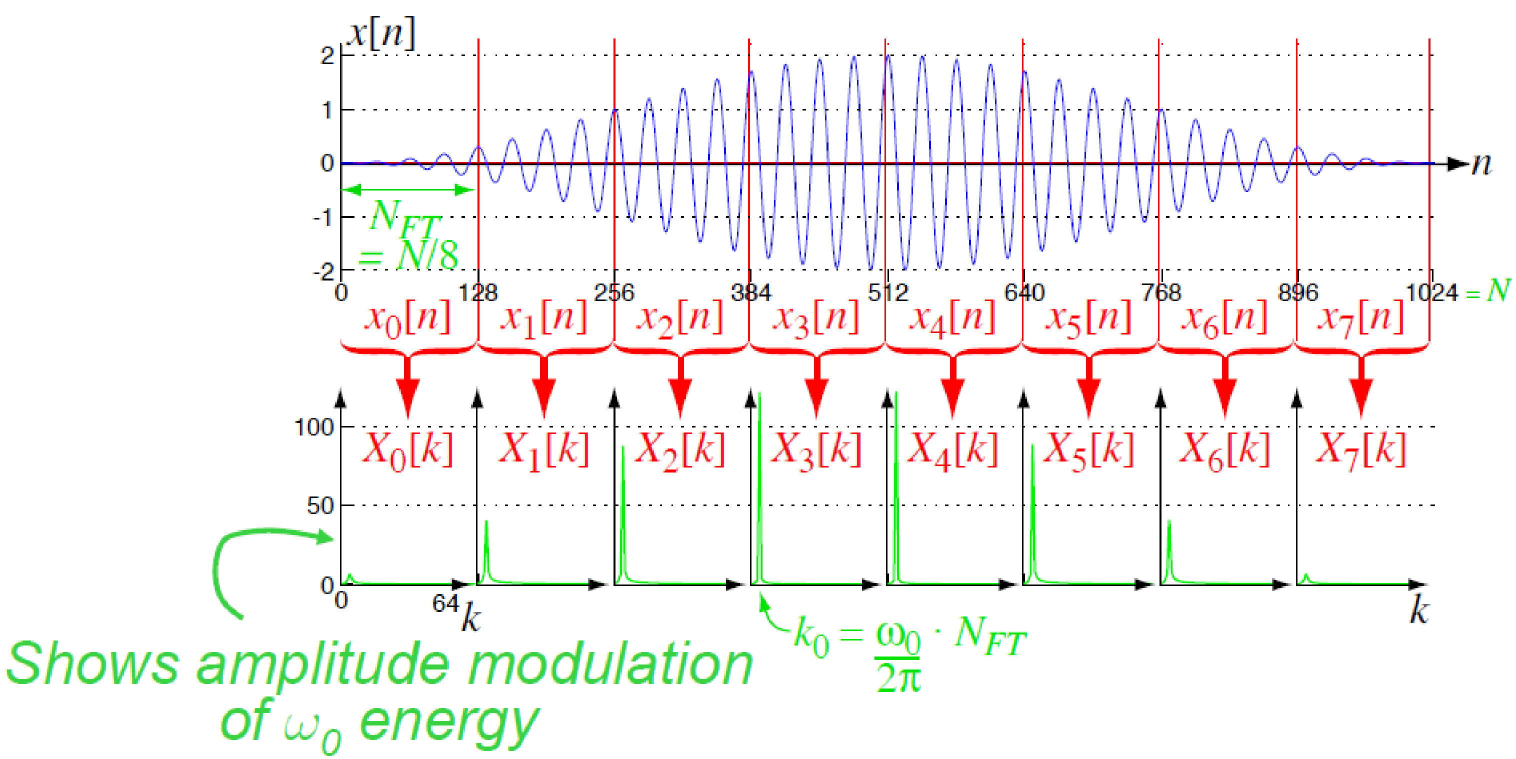
- **3.2. Transformada de Fourier janelada:**
  - A **transformada de Fourier janelada (short-time Fourier transform – STFT ou WFT)** calcula a FT de seções finitas do sinal e constrói um espectro de magnitude-frequência-tempo (**spectrogram**);
  - **STFT:**

$$\boxed{Y(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(u-t)y(u)e^{-j\omega u}du} \qquad (2.21)$$

    - Onde $u(t)$ é uma função de janelamento válida em $t-T<u<t$, T é a duração do sinal.

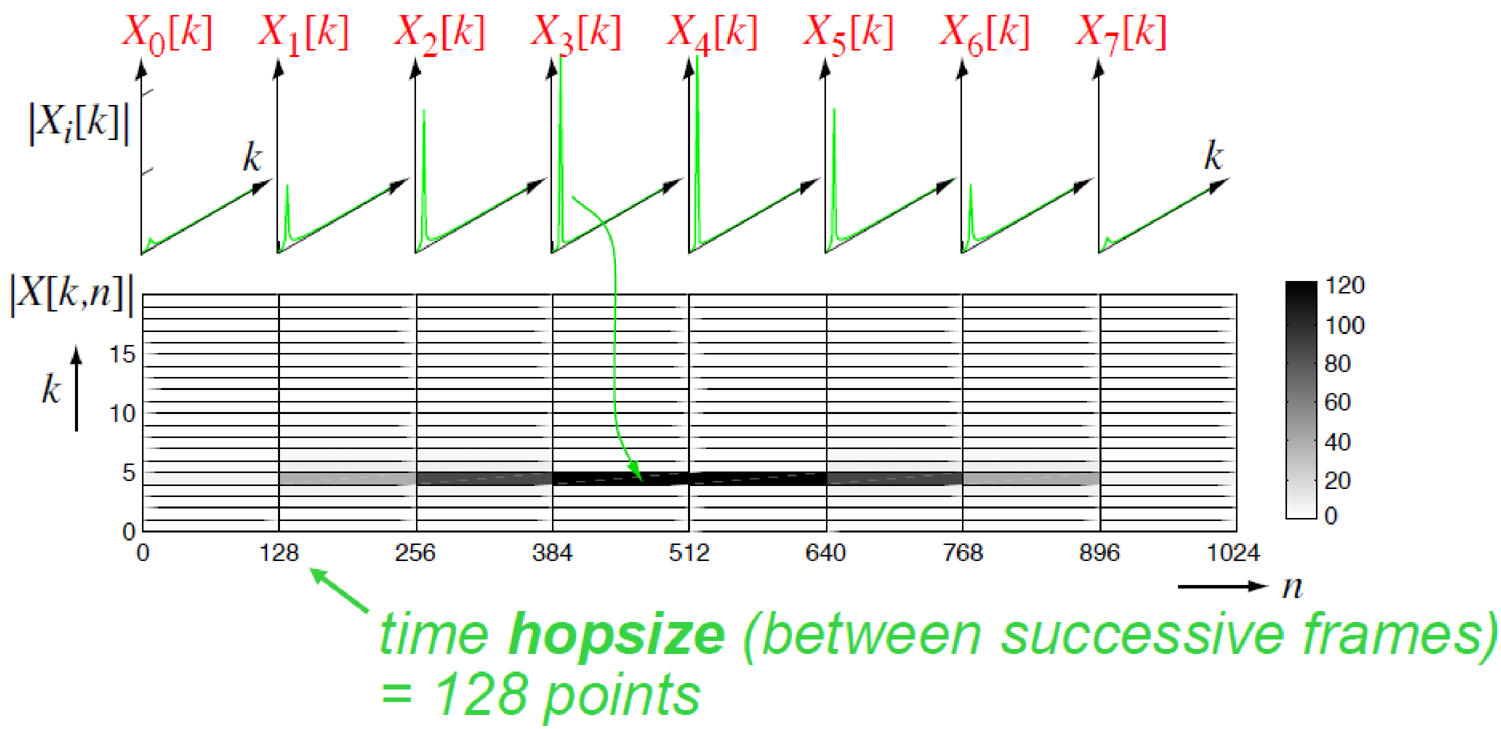
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.2. Transformada de Fourier janelada:**
  - **Spectrogram:**



3. Análise de sinais não-estacionários

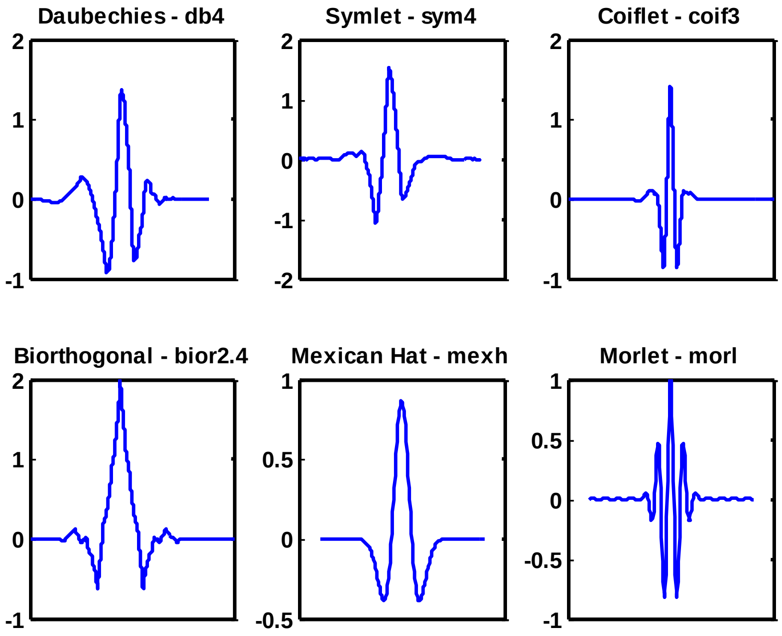
- **3.2. Transformada de Fourier janelada:**
  - **Spectrogram:**



3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Wavelet (ondaleta):** sinal $\psi(t)$ de tempo limitado e média nula;
  - Uma **família de wavelets** $\psi_{a,b}(t)$ é dada por

$$\boxed{\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} \quad (2.18)$$



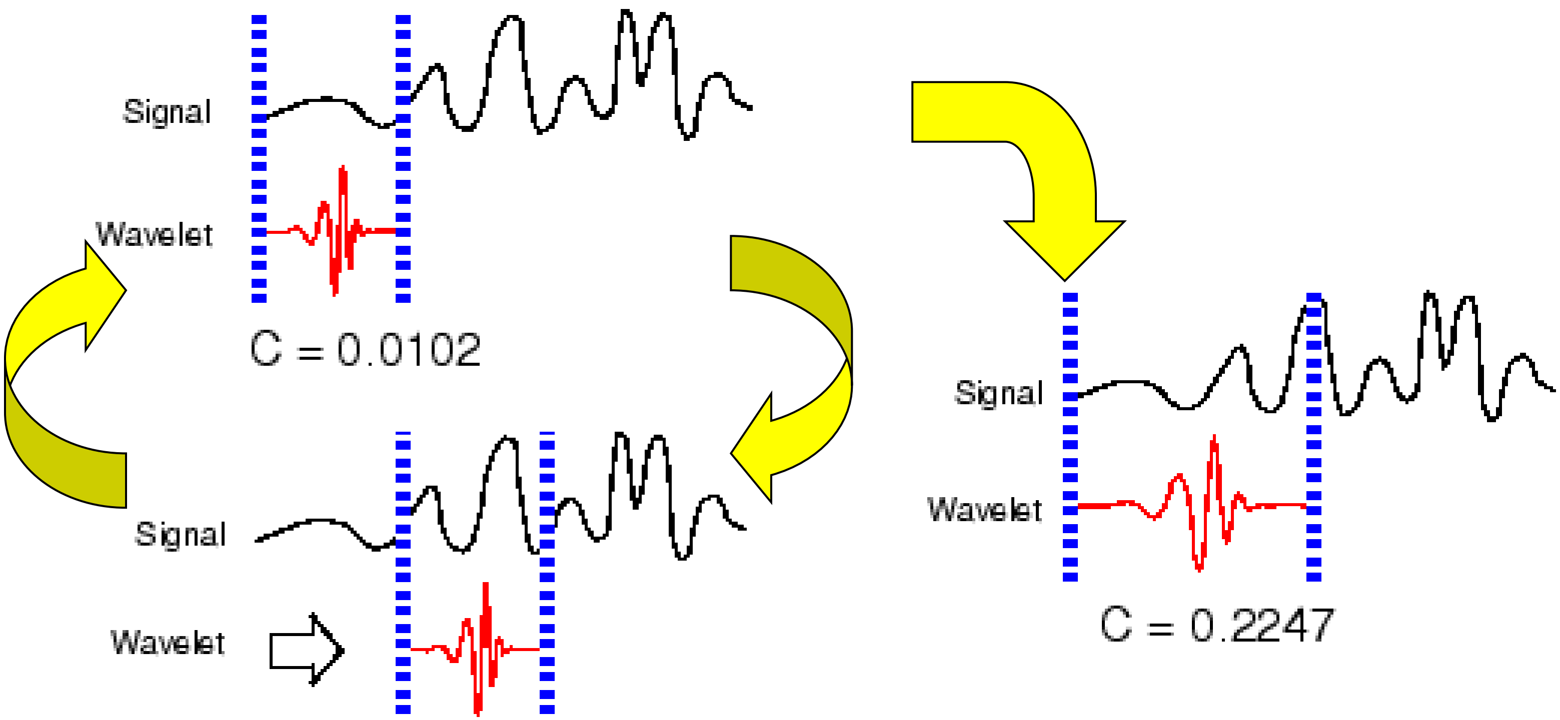
  - a: escala (deformação);
  - b: translação (tempo, espaço).

3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet contínua (CWT):** aproxima um sinal por uma somatória de wavets da mesma família;
    - Seja um sinal $y(t)$ e uma wavelet $\psi(a, b)$;
    - **1)** Comparar ψ com um segmento inicial de y;
    - **2)** Calcular o coeficiente de correlação C, que representa o quão ψ se aproxima do segmento de sinal analisado;
    - **3)** Deslocar o sinal e repetir os passos **1** e **2** para o próximo segmento;
    - **4)** Aumentar a escala de ψ e repetir os passos de **1** a **3**;
    - **5)** Plotar os coeficientes em função do tempo e das escalas.

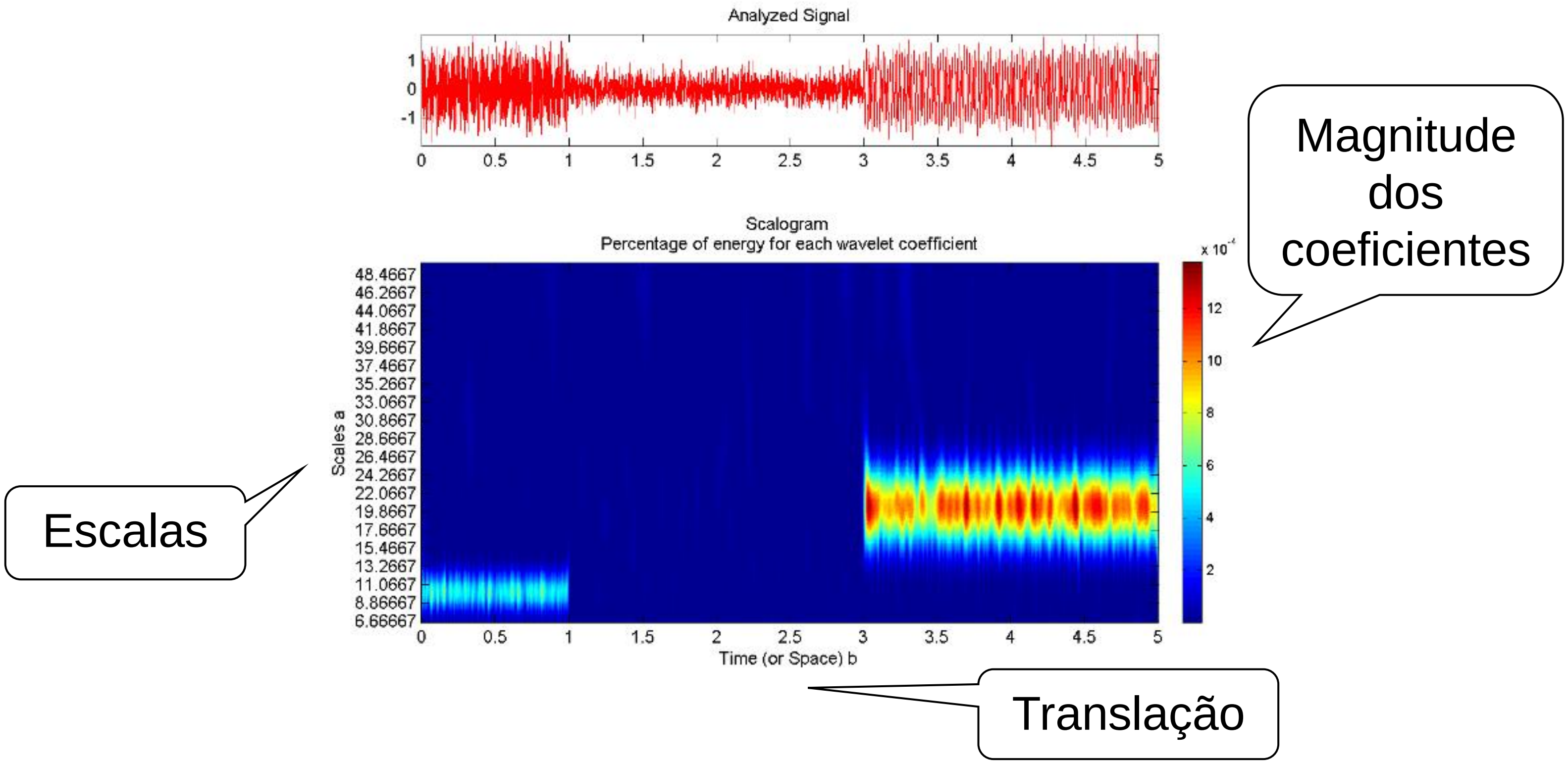
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet contínua (CWT):**



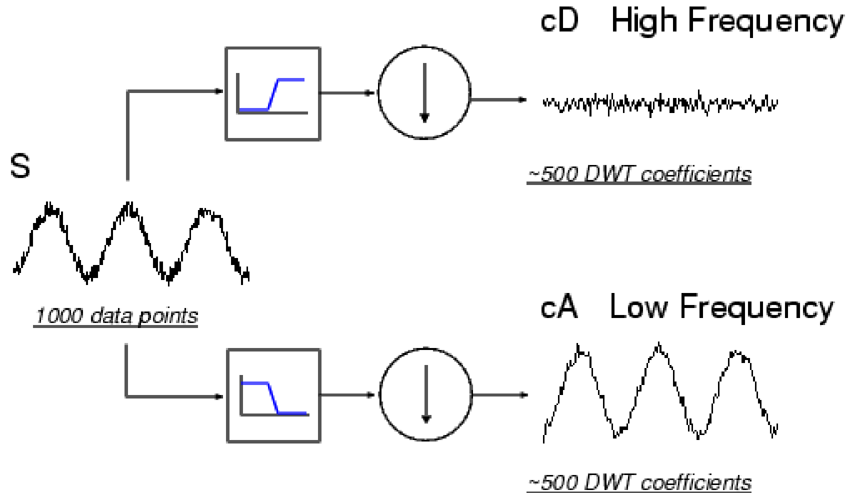
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet contínua (CWT):**



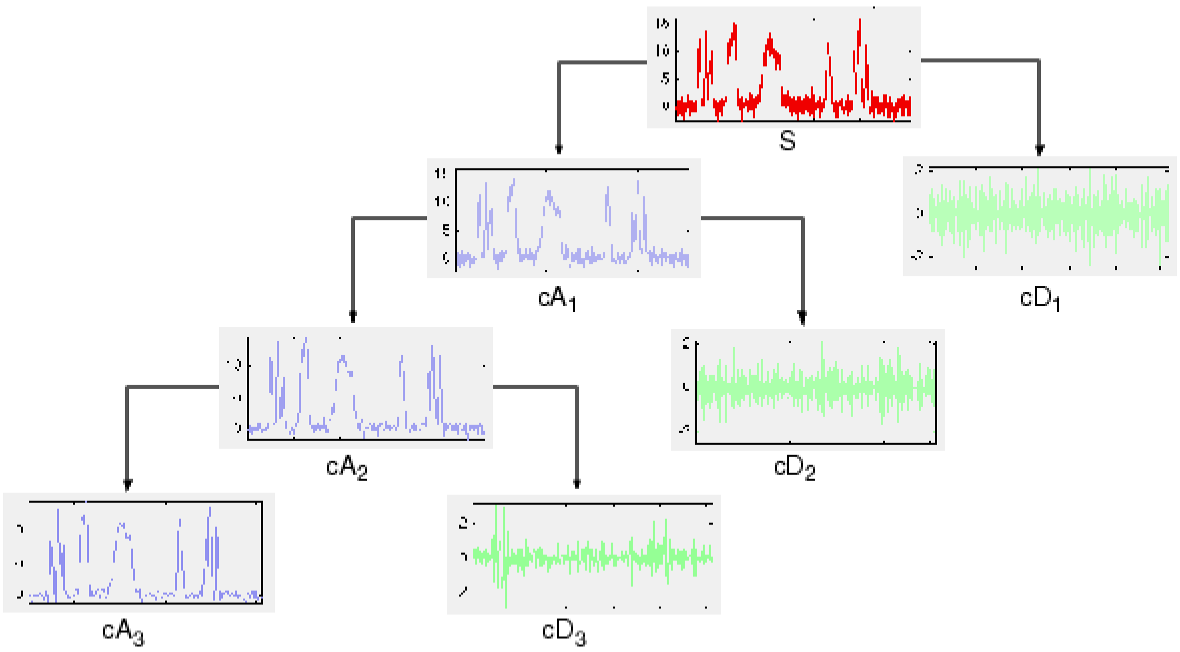
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet discreta (DWT):**
    - Decompõe o sinal em coeficientes de **baixa frequência cA (aproximação)** e **alta frequência cD (detalhe)**;
    - O sinal **S** com N valores é reduzido a componentes **cA** e **cD** de tamanho $N/2$ (‘downsampling’).



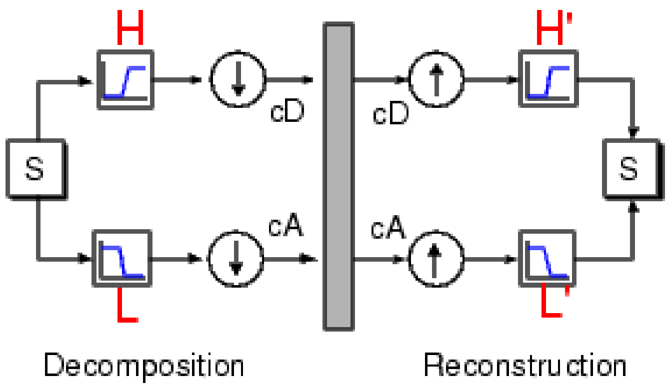
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet discreta (DWT):**
    - Decomposição em vários níveis.



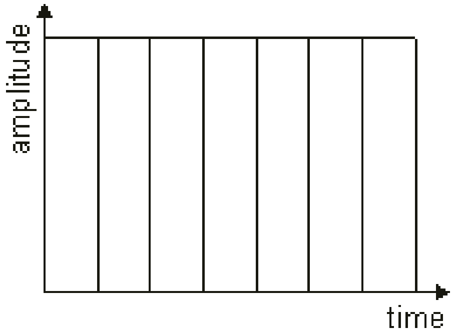
3. Análise de sinais não-estacionários

- **3.3. Transformada wavelet:**
  - **Transformada wavelet discreta inversa (IDWT):**
    - O sinal decomposto pode ser reconstruído a partir dos coeficientes de aproximação e detalhes;
    - A IDWT consiste no processo de 'upsampling' (preenchimento de **cA** ou **cD** com zeros para atingir tamanho N) e filtragem (para cancelamento de ruído espectral durante a reconstrução).

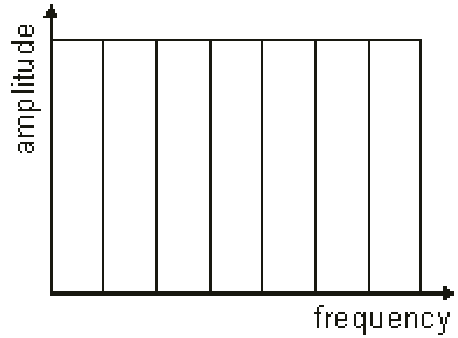


3. Análise de sinais não-estacionários

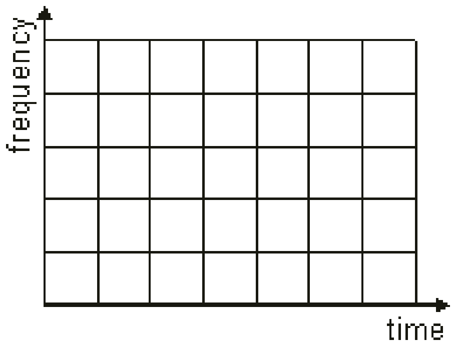
- **3.4. Comparação entre técnicas de análise espectral:**



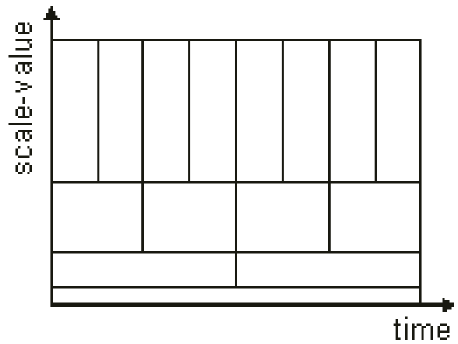
signal-domain



frequency-domain (FT)



time-/frequency-domain
(Gabor-spectrum STFT)



Wavelet-analysis

Pseudo-frequência

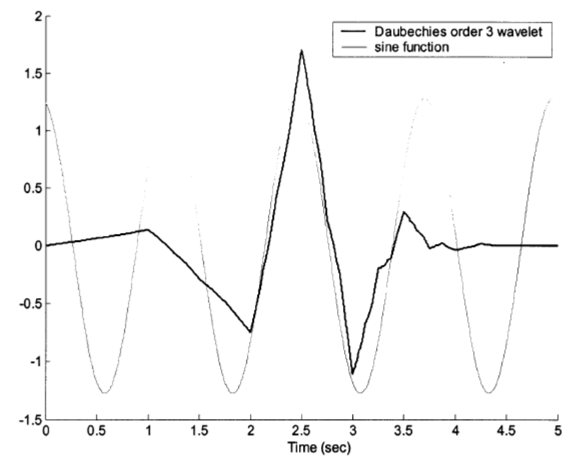


Fig. 6. Daubechies order 3 wavelet and a sine function with the same frequency as the center frequency of the wavelet (center frequency, 0.8 Hz; center period, 1.25 s).

Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Estude o algoritmo FFT. Como ele otimiza o processamento computacional da DFT?
  - 2) Em um sinal periódico composto, as frequências se misturam? Justifique.
  - 3) Cite dez exemplos de aplicação da transformada de Fourier.

Referências

- **Referências:**
  - R.S. Figliola, D.E. Beasley, Theory and Design for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - G. Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, Springer, 2011.
  - K. Okamoto, Fundamentals of Optical Waveguides, Academic Press, 2021.
  - A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, I.T. Young, Signals and Systems, Prentice Hall, 1983.
  - J. G. Proakis, D. G. Manolakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall, 1996.
  - MATLAB – Wavelet Toolbox, Mathworks, 2007.

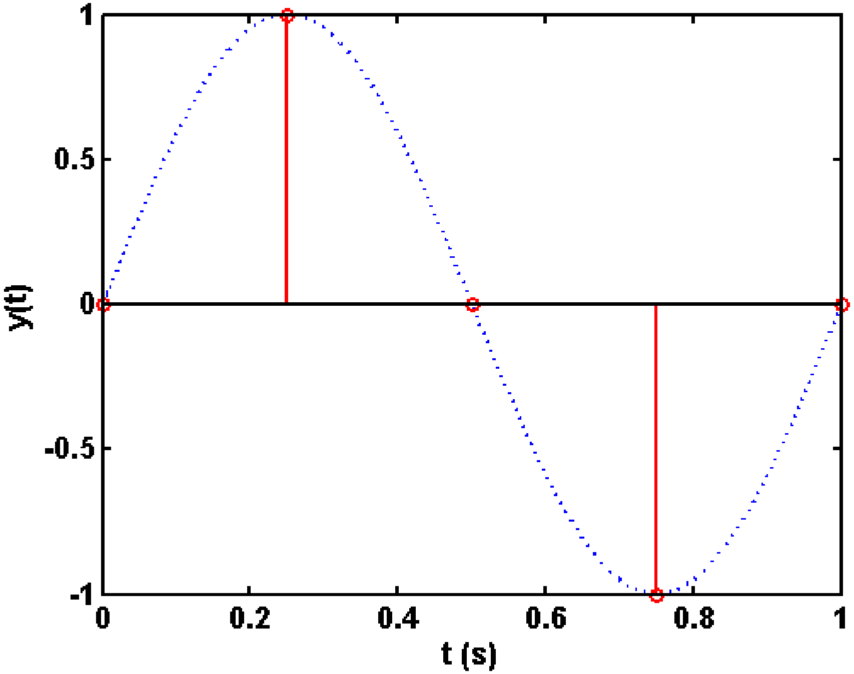
Exercícios

Exercícios

- **Ex. 2.3)** Seja o sinal $y(t) = \sin(2\pi t)$ com duração de 1 s, e amostrado a 4 Hz.
  - a) Calcule a transformada de Fourier de $y(t)$;
  - b) Apresente o espectro de amplitude de $Y(\omega)$.

Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Sinal $y(t)$:
    - $\Delta t = \frac{1}{f_s} = 0.25$ s;
    - $N = 5$ (0 a 1 s).



Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:

$$\boxed{Y(k\Delta f) \approx Y(k) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j2\pi nk/N}}$$

  - $M = N = 5$;
  - $\Delta f = \frac{1}{M\Delta t} = 0.8$ Hz (resolução espectral)

Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:
    - Seja

$$\boxed{Y(k) = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n G^{kn}}$$

    - onde

$$\boxed{f_n = y(n)}$$

$$\boxed{G = e^{-j2\pi/N}}$$

Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:
    - Reescrevendo o somatório de Y_k,

$$\boxed{Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n G^{kn} = A_k + B_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_n G^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} f_n G^{kn}}$$

    - O segundo termo pode ser reescrito como

$$\boxed{B_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{n+N/2} G^{k(n+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{n+N/2} G^{kN/2} G^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{n+N/2} (-1)^k G^{kn}}$$

Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:
    - Portanto,

$$\boxed{Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n G^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[f_n + (-1)^k f_{n+N/2}\right] G^{kn}}$$

    - A expressão acima pode ser reescrita como um produto de matrizes $\mathbf{Y}_k = \mathbf{G}^{kn}\mathbf{f}_n$, onde $\mathbf{f}_n = \left[f_n + (-1)^k f_{\mathrm{n+N/2}}\right]$. Deste modo, a operação de FFT se reduz a uma multiplicação de matrizes, o que estabelece o algoritmo FFT;
    - Obs: note que N deve ser par e maior do que 2. Geralmente escolhe-se $M > N$ onde M é uma potência de 2. Valores de $y(n)$ para $n > N - 1$ são preenchidos com zero (zero padding).

Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:
    - Para $M = 8$:

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^2 & G^4 & G^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^4 & G^8 & G^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & G^6 & G^{12} & G^{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G & G^2 & G^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^3 & G^6 & G^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^5 & G^{10} & G^{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & G^7 & G^{14} & G^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \\ f_0 - f_4 \\ f_1 - f_5 \\ f_2 - f_6 \\ f_3 - f_7 \end{bmatrix}$$

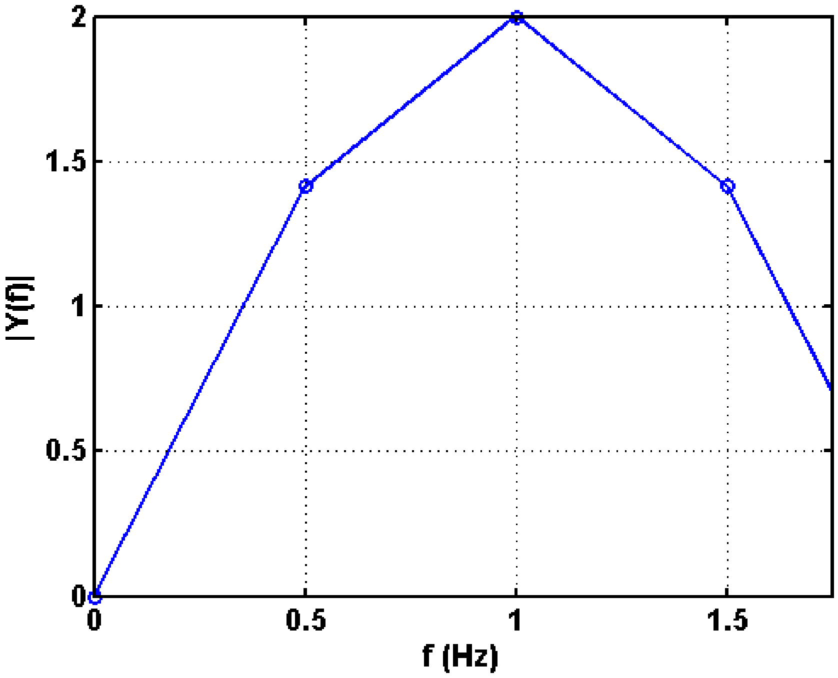
Exercícios

- **Ex. 2.3.a)** Transformada de Fourier:
  - Transformada de Fourier discreta:
    - Para $M = 8$:

n	$t = n\Delta t$	$y(n)$	k	$f = k\Delta f$	$Y(k)$
0	0,00	0,00	0	0,00	0,00
1	0,25	1,00	1	0,50	1,41
2	0,50	0,00	2	1,00	-2,00j
3	0,75	-1,00	3	1,50	-1,41
4	1,00	0,00	4	2,00	0,00
5	1,25	0,00	5	2,50	-1,41
6	1,50	0,00	6	3,00	2,00j
7	1,75	0,00	7	3,50	1,41

Exercícios

- **Ex. 2.3.b)** Espectro de magnitude:
  - Obs: note que a série de Fourier que aproxima $y(t)$ é a própria função senoidal de 1 Hz. Portanto, FT é trivial.

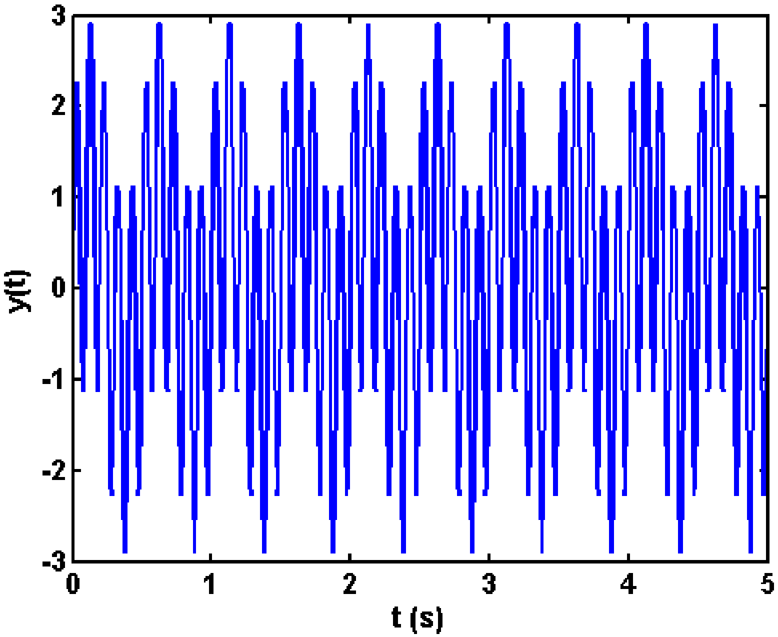


Exercícios

- **Ex. 2.4)** Seja o sinal $y(t) = 2\sin(20\pi t) + \sin(4\pi t)$ com duração de 5 s, e amostrado a 100 Hz.
  - a) Calcule a transformada de Fourier de $y(t)$. Utilize uma FFT com $M = 1024$ elementos. Determine a resolução espectral;
  - b) Apresente os espectros de magnitude, fase e de potência.

Exercícios

- **Ex. 2.4.a)** Transformada de Fourier:
  - Frequências:
    - $f_1 = 10$ Hz;
    - $f_2 = 2$ Hz;
  - Resolução temporal:
    $\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{100} = 0.01$ s;
  - Resolução espectral:
    $\Delta f = \frac{1}{M\Delta t} = \frac{1}{1024 \times 0.01} \approx 0.1$ Hz.



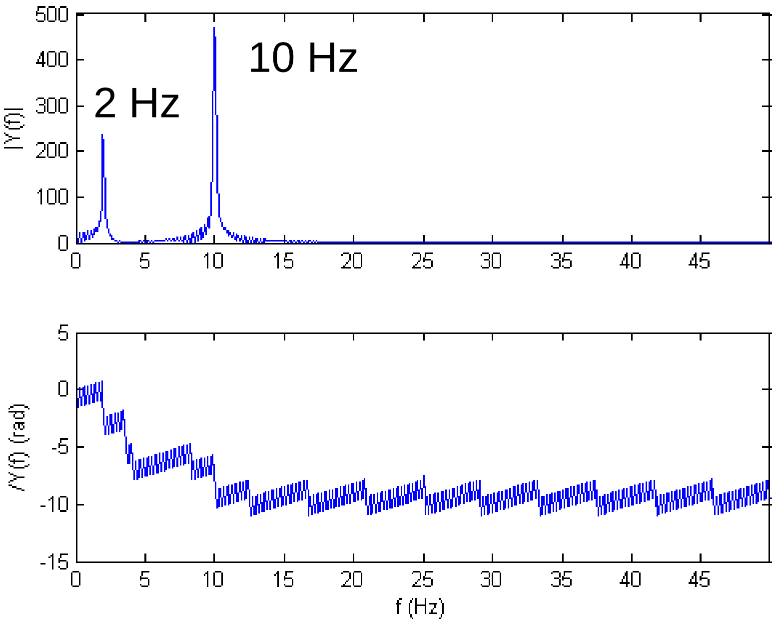
Exercícios

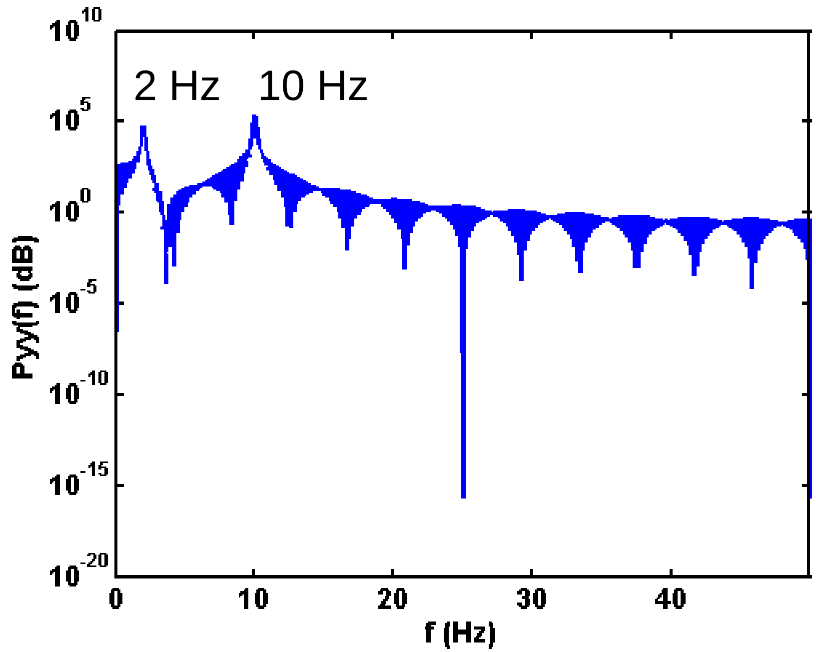
- **Ex. 2.4.a)** Transformada de Fourier:
  - FFT:

```
dt = 1e-2;
t = [0:dt:5]';
y = 2*sin(2*pi*10*t) + 1*sin(2*pi*2*t);

M = 1024;
df = 1/(M*dt);
f = [0:df:(M-1)*df]';

Y = fft(y,M);               %FFT
mY = abs(Y);                %Magnitude
pY = angle(Y);              %Fase
Pyy = (Y.*conj(Y));         %Espectro de potencia
```

Exercícios

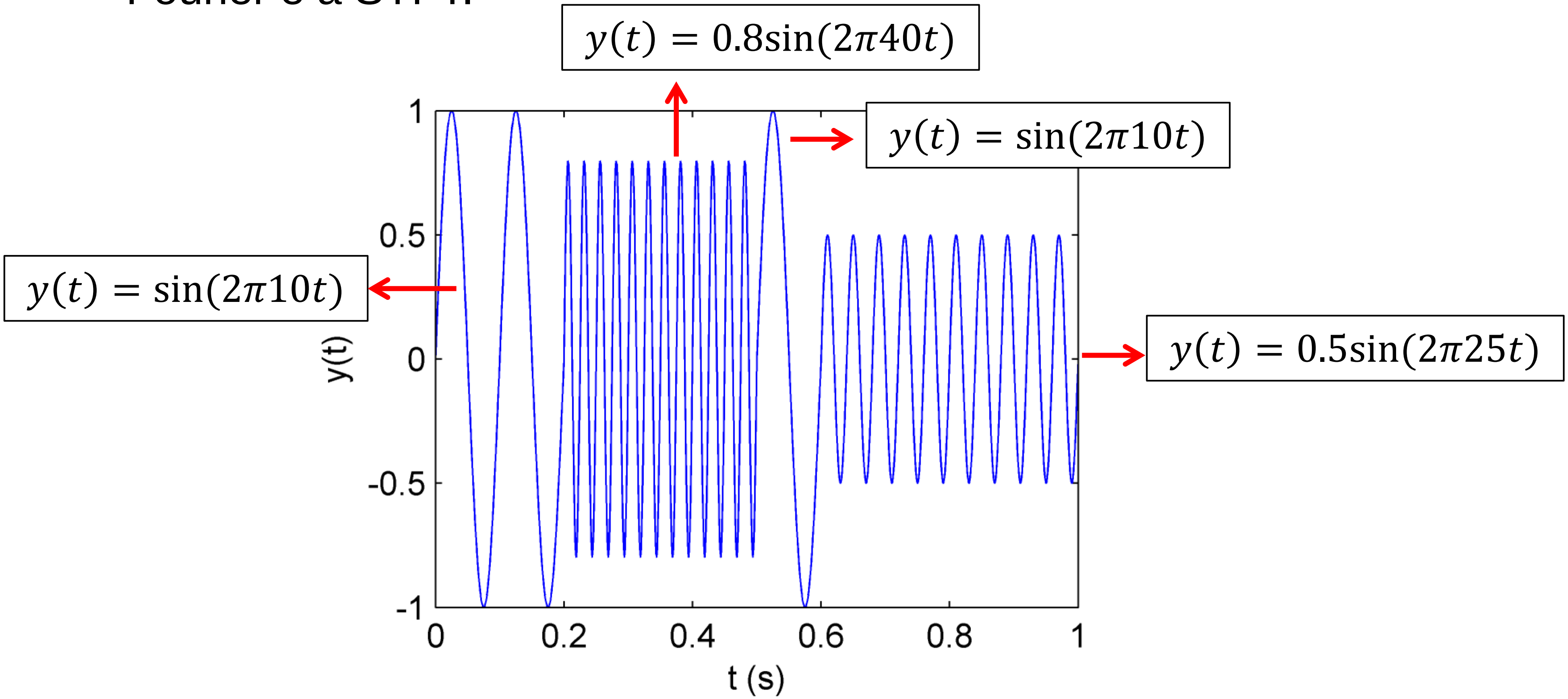
- **Ex. 2.4.b)** Espectros de magnitude, fase e potência:





Exercícios

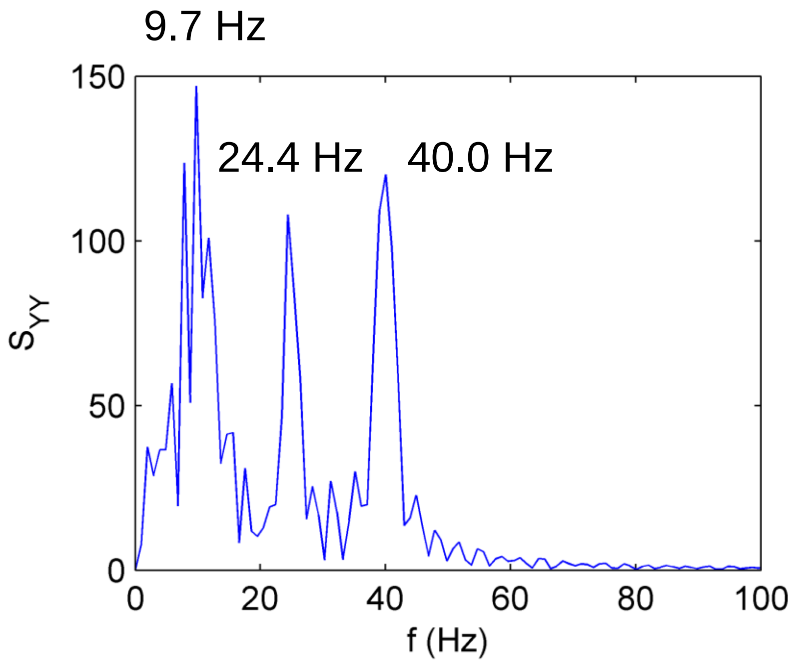
- **Ex. 2.5)** Caracterize o sinal abaixo utilizando a transformada de Fourier e a STFT.



Exercícios

- **Ex. 2.5)**
  - Transformada de Fourier:

```
% Passo temporal
dt = 1e-3;

% Janelamento
w = hann(size(y,1));

% Passo espectral
M = 1024;
df = 1/(M*dt);

%FFT
Y = fft(w.*y,M);
Pyy = sqrt(Y.*conj(Y));
```



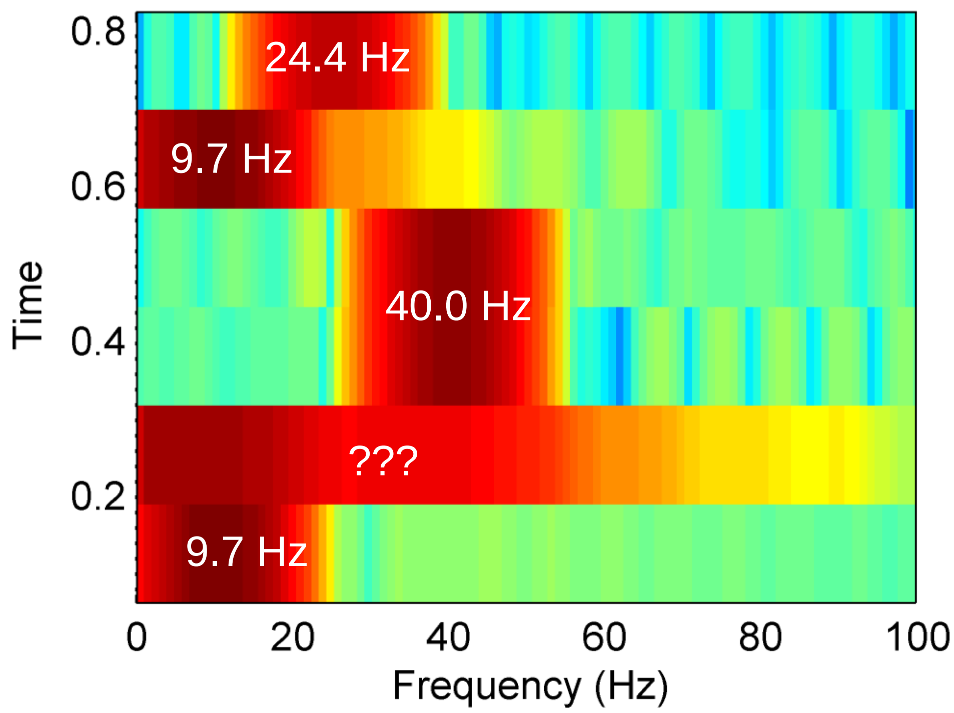
$\Delta t = 1$ ms

$\Delta f \approx 1$ Hz

Exercícios

- **Ex. 2.5)**
  - STFT:

```
% STFT
spectrogram(y,128,1,1024,1/dt)
```



Exercícios

- **Ex. 2.5)**
  - CWT:
    - Wavelet Daubechies 4;
    - Quanto maior a escala (alargamento do sinal), menor a frequência (maior período).

```
% CWT
cwt(y,1:2:64,'db4','plot');
```