

电磁场理论知识点总结

第一章 矢量分析知识

正交坐标系: 笛卡尔坐标系 $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$, 圆柱坐标系 $\vec{a}_r, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$, 球坐标系 $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi$ 。

场量: 标量场的梯度 $\nabla\phi$, 矢量场的散度 $\nabla \cdot \vec{A}$, 矢量场的旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 。

场量定理: 散度(高斯)定理: $\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$, 旋度(斯托克斯)定理: $\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}$ 。

零恒等式: 标量场的梯度的旋度恒为零即 $\nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$, 矢量场的旋度的散度恒为零即 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$ 。

亥姆霍兹定理: 在空间区域上的任意矢量场, 如果其散度、旋度和边界条件已知, 则该矢量场唯一并且可以表示为一旋矢量场和一散矢量场的叠加。

几个矢量运算恒等式:
$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A}) \end{cases}$$

第二章 麦克斯韦方程组与时变电磁场

法拉第电磁感应定律: $\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, 电荷守恒原理: $I = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$, 电流连续性方程(根据电荷守恒原理得到): $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, 即单位时间内流出曲面S的电流等于其包围的体积内电荷的减少量。

麦克斯韦方程组:

$$\begin{array}{ll} \text{微分形式:} & \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \\ \text{积分形式:} & \begin{cases} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \\ \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{物质本构关系:} \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

全电流定律:
$$\begin{cases} J_c \text{ 带电粒子在导电媒质中的运动 } J_c = \sigma E \\ J_d \text{ 不代表电荷的移动, 由变化的电场和介质极化引起 } J_d = \frac{\partial D}{\partial t} \\ J_\mu \text{ 带电粒子在真空或稀薄气体中的运动 } J_\mu = \rho \mu \end{cases}$$

结论: 通过任意封闭曲面的传导电流密度和位移电流密度的总通量为零 (掌握推导)

电磁场的边界条件: 电场强度的切向分量 (\vec{E}_t) 和磁通量密度的法向分量 (\vec{B}_n) 在边界处连续, 电通量密度的法向分量 (\vec{D}_n) 和磁场强度的切向分量 (\vec{H}_t) 不连续, 差量分别等于边界面电荷密度 (ρ_s) 和面电流密度 (\vec{J}_s)。 (注: \vec{J}_s 表示流过表面垂直于电流流动方向的单位宽度电流, \vec{n} 由导体指向媒质)

一般情况	理想媒质-理想媒质 理想媒质表面不存在自由面电荷和自由面电流	理想导体-理想媒质 理想导体内部电场强度与磁场强度均为零。即电力线垂直于理想导体表面, 磁力线平行于理想导体表面。
$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s \\ \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \rho_s \end{cases}$

坡印廷定理: 坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 在闭合曲面上的面积分等于从该闭合曲面所包围体积中散发出去的功率, 任何瞬间流入某闭合曲面的功率等于从该闭合曲面所包围体积内电场和磁场所存储的能量的增加率与欧姆损耗功率之和, 即 $-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV + \iiint_V \sigma E^2 dV$, 其中电磁场能量密度 $w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$, 欧姆功率密度 $p_\sigma = \sigma E^2$ 。(注: \vec{S} 不一定代表电磁能量的流动, 在静电/磁场没有能量流动)

平均坡印廷矢量: $\vec{S}_{av}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(x, y, z, t) dt$, 复数形式下 $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ (时谐) 其与空间位置有关, 与时间无关。

时变电磁场位函数: 引入矢量磁位 \vec{A} 和标量电位 ϕ , 满足 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, 则在洛伦兹规范 $\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ 下, 矢量磁位 \vec{A} 和标量电位 ϕ 满足的非齐次波动方程 (达朗贝尔方程) 为:
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$
 (掌握推导)。

电磁场的波动特性：空间中当 $\rho = 0$ ， $\sigma = 0$ 时，是关于 \vec{E} 、 \vec{B} 的齐次波动方程。否则为非齐次的波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} = -\nabla \times \sigma \vec{E} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

和位函数的波动方程（达朗贝尔公式）进行比较：a)有源区，位函数的波动方程更加简单、方便；b)无源区，位函数的波动方程和上面一样。

达朗贝尔公式优点： \vec{A} 与 ϕ 分离，方便求解； \vec{A} 、 \vec{B} 由 \vec{J} 决定， \vec{E} 、 \vec{V} 由 ρ 决定。洛伦兹规范与电流连续性方程一致（将 \vec{A} 替换为 $\nabla \cdot \vec{A}$ 代入第一条达朗贝尔公式可以推出电流连续性方程）。

课堂补充：库伦规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 。可以推导出 V 满足泊松方程 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ （静态成立）。在静态时，库伦规范和洛伦兹规范一致。

磁准静态：在时变电磁场中，如果忽略电通量密度的变化 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，称为磁准静态场。它的基本方

程组为：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} \approx \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$
 在磁准静态场中，磁场强度 \vec{H} 和磁通量密度 \vec{B} 所满足的方程与静磁场中

的方程完全一样。可以利用恒定磁场的公式计算 \vec{H} 和 \vec{B} 。

电准静态：在时变电磁场中，如果忽略磁通量密度的变化 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ，称为电准静态场。它的基本方

程组为：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} \approx 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$
 在电准静态场中，电场强度 \vec{E} 和电位移通量密度 \vec{D} 的方程与静电场中

的对应方程形式完全一样。在每一时刻，场和源的关系类似于静电场中场和源的关系。可以利用静电场的公式计算准静态场的 \vec{E} 和 \vec{D} 。

第三章 静态场

静电场：微分形式：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$
 积分形式：
$$\begin{cases} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{cases}$$
 静电场是无旋有源场。

方程比较：

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_{\text{自由}} dV \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho_{\text{总}} dV \end{cases}$$
 上式适用于范围内自由电荷，下式适用于总电荷。

电位方程：电场强度 $\vec{E} = -\nabla \phi$ ，标量电位 ϕ 满足泊松方程 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ ；若 $\rho = 0$ ，则 ϕ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 。

求解电场与电势：（1）高斯定理（2）电位方程（3）直接积分；**注意：**变介质？坐标？

理想导体：理想导体的电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ ，内部电场强度和电荷密度均为零。在静态平衡条件下，理想导体表面处的电场强度垂直于导体表面，即理想导体表面是一个等位面，理想导体是一个等位体。在自由空间，理想导体表面电场强度的法向分量 $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ ，切向分量 $E_t = 0$ 。

电偶极子：相距一小段距离 d 的一对等值异号电荷。电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{d}$ ，空间一点的电位 $\phi = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ，电场强度 $\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta \sin\theta)$ 。在外场的作用下，无极分子形成位移极化，有极分子形成取向极化，合成的电偶极矩不再为零，从而影响原来的电场分布。当有电介质存在时，极化电介质的作用可用极化面电荷和极化体电荷等效代替，**极化面电荷密度** $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$ ，**极化体电荷密度：** $\rho_{pV} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \nabla \cdot \vec{D}$ （均匀极化时为 0，非均匀极化不为 0）， \vec{P} 为极化强度矢量。电通量密度 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ，极化强度 $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ ，即 $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ ，其中极化率 $\chi_e = 1 - \epsilon_r$ ，媒质的绝对介电常数 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 。线性、均匀、各向同性的媒质称为简单媒质，简单媒质的相对介电常数是一个常数。

电场的能量：电场储存的能量 $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k q_k \xrightarrow{\text{电流连续性分布}} \frac{1}{2} \iiint_V \rho \phi dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ ，
电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ 。

恒流场：微分形式： $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$ ，积分形式： $\begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$ ，任一封闭系统的电荷总量不变，

即任意体积内的电荷增量必定等于流进这个体积的电荷量， $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。

恒流场与静电场的比拟：

	静电场 ($\rho = 0$ 区域)	恒流场 (电源外)
基本方程	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0, \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
	$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \nabla \times \vec{E} = 0$
本构关系	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
位函数	$\vec{E} = -\nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$	$\vec{E} = -\nabla\phi, \nabla^2\phi = 0$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t} \quad J_{1n} = J_{2n}$
	$\phi_1 = \phi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$	$\phi_1 = \phi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$

静磁场：微分形式：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$
 ，积分形式：
$$\begin{cases} \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$
 ，静磁场是有旋无散场。

磁位方程：磁通量密度 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，矢量磁位 \vec{A} 满足泊松方程 $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$ 。运用了库伦规范（静态场）对比一下前面的达朗贝尔方程
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$
 （一般式，用洛伦兹规范推导）。

电磁场位函数方程	静态场位函数方程	（分别对应无电荷和无电流区域）
$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} = 0 \\ \nabla^2 \phi = 0 \end{cases}$

磁偶极子：半径很小的圆形载流回路。磁偶极矩 $\vec{m} = \vec{a}_z I \pi b^2$ ，空间一点的磁位 $\vec{A} = \vec{a}_\phi \frac{\mu_0 I \pi b^2 \sin \theta}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$ ，磁通量密度 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I b^2}{4R^3} (\vec{a}_R 2 \cos \theta + \vec{a}_\theta \sin \theta)$ 。当有磁介质存在时，磁化磁介质的作用可用磁化面电流和极化体电流等效代替，极化面电流密度 $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{a}_n$ ，极化体电流密度 $\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \nabla \times \vec{H}$ ， \vec{M} 为磁化强度矢量。磁通量密度 $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ ，磁化强度 $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，即 $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$ ，磁化率 $\chi_m = \mu_r - 1$ ，磁介质的绝对磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 。对于抗磁质 $\chi_m \ll 0, \mu_r$ 略 < 1 ；对于顺磁质 χ_m 略 $> 0, \mu_r$ 略 > 1 ；对于铁磁质 $\chi_m \gg 1$ 。

磁偶极子（磁偶极矩）	电偶极子（电偶极矩）
$\vec{m} = I \vec{S}$	$\vec{p} = q \vec{d}$
$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$	$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}$
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^3} (\vec{a}_R 2 \cos \theta + \vec{a}_\theta \sin \theta)$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{p}{R^3} (\vec{a}_R 2 \cos \theta + \vec{a}_\theta \sin \theta)$

毕奥萨伐尔定律： $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{R} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left[\frac{1}{R} \nabla \times d\vec{l} + \left(\nabla \frac{1}{R} \right) \times d\vec{l}' \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \nabla \times \left(\frac{d\vec{l}'}{R} \right) \left(\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{a}_R \frac{1}{R^2} \right)$

磁场的能量：磁场储存的能量 $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k \xrightarrow{\text{电流连续分布}} \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$ ，磁场能量密度 $w_\varepsilon = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 。（书本 P66 页推导）

磁介质的分类：（1）**抗磁性介质：**分子的固有磁矩为零。在外磁场作用下，由楞次定律，产生一个与外加磁场相反的附加分子磁矩，降低了磁通密度。 $\mu_r \leq 1$ ， χ_m 是一个很小的负数（ $10^{-7} \sim 10^{-4}$ ）（2）**顺磁性介质：**分子的固有磁矩不为零，取向由于热运动而随机分布。外磁场作用使分子磁矩部分沿外加场取向，增强了磁通密度。（3）**铁磁性介质：** $\mu_r \geq 1$ ， χ_m 是一个很小的正数（ $10^{-6} \sim 10^{-2}$ ） $\mu_r \gg 1$ ， χ_m 是一个很大的正数，可高达 10^5 以上。（畴壁移动）

第四章 平面电磁波

时谐电磁场：麦克斯韦方程组的时谐形式：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$
，根据物质本构关系即可写为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \varepsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$
。在简单非导电（ $\sigma = 0$ ）无源（ $\rho = 0$ ）媒质中，时谐麦克斯韦方程组

为：
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$
，得到均匀平面电磁波的齐次波动方程为：
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} = 0 \end{cases}$$
，令波数 $k =$

$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ ，即得到齐次亥姆霍兹方程：
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$
。波传播相速度 $v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$ ，媒质的

本征阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ 为电场与磁场的振幅之比（ $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ ）。即电场方向垂直于磁场方向，且均垂直于电磁波的传播方向。

横电磁波（TEM 波）：设波数矢量 $\vec{k} = \vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z = \vec{a}_n k$ ，场强 $\vec{E}(R) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{R}} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{a}_n k \cdot \vec{R}}$ ，则等相位面方程为 $\vec{a}_n \cdot \vec{R} = 0$ ，磁场强度 $\vec{H}(R) = \frac{1}{\eta} (\vec{a}_n \times \vec{E}_0) e^{-j\vec{a}_n k \cdot \vec{R}}$ ，媒质的本征阻抗 $\eta = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ ；若磁场强度 $\vec{H}(R) = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{R}} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{a}_n k \cdot \vec{R}}$ ，则电场强度 $\vec{E}(R) = \eta (\vec{H}_0 \times \vec{a}_n) e^{-j\vec{a}_n k \cdot \vec{R}}$ 。均匀平面电磁波是 TEM 波。（注意：均匀平面波（UPW）是横电磁波（TEM），但横电磁波不一定是均匀平面波，如均匀柱面波、均匀球面波也是横电磁波。）

平面电磁波的极化：线极化波——电场强度沿某一固定的方向的电磁波。**椭圆极化波**——两个空间相互垂直，相位差 $\frac{\pi}{2}$ 的线极化波的叠加，振幅相等则合成为**圆极化波**，根据 $\varphi_x - \varphi_y$ 的正负，可分为右旋(正)圆极化波，左旋(负)圆极化波（和光学相反）。任意一个线极化波可分解为两个振幅相等、旋向相反的圆极化波，即 $\vec{E}(z) = \vec{a}_x E_0 e^{-jkz} = \frac{E_0}{2}(\vec{a}_x + j\vec{a}_y)e^{-jkz} + \frac{E_0}{2}(\vec{a}_x - j\vec{a}_y)e^{-jkz}$ 。任意一个椭圆极化波可分解为两个振幅不等、旋向相反的圆极化波，即 $\vec{E}(z) = (\vec{a}_x E_1 + j\vec{a}_y E_2)e^{-jkz} = \frac{E_1+E_2}{2}(\vec{a}_x + j\vec{a}_y)e^{-jkz} + \frac{E_1-E_2}{2}(\vec{a}_x - j\vec{a}_y)e^{-jkz}$ 。

在无界导电($\sigma \neq 0$)有损耗无源($\rho = 0$)媒质中，时谐麦克斯韦方程组可化为：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{E}, \text{ 定义复介电常数 } \varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}, \text{ 则传输常数 } \gamma = \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \alpha + j\beta$ （和 k 比较），其中 α 为衰减常数， β 为相位常数，媒质的特征阻抗 $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$ 。若电场强度的瞬时表达式为 $\vec{E}(z, t) = \vec{a}_x E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0)$ 则磁场强度的瞬时表达式为 $\vec{H}(z, t) = \vec{a}_y \frac{E_m}{\eta_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_0)$ 。

电场和磁场之间存在相位差。定义**损耗角正切** $\tan\delta_c = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ ，其与电磁波频率有关，表示了传导电流与位移电流幅度之比，即反映了媒质的欧姆损耗。磁场滞后于电场。由公式

$$\begin{cases} \gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} & \gamma = \alpha + j\beta \\ \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \vec{a}_x E_x(z) = \vec{a}_x E_0 e^{-\gamma z} = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

可得场强的瞬时值为： $\vec{E}(z, t) = \vec{a}_x E_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ 。其中 $e^{-\alpha z}$ 是**衰减因子**， α 是衰减常数，单位是奈培每米 (Np/m)， $e^{-j\beta z}$ 是相位因子， β 是**相位常数**，单位是弧度每米(rad/m)。

在**理想导体**中有 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \rightarrow \infty$ ，在**理想介质**中有 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 0$ 。

在**低损耗电介质**中， $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$ ，传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$ ，本征阻抗 $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$ ，相速度 $v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$ （衰减常数与电导率成正比，相位尝试与理想无损媒质的相位常数差别极小，并且电场强度和磁场强度存在很小的相位差）；

在良导体中, $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$, 传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$, 本征阻抗 $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \approx (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$,

即在良导体中本征阻抗的相位角为 45° , 即磁场在相位上落后电场 $\frac{\pi}{4}$ 。此时相速度 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$

(比自由空间慢得多), 波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, 趋肤/穿透深度 $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi}$ 为振幅衰减为原来 $\frac{1}{e}$ 时电磁波传播的距离, 其与频率有关, 与波长成正比, 即频率越高, 趋肤深度越小。因电磁感应在电介质中会产生感应电流, 从而会产生**涡流损耗**。涡流损耗功率与电磁场频率的平方、金属的电导率和材料厚度的平方成正比。为了减小涡流损耗, 金属板的厚度应较小, 故铁芯多采用叠片的形式, 并可在钢片中掺杂硅或使用铁的氧化物, 以减小材料的电导率。

集肤效应: 在导体中传导的变化电流产生的变化磁场在导体中产生感应电流, 使导体中的电流趋向于导体的表面, 且越趋近导体表面, 电流密度越大。随着电流频率的增加, 电流越趋近导体表面, 当频率很高时, 导体有效横截面积减小, 电阻增大。故在高频时, 常采用中空导线或若干股并列的细导线代替单股导线。

色散与群速: 色散是不同频率分量的电磁波以不同的相速度传播, 导致信号波形畸变的现象, 有损耗媒质即是一种色散媒质。相速度 $v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$ ——等相位点传播的速度, 群速度 $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$ ——波包包络传播的速度, 其之间关系为 $v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}}$ 。

$\frac{dv_p}{d\omega} = 0$	$v_g = v_p$	无色散
$\frac{dv_p}{d\omega} < 0$	$v_g < v_p$	正常色散
$\frac{dv_p}{d\omega} > 0$	$v_g > v_p$	异常色散

均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的垂直入射:

设入射波电场强度及磁场强度表达式 $\begin{cases} \vec{E}_i(z) = \vec{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \\ \vec{H}_i(z) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \end{cases}$, 则由电场强度边界条件及麦克

斯韦方程得反射波电场强度及磁场强度表达式 $\begin{cases} \vec{E}_r(z) = -\vec{a}_x E_{i0} e^{j\beta_1 z} \\ \vec{H}_r(z) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \end{cases}$, 总电场强度及磁场强度表

达式 $\begin{cases} \vec{E}_1(z) = -\vec{a}_x j 2 E_{i0} \sin \beta_1 z \\ \vec{H}_1(z) = \vec{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \end{cases}$ 。即合成电磁波在媒质 1 中形成驻波, 电场强度和磁场强度在时间

上相位差 $\frac{\pi}{2}$, 在空间上错开 $\frac{\lambda}{4}$ 。在理想导体分界面上, 电场强度为零, 磁场强度最大, 存在面电流密度 $\vec{J}_s(x) = \vec{a}_x 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1}$ 。

均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的倾斜入射:

垂直极化平面波入射: 设入射波电场强度及磁场强度表达式为

$$\begin{cases} \vec{E}_i(x, z) = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_i(x, z) = (-\vec{a}_x \cos\theta_i + \vec{a}_z \sin\theta_i) \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \end{cases}, \text{ 则反射波电场强度及磁场强度表达式为}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_r(x, z) = -\vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_r(x, z) = (-\vec{a}_x \cos\theta_i - \vec{a}_z \sin\theta_i) \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \end{cases}, \text{ 叠加总电场强度及磁场强度表达式为}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1(x, z) = -\vec{a}_y j 2 E_{i0} \sin(\beta_1 z \cos\theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} \\ \vec{H}_1(x, z) = [-\vec{a}_x \cos\theta_i \cos(\beta_1 z \cos\theta_i) - \vec{a}_z j \sin\theta_i \sin(\beta_1 z \cos\theta_i)] 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} \end{cases}, \text{ 合成电磁波在媒质}$$

1 的 z 方向上形成驻波, 传播的平均功率为零, 在 x 方向上形成非均匀平面行波, 相速度 $v_{xp} = \frac{v_p}{\cos\theta_i}$,

因 $E_{1x} = 0$, 即合成电磁波为横电波 (TE 波)。媒质 1 中合成电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av} = \vec{a}_x 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \sin\theta_i \sin^2(\beta_1 \cos\theta_i z)$, 理想导体表面存在面电流密度 $\vec{J}_s(x) = \vec{a}_y 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos\theta_i e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i}$

平行极化平面波入射: 设入射波电场强度及磁场强度表达式为

$$\begin{cases} \vec{E}_i(x, z) = (\vec{a}_x \cos\theta_i - \vec{a}_z \sin\theta_i) E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_i(x, z) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \end{cases}, \text{ 则反射波电场强度及磁场强度表达式为}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_r(x, z) = (\vec{a}_x \cos\theta_i + \vec{a}_z \sin\theta_i) E_{i0} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_r(x, z) = -\vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \end{cases}, \text{ 此时合成电磁波在媒质 1 的 z 方向上形成}$$

驻波, 传播的平均功率为零, 在 x 方向上形成非均匀平面行波, 相速度 $v_{xp} = \frac{v_p}{\sin\theta_i}$, 因 $H_{1x} = 0$,

即合成电磁波为横磁波 (TM 波)。媒质 1 中合成电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av} = \vec{a}_x 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \sin\theta_i \cos^2(\beta_1 \cos\theta_i z)$, 理想导体表面存在面电流密度 $\vec{J}_s(x) = \vec{a}_x 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i}$, 面电荷密度 $\rho_s = 2 E_{i0} \sin\theta_i e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i}$ 。

均匀平面电磁波在理想电介质平面边界上的垂直入射:

因理想电介质表面无面电荷和面电流, 则由边界条件得 $\begin{cases} \vec{E}_i(0) + \vec{E}_r(0) = \vec{E}_t(0) \\ \vec{H}_i(0) + \vec{H}_r(0) = \vec{H}_t(0) \end{cases}$ 。定义反

射系数 $\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$, 透射系数 $\tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$, 可得总电场强度和磁场强度

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z) = \vec{a}_x E_{i0} [\tau e^{-j\beta_1 z} + \Gamma j 2 \sin\beta_1 z] \\ \vec{H}_1(z) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} [\tau e^{-j\beta_1 z} - \Gamma j 2 \cos\beta_1 z] \end{cases}, \text{ 且有 } 1 + \Gamma = \tau. \text{ 媒质 1 中电场强度和磁场强度在 z 方向是}$$

行波和驻波的合成，媒质 2 中的透射电磁波是行波。当 $\eta_2 > \eta_1$ 时，反射系数 $\Gamma > 0$ ，在界面处电场强度为最大值 $E_{i0}(1 + \Gamma)$ ；当 $\eta_2 < \eta_1$ 时，反射系数 $\Gamma < 0$ ，在界面处电场强度为最小值 $E_{i0}(1 + \Gamma)$ 。定义驻波电场强度的最大值与最小值之比为驻波比，即驻波比 $S = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$ 。媒质 1 中电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av} = \vec{S}_i^{av}(1 - |\Gamma|^2)$ ，媒质 2 中 $\vec{S}_2^{av} = \vec{S}_i^{av} \frac{\eta_1}{\eta_2} |\tau|^2$ ，因 $|\Gamma|^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} |\tau|^2 = 1$ ，即 $\vec{S}_1^{av} = \vec{S}_2^{av}$ 。

均匀平面电磁波向多层电介质的垂直入射：

定义总场波阻抗为平行平面上总电场强度与总磁场强度之比即 $Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)}$ 。则均匀平面电磁波在媒质表面垂直入射时 $Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}}{e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}}$ ，距离边界 $-L$ 处的总场波阻抗 $Z(-L) = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 L} + \Gamma e^{-j\beta_1 L}}{e^{j\beta_1 L} - \Gamma e^{-j\beta_1 L}} = \eta_1 \frac{\eta_2 \cos \beta_1 L + j\eta_1 \sin \beta_1 L}{\eta_1 \cos \beta_1 L + j\eta_2 \sin \beta_1 L}$ 。若均匀平面电磁波从媒质 1 垂直入射到媒质 2 和媒质 3，则在媒质 2 表面的反射系数 $\Gamma_2(0) = \frac{Z_2(0) - \eta_1}{Z_2(0) + \eta_1} = \frac{\eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 d + j\eta_2 \sin \beta_2 d}{\eta_2 \cos \beta_2 d + j\eta_3 \sin \beta_2 d} - \eta_1}{\eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 d + j\eta_2 \sin \beta_2 d}{\eta_2 \cos \beta_2 d + j\eta_3 \sin \beta_2 d} + \eta_1}$ 。若要在媒质 2 表面处不发生反射，则需满足 $\eta_2(\eta_3 \cos \beta_2 d + j\eta_2 \sin \beta_2 d) = \eta_1(\eta_2 \cos \beta_2 d + j\eta_3 \sin \beta_2 d)$ 。当 $\eta_1 = \eta_3$ 时，则 $\sin \beta_2 d = 0$ ，即 $Z(0) = \eta_3$ ，媒质 2 的厚度 $d = n \frac{\lambda_2}{2}$ ，为媒质 2 中半波长的整数倍，此介质层称为半波介质窗；当 $\eta_1 \neq \eta_3$ 时，则 $\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$ ， $\cos \beta_2 d = 0$ ，即 $Z(0) = \frac{\eta_2^2}{\eta_3}$ ， $d = (2n + 1) \frac{\lambda_2}{4}$ ，为媒质 2 中 $\frac{1}{4}$ 波长的奇数倍，此时媒质 2 的作用等效于 $\frac{1}{4}$ 波长阻抗变换器。

均匀平面电磁波在电介质分界面上的倾斜入射：

基本规律：反射定律： $\theta_i = \theta_r$ ，折射定律： $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}}$ 。全反射临界角 $\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$ ，即当入射角大于全反射临界角时，无透射波，仅存在沿分界面表面传播的表面波，其振幅沿分界面法线方向指数衰减，且平均能流密度为零，即没有功率进入媒质 2。

垂直极化平面波(S波)入射：

反射系数 $\Gamma_{\perp} = -\frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = -\frac{\frac{\eta_2}{\cos \theta_t} - \frac{\eta_1}{\cos \theta_i}}{\frac{\eta_2}{\cos \theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos \theta_i}}$ ，透射系数 $\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \frac{\eta_2}{\cos \theta_t}}{\frac{\eta_2}{\cos \theta_t} + \frac{\eta_1}{\cos \theta_i}}$ ，满足 $1 - \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}$ 。即当 $\eta_2 \cos \theta_i = \eta_1 \cos \theta_t$ 时，反射系数 $\Gamma_{\perp} = 0$ ，此时垂直极化波无反射，且满足 $\sin^2 \theta_i = \frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{1 - (\frac{\mu_1}{\mu_2})^2}$ 入射角为垂直极化时无反射的**布鲁斯特角** $\theta_{B\perp}$ 。若两媒质磁导率相同即 $\mu_1 = \mu_2$ ，此时布鲁斯特角 $\theta_{B\perp}$ 不存在；若两媒质介电常数相同即 $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ，此时 $\sin \theta_{B\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}}$ 。

平行极化平面波(p波)入射：

反射系数 $\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos \theta_i} - \frac{\eta_1}{\cos \theta_t}}{\frac{\eta_2}{\cos \theta_i} + \frac{\eta_1}{\cos \theta_t}}$, 透射系数 $\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2\frac{\eta_2}{\cos \theta_t}}{\frac{\eta_2}{\cos \theta_i} + \frac{\eta_1}{\cos \theta_t}}$, 满足 $1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tau_{\parallel}$ 。即当 $\eta_2 \cos \theta_t = \eta_1 \cos \theta_i$ 时, 反射系数 $\Gamma_{\parallel} = 0$, 此时平行极化波无反射, 且满足 $\sin^2 \theta_i = \frac{1 - \frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}$, 入射角为垂直极化时无反射的布魯斯特角 $\theta_{B\parallel}$ 。若两媒质介电常数相同即 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 此时布魯斯特角 $\theta_{B\parallel}$ 不存在; 若两媒质磁导率相同即 $\mu_1 = \mu_2$, 此时 $\sin \theta_{B\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$, 即 $\tan \theta_{B\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$ 。

第五章 导行电磁波及电磁波辐射（理解基本概念）

波导系统: 双导线(直流至米波波段), 同轴线(直流至分米波波段), 矩形波导、圆波导(微波波段), 带状线、微带线, 介质波导、光导纤维(光波波段)。低、中频区(双导体); 中高频区(微带线); 高频区(金属波导)

导波波型可分为 TEM 波、TE 波、TM 波, 单导体长直波导结构中不存在 TEM 波, 而多导体长直波导结构如同轴线, 因其中可以存在纵向传导电流, 故其中可存在 TEM 波。

TEM 波: $E_z = 0, H_z = 0$, 由纵向分量与横向分量之间的关系可知, 使 E 和 H 存在非零解的条件是: $k_{\text{cut}} = 0$, 即 $\gamma_{TEM}^2 + k^2 = 0 \rightarrow \gamma_{TEM} = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, 时谐分量为 0, 变成静态场表达式。单导体结构不存在非零二维静态场, 因此无法传输 TEM 波。

导波方程: $\begin{cases} \nabla_t^2 \vec{E}(u, v) + k_c^2 \vec{E}(u, v) = 0 \\ \nabla_t^2 \vec{H}(u, v) + k_c^2 \vec{H}(u, v) = 0 \end{cases}$ (推), 横向波数满足 $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ 。可由纵向场分量 E_z, H_z , 求得横向场分量 E_u, H_u, E_v, H_v (利用麦克斯韦方程组)。定义传输常数 $\gamma = \alpha + j\beta$, α 为衰减常数, β 为相位常数。TE 波和 TM 波存在高通低频截止和色散现象, 截止频率 $f_c = \frac{k_c u}{2\pi}$, 截止波数 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$, 即 $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = k \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}$ 。当工作频率 $f < f_c$ 时, $\gamma^2 > 0$, $\gamma = \alpha$, 电磁波没有相位的移动, 只有纵向衰减, 故不能传播, 处于**截止状态**; 当工作频率 $f > f_c$ 时 $\gamma^2 < 0$, $\gamma = j\beta, \beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$, 电磁波以一定的相速度和群速度传播, 处于**传播状态**, 相速度 $v_p = \frac{\omega}{\beta}$, 群速度 $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$, 且 $v_p v_g = u^2$, 导波波长 $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$, 即电磁波传播速度与工作频率有关。对于 TEM 波, $k_c = 0, \lambda_c = \infty$, 故 TEM 波没有截止和色散现象, 任何频率均可传播。

截止频率	截止波长	相速度	群速度	波导波长
$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$	$v_p = \frac{\omega}{\beta}$	$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$	$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$

对于 TE 波或者 TM 波,有:

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\epsilon}}; f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}; \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}, \quad \gamma = k\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}, \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > \lambda \quad (f > f_c)$$

$$\begin{cases} \alpha = k\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} & (f < f_c) \\ \beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} & (f > f_c) \end{cases}, \quad \begin{cases} v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} & (f > f_c) \\ v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < u & (f > f_c) \end{cases} \quad v_p v_g = u^2$$

矩形波导: 边界条件——在理想导体壁上, 电场强度的切向分量为零。截止波数 $k_c = \sqrt{k^2 + \gamma^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$, 传播常数 $\gamma = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$, 截止频率 $f_c = \frac{k_c u}{2\pi}$ 。m, n 分别表示场沿宽边和窄边的半周期数。TM_{mm}波中m,n均不能为 0, 最小模式是TM₁₁, 其截止频率最低; TE_{mn}波中 m, n 可以有一个为 0, 若m = 0则 $E_y = H_x = 0$, 若n = 0则 $E_x = H_y = 0$, TE₁₀波的截止频率最低。