2) 齐次方程,齐次边界条件的解法
(分离变量法)

例1.考虑弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

分离变量法的基本思想:
寻找变量分离形式的解

令$u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程做变量分离.

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$

做变量分离

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$
\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}
$$

该问题称为特征值问题

λ称为特征值(Eigenvalue)

对应的解称为特征函数(Eigenfunction)，

全体特征函数构成特征函数系.

利用二阶ODE的通解求解该特征值问题.

特征值 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\ n=1,2,\cdots,$

对应的特征函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots.$

将特征值代入t的方程得

$$T''(t)+a^2\lambda_n T(t)=0,$$

求出解为

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l}.$$

令 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$

容易看到$u_n(x,t)$, $n = 1,2,\cdots$均满足PDE和B.C.

但不满足I.C.. 怎么办呢?

做线性组合(傅立叶级数) 让该组合去满足I.C.

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi t}{l} + D_n \sin\frac{an\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \psi(x)=\sum_{1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

利用正弦级数系数公式得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

注 2.1 可以证明[10]，解表达式(2.2.5)中，初始条件$\varphi(x)$，$\psi(x)$充分光滑(比如$\phi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^2[0,l]$)，且$\phi(x)$，$\psi(x)$满足相容性条件

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,$$

则解的级数表达式点点收敛，且可以逐项求导两次，从而保证解(2.2.5)是初边值问题(2.2.1)的古典解。这里的古典解是指解$u(x,t)$满足

$$u(\cdot,t)\in C^2(0,l)\cap C[0,l], \quad u(x,\cdot)\in C^2(0,+\infty)\cap C[0,+\infty).$$

另外，还可以利用能量积分法证明，解(2.2.5)是唯一的、稳定的。

如果初始数据$\varphi(x)$，$\psi(x)$的光滑性不够，比如仅是连续函数，或者不满足相容性条件，则不能保证解(2.2.5)是问题(2.2.1)的古典解，但从物理上来理解，该解是有意义的，一般称之为问题(2.2.1)的广义解。如何理解该广义解呢?

一般来说，可以根据问题的物理意义和数学上的规定来定义不同函数空间中的各种广义解。不同函数空间中的广义解，可以理解为近似古典解序列在相应函数空间中的极限。值得注意的是，广义解作为古典解的推广必须满足：古典解必是广义解；当广义解具有适当光滑性时，它也是古典解。通过广义解来研究古典解是现代偏微分方程研究的重要方法。

例2.耗散系统

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

例3.绝热系统

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

思考：如果B. C. 改为绝热+热交换

$u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + \sigma u(l,t) = 0,$如何求解？

练习：求下列问题的级数形式的解，

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

参考答案：

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\sin at \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos nat \cos nx.$$

尝试绘制解的动态图形来认识解的波动变化！

例4.矩形区域上的拉普拉斯方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, 0<y<b, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & 0\le y\le b, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u(x,b)=\psi(x), & 0\le x\le a. \end{cases}$$

练习：

$$
\begin{cases}
u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, y>0, \\
u(0,y)=u(a,y)=0, & y\geq 0, \\
u(x,0)=1-\dfrac{x}{a},\ u(x,+\infty)=0, & 0\leq x\leq a.
\end{cases}
$$

例5.(圆上的Laplace方程)

设$D: x^2 + y^2 < a^2$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & in\ D, \\ u = h(\theta), & on\ \partial D. \end{cases}$$

分析运用分离变量法的所需的条件以及该问题的特点.

先将问题用极坐标表示出来，即

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & (r,\theta) \in D, \\ u(a,\theta) = h(\theta), & 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

令$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$，代入PDE可得

$$R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) = 0,$$

做变量分离得

$$-\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\lambda.$$

考虑周期条件下的特征值问题

$$\begin{cases} T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0, \\ T(\theta)=T(\theta+2\pi). \end{cases}$$

特征值为$\lambda_n=n^2$，对应的特征函数为$\cos n\theta$和$\sin n\theta$

将特征值代入$R(r)$的方程得

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,\ \ 0<r<a,$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,\ \ 0<r<a,$$

此为欧拉方程，其通解为:

- $n=0$时，$R(r)=C_0+D_0\ln r,$
- $n\geq 1$时，$R(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}.$

需加入自然边界条件 $|R(0)|<\infty,$

代入通解知 $D_n=0$

令 $$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_1^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$$

代入边界条件得

$$h(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_1^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)a^n$$

由傅立叶系数公式知

$$A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta,\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta,\ \ n=1,2,\cdots.$$

注

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n\cos n(\theta_0-\theta)\right]h(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

再利用欧拉公式和等比级数求和公式可得

$$1+2\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n\cos n(\theta_0-\theta)=1+\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n e^{in(\theta_0-\theta)}+\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n e^{-in(\theta_0-\theta)}$$

$$=1+\frac{r_0e^{i(\theta_0-\theta)}}{a-r_0e^{i(\theta_0-\theta)}}+\frac{r_0e^{-i(\theta_0-\theta)}}{a-r_0e^{-i(\theta_0-\theta)}}=\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)},$$

得到解的积分表达式 (泊松公式)

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{a^2-r_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\theta)}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta.$$

课堂练习

1. 圆外区域的Laplace方程

设$D: x^2+y^2>a^2$,

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & in\ D, \\ u=h(\theta), & on\ \partial D, \\ \text{当}x^2+y^2\to\infty\text{时},u\text{有界}. \end{cases}$$

2. 扇形域上的拉普拉斯方程

设$D: 0 < r < a,\ 0 < \theta < \beta.$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & in\ D, \\ u = 0, & on\ \theta = 0, \beta, \\ u_r = h(\theta), & on\ r = a. \end{cases}$$

3. 求解拉普拉斯方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \ \ 0 < y < b \\ u(0,y) = \sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a. \end{cases}$$

解 将问题做线性拆分.

令$u=v+w$，其中v, w分别满足边值问题

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ v(0,y)=\sin\frac{\pi y}{b},\quad v(a,y)=0, & 0\le y\le b, \\ v(x,0)=0,\quad v(x,b)=0, & 0\le x\le a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ w(0,y)=0,\quad w(a,y)=0, & 0\le y\le b, \\ w(x,0)=\sin\frac{\pi x}{a},\quad w(x,b)=0, & 0\le x\le a. \end{cases}$$

利用分离变量法求解. 令$v(x,y)=X(x)Y(y)$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \quad 0<y<b, \\ Y(0)=Y(b)=0, \end{cases}$$

$$e.v.\ \ \lambda_n=(\frac{n\pi}{b})^2, \quad e.f.\ \ Y_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad n=1,2,\cdots$$

将特征值代入x的方程得

$$X''(x)-\lambda_n X(x)=0,\quad X(a)=0,$$

解得 $X_n(x)=\sinh\dfrac{n\pi(a-x)}{b}$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sinh\frac{n\pi(a-x)}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

代入边界条件 $v(0,y)=\sin\frac{\pi y}{b}$ 得

$$C_1=\frac{1}{\sinh\pi a/b},\quad C_n=0\ \ (n\neq 1),$$

$$\Rightarrow\quad v(x,y)=\frac{\sinh\pi(a-x)/b}{\sinh\pi a/b}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

类似方法可解得

$$w(x,y)=\frac{\sinh\pi(b-y)/a}{\sinh\pi b/a}\sin\frac{\pi x}{a},$$

所以

$$u(x,y)=\frac{\sinh\pi(a-x)/b}{\sinh\pi a/b}\sin\frac{\pi y}{b}+\frac{\sinh\pi(b-y)/a}{\sinh\pi b/a}\sin\frac{\pi x}{a}.$$