3) 特征值问题

- 特征值问题的简单算例
- 一般的Sturm-Liouville问题的结论

例1. 考虑D+N边界特征值问题

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, & 0 < x < l, \\ \phi(0) = \phi'(l) = 0. \end{cases}$$

特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, \ n = 1, 2, \cdots,$

特征函数 $\phi_n(x) = \sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}, \ n = 1, 2, \cdots.$

例2. 求解D + R边界的特征值问题

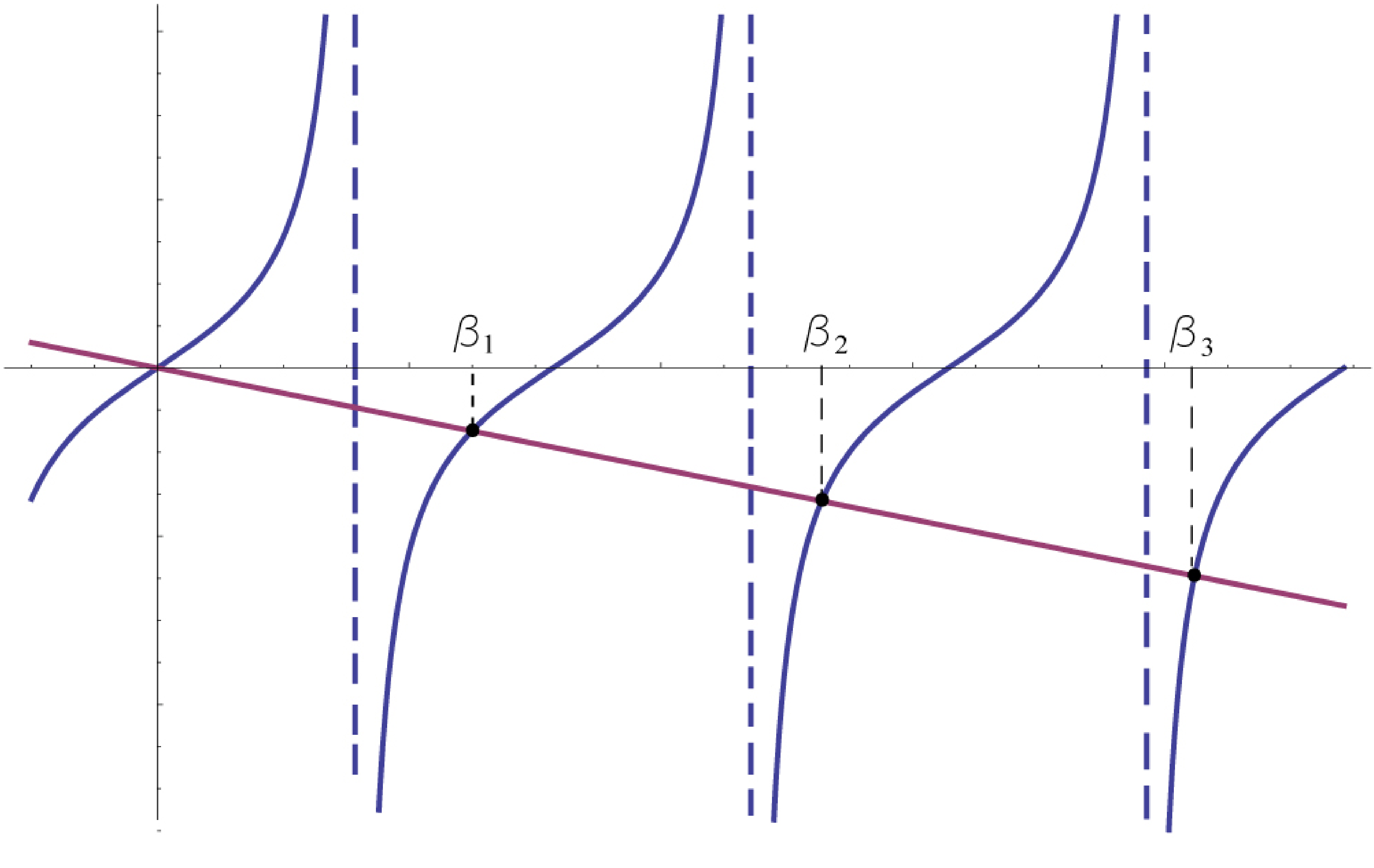
$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, & 0 < x < l, \\ \phi(0) = 0, & \phi'(l) + \sigma\phi(l) = 0. \end{cases}$$

其中$\sigma > 0$为常数.

$\tan\beta l = -\dfrac{\beta}{\sigma}$ 第n个正解为β_n

特征值：$\lambda_n = \beta_n^2,$

特征函数：$\sin\beta_n x,\ n = 1, 2, \cdots.$



β_1
β_2
β_3

Robin边界下特征值的数值解

求解非线性方程

$$\tan \pi x + \frac{x}{2} = 0$$

无解析解，需要数值求解，常用牛顿法。

可以用Mathematica中FindRoot[ ]命令，

其他数学软件也有类似命令。

牛顿法：求局部解，需要指定迭代初值，

不同的初值可能产生同一个解.

如何求出前10个特征值?

```
Table[FindRoot[Tan[Pi x] + x / 2 == 0, {x, k}], {k, 1, 11}]
表格      求根           正切 圆周率
```

```
{{x → 0.869466}, {x → 1.76944}, {x → 2.70278},
 {x → 3.65922}, {x → 4.6298}, {x → 5.60903}, {x → 5.60903},
 {x → 6.59374}, {x → 7.58209}, {x → 8.57295}, {x → 9.56561}}
```

```
h = x /. %
```

```
{0.869466, 1.76944, 2.70278, 3.65922, 4.6298,
 5.60903, 5.60903, 6.59374, 7.58209, 8.57295, 9.56561}
```

```
h = Drop[h, {6}]; lamda = h^2
     去掉元素
```

```
{0.755971, 3.13094, 7.30503, 13.3899, 21.435,
 31.4612, 43.4774, 57.4881, 73.4955, 91.5009}
```

验证函数系的正交性

```
Table[∫_0^Pi Sin[h[[m]] x] Sin[h[[n]] x] ⅆx, {m, 1, 6}, {n, 1, 6}] // TraditionalForm
表格      正弦                正弦                                    传统格式
```

$$\begin{pmatrix} 1.78106 & 9.4369\times10^{-16} & -8.32667\times10^{-17} & 1.66533\times10^{-16} & -1.80411\times10^{-16} & 6.93889\times10^{-17} \\ 9.4369\times10^{-16} & 1.71103 & -9.4369\times10^{-16} & 5.27356\times10^{-16} & 1.52656\times10^{-16} & 2.22045\times10^{-16} \\ -8.32667\times10^{-17} & -9.4369\times10^{-16} & 1.65925 & 1.11022\times10^{-16} & -3.95517\times10^{-16} & 3.46945\times10^{-17} \\ 1.66533\times10^{-16} & 5.27356\times10^{-16} & 1.11022\times10^{-16} & 1.6283 & 7.63278\times10^{-16} & -8.32667\times10^{-17} \\ -1.80411\times10^{-16} & 1.52656\times10^{-16} & -3.95517\times10^{-16} & 7.63278\times10^{-16} & 1.61011 & -7.63278\times10^{-16} \\ 6.93889\times10^{-17} & 2.22045\times10^{-16} & 3.46945\times10^{-17} & -8.32667\times10^{-17} & -7.63278\times10^{-16} & 1.599 \end{pmatrix}$$

请问以上的特征函数系在$L^2[0,l]$上完备正交吗?

线性代数中有类似的问题和结论可以借鉴.

如果设线性变换$T: C^k \to C^k$是自共轭的,
则T的特征向量构成C^k的正交基.(完备正交)

这里的正交是指共轭内积为零.

自共轭算子的定义:

设$T: D_T \subseteq L^2(a,b) \to L^2(a,b)$, $\forall f, g \in D_T$,

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle,$$

则称T是自共轭算子.

设二阶线性微分算子$Lf = rf'' + qf' + pf$,

$x \in [a,b]$,其中$r, q, p \in C^2[a,b]$是实函数,$r > 0$,

试问什么情况下L是自共轭算子?

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L^* g\rangle + [r(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - r')f\bar{g}]_a^b,$$

其中：$\quad L^* g = (rg)'' - (qg)' + pg$

$$= rg'' + (2r' - q)g' + (r'' - q' + p)g.$$

自共轭要求：

$2r' - q = q \quad \Rightarrow \quad q = r' \quad \Rightarrow \quad Lf = (rf')' + pf.$

$\therefore \langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle + \boxed{[r(f'\bar{g} - f\bar{g}')]_a^b}$

所以还需要结合边界条件来验证.

$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, \beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0)$

$f(a) - f(b) = 0, f'(a) - f'(b) = 0$且$r(a) = r(b)$

结论：设$Lf=(rf')'+pf$.考虑特征值问题：

$$\begin{cases} Lf+\lambda\omega f=0, & a<x<b, \\ B.C.(\text{端点分离式}) & \text{其中}\omega(x)>0\text{为权函数} \end{cases}$$

则算子L是自共轭的，且该问题的特征值都是实数，每个特征值都是单重的，所有特征函数构成$L_{\omega}^{2}[a,b]$的一组正交基.

$\alpha_1 f(a)+\alpha_2 f'(a)=0, \beta_1 f(b)+\beta_2 f'(b)=0, (\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0), (\beta_1,\beta_2)\neq(0,0)$

注：可用变分法证明本结论.

加权平方可积空间

$$L^2_\omega[a,b] := \{f| \int_a^b \omega|f|^2 \mathrm{d}x < \infty\}.$$

对于$\forall f,g \in L^2_\omega[a,b]$，定义

$$(f,g)_\omega = \int_a^b \omega(x) f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_{L^2_\omega[a,b]} = \sqrt{(f,f)_\omega}.$$

证明 (1) 记$\mathscr{D}_L$是$L^2[a,b]$中有二阶连续导数且满足边界条件(2.3.6)的子空间

$\forall\ f,g\in\mathscr{D}_L$,

$$(Lf,g)=(f,Lg)+\Big[r(f'\overline{g}-f\overline{g'})\Big]_a^b=(f,Lg)$$

所以 L 是自共轭算子.

(2) 设λ是一个特征值，对应的特征函数是f，则

$$\lambda(\omega f,f)=(\lambda\omega f,f)=-(Lf,f)$$
$$=-(f,Lf)=(f,\lambda\omega f)=\overline{\lambda}(f,\omega f)$$

所以 $\lambda=\overline{\lambda}$.

(3) 设特征值$\lambda_1 \neq \lambda_2$均为实数，对应的特征函数分别是f_1，f_2，则

$$Lf_1 + \lambda_1 \omega f_1 = 0, \quad Lf_2 + \lambda_2 \omega f_2 = 0.$$

计算得

$$(\lambda_1 \omega f_1, f_2) = (-Lf_1, f_2) = -(f_1, Lf_2) = (f_1, \lambda_2 \omega f_2)$$

从而 $(\lambda_1 - \lambda_2)(\omega f_1, f_2) = 0 \Rightarrow (\omega f_1, f_2) = 0.$

(4) 设λ是一个特征值，由ODE理论知初值问题

$$Lf+\lambda\omega f=0,\quad f(a)=c_1,\quad f'(a)=c_2,$$

存在唯一解. 该解由两个任意常数c_1，c_2确定，

所以解空间最多是二维的. 加上条件

$\alpha_1 f(a)+\alpha_2 f'(a)=0$，即$\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2=0$，所以

解空间最多是一维的，而λ是一个特征值，

解空间非平凡，所以解空间是一维的.

(5) 特征函数系构成加权平方可积空间$L^2_\omega[a,b]$的一组基的证明过程需要用到变分法的知识，超出本课程的要求，有兴趣的同学可以参考文献[6, 14]以及附录C.

习题选讲

例1.求解并比较结果

$$(1)\quad \begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, & 0 < x < l, \\ \phi(x) = \phi(x+l). \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, & 0 < x < l, \\ \phi(0) = \phi(l), & \phi'(0) = \phi'(l). \end{cases}$$

例2.

用分离变量法求解带周期边值条件的热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & -l < x < l,\ \ t > 0, \\ u(-l,t) = u(l,t), \quad u_x(-l,t) = u_x(l,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -l \leq x \leq l. \end{cases}$$

考虑特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & -l<x<l, \\ X(-l)=X(l), \quad X'(-l)=X'(l). \end{cases}$$

此为周期型特征值问题，解得

$$e.v.\ \ \lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,$$

$$e.f.\ \ X_n(x)=A\cos\frac{n\pi x}{l}+B\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=0,1,2\cdots.$$

$$u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l})e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}$$

代入初始条件得

$$\varphi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}),$$

由傅里叶系数计算公式得

$$A_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

例3. 利用Euler方程，求解特征值问题

$$(x^2 f')' + \lambda f = 0, \quad 1 < x < b,$$

$$f(1) = f(b) = 0.$$

解 方程写成 $x^2 f'' + 2xf' + \lambda f = 0,$

此为欧拉方程，换元$x = e^t$得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f + \lambda f = 0,$$

它的特征方程为$\xi^2 + \xi + \lambda = 0$，从而

$$\xi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}.$$

当$\lambda < 1/4$时，通解为？

当$\lambda = 1/4$时，通解为？

当$\lambda > 1/4$时，通解为？

当$\lambda < 1/4$时，通解为 $f(x) = Ax^{\xi_1} + Bx^{\xi_2}$,

代入边界条件得$A = B = 0$，所以此时λ不是特征值.

当$\lambda = 1/4$时，通解为 $f(x) = Ax^{-1/2} + Bx^{-1/2}\ln x$,

代入边界条件得$A = B = 0$，所以此时λ也不是特征值.

当$\lambda > 1/4$时，通解为

$$f(x) = x^{-1/2}\left(A\cos(\sqrt{\lambda - 1/4}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda - 1/4}\ln x)\right)$$

因为$f(1)=0$，所以$A=0$，又因为$f(b)=0$，所以

$$\sin(\sqrt{\lambda-1/4}\ln b)=0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\lambda-1/4}\ln b=n\pi, \quad n=1,2,\cdots.$$

因而

$$e.v.\ \lambda_n=\frac{1}{4}+(\frac{n\pi}{\ln b})^2, \quad e.f.\ f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{n\pi\ln x}{\ln b},$$

$$n=1,2,\cdots.$$

例4. 考虑如下特征值问题

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = X''(0) = X''(l) = 0. \end{cases}$$

解 先证明特征值$\lambda > 0$.

$$\int_0^l X''^2(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x$$

于是令$\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$，则ODE的特征方程为

$$\xi^4 - \beta^2 = 0$$

解得 $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\beta}$, $\xi_{3,4} = \pm i\sqrt{\beta}$,

所以ODE通解为

$$X(x) = C_1 \cosh\sqrt{\beta}x + C_2 \sinh\sqrt{\beta}x + C_3 \cos\sqrt{\beta}x + C_4 \sin\sqrt{\beta}x$$

代入条件$X(0)=X''(0)=0$得

$$C_1+C_3=0,\quad C_1\beta-C_3\beta=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=C_3=0.$$

代入条件$X(l)=X''(l)=0$得

$$C_2\sinh\sqrt{\beta}l+C_4\sin\sqrt{\beta}l=0,$$
$$C_2\beta\sinh\sqrt{\beta}l-C_4\beta\sin\sqrt{\beta}l=0,$$

解得 $\quad C_2=0,\quad \sin\sqrt{\beta}l=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\beta}l=n\pi,$

$$e.v.\ \ \lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^4,\quad e.f.\ \ X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,\cdots$$