ES704 – Instrumentação Básica

08 – Medição de tensão e deformação

Eric Fujiwara

Unicamp – FEM – DSI

Índice

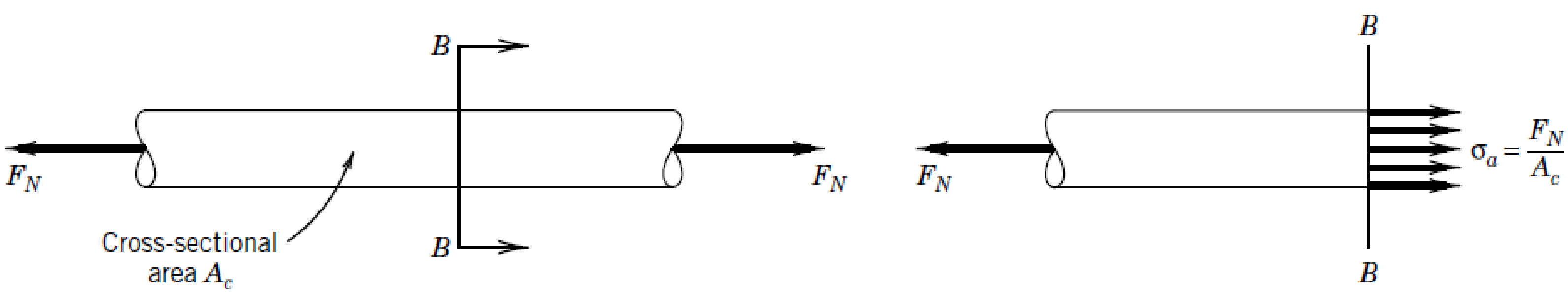
- **Índice:**
  - 1) Tensão e deformação;
  - 2) Extensômetro;
  - 3) Métodos ópticos;
  - Questionário;
  - Referências;
  - Exercícios.

1. Tensão e deformação

- **1.1. Carregamento uniaxial:**
  - Seja um corpo **homogêneo** e **isotrópico** submetido a uma força de tração F_N uniaxial;
  - **Tensão axial** (Pa):

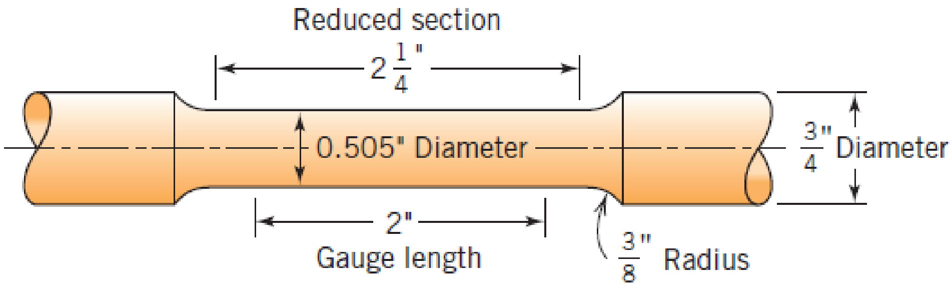
$$\boxed{\sigma_a = \frac{F_N}{A_c}} \qquad (8.1)$$

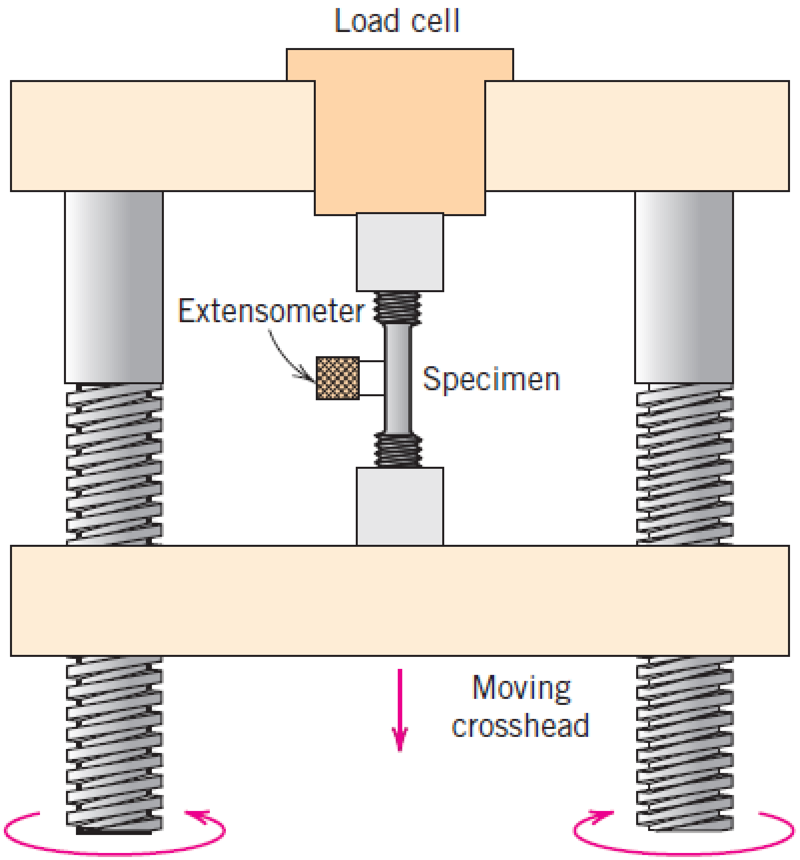
    - A_c: área da seção transversal.



1. Tensão e deformação

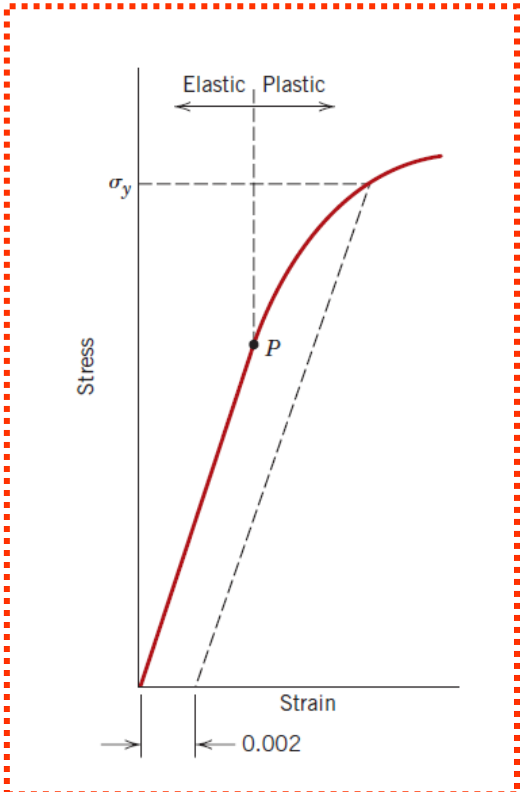
- **1.1. Carregamento uniaxial:**
  - **Ensaio de tração:**
    - O corpo de prova é submetido a um carreamento controlado até a ruptura para determinar a resposta de tensão-deformação.

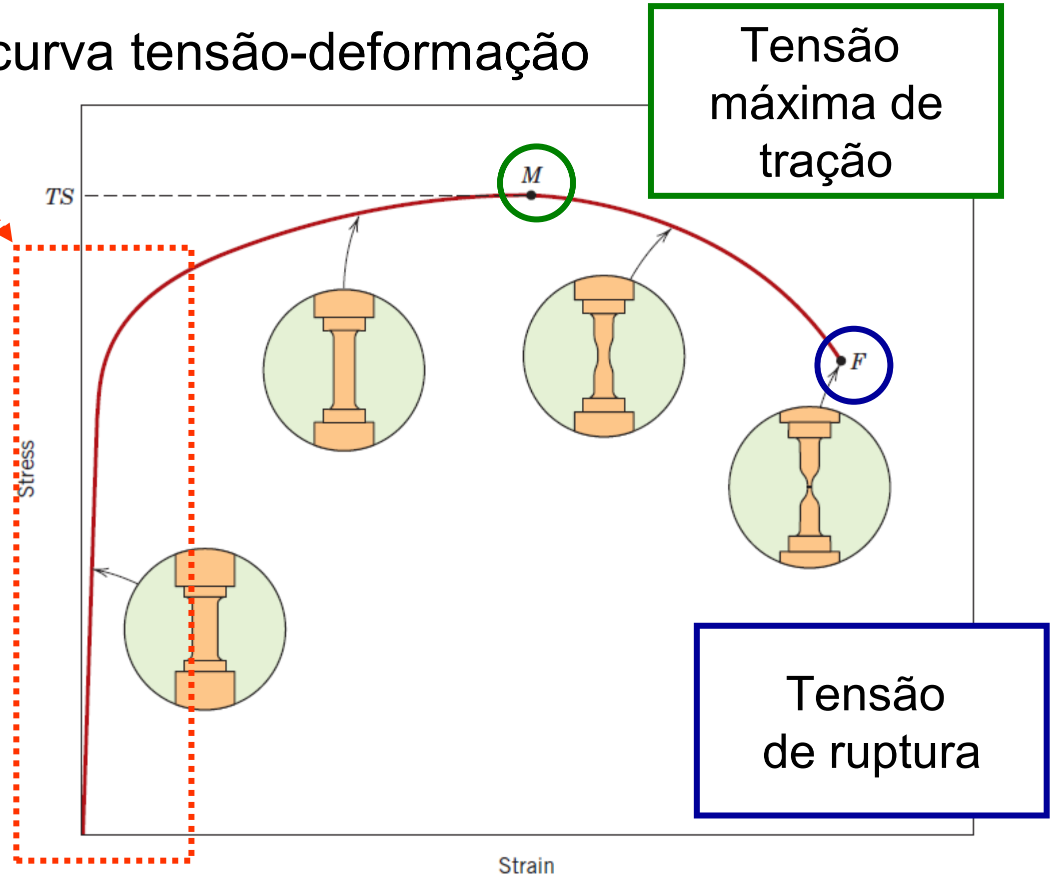




1. Tensão e deformação

- **1.1. Carregamento uniaxial:**
  - **Ensaio de tração:** curva tensão-deformação





1. Tensão e deformação

- **1.1. Carregamento uniaxial:**
  - No **regime elástico**, vale a relação linear (**Lei de Hooke**):

$$\boxed{\sigma_a = E_m \varepsilon_a} \tag{8.2}$$

    - E_m: Módulo de elasticidade (Young) – Pa;
  - **Deformação axial** (m/m)**:**

$$\boxed{\varepsilon_a = \frac{\Delta L}{L}} \tag{8.3}$$

    - Onde L é o comprimento inicial e ΔL é a variação de comprimento;
    - ε_a é adimensional, usualmente expressa com microdeformação $\mu\varepsilon_a = \varepsilon_a \times 10^6$

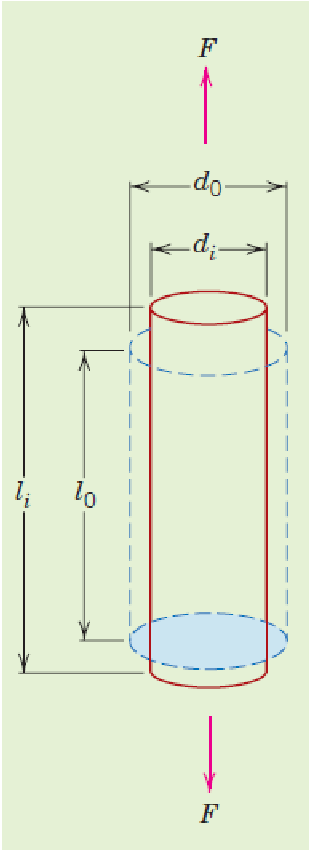
1. Tensão e deformação

- **1.1. Carregamento uniaxial:**
  - **Deformação lateral** (m/m):

$$\boxed{\varepsilon_L = \frac{\Delta d}{d}} \tag{8.4}$$

    - Onde d é o diâmetro inicial e Δd é a variação de diâmetro;
    - A relação entre deformações axial e lateral é dada pelo **coeficiente de Poisson**:

$$\boxed{\nu_p = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_a}} \tag{8.5}$$



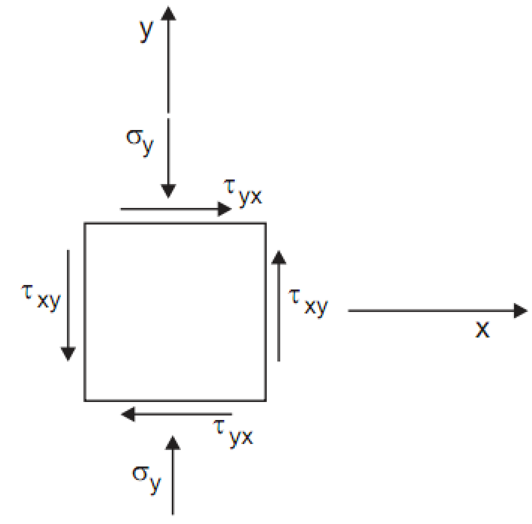
1. Tensão e deformação

- **1.2. Estado biaxial de tensões:**

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_m} - \nu_p \frac{\sigma_y}{E_m}} \qquad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_m} - \nu_p \frac{\sigma_x}{E_m}}$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E_m(\varepsilon_x + \nu_p \varepsilon_y)}{1 - {\nu_p}^2}} \qquad \boxed{\sigma_y = \frac{E_m(\varepsilon_y + \nu_p \varepsilon_x)}{1 - {\nu_p}^2}} \qquad (8.6)$$

$$\boxed{\tau_{xy} = G\gamma_{xy}}$$



- τ_{xy}: tensão de cisalhamento (Pa);
- γ_{xy}: deformação no plano de cisalhamento;
- G: módulo de cisalhamento.

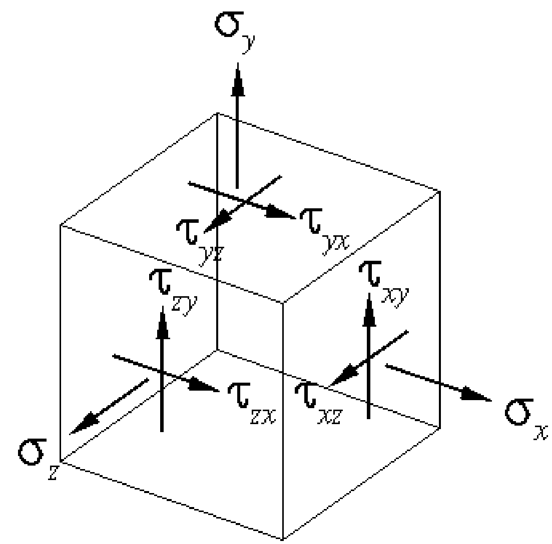
1. Tensão e deformação

- **1.3. Estado triaxial de tensões:**

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_m} - \frac{\nu_p}{E_m}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

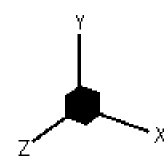
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_m} - \frac{\nu_p}{E_m}\left(\sigma_x + \sigma_z\right) \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad (8.7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_m} - \frac{\nu_p}{E_m}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



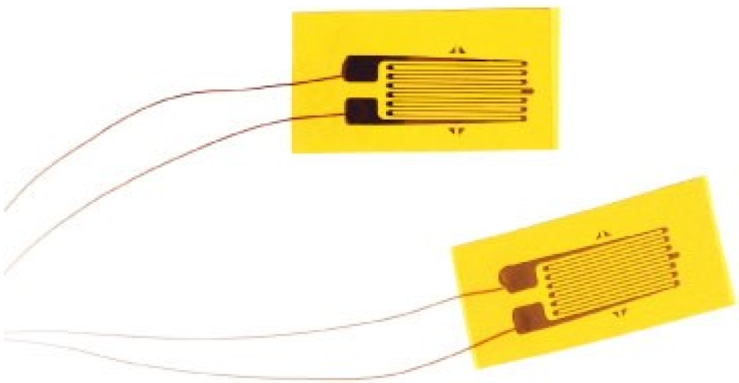
- **Tensor de tensões:**

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (8.8)$$



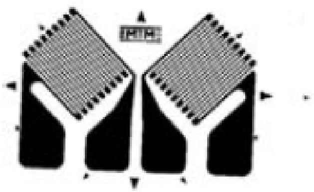
2. Extensômetro

- **2.1. Extensômetro (strain gauge):**
  - Dispositivo que mede deformação (tensão) uniaxial, aplicado também em monitoramento de força, torque e deslocamento;
  - A combinação de vários gauges (rosetas) permite determinar estados de tensão 2D e 3D;
  - **Tipos de strain gauge:**
    - Piezorresistivo;
    - Semicondutor;
    - Piezelétrico.

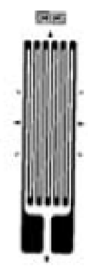


2. Extensômetro

- **2.1. Extensômetro (strain gauge):**
  - **Configurações de strain gauge:**

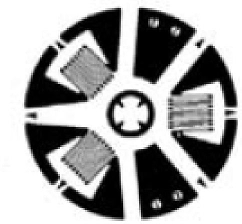


Torque

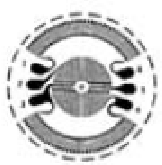


Linear

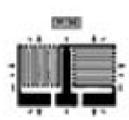
Delta



Tensão residual

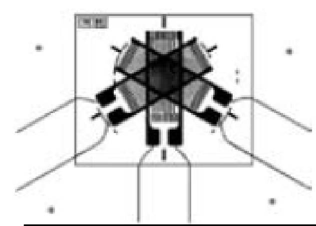


Diafragma



T

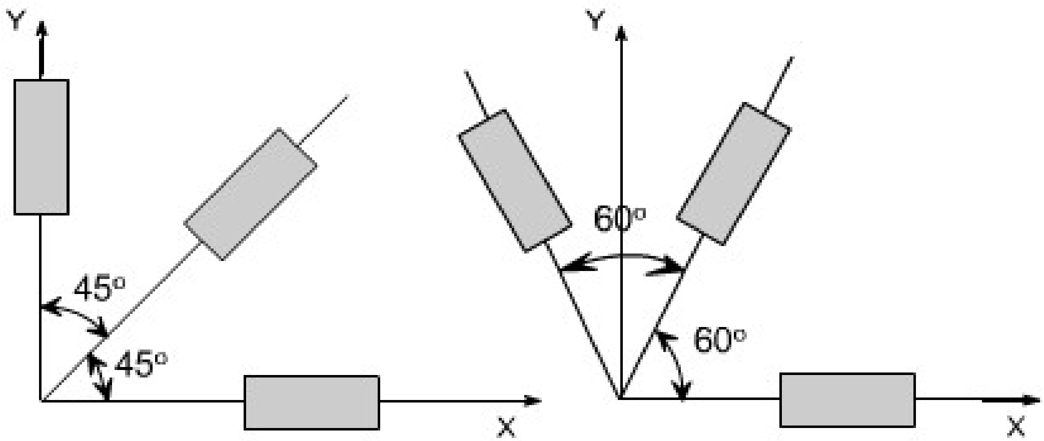
Retangular



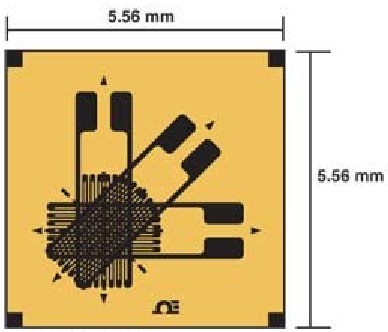
Empilhado

2. Extensômetro

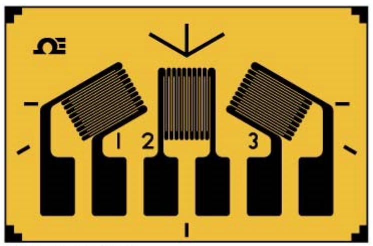
- **2.1. Extensômetro (strain gauge):**
  - **Rosetas:** monitoramento de estados 2D e 3D de tensão.



(i) (ii)



SGD-2/350-RY51



SGD-3/120-RY621

2. Extensômetro

- **2.1. Extensômetro (strain gauge):**
  - **Resistência elétrica:**

$$\boxed{R = \frac{\rho l}{A}} \qquad (8.9)$$

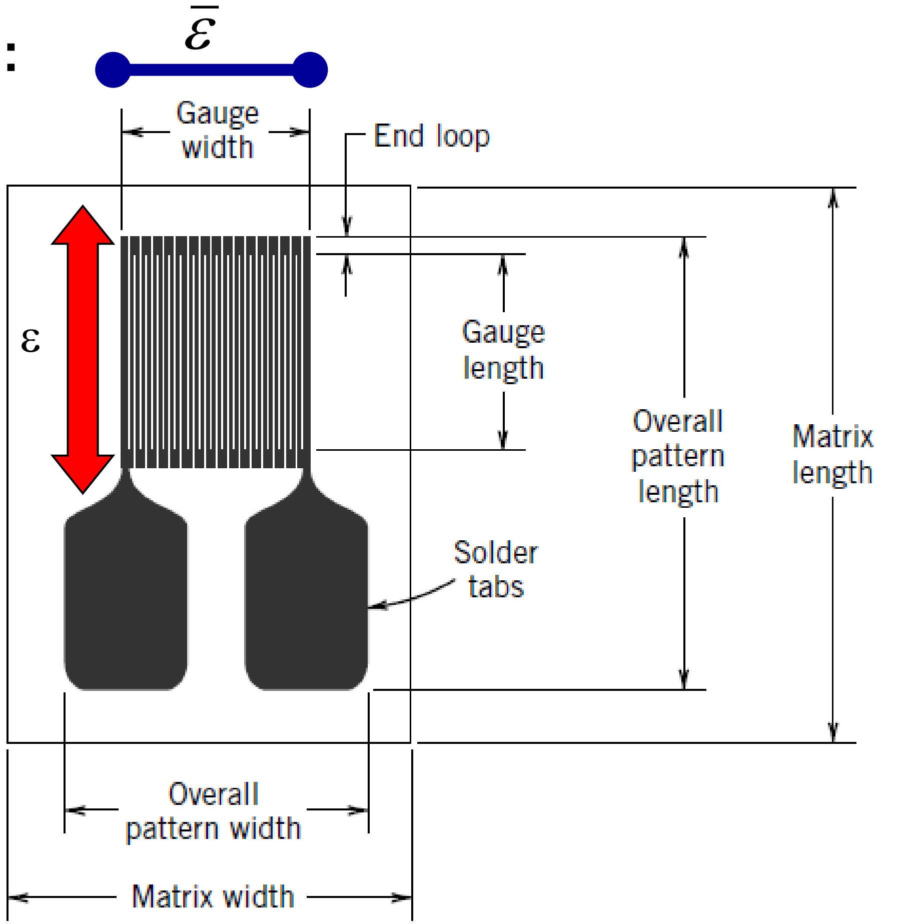
  - **Variação da resistência elétrica:**

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = \left(1 + 2\nu_p + k_\pi E_m\right)\frac{\Delta L}{L} = GF\,\frac{\Delta L}{L}} \qquad (8.10)$$

    - ρ: resistividade elétrica;
    - k_π: coeficiente de piezorresistência;
    - GF: Gauge factor – ganho do strain grauge.

2. Extensômetro

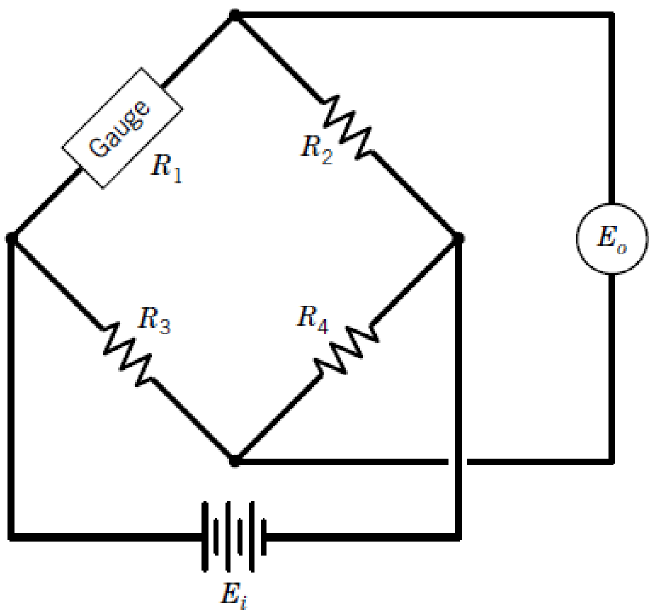
- **2.1. Extensômetro (strain gauge):**
  - **Estrutura do strain gauge:**
    - Trilha de circuito impresso sobre substrato plástico;
    - Posicionado no ponto de tensão máxima para medir a tensão média ao longo do comprimento do gauge;
    - O extensômetro é acoplado à superfície analisada através de adesivos isolantes com baixa expansão térmica.



2. Extensômetro

- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Ponte de Wheatstone equilibrada com um gauge:**

$$\boxed{\frac{\Delta E_o}{E_i} = \frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R} = \frac{GF}{4}\varepsilon} \qquad (8.11)$$



- Tensão inicial nula, resistências inicias R, strain gauge sujeito à variação de resistência $R_1 = R + \Delta R$.

2. Extensômetro

- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Ponte com múltiplos gauges:**

$$\boxed{\frac{\Delta E_o}{E_i} = \frac{R_2 \Delta R_1 - R_1 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{R_3 \Delta R_4 - R_4 \Delta R_3}{(R_3 + R_4)^2}} \qquad (8.12)$$

    - Considerando todos os gauges idênticos (mesmo GF):

$$\boxed{\frac{\Delta E_o}{E_i} = \frac{GF}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)} \qquad (8.13)$$

  - **Constante da ponte:** resposta relativa ao caso de único gauge.

$$\boxed{\kappa = \frac{\Delta E_{o,\mathrm{multi}}}{\Delta E_{o,\mathrm{single}}} = \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \sum_{n=1}^{4} \pm \varepsilon_n} \qquad (8.14)$$

2. Extensômetro

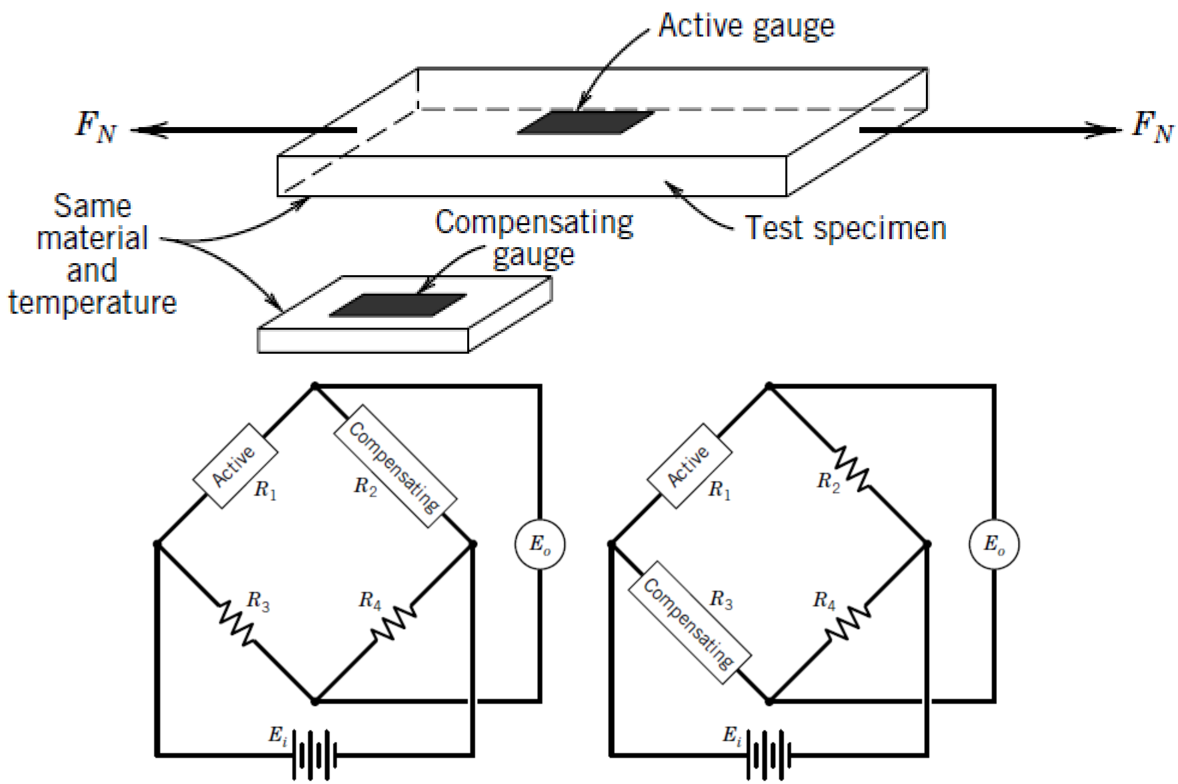
- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Deformação aparente**: a deformação axial ε_a medida pelo strain gauge é sujeita a deformação lateral ε_L e ao efeito de variação térmica $\Delta\mathrm{T}$.

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = GF_a\varepsilon_a + GF_L\varepsilon_L + GF_T\Delta T} \qquad (8.15)$$

    - Estes efeitos podem ser cancelados utilizando gagues de referência na ponte, insensíveis aos efeitos externos;
    - Da mesma forma, gauges adicionais podem ser utilizados para amplificar a saída da medição.

2. Extensômetro

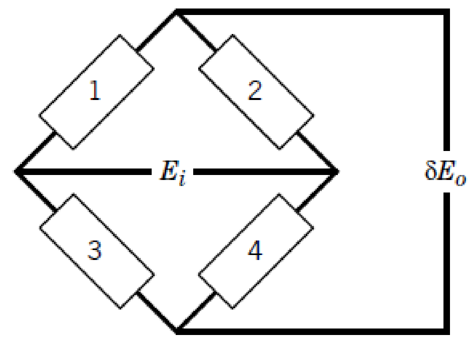
- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Compensação de temperatura:**

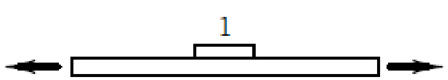
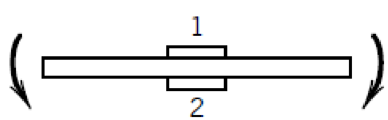
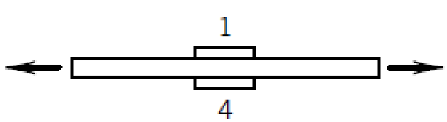


2. Extensômetro

- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Constante de ponte:**

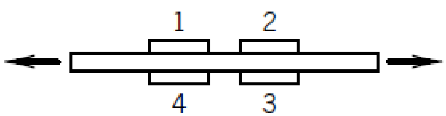
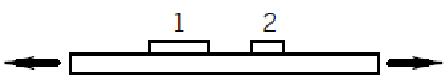
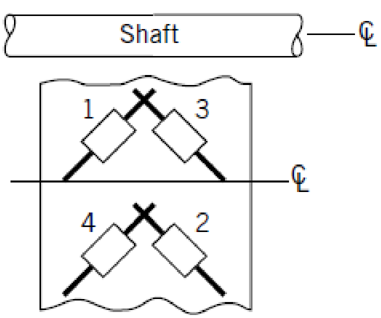
$$\boxed{\kappa = \frac{\Delta E_{o,\text{multi}}}{\Delta E_{o,\text{single}}} = \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \sum_{n=1}^{4} \pm \varepsilon_n}$$



	Arrangement	Compensation Provided	Bridge Constant κ
	Single gauge in uniaxial stress	None	κ = 1
	Two gauges sensing equal and opposite strain—typical bending arrangement	Temperature	κ = 2
	Two gauges in uniaxial stress	Bending only	κ = 2

2. Extensômetro

- **2.2. Interrogação de strain gauges:**
  - **Constante de ponte:**

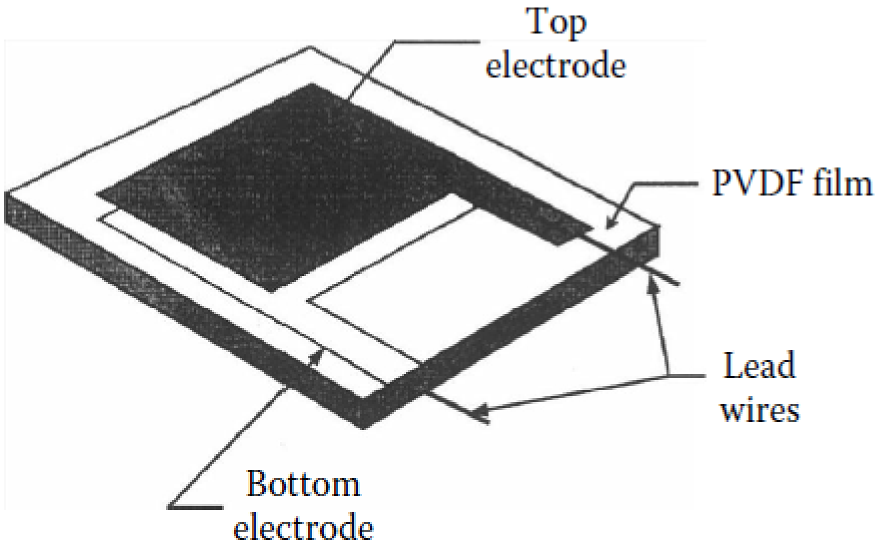
	Four gauges with pairs sensing equal and opposite strains	Temperature and bending	κ=4
	One axial gauge and one Poisson gauge		κ= 1 +ν
	Four gauges with pairs sensing equal and opposite strains—sensitive to torsion only; typical shaft arrangement.	Temperature and axial	κ = 4

2. Extensômetro

- **2.2. Extensômetro semicondutor:**
  - Altos valores de coeficiente de piezorresistência, resultando em GF maiores;
  - Maior resistência à fadiga e menor histerese em comparação a gauges metálicos;
  - Tamanho compacto, boa resposta em frequência, alta tolerância à compressão;
  - A resistência varia de forma não-linear com a deformação, vulnerabilidade à variação de temperatura, limitação no valor de deformação máxima.

2. Extensômetro

- **2.3. Extensômetro piezelétrico:**
  - Baseado em um substrato condutor sobreposto por uma placa fina condutora, formando um capacitor. Os eletrodos são intermediados por um material piezelétrico, que funciona como o dielétrico do capacitor;
  - Ao sofrer deformação, o dielétrico produz cargas elétricas que são coletadas pelos eletrodos. A carga elétrica no capacitor é proporcional à deformação do dielétrico.



3. Métodos ópticos

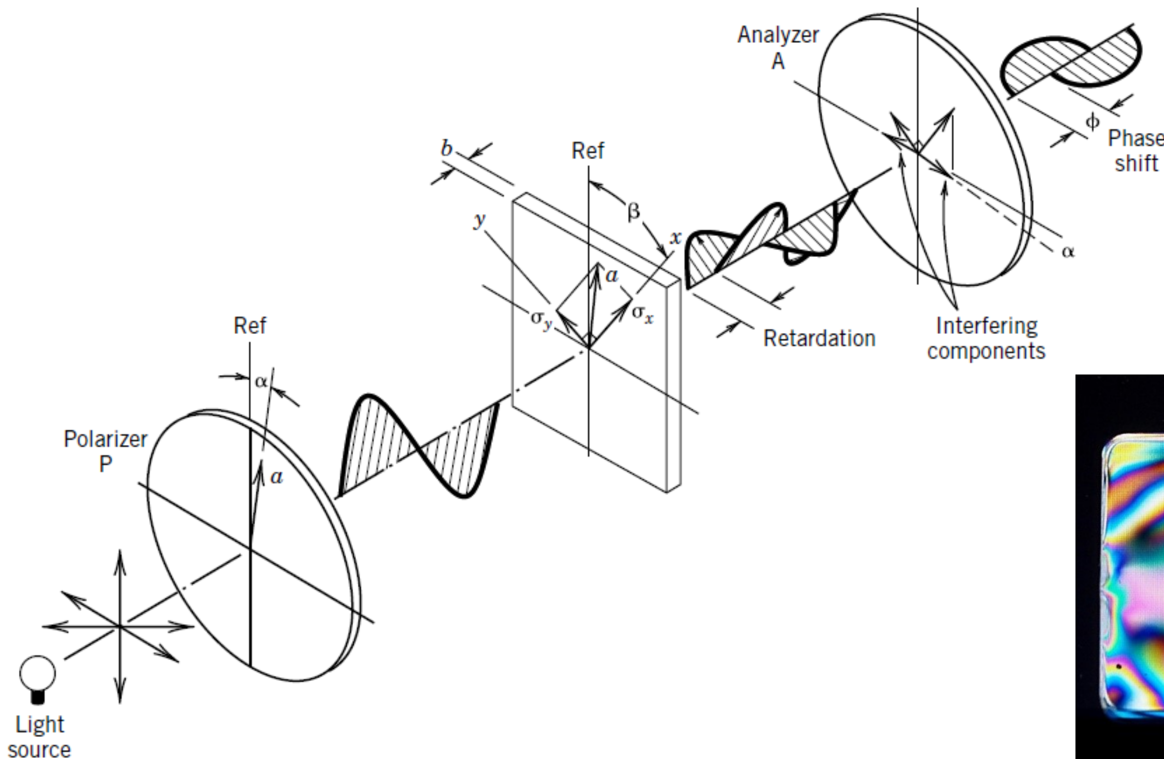
- **3.1. Efeito fotoelástico:**
  - **Birrefringência:** diferença entre os índices de refração ortogonais de um material $\Delta n = n_x - n_y$;
  - **Efeito fotoelástico:** variação do índice de refração em resposta à deformação do material.

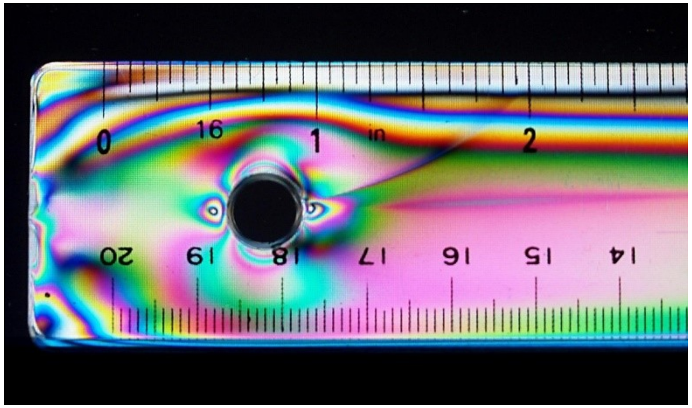
$$\boxed{\Delta n = n_x - n_y = K_b(\sigma_x - \sigma_y)} \tag{8.16}$$

    - K_b: constante de Brewster;
  - A diferença de índices pode ser medida em termos de diferença de fase $\Delta\phi$ excitando o material através de luz com polarização linear (fast axis, slow axis).

3. Métodos ópticos

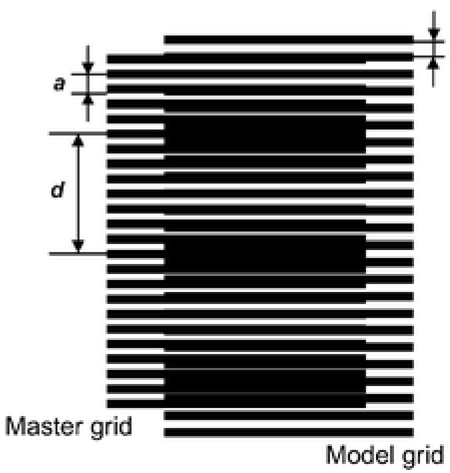
- **3.1. Efeito fotoelástico:**
  - **Medição de polarização:**

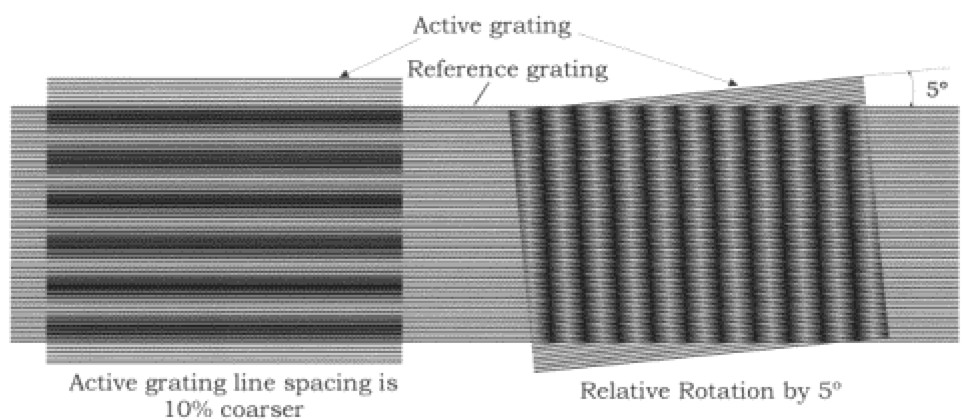




3. Métodos ópticos

- **3.2. Padrão de Moiré:**
  - Sobreposição de padrões densos e defasados entre si para medir deslocamento/rotação de uma superfície. A grade variável é colada na superfície enquanto que a grade fixa é mantida entre o objeto e a câmera.





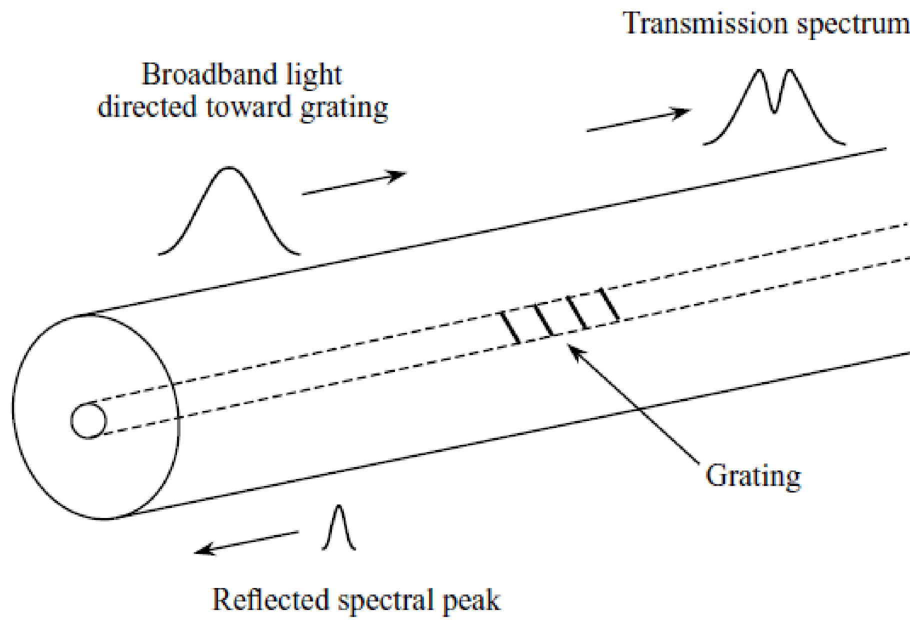
3. Métodos ópticos

- **3.3. Extensômetro de fibra óptica:**
  - **Redes de Bragg em fibra (FBG):** Variações periódicas (Λ) no índice de refração da fibra (da ordem do comprimento de onda da luz). Funciona como um filtro notch óptico em λ_B.

$$\boxed{\lambda_B = 2n\Lambda}$$

$$\boxed{\Delta\lambda_B = \lambda_B(1 - p_e)\varepsilon} \quad (8.17)$$

  - Onde $\Delta\lambda_B$ é o deslocamento espectral do filtro e p_e é o coeficiente fotoelástico.



Questionário

- **Questionário:**
  - 1) Como funciona o strain gauge metálico? Como ele pode ser utilizado para medir força e torque?
  - 2) Discuta sobre os efeitos de temperatura e histerese na resposta do strain gauge;
  - 3) A medição do strain gauge depende do posicionamento preciso na amostra? Como compensar os erros de posicionamento?
  - 4) É necessário utilizar um espectrômetro para monitorar a saída de uma FBG?
  - 5) Como você faria para monitorar deformações micrométricas utilizando uma câmera e processamento de imagens?

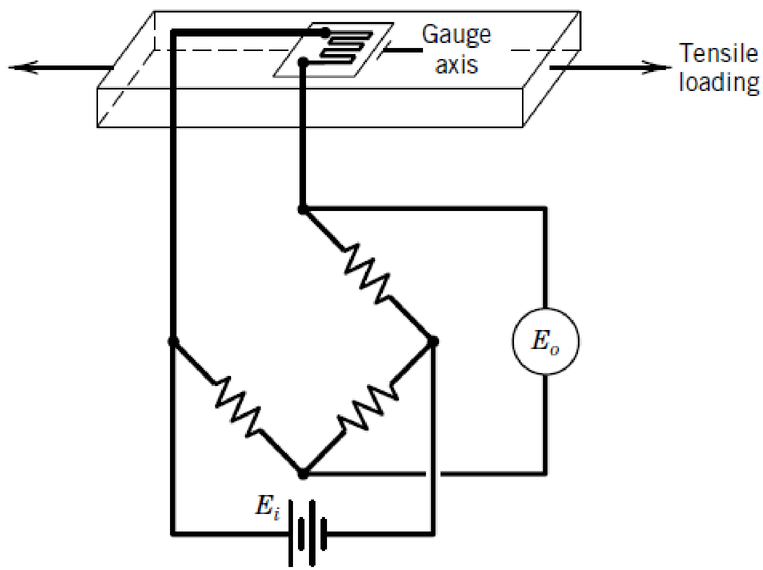
Referências

- **Referências:**
  - W.D. Callister Jr., Materials Science and Engineering – An Introduction, Willey, 2007.
  - R.S. Figliola, D.E. Beasley, Theory and Design for Mechanical Measurements, Wiley, 2011.
  - A.S. Morris, Measurement & Instrumentation Principles, Butterworth Heinemann, 2001.
  - J.G. Webster, H. Eren (Ed.) Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook, CRC Press, 2014.

Exercícios

Exercícios

- **Ex. 8.1)** Um strain gauge é utilizado para medir tensão em uma barra de aço. Calcule a variação na resistência do gauge devido à aplicação de uma força de 30 kN, sabendo que a resistência inicial do gauge é 120 Ω e GF = 2.
    - Barra de aço: A_c = 3×1 cm², E_m = 200×10⁶ kN/m².



Exercícios

- **Ex. 8.1)**
  - Deformação axial:
    - $\sigma_a = \frac{F_N}{A_c} = 10^8$ Pa;
    - $\sigma_a = E_m \varepsilon_a \Rightarrow \varepsilon_a = 5 \times 10^{-4}$;
  - Ponte de Wheatsone equilibrada, 1 gauge:
    - $\frac{\Delta E_o}{E_i} = \frac{1}{4}\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{4} GF \varepsilon_a \Rightarrow \Delta R = 0.12\ \Omega$.

Exercícios

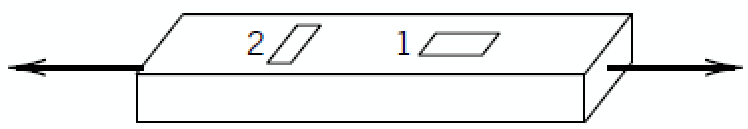
- **Ex. 8.2)** Uma viga de aço é submetida a uma tensão uniaxial. Um strain gauge é alinhado com a solicitação axial e instalado na parte superior central da viga. Um segundo gauge é instalado na parte inferior central da viga. Os extensômetros (*GF* = 2) são conectados nas resistências 1 e 4 de uma ponte de Wheatstone (resistências iniciais de 120 Ω). Para uma tensão de entrada de 10 V e deflexão de 10 μV, determine as deformações axiais.

Exercícios

- **Ex. 8.2)**
  - Para uma solicitação uniaxial, os dois gauges são submetidos à mesma tensão/deformação: $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = \varepsilon$;
  - Considerando a ponte inicialmente equilibrada:
  - $\frac{\Delta E_o}{E_i} = \frac{GF}{4} 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\Delta E_o}{GF \cdot E_i} = \frac{2 \cdot 10 \times 10^{-6}}{2 \cdot 10} = 1\ \mu\varepsilon$

Exercícios

- **Ex. 8.3)** A análise de uma estrutura é realizada com uma ponte de strain gauges, instalando medidores em configurações axial (posição 1) e de Poisson (posição 2). A estrutura é submetida a uma força axial, resultando em deformações axiais e laterais. Determine a constante da ponte.



Exercícios

- **Ex. 8.3)**
  - Ponte de Wheatstone equilibrada, dois gauges iguais:
    - $\Delta E_o = E_i \frac{GF}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = E_i \frac{GF}{4} \left(\varepsilon_a + \nu_p \varepsilon_a\right) = E_i \frac{GF}{4} \varepsilon_a \left(1 + \nu_p\right);$
  - Constante de ponte:
    - $\kappa = \frac{\Delta E_{0,\text{multi}}}{\Delta E_{0,\text{single}}} = \frac{\varepsilon_a \left(1+\nu_p\right)}{\varepsilon_a} = 1 + \nu_p.$

Exercícios

- **Ex. 8.4)** Uma barra com seção circular (área de 3 cm^2) é submetida a uma força de tração de 10 kN. A estrutura é monitorada com um par de strain gauges, retornando deformação axial de 600 $\mu\varepsilon$ e deformação lateral de -163 $\mu\varepsilon$.
  - a) Determine o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

Exercícios

- **Ex. 8.4)**
  - Tensão axial:
    - $\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{10 \times 10^3}{3(10^{-2})^2} = 33.33$ MPa;
  - Módulo de Young (assumindo deformação elástica):
    - $\sigma_a = E_m \varepsilon_a \Rightarrow E_m = \frac{33.33 \times 10^6}{600 \times 10^{-6}} = 55.6$ GPa;
  - Coeficiente de Possion:
    - $\nu_p = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_a} = \frac{163}{600} = 0.27$.

Exercícios

- **Ex. 8.5)** Seja um viga simplesmente engastada e excitada por uma força transversal na extremidade livre. A deflexão da viga é monitorada por quatro strain gauges axiais, dois posicionados na parte superior e dois posicionados na parte inferior. A saída da ponte de Wheatstone é amplificada com ganho ×1000, resultando em tensão de 1 V. Determine a força transversal.
- Dados:
  - Strain gauges: $GF = 2$;
  - Ponte de Wheatsone: $E_i = 5$ V;
  - Viga: $F = \frac{2E_m I \varepsilon}{Lt}$, onde $E_m = 200$ Gpa, $L = 0.1$ m, $t = 0.01$ m, $I = \frac{bt^3}{12}$ com $b = 0.03$ m.

Exercícios

- **Ex. 8.5)**
  - Ponte de Wheatstone, ajustando os gauges para $\kappa = 4$:
    - $\frac{\Delta E_o}{E_i} = GF\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{1\times10^{-3}}{5\cdot2} = 10^{-4}$ ε;
  - Força:
    - : $F = \frac{2E_m I\varepsilon}{Lt} = 100$ N.