CH2 傅里叶级数方法

1) 傅里叶级数与平方可积空间
2) 齐次方程,齐次边界条件的解法
   (分离变量法)
3) 特征值问题
4) 非齐次方程的解法
5) 非齐次边界条件
6) 多重傅里叶级数与高维问题

1) Fourier级数及其收敛性

- Fourier级数,Euler-Fourier系数
- 点点收敛,一致收敛
- **平方可积空间**中的收敛性
- 函数系在平方可积空间中的完备性

傅里叶级数发展历史

函数展开为傅里叶级数 1810 傅里叶
傅里叶级数收敛性 1850 狄里克雷
平方可积空间里的傅里叶级数
1890 Riesz,Fischer等很多数学家

设函数$f(x)$以$2l$为周期，考虑用$[-l,l]$上的正交函数系

$$\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}_{n=0}^{\infty}\cup\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n=1}^{\infty}$$

将$f(x)$线性表出，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),$$

由函数系的正交性，可得上式中的傅立叶系数为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

当f为偶函数时，f展开为余弦级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

当f为奇函数时，f展开为正弦级数，即

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

设$f(x)$以$2l$为周期，考虑用$[-l,l]$上的正交函数系

$$\{e^{in\pi x/l}, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

将$f(x)$线性表出，即

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x},$$

利用函数系的正交性，$\int_{-l}^{l} e^{in\pi x/l}\,\overline{e^{im\pi x/l}}\,\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n,$

可得傅立叶系数

$$c_n=\frac{(f(x),e^{in\pi x/l})}{(e^{in\pi x/l},e^{in\pi x/l})}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\pi x/l}\,\mathrm{d}x.$$

例：将函数$f(x)\equiv 1$在区间$[0,l]$上展开为傅里叶正弦级数.

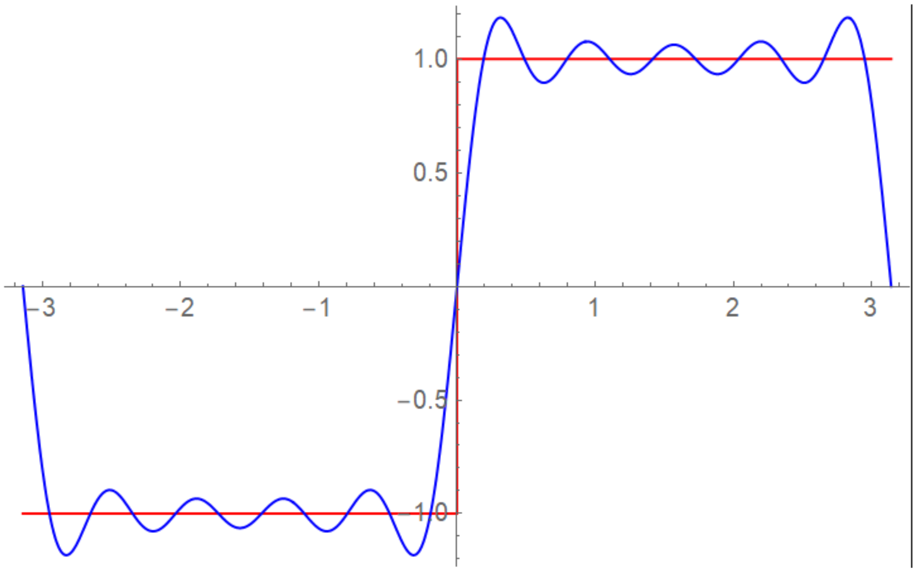
解：设$f(x)=\sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$,则

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

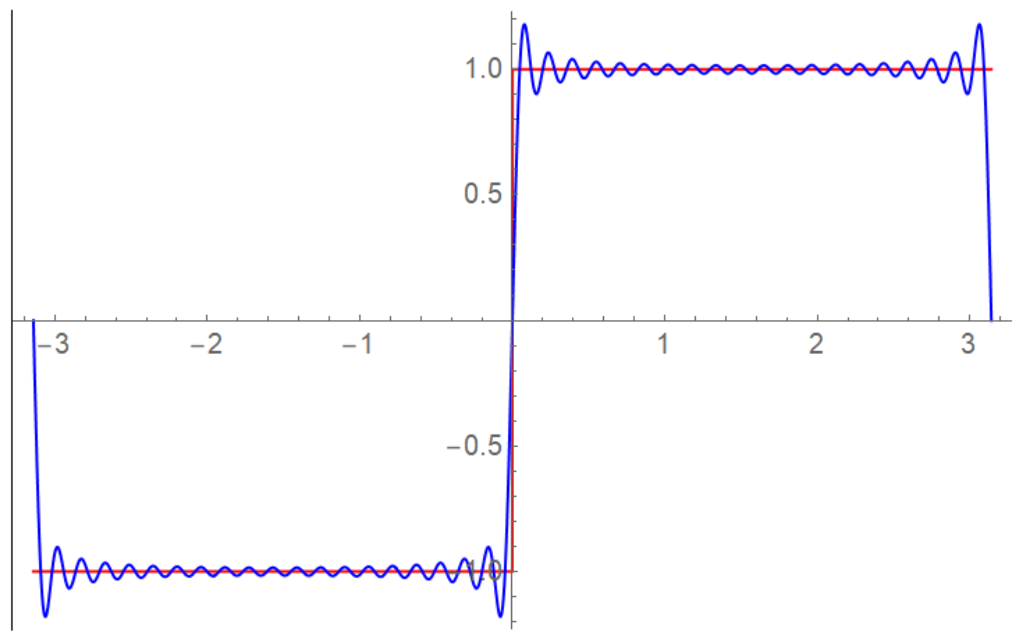
$$=-\frac{2}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

即 $1=\frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\cdots).$

```
f[x_] := Which[-Pi ≤ x ≤ 0, -1, 0 ≤ x ≤ Pi, 1]
```



部分和函数



课堂练习：将函数$f(x)\equiv x$在区间$[0,l]$上分别展开为傅里叶正弦级数和傅里叶余弦级数.

解：（1）设$f(x)=\sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$,则

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=?$$

(2) 设$f(x)=a_0+\sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$,则

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=?$$

如果f在$[a,b]$上除了有限多个第一类间断点外连续，则称f分段连续，记为$f\in PC[a,b]$.

如果$f, f'\in PC[a,b]$,则称f分段光滑,记为$f\in PS[a,b]$.

点点收敛性: (Dirichlet)

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

若f是周期为$2l$的，$f\in PS[-l,l]$,则

$$\forall x\in(-l,l),\ \ S(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},$$

$$\text{当}x=\pm l\ \text{时},\ \ S(x)=\frac{f(-l^+)+f(l^-)}{2}.$$

一致收敛性：

记 $S_N(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{1}^{N}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$,

若f是周期为$2l$的，$f\in C[-l,l], f'\in PC[-l,l]$则

$S_N(x)$在$[-l,l]$上一致收敛于$f(x)$.

$idea$：将函数看成无穷维向量！

$L^2[a,b]:=\{f \mid \int_a^b |f|^2\, dx < \infty\}$平方可积空间

$L^2[a,b]$中的内积： $(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$

$(f,g)=(\overline{g},\overline{f})$

$(\alpha f_1+\beta f_2,g)=\alpha(f_1,g)+\beta(f_2,g)$

$(f,\alpha g_1+\beta g_2)=\overline{\alpha}(f,g_1)+\overline{\beta}(f,g_2)$

$L^2[a,b]$中的范数： $\|f\|_{L^2}=\sqrt{(f,f)}.$

这里的积分是Lebesque积分，如果$\|f\| = 0$，

并不能得出$f(x) \equiv 0$，只能得到去掉一 个零测集外

$f(x) = 0$，称之为f几乎处处(almost everywhere)为零，

记为$f = 0,\ a.e.$.

如果两个函数几乎处处相等，那么在$L^2[a,b]$中

我们就认为它们是等价的，不再区分它们.

可以证明平方可积空间$L^2[a,b]$有如下重要性质

(1) 完备性：函数空间$L^2[a,b]$是一个完备空间，

即其中的柯西函数列均收敛，即

$$n, m \to \infty, \ \|f_n - f_m\| \to 0$$

$$\Rightarrow \ \exists f \in L^2[a,b], \ \|f_n - f\| \to 0 \ (n \to \infty);$$

(2) 稠密性：可以用C^∞函数序列在L^2范数下逼近

其中的任意函数，即 $\forall f \in L^2[a,b]$,

$$\exists f_n \in C^\infty[a,b], \ \|f_n - f\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

$L^2[a,b]$中的标准正交函数系$\{\phi_k\}$，$(\phi_k,\phi_j)=\delta_{kj}$.

考虑级数$\sum_1^\infty c_k\phi_k(x)$在$L^2[a,b]$中的收敛性。

记$S_N(x)=\sum_1^N c_k\phi_k(x)$，如果存在$f\in L^2[a,b]$，使得

$\|S_N-f\|\to 0$，则称该级数在$L^2[a,b]$中收敛于$f(x)$，

记为$f=\sum_1^\infty c_k\phi_k$，其中$c_k=(f,\phi_k)$称为傅立叶系数，

$\sum_1^\infty c_k\phi_k(x)$称为$f(x)$的傅立叶级数.

$Bessel$不等式

设$\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，$f \in L^2[a,b]$，

$c_k = (f, \phi_k)$，则$\sum_{1}^{\infty} |c_k|^2 \le \| f \|^2$.

证明

$$\forall N, \quad \|f-S_N\|^2=(f-\sum_1^N c_k\phi_k,\ f-\sum_1^N c_k\phi_k)$$

$$=(f,f)-\sum_1^N |c_k|^2 \ge 0,$$

$\sum_1^N |c_k|^2 \le \|f\|^2.$ 再令$N\to\infty$，即得

*Parseval*等式

设$\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系,如果数列$\{c_k\}$满足$\sum_1^{\infty}|c_k|^2<\infty$,则存在$f\in L^2[a,b]$,使得$f=\sum_1^{\infty}c_k\phi_k$,且$\sum_1^{\infty}|c_k|^2=\|f\|^2$.

证明 因为当$N\to\infty$时，

$$\|S_{N+p}-S_N\|^2=\sum_{N+1}^{N+p}|c_k|^2\to 0,$$

所以$\{S_N\}$是$L^2[a,b]$中的柯西列，

由$L^2[a,b]$的性质(1)知$\{S_N\}$在$L^2[a,b]$中收敛.

记$f=\lim S_N$，从而

$$\|f\|^2=\lim\ \|S_N\|^2=\lim\sum_1^N|c_k|^2=\sum_1^\infty|c_k|^2.$$

设$\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系,如果

$\forall f \in L^2[a,b],(f,\phi_k)=0,k=1,2,\cdots \Rightarrow f=0,a.e.$

则称函数系$\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准完备正交基.

定理：(重点)

设$\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系,下面三个条件等价:

$(a)\{\phi_k\}$是$L^2[a,b]$中的标准完备正交基;

$$(b)\forall f \in L^2[a,b], f = \sum_{1}^{\infty}(f,\phi_k)\phi_k;$$

$$(c)\forall f \in L^2[a,b], \sum_{1}^{\infty}|(f,\phi_k)|^2 = \| f \|^2 .$$

证明 $(a) \Rightarrow (b)$ 因为$f \in L^2[a,b]$,

记$c_k = (f, \phi_k)$，则由Bessel不等式知 $\sum_1^\infty |c_k|^2 \le \|f\|^2 < \infty$,

所以存在函数$g \in L^2[a,b]$，使得 $g = \sum_1^\infty c_k \phi_k$.

$(g - f, \phi_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots$, 所以$g - f = 0,\ a.e.$，即

$$f = \sum_1^\infty (f, \phi_k)\phi_k \quad a.e..$$

$(b) \Rightarrow (c)$ 由Riesz-Fischer定理即得.

$(c) \Rightarrow (a)$ 因为$(f, \phi_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots$,

所以$\|f\| = 0$，从而$f = 0,\ a.e.$.

例1. $\phi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}, k=1,2,\cdots,$ 证明：

$\{\phi_k\}$ 是$L^2[0,l]$的标准正交基。

注：类似结论：$\{\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, k=0,1,2,\cdots\}$

也是$L^2[0,l]$的标准正交基.

证明 $\{\phi_k\}$是$L^2[0,l]$的标准正交函数系.

设$f \in L^2[0,l]$，则由$L^2[0,l]$的性质(2)知，

对任意的$\varepsilon > 0$，存在周期为$2l$的奇函

数$\widetilde{f} \in C^\infty$，使得$\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon/3$. 令

$$c_k = (f, \phi_k), \quad \widetilde{c}_k = (\widetilde{f}, \phi_k),$$

利用C^∞函数傅立叶级数的一致收敛性知，

取$N(\varepsilon)$充分大，使得

$$\forall\, x \in [0,l], \quad |\widetilde{f} - \sum_1^N \widetilde{c}_k \phi_k| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{l}}, \quad \|\widetilde{f} - \sum_1^N \widetilde{c}_k \phi_k\| < \varepsilon/3.$$

$$\|f-\sum_{1}^{N}c_k\phi_k\| \le \|f-\widetilde{f}\|+\|\widetilde{f}-\sum_{1}^{N}\widetilde{c}_k\phi_k\|+\|\sum_{1}^{N}(c_k-\widetilde{c}_k)\phi_k\|$$

$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+(\sum_{1}^{\infty}|c_k-\widetilde{c}_k|^2)^{1/2} \le \varepsilon/3+\varepsilon/3+\|f-\widetilde{f}\|<\varepsilon.$$

所以当$N\to\infty$时， $\|f-\sum_{1}^{N}c_k\phi_k\|\to 0,$

即$f(x)$的傅立叶级数在平方可积空间$L^2[0,l]$中收敛于$f(x)$

只有理解了平方可积空间中的傅里叶级数，才能真正理解傅里叶级数！

<u>学乎其上，取乎其中！</u>

正交（内积，范数，函数空间）完备⇔函数展开⇔Parseval等式

N维欧式空间	N维向量	内积 长度	向量组 完备 正交基	向量用完备正交基线性表出 “勾股定理”
平方可积空间	函数 (无穷维向量)	共轭内积 范数 (模)	函数系 完备 正交基	函数用傅里叶级数展开 Parseval等式

课堂练习

1. 设$f_n, f \in L^2[a,b]$，且$\|f_n - f\| \to 0$，

   应用Cauchy内积不等式证明

   $\forall g \in L^2[a,b]$，$(f_n, g) \to (f, g)$.

2. 设$\{\phi_n\}$是$L^2[a,b]$的一组标准正交基，证明

   $\forall f, g \in L^2[a,b]$，$(f, g) = \sum (f, \phi_n)\overline{(g, \phi_n)}$.

1.证明:

$$|(f_n,g)-(f,g)|=|(f_n-f,g)|\leq\|f_n-f\|\cdot\|g\|\to 0.$$

2.证明:

$$f=\sum_n (f,\phi_n)\phi_n, \qquad g=\sum_m (g,\phi_m)\phi_m.$$

$$\begin{aligned}(f,g)&=(\sum_n (f,\phi_n)\phi_n,\sum_m (g,\phi_m)\phi_m)\\ &=(\sum_n (f,\phi_n)\phi_n,\ (g,\phi_n)\phi_n)=\sum_n (f,\phi_n)\overline{(g,\phi_n)}.\end{aligned}$$

3. (L^2中的最佳逼近) 设$\{\phi_n\}$是$L^2[a,b]$的一组

标准正交函数系，$f \in L^2[a,b]$，则对

满足$\sum |c_n|^2 < \infty$的任意序列$\{c_n\}$有

$$\|f - \sum (f, \phi_n)\phi_n\| \le \|f - \sum c_n\phi_n\|,$$

等号当且仅当$c_n = (f, \phi_n)$, $n = 1, 2, \cdots$时成立.

3.证明:

先将$f - \sum c_n\phi_n$做如下的正交分解,

$$f - \sum c_n\phi_n = \left(f - \sum (f,\phi_n)\phi_n\right) + \sum \left((f,\phi_n) - c_n\right)\phi_n.$$

然后利用勾股定理即得

$$\|f - \sum c_n\phi_n\|^2 = \|f - \sum (f,\phi_n)\phi_n\|^2 + \sum |(f,\phi_n) - c_n|^2.$$

由此可得本题的结论成立.

本题结论中的求和指标n可以取为$n = 1,2,\cdots,N$,

也可取为$n = 1,2,\cdots,\infty$.