计算方法上机报告

第四次上机报告

06220143 顾豪阳

2022-6-4

东南大学
电子科学与工程学院

一、题目简介

20.(上机题 3) 一种商品的需求量和其价格有一定关系.先对一定时期内的商品价格 x 与需求量 y 进行观察,取得如下的样本数据:

价格	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
需求量	58	50	44	38	34	30	29	26	25	24

(1) 对上述数据,分别求出其 2, 3, 4 次最佳平方逼近多项式.画出图形,并比较拟合误差:

$$Q=\sum_{k=1}^{n}(q(x_k)-y_k)^2.$$

(2) 假设拟合函数分别为:

$$a+\frac{b}{x},\ a+b\ln x,\ ae^{bx},\ \frac{1}{a+bx},$$

分别求出 a, b 的值,画出图形,计算误差并比较优劣.

二、理论分析

第一问利用最佳平方逼近公式求出拟合系数$c0$，$c1$，$c2 \ldots\ldots$，先计算得到基函数的向量，通过求内积值，代入得到向量的线性组合，再求得 y 和各个基向量的内积，最后求解线性方程组得到拟合系数，然后利用题目中的拟合误差公式代入得出拟合误差进行比较。

第二问可以使用 MATLAB 自带的 fit 函数求出待定系数，并同上求出拟合误差。

三、数值实验过程

对于第一问，我们首先定义一个函数 OptimalSquareApproximation(x,y,n)其中函数变量分别对应自变量 x，应变量 y，以及拟合次数 n；通过书中 P224 页的公式求得拟合系数，随后在 main 函数中定义完 x 和 y 之后，代入不同的 n，求得拟合后的系数，调用 plot 函数将其画在一张图表中进行比较，然后利用题目中的拟合误差公式代入得出拟合误差进行比较。

对于第二问，我们首先使用库中的 fittype 函数定义一个含有待定系数的函数，然后将其代入到库中的 fit 函数，两个函数的定义分别如下：

$$f = fittype('\text{公式具体表达}', 'independent', '\text{自变量名}', 'coefficients', \{'\text{待定参数}1', '\text{待定参数}2'\});$$

$$[cfun, \text{函数输出设置}] = fit(x, y, f, '\text{函数输入设置}1', \text{输入设置}1\text{具体定义}, '\text{函数输入设置}2', \text{输入设置}2\text{具体定义}, \ldots, '\text{函数输入设置}n', \text{输入设置}n\text{具体定义})$$

得到待定系数之后接下来的步骤就和第一问一样了。

四、程序代码与结果

定义最佳平方逼近函数的代码：

```
% 最佳平方逼近

% f为待逼近函数，n为最佳逼近多项式次数，[left,right]为积分区间
function c = OptimalSquareApproximation(x,y,n)
format long;
% 定义x^i * f(x)的匿名函数用于后续求积分
rightfun = @(i) (x'.^i * y);

% 定义左端的系数矩阵基本形式
leftfun = @(i,j) (x'.^i * x.^j);

% 定义线性方程的左右两端矩阵
A = zeros(n+1,n+1);
b = zeros(n+1,1);



for p = 0:n
    for q = 0:n
        A(p+1, q+1) = leftfun(p,q); % 计算左端系数矩阵的每一项积分
    end
    % 计算右端矩阵的每一项
    b(p+1,1) = rightfun(p);
end

c = A\b;
% disp(x);

end
```

主函数的代码：

```
x=2:11;
x=x';
y=[58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
%[n,m]=size(x);
c=OptimalSquareApproximation(x,y,2);

format long;

two = OptimalSquareApproximation(x,y,2); % 获取最佳二次逼近多项式系数
three = OptimalSquareApproximation(x,y,3); % 获取最佳三次逼近多项式系
数
```

```
four = OptimalSquareApproximation(x,y,4); % 获取最佳三次逼近多项式系数
% 对多项式系数按从高次到低次排列

% disp(two);
% disp(three);
% disp(four);

two = flip(two);
three = flip(three);
four = flip(four);

x0 = 1:0.01:13;

figure;
%plot(x,y);

plot(x,y,'r',x0,polyval(two,x0),'g',x0,polyval(three,x0),'b',x0,polyval(four,x0),'m')
xlabel('x轴');
ylabel('y轴');
legend('原曲线','最佳二次逼近多项式','最佳三次逼近多项式','最佳四次逼近多项式');

e_two=sum((polyval(two,x)-y).^2);%二次逼近多项式拟合误差
e_three=sum((polyval(three,x)-y).^2);%三次逼近多项式拟合误差
e_four=sum((polyval(four,x)-y).^2);%四次逼近多项式拟合误差


syms t;
f1=fittype('a+b/t','independent','t','coefficients',{'a','b'});
[cfun1,~]=fit(x,y,f1);

f2=fittype('a+b*log(t)','independent','t','coefficients',{'a','b'});
[cfun2,~]=fit(x,y,f2);

f3=fittype('a*exp(b*t)','independent','t','coefficients',{'a','b'});
[cfun3,~]=fit(x,y,f3);

f4=fittype('1/(a+b*t)','independent','t','coefficients',{'a','b'});
[cfun4,rsquare]=fit(x,y,f4);

figure;
```

```
plot(x,y,'r',x0,cfun1(x0),'g',x0,cfun2(x0),'b',x0,cfun3(x0),'m',x0,cf
un4(x0),'c');
xlabel('x轴');
ylabel('y轴');
legend('原曲线','a+b/x','a+b*ln(t)','a*exp(b*t)','1/(a+b*t)');

e_1=sum((cfun1(x)-y).^2);%a+b/x拟合误差
e_2=sum((cfun2(x)-y).^2);%a+b*ln(t)拟合误差
e_3=sum((cfun3(x)-y).^2);%a*exp(b*t)拟合误差
e_4=sum((cfun4(x)-y).^2);%1/(a+b*t)拟合误差

disp([e_two,e_three,e_four,e_1,e_2,e_3,e_4]);

disp(cfun1);
disp(cfun2);
disp(cfun3);
disp(cfun4);
```

结果分析：

第一问的结果：

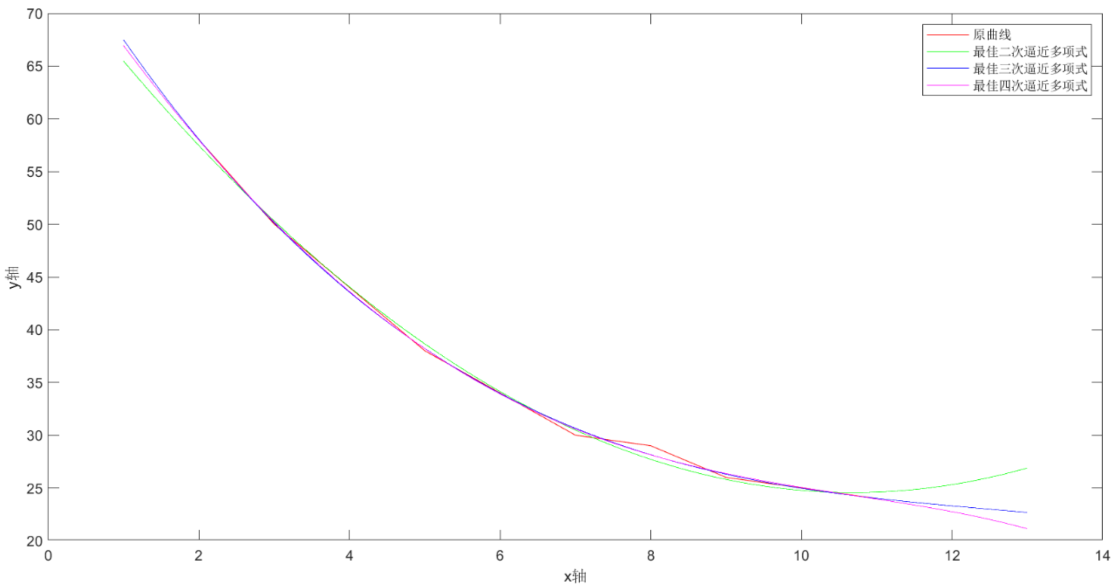
二次、三次、四次的拟合系数$c0$，$c1$，$c2$ … …分别为:

74.326　-9.311　0.43561

78.542　-11.946　0.894　-0.02350

76.992 -10.613　0.52054　0.018162393160420　-0.001603

画出图形比较：



并计算拟合误差得到二次、三次、四次的误差分别为：

3.216666666666660　　1.510256410256403　　1.467948717948715

由此可以得到对于此题来说，平方逼近次数越高拟合误差越小。

第二问的结果：

四个拟合函数的系数分别为：

General model:

cfun1(t) = a+b/t

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 18.16 (14.4, 21.92)

b = 87.33 (71.4, 103.3)

General model:

cfun2(t) = a+b*log(t)

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 72.14 (69.49, 74.79)

b = -20.76 (-22.21, -19.31)

General model:

cfun3(t) = a*exp(b*t)

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 69.05 (63.27, 74.84)

b = -0.1088 (-0.1241, -0.09352)

General model:

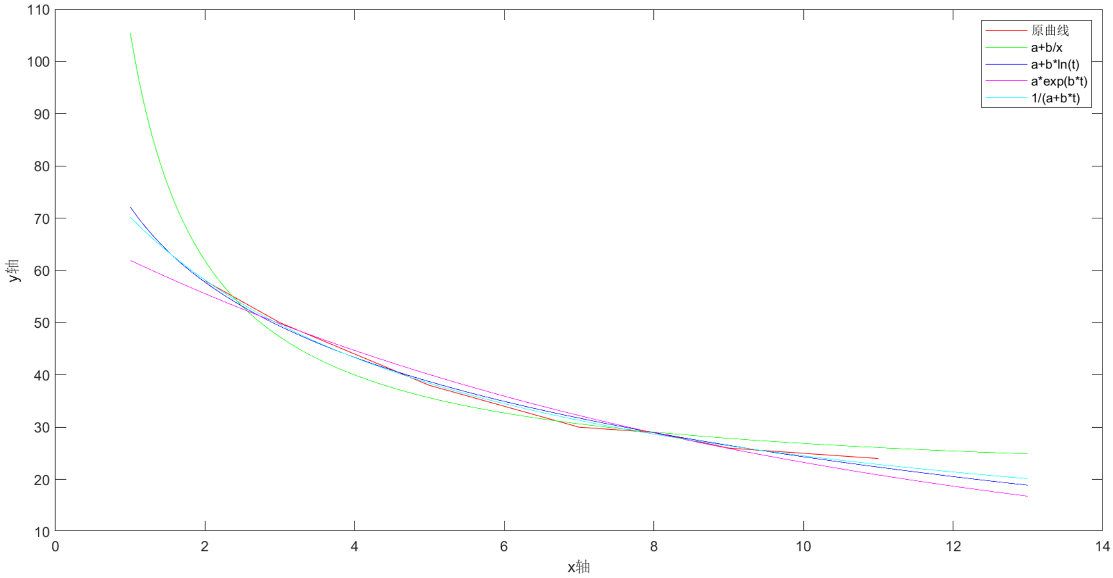
cfun4(t) = 1/(a+b*t)

Coefficients (with 95% confidence bounds):

a = 0.0113 (0.01062, 0.01197)

b = 0.002948 (0.002784, 0.003112)

画出图形比较：



并计算拟合误差得到题中四种拟合函数的误差依次为：

57.302　　8.779　　32.511　　4.573

由此可以得到对于此题来说，第二种、第四种拟合函数在对应取值的误差更小，即：

a+b*ln(x)　　和　　1/(a+b*x)

而第三、第四种误差相对较大，即：

a+b/x　　和　　a*exp(b*x)

五、结论和感想

这个算例代码量还是相对略大一些，因此一开始选用封装相对较好的 MATLAB 进行编程，对于第一问来说无非就是矩阵的运算，我们在编程时需要考虑如何使自己编写的代码可移植性更强，定义的函数可实现功能更多；对于第二问来说，我们需要对 MATLAB 本身的库有一定的掌握，因此需要我们有较强的上网检索的能力，对于不同函数来说，对不同数据的拟合效果也是不同的，可以在拟合之前计算一下其拟合误差再来选用合适的拟合函数。