3) 线性方程的基本概念

- 线性算子,线性方程的定义
- **叠加原理**
- 一阶线性**PDE的特征**线法
- 简单二阶线性**PDE的分**类

idea：

考虑方程 $u_{tt}-c^2u_{xx}+ru_t=0,$

将其写成 $(\partial_{tt}-c^2\partial_{xx}+r\partial_t)u=0.$

记算子 $L=\partial_{tt}-c^2\partial_{xx}+r\partial_t,$

则方程可写成算子形式 $Lu=0.$

- 什么是线性算子

$$L(c_1u_1+\cdots+c_ku_k)=c_1Lu_1+\cdots+c_kLu_k$$

- 齐次/非齐次方程

$$Lu=0, \qquad Lu=f$$

- 齐次/非齐次边界条件

$$Bu=0, \qquad Bu=g$$

- 叠加原理

设L, B是线性算子，且

$Lu_i = f_i, Bu_i = g_i$，令$u = c_1u_1 + \cdots + c_ku_k$，则

$\Rightarrow Lu = c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k, Bu = c_1g_1 + \cdots + c_kg_k$

- 非齐次问题的线性拆分

考虑问题 $Lu = f, Bu = g.$

先求解问题: $(1)\begin{cases} Lv = f \\ Bv = 0 \end{cases}, (2)\begin{cases} Lw = 0 \\ Bw = g \end{cases},$

则$u = v + w.$

练习题

指出下面方程是几阶方程？是否是奇次方程？是否是线性方程？

(1) $u_t - u_{xx} + 1 = 0,$

(2) $u_t - u_{xx} + xu = 0,$

(3) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0,$

(4) $u_{tt} - u_{xx} + u^2 = 0,$

(5) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0,$

(6) $u_x(1 + u_x^2)^{-1/2} + u_y(1 + u_y^2)^{-1/2} = 0,$

(7) $u_x + e^y u_y = 0,$

(8) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0.$

一阶线性PDE的特征线法

$$\begin{cases} u_t + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f(x,t), & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in R. \end{cases}$$

由运输方程的求解方法进行推广！

令曲线$x = x(t)$,满足$\dfrac{dx}{dt} = a(x,t)$,且$x(0) = c$.

令$U(t) = u(x(t),t)$,则

$$\frac{dU}{dt} + b(x(t),t)U = f(x(t),t), \quad U(0) = g(c).$$

例. 用特征线法求解运输方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

解　先求该问题的特征线 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2, \quad x(0) = c,$

解得特征线为 $x = 2t + c$. 再令 $U(t) = u(x(t),t)$，则

$U'(t) = 0, \quad U(0) = \sin c$, 解得 $U(t) = \sin c$.

最后将 $c = x - 2t$ 代入即得 $u(x,t) = \sin(x - 2t)$.

例：试用特征线法求方程的通解.

$$u_x + 2xy^2 u_y = 0$$

解：$\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{y^2} = 2xdx$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 - C \quad \Rightarrow y(x) = \frac{1}{C - x^2}$$ 特征线

令$U(x) = u(x, y(x))$, 则

$U'(x) = u_x + u_y \cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(x) = f(C)$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = f(x^2 + \dfrac{1}{y})$ 其中f是任意可微函数.

课堂练习

用特征线法求解下列方程的通解.

1. $(1+x^2)u_x + u_y = 0,$

2. $au_x + bu_y + cu = 0,$ 其中a,b,c为非零常数.

1. 先求特征线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2} \;\Rightarrow\; y(x)=\arctan x+C.$$

令$U(x)=u(x,y(x))$，则

$$U'(x)=u_x+\frac{1}{1+x^2}\cdot u_y=0 \;\Rightarrow\; U(x)=f(C)$$

所以通解为 $u(x,y)=f(y-\arctan x)$

2. 先求特征线 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a} \Rightarrow y(x)=\frac{b}{a}x+C.$

令$U(x)=u(x,y(x))$，则

$$U'(x)=u_x+\frac{b}{a}\cdot u_y=-\frac{c}{a}U(x)$$

$$\Rightarrow U(x)=f(C)\cdot e^{-\frac{c}{a}x},$$

所以通解为 $u(x,y)=f(y-\frac{b}{a}x)\cdot e^{-\frac{c}{a}x},$

其中f是任意可微函数.

例：求解问题

$$\begin{cases} u_t + (x+t)u_x + u = x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Step1.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + t, \\ x(0) = c. \end{cases} \qquad x(t) = e^t - t - 1 + ce^t,$$

Step2.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U = e^t - t - 1 + ce^t, \\ U(0) = c. \end{cases} \qquad U(t) = -t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \frac{c}{2}(e^t - e^{-t}),$$

问题的解 $u(x,t) = \dfrac{1}{2}(x - t + 1) - e^{-t} + \dfrac{1}{2}(x + t + 1)e^{-2t}.$

- 二阶线性**PDE的形式**
- 为什么要对其分类
- **通**过具体例子学习如何对其分类 **(两个**变量**,多个**变量**)**

两个变量的情况：

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+a_1u_x+a_2u_y+a_0u=0$$

根据$a_{12}^2-a_{11}a_{22}$的符号，分三种情况：

<0椭圆型，　$=0$抛物型，　>0双曲型.

做适当的变量代换$x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$后

可化为标准型:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=0,u_{\xi\xi}+\cdots=0,u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\cdots=0.$$

证明思路：

不妨取$a_{11}=1, a_1=a_2=a_0=0$，则

$$(\partial_x+a_{12}\partial_y)^2u+(a_{22}-a_{12}^2)\partial_y^2u=0.$$

在椭圆型的情况下，$a_{12}^2<a_{22}$，做变量代换

$$x=\xi,\quad y=a_{12}\xi+\sqrt{a_{22}-a_{12}^2}\eta,$$

$$\partial_\xi=\partial_x+a_{12}\partial_y,\ \partial_\eta=0\cdot\partial_x+\sqrt{a_{22}-a_{12}^2}\partial_y,$$

所以方程变成 $\partial_\xi^2u+\partial_\eta^2u=0$,

其余两种情况可做类似证明.

例：将下列方程分类

$$1)u_{xx} - 5u_{xy} = 0$$

$$2)4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_{y} = 0$$

$$3)4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

* 推广到多个变量 $u(x_1,\cdots,x_n)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

主项系数矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$.因为混合偏导数相等，所以假设$a_{ij}=a_{ji}$，即A是实对称矩阵.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} = (\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n})A(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n})^T u.$$

对于实对称矩阵 A，存在一个正交变换 Q，即 $Q^{-1}=Q^T$

使得 Q^TAQ 是一个对角矩阵 D，即

$$Q^TAQ = D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 就是矩阵 A 的特征值.

令列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，做变量代换

$$\xi=Q^T\mathbf{x},\quad \mathbf{x}=Q\xi,\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$$

$$(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n})=(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})Q^T,$$

$$(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n})^T=Q(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})^T,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}=(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})Q^TAQ(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})^Tu$$

$$=(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})D(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})^Tu=d_1u_{\xi_1\xi_1}+d_2u_{\xi_2\xi_2}+\cdots+d_nu_{\xi_n\xi_n}.$$

可以看到新的主项系数矩阵变为 $Q^T A Q = D$.

如果 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 同正或同负，则称 方程 (1.3.10) 为椭圆型;

如果其中某一个与其他 $n-1$ 个异号，则称方程 (1.3.10) 为双曲型，如果其中有多个与其余异号，则称方程 (1.3.10) 为超双曲型;

如果有一个为零，其余 $n-1$ 个同号，则称之为抛物型.

课堂练习

1. 判断空气动力学中的特里科米 (Tricomi) 方程

   $yu_{xx}+u_{yy}=0$ 的类型.

2. 考虑方程$3u_y+u_{xy}=0$，请问

   (1) 该方程的类型是什么?

   (2) 求该方程的通解. (提示令$v=u_y$)

   (3) 加上定解条件：$u(x,0)=e^{-3x}$，$u_y(x,0)=0$，

   该问题有解吗？解唯一吗?

1. 解：

$$a_{11} = y, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

当$y < 0$时，方程为双曲型；

当$y = 0$时，方程为抛物型；

当$y > 0$时，方程为椭圆型.

该方程在全平面中是混合型方程.

2. 解： (1) 计算得 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} > 0$,

方程 $3u_y + u_{xy} = 0$是双曲型.

(2) 令$v = u_y$，则 $3v + v_x = 0$,

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = C(y)e^{-3x},$$

方程的通解为 $u(x,y) = f(x) + g(y)e^{-3x}$.

(3) 将定解条件代入得

$$f(x) + g(0)e^{-3x} = e^{-3x}, \quad g'(0)e^{-3x} = 0,$$

$$f(x) = \big(1 - g(0)\big)e^{-3x}, \quad g'(0) = 0.$$

满足要求的函数f, g有很多，比如

$$f(x) \equiv 0, \quad g(y) = 1 + \alpha y^2, \quad 常数\alpha \neq 0.$$

3. $$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ \ y>0, \\ v(0,y)=v(\pi,y)=0, & y>0, \\ v(x,0)=0, \quad v_y(x,0)=\dfrac{1}{n}\sin nx, & n\text{为整数},\ \ 0<x<\pi, \end{cases}$$

有唯一解 $v(x,y)=\dfrac{1}{n^2}\sin nx\sinh ny.$

当$n\to+\infty$时，初始条件和解如何变化?

并由此分析问题的适定性.

数学实验

学习用Mathematica软件求解一阶线性PDE的通解和特解。

1.学习使用DSolve[ ]求解下面三个方程的通解。

(1) $u_x + 2xy^2 u_y = 0,$

(2) $(1+x^2)u_x + u_y = 0,$

(3) $au_x + bu_y + cu = 0,$ 其中a, b, c为非零常数.

2.了解NDSolve[ ]求解定解问题的特解。

In[•]:= DSolve[∂_xu[x, y] + 2 x y^2 ∂_yu[x, y] == 0, u[x, y], {x, y}]
求解微分方程

Out[•]= $\left\{\left\{u[x, y] \to C[1]\left[\frac{-1 - x^2 y}{y}\right]\right\}\right\}$

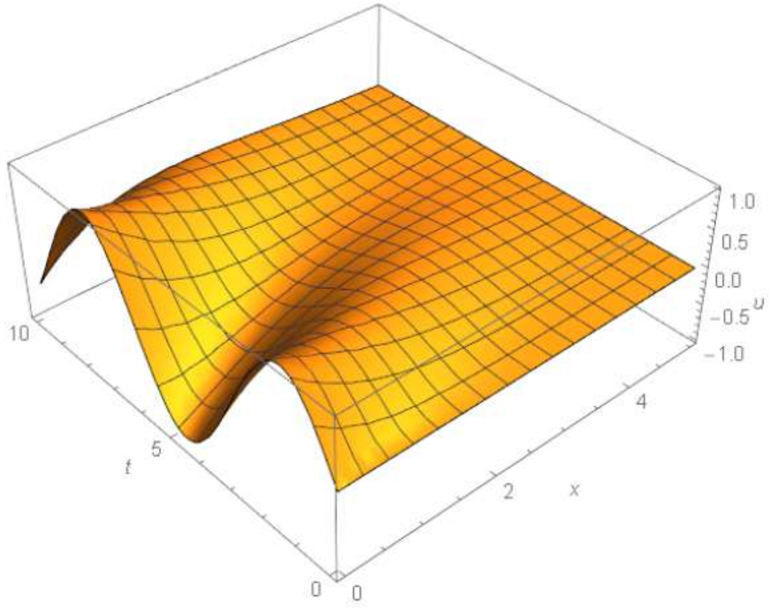
In[•]:= DSolve[{∂_xu[x, y] + 2 x y^2 ∂_yu[x, y] == 0, u[0, y] == Sin[2 y]}, u[x, y], {x, y}]
求解微分方程 正弦

Out[•]= $\left\{\left\{u[x, y] \to -\mathrm{Sin}\left[\frac{2 y}{-1 - x^2 y}\right]\right\}\right\}$

```
In[•]:= pde = ∂t u[x, t] - ∂x,x u[x, t] == 0;
        bc = {u[0, t] == Sin[t], u[5, t] == 0};
                          |正弦
        ic = u[x, 0] == 0;

        NDSolve[{pde, bc, ic}, u, {x, 0, 5}, {t, 0, 10}]
        |数值求解微分方程组
        Plot3D[Evaluate[u[x, t] /. %], {x, 0, 5}, {t, 0, 10},
        |绘…    |计算
          PlotRange → All, AxesLabel → {x, t, u}]
          |绘制范围    |全部  |坐标轴标签
```

Out[•]=




```
Out[•]= {{u → InterpolatingFunction[ ⊞ Domain: {{0., 5.}, {0., 10.}}
                                       Output: scalar ]}}
```