数学物理方法

2022春

杨明
mathyangming@163.com
15851818416

群名称：2022数理方法
群　号：610248702

- 什么是数学物理方法(求解数理方程的方法)

常见的数理方程举例：

$u_t + u_x = 0$	传输方程
$u_t + uu_x = 0$	激波方程
$u_{xx} + u_{yy} = f$	位势方程
$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$	耗散波方程
$u_t - iu_{xx} = 0$	量子力学方程

- 需要的知识:微积分,ODE,复变,线代
- 学习方法(理解思想,重视技巧,多做练习)

知识框架

- **微积分方法**　特征线法 (第一、四章) $\rightarrow$ 球面平均法，降维法 (第四章);
- **级数方法**　傅里叶级数 (第二章) $\rightarrow$ 贝塞尔级数，勒让德级数 (第六章);
- **积分变换法**　傅里叶变换 (第三章) $\rightarrow$ 拉普拉斯变换 (第三章);
- **格林函数法**　格林函数 (第五章)。

Ch1　　典型方程的定解问题

1) 数学模型的建立
2) 定解问题
3) 线性PDE

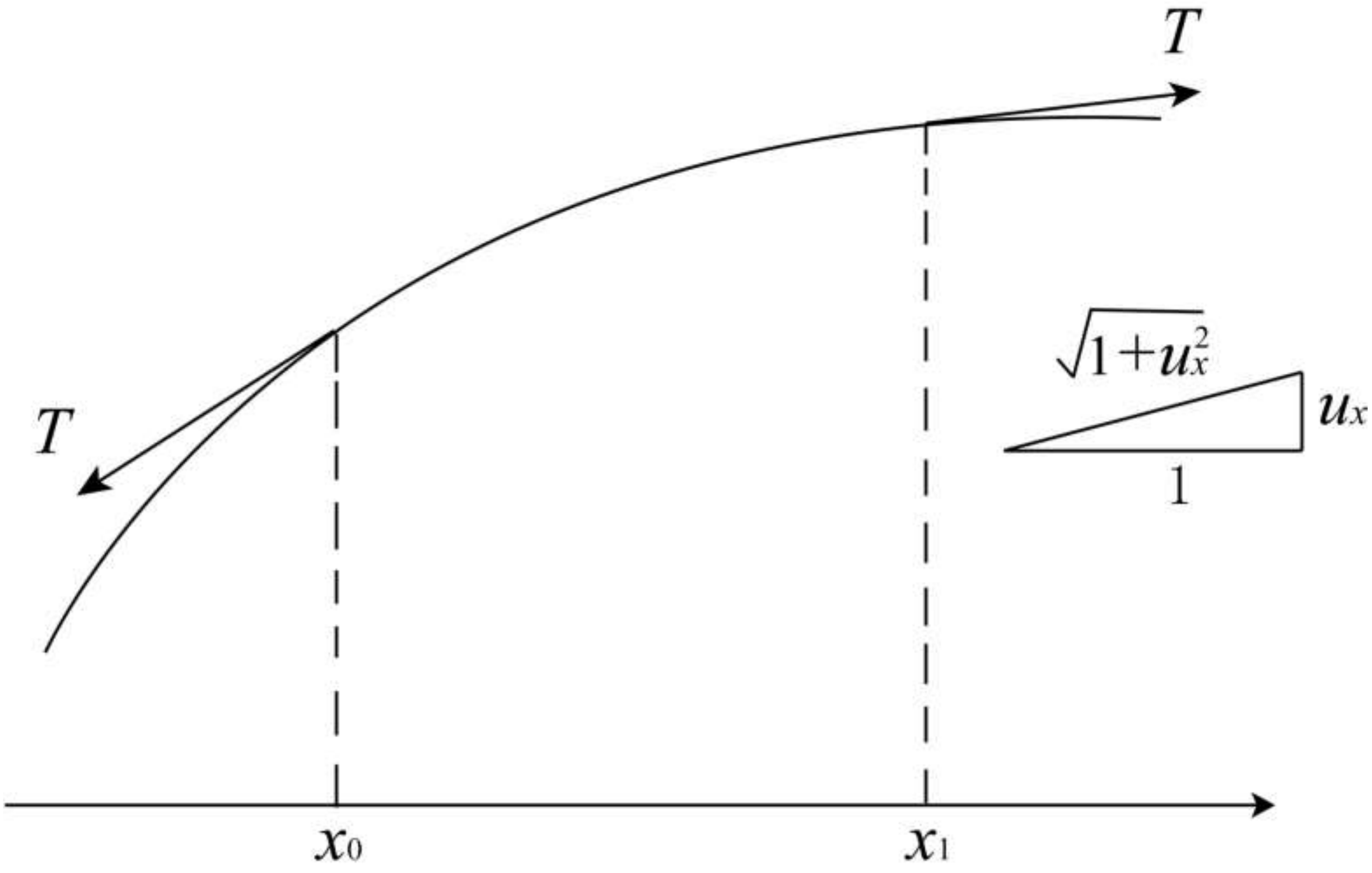
1) 数学模型的建立

- **波**动方程
- 热传导方程
- 稳态方程

- 设一根均匀柔软细弦,**平衡**时沿直线拉紧,**在外力作用下**让其做微小的横振动,**研究其振**动规律.（微局部受力分析）

- **方程的推广(空气阻力**,弹性阻力,**外力)**
- **高**维情形**(**鼓振动**,声波,**电磁波**)**

- **散度定理 (**Green公式**,Gauss公式**统一形式**)**



T
T
$\sqrt{1+u_x^2}$
u_x
1
x_0
x_1

水平方向 $\left.\dfrac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1}=0$

竖直方向 $\left.\dfrac{Tu_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\rho u_{tt}\,\mathrm{d}x$

因为振动微小，即$|u_x|$很小，所以

$$\sqrt{1+u_x^2}=1+\frac{1}{2}u_x^2+\cdots\approx 1\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x,$$

由第一个方程知T与x无关. 胡克定律知张力T也与t无关

$$\int_{x_0}^{x_1}(Tu_x)_x\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\rho u_{tt}\,\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ (Tu_x)_x=\rho u_{tt},$$

$$\Rightarrow\quad u_{tt}=c^2u_{xx},\quad 其中c=\sqrt{T/\rho}$$

用上面的分析方法还可以将此方程做如下推广：

1. 存在空气阻力ru_t的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}+ru_t=0,\ r>0;$

2. 存在弹性阻力ku的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}+ku=0,\ k>0;$

3. 存在外力$f(x,t)$的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t).$

格林公式与高斯公式回顾

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D Q_x - P_y dxdy.$$

$$\iint_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$= \iiint_{\Omega} P_x + Q_y + R_z dxdydz.$$

散度定理回顾 $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n \, dS = \int_D div\mathbf{F} \, dx.$

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

∂D的单位切向量为$(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s, \mathrm{d}y/\mathrm{d}s)$，

$$\Rightarrow \quad \text{外法向量为 } n = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s, -\mathrm{d}x/\mathrm{d}s).$$

记向量场$\mathbf{F} = (Q, -P)$，则 $\nabla \cdot \mathbf{F} = Q_x - P_y$,

$$\mathbf{F} \cdot n\,\mathrm{d}s = (Q, -P) \cdot (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s, -\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}s = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n\,\mathrm{d}s = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

此即为二维情况下的散度定理.

2维拉普拉斯算子

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)$$

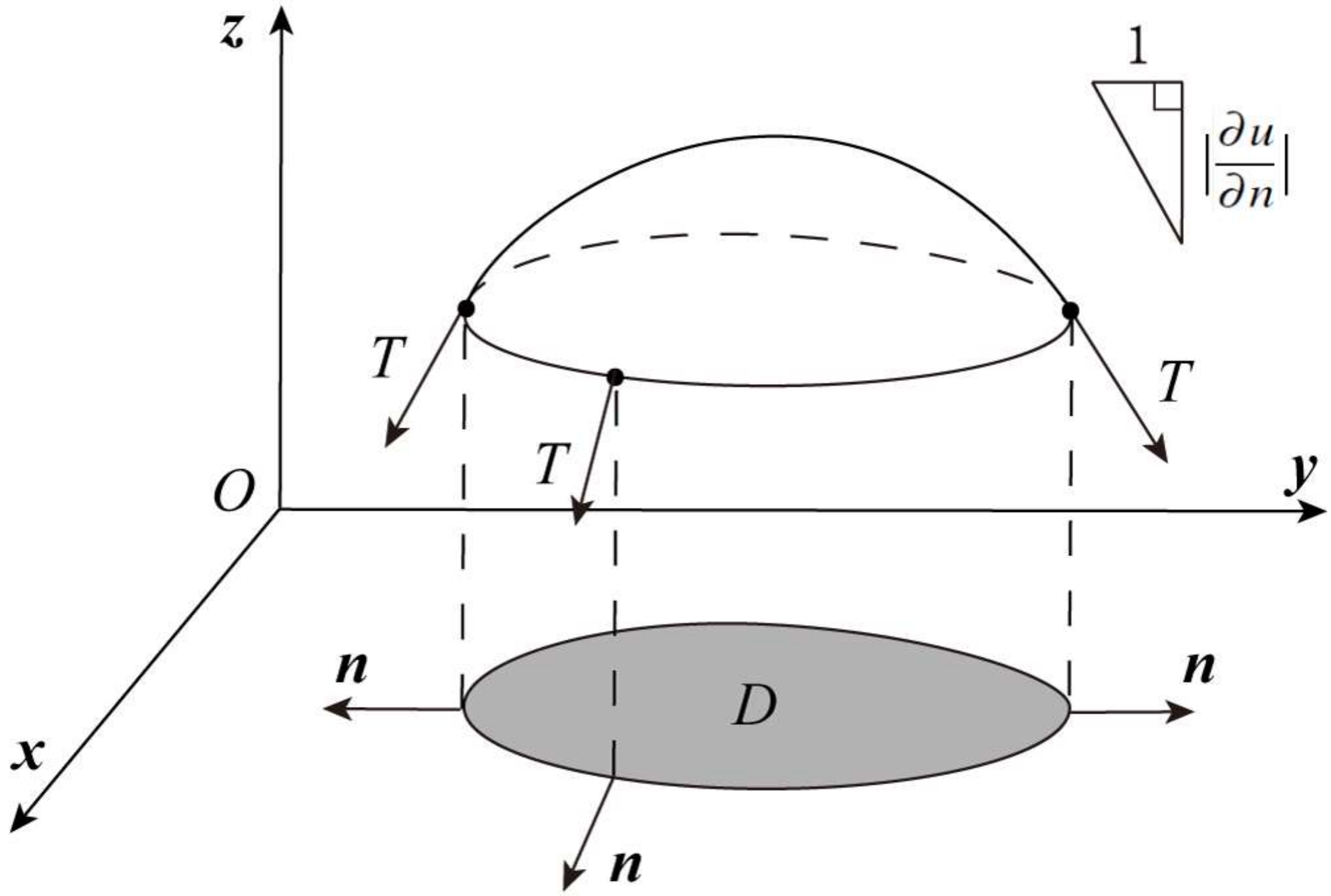
$$\nabla \cdot \nabla u = (\partial_x, \partial_y) \cdot (\partial_x, \partial_y) u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \Delta u.$$

3维拉普拉斯算子

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\nabla \cdot \nabla u = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_x, \partial_y, \partial_z) u$$

$$= \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u = \Delta u.$$



z
O
y
x
T
T
T
n
n
n
D
1
$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|$

任意选取鼓面上一块区域D，分析可得

鼓面张力T与位置和时间均无关，

在竖直方向上分析可得 $\int_{\partial D} T\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_D \rho u_{tt}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

利用曲线积分中的Green公式将上式改写为

$$\iint_D \nabla\cdot(T\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \rho u_{tt}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为D是任意取的，所以可得 $\rho u_{tt} = \nabla\cdot(T\nabla u)$，

$$\Rightarrow \quad u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

其中$c=\sqrt{T/\rho}$是波速，$\nabla\cdot\nabla = \partial_x^2+\partial_y^2 = \Delta$

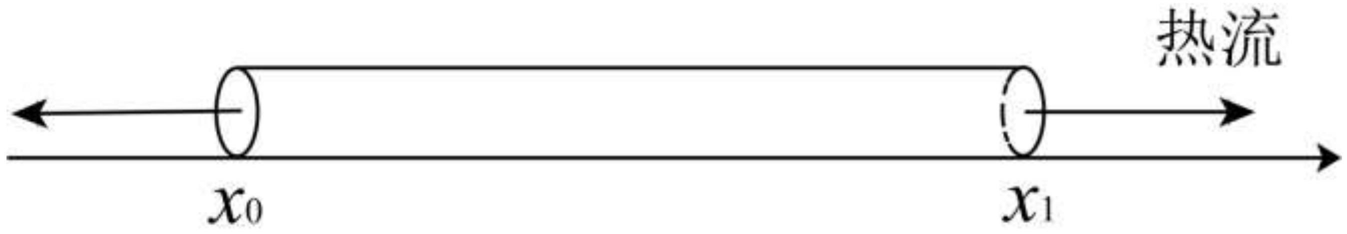
对于三维波动方程，利用曲面积分中的Gauss公式

可推导出来 $$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),$$

三维波动方程可以用来刻画弹性体中的固态振动，

空气中声波的传播，电磁波的传播等物理现象.

- 设绝热管中充满不流动的液体,**考**虑液**体的温度关于空**间和时间的变化规律.



- **方程的推广(**热源,热汇**)**
- **高**维情形**(**导热体-**Gauss公式)**
- **推广到化学物**质浓度问题

$$H(t)=\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad H'(t)=\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

热能的变化产生的原因是端点处热能的流入和流出(热流),

$$H'(t)=\tilde{k}u_x(x_1,t)-\tilde{k}u_x(x_0,t),$$

其中常数$\tilde{k}>0$. 因而

$$\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u_t(x,t)\,\mathrm{d}x=\tilde{k}u_x(x_1,t)-\tilde{k}u_x(x_0,t)=\int_{x_0}^{x_1}\tilde{k}\,u_{xx}\,\mathrm{d}x,$$

$$\Longrightarrow \quad u_t=k\,u_{xx},$$

其中 $k=\tilde{k}/C\rho$称为热传导系数或热扩散系数.

如果管中存在热源(热汇)，则方程变为

$$u_t - k u_{xx} = f(x,t).$$

管中的热传导方程也可以推广到二维和三维的情况.

三维导热体的热传导方程

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u,$$

热传导(扩散)方程也可以用来刻画其他扩散现象，

比如化学物质的扩散、生物种群的扩散等等.

- 稳态方程 **(平衡**态**,与**时间无关**)**
- **拉普拉斯方程**（调和函数）
- **方程的推广(泊松方程-**位势方程**)**

$u_t = u_{tt} = 0$，从而波动方程和扩散方程变为

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

在一维情况下，拉普拉斯方程简化为$u_{xx} = 0$，

所以其解为$u = c_1 x + c_2$. 至于二维和三维的情况

会有很大不同，后面各章中会具体研究.

拉普拉斯方程可以推广为非齐次方程 $-\Delta u = f$.

静电场$\vec{E}$满足：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho$, ρ是电荷分布密度.

因为静电场是有势场, 所以存在u, 使得$\vec{E}=-\nabla u$.

故 $$\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(-\nabla u)=-\Delta u=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

- **Helmholtz方程**

$$u_{tt}=c^2\Delta u,\quad u(x,t)=e^{i\omega t}v(x)$$

$$\Rightarrow \Delta v+k^2 v=0,\quad k=\omega/c.$$

2) 定解问题

- 定解条件
- 具体的定解问题
- 定解问题的适定性

- 为什么需要定解条件

研究传输方程的通解和特解。

$$\begin{cases} u_t + bu_x = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in R. \end{cases}$$

考虑函数 $z(s) = u(x + sb, t + s)$,

直线参数方程：$X(s) = x + sb, T(s) = t + s.$

$$z'(s) = bu_x(x + sb, t + s) + u_t(x + sb, t + s) = 0,$$

$$u(x,t) = z(0) = z(-t) = u(x - bt, 0) := f(x - bt).$$

通解为$u(x,t) = f(x - bt)$，其中f为任意可微函数.

加上定解条件，$u(x,0) = g(x)$，特解为$u(x,t) = g(x - bt)$.

- 定解条件有哪些
  （初始条件**Initial Cond.**，
  边界条件**Boundary Cond.**）

- **各个空**间维数区域及其边界

- **具体的定解**问题及其物理含义
  (结合弦振动，热传导，位势方程**)**

D 是

区间$0 < x < l$，所以边界∂D就是两个端点$x = 0$，$x = l$；

平面区域，边界∂D就是一个闭合曲线；

液体的容器，此时边界∂D就是一个曲面；

对于三维静电场模型来说，

D就是整个空间，此时没有边界.

Dirichlet边界条件 u 在边界处的值给定,

Neumann边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在边界处的值给定,

Robin边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u$ 在边界处的值给定,

- 弦振动模型 设弦的两端是固定的，比如吉他的琴弦，此时边界条件是齐次Dirichlet边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0$. 如果琴弦的一端可以无阻力地自由滑动，此时端点处没有张力，所以$u_x=0$，这是齐次Neumann边界条件. 如果弦的一端可以在弹性阻力下做滑动，则我们得到齐次Robin边界条件. 最后如果弦在外力作用下做某个特殊的滑动，则我们得到非齐次Dirichlet边界条件.

- 热扩散模型 设导热体的边界温度分布已知，则得到Dirichlet边界条件. 如果导热体在边界处是绝热的，则边界处没有热的传导(热流)，此时是齐次Neumann边界条件$\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 最后，考虑有界杆$0\le x\le l$上的热传导问题，在端点$x=l$处外部温度为$g(t)$，那么在此端点处的热交换满足Newton冷却定律，则
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=-\sigma\left[u(l,t)-g(t)\right],$$
其中$\sigma>0$，此时就是非齐次Robin边界条件.

偏微分方程加上定解条件构成定解问题，

- 波动方程+边界条件+初始条件⇒ 初边值问题；
- 波动方程+初始条件⇒ 初值问题；
- 热扩散方程+边界条件+初始条件⇒ 初边值问题；
- 热扩散方程+初始条件⇒ 初值问题；
- 位势方程+边界条件⇒ 边值问题.

- 适定性（存在，唯一，稳定）

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - Tu_{xx} = f(x,t), & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t) = g(t), u(l,t) = h(t), & t>0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0<x<l. \end{cases}$$

对于$\forall f, g, h, \phi, \psi$(输入数据)，$\exists$唯一解$u(x,t)$，且给这5个函数小扰动$\delta$(误差)，解$u^\delta$与真解$u$很靠近。

课堂练习

1. 利用散度定理(Gauss公式)推导三维导热体的热传导方程

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u.$$

2. 验证 $u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny,\ \ n > 0$ 是方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的解.

3. 求解一阶运输方程初值问题

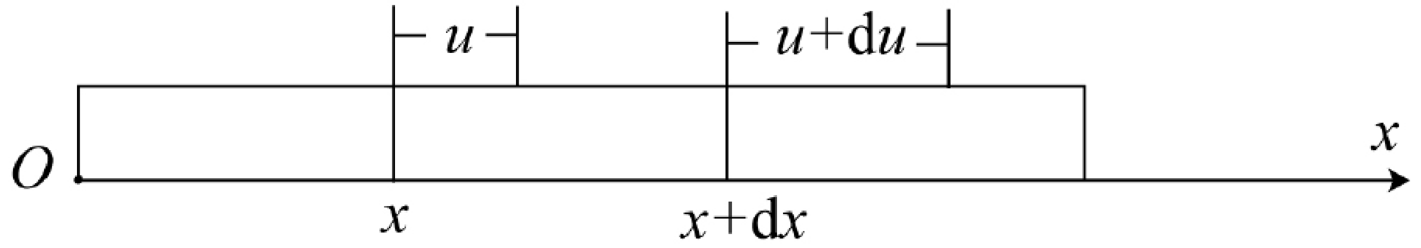
$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. 有一个长为l的均匀细杆，内部热源为$f(x,t)$，初始温度为$g(x)$，端点$x=0$处温度为$\mu(t)$，另外一端$x=l$处与温度为$v(t)$的介质有热交换，请写出该热传导过程的定解问题.

$$
\begin{cases}
u_t - k u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l,\ \ t > 0, \\
u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = -\sigma\left(u(l,t) - \nu(t)\right), & t \geq 0, \\
u(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l,
\end{cases}
$$

5.思考题

一个长为l横截面积为S的均匀弹性杆，已知杆的一端$x=0$处固定，而另一端$x=l$在沿杆轴方向受外力挤压，在压缩了δ后而达到平衡. 在$t=0$时，撤去外力. 试利用牛顿第二定律和胡克定律推导杆的微小纵振动所满足的方程，并给出边界条件和初始条件.



思考题解答：杆的纵振动方程

解　设弹性杆的密度是常数ρ，用常数E表示杆的杨氏模量，用$u(x,t)$表示细弦在x点t时刻的纵向位移. 采用微元法来建立模型.

由牛顿第二运动定律知　$\rho S\,\mathrm{d}x\,u_{tt}=p(x+\mathrm{d}x,t)S-p(x,t)S$,

其中$p(x,t)$表示x点的截面在t时刻沿x轴方向所受到的应力.

$$\frac{p(x+\mathrm{d}x,t)-p(x,t)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial p}{\partial x} \quad\Longrightarrow\quad \rho u_{tt}=\frac{\partial p}{\partial x}.$$

如果忽略垂直于杆长方向上的形变，则由胡克定律知，

应力与相对伸长成正比，比例系数为杨氏模量，即　$p=E\,u_x$,

$$\Longrightarrow\quad \rho\,u_{tt}=E\,u_{xx}.$$

边界条件：杆在$x=0$处固定，所以 $u(0,t)=0 \quad t\geq 0.$

在$x=l$处，$t=0$时，撤去外力，即$t\geq 0$时，$x=l$处为自由端，

所以 $u_x(l,t)=0 \quad t\geq 0.$

初始条件：因为杆在$x=l$处受外力F而达到平衡，可以考虑

$[l-\varepsilon,l]$这一小段，在$x=l-\varepsilon$处受应力 $ESu_x\Big|_{x=l-\varepsilon}$，

在$x=l$处受外力F，所以平衡时有 $ESu_x\Big|_{x=l-\varepsilon}+F=0,$

因为平衡时，杆的各处应力相等，所以对任意的x在$t=0$时

$$ESu_x(x,0)+F=0 \quad \Rightarrow \quad u_x(x,0)=-\frac{F}{ES},$$

从0到x积分得 $u(x,0)=-\dfrac{F}{ES}x$，已知$u(l,0)=-\delta$，所以

$$-\frac{F}{ES}l=-\delta \quad \Rightarrow \quad u(x,0)=-\frac{\delta}{l}x,$$

又因为$t=0$时平衡，所以初始速度为零，即 $u_t(x,0)=0.$