

## 第三讲

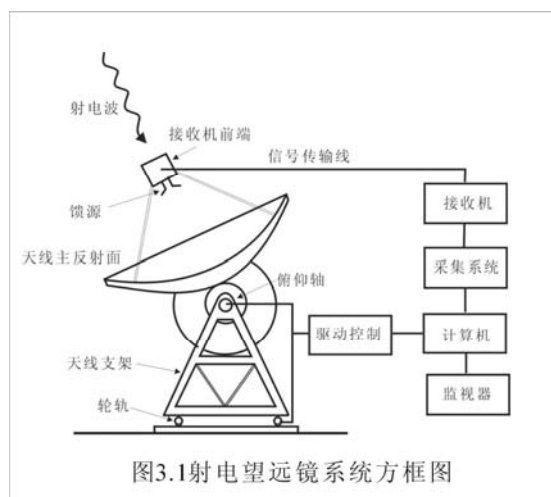
# 射电望远镜天线

### §3.1 射电望远镜概论

射电望远镜是能收集来自宇宙射电源或空间探测器波长从 0.1mm 到 30m 射电辐射，具有指向和测定射电源位置，对它们进行跟踪观测的天文仪器。由于历史的原因，我们熟悉的光学望远镜指的是光学望远镜本身，即只包括光学镜面、镜筒和支撑它们并使它们转动的机械支架，而不包括终端和控制计算机。与光学望远镜不同，射电望远镜包括收集射电辐射的天线，同时也包括接收机、数据采集系统、控制计算机等等设备，把这些总称射电望远镜。

#### 3.1.1 射电望远镜组成

图 3.1 给出一架典型射电望远镜系统的方框图，射电望远镜由四部分组成：天线系统、接收机系统、数据采集系统和计算机，其中天线系统是射电望远镜最主要的组成部分。天线系统包括主反射面（可能还有副面）、支撑反射面的支架和馈源（feed），在射电天文里，一般把它简称为天线。天线系统中的主反射面收集从天体来的辐射，支架的作用是随时可指向所要求的观测目标，能随天球转动跟踪监视射电源，支架有表明天线指向天空的位置的装置（码盘），能确定我们观测源的位置。馈源有偏振滤波的功能，它把天线收集起来其中某个偏振方向的自由电磁辐射集中起来转变为电流。图中接收机前端、传输线和接收机（中频和检波部分）称接收机系统。现代射电望远镜系统为了降低噪声，总是把低噪声接收机前端与馈源连在一起放在天线的焦点上，接收到的信号由传输线送给接收机，接收机对这些电信号进行放大和加工。射电望远镜中的数据采集系统按不同的天体物理观测的要求采集数据，一般有总功率采集和频谱采集，对应数据采集系统为辐射计和射电频谱仪。最后是计算机，它显示、记录、加工和存储数据，并有控制望远镜各部分协调工作的工能。



### 3.1.2 射电望远镜与光学望远镜的差别

射电望远镜和光学望远镜在光学系统方面有许多类似的方面，但是由于可见光波长与射电波长相差约  $10^4$  倍，再则，大气射电窗比可见光窗宽得多，射电望远镜与光学望远镜大有不同。(1) 由于可见光窗的带宽  $\Delta\nu/\nu$  只等于 2，一架光学望远镜能观测整个光学波段的辐射。但是射电望远镜不同，一架望远镜不能观测整个射电波段的辐射。不同波长段 (band) 可能有完全不同的结构，如工作在长波的共振结构 (resonant structure) 振子天线和工作在厘米波和毫米波的抛物面天线。这种不同也波及接收机。于是在叫射电望远镜时，习惯上总把工作的波段加在前面，以示区别，如毫米波射电望远镜、亚毫米波射电望远镜等等；(2) 前面我们曾经谈到，光学望远镜空间分辨率的限制是地球大气的视宁度 (seeing)，如果不考虑自适应光学，在较好的大气条件下，分辨率最好能达到  $0''.5$ 。一架口径为 20cm 的光学望远镜的衍射极限就小于这个值。相反，对于射电望远镜，由于它有比光学望远镜长得多的工作波长，空间分辨率由射电望远镜的衍射极限  $\theta = 1.22\lambda/D$  来决定。要达到地球大气的视宁度值  $0''.5$  的分辨率，工作在几 mm 波长的望远镜，需要近 1 km 口径的射电望远镜。如果工作在 1m 的波长，则需要近 400-m 口径！为了提高分辨率，射电望远镜必须要做得很大。望远镜要能很好的工作，它的表面精度 (rms) 必须好于  $\lambda/40$  (下面会作详细讨论)。于是，单个射电望远镜的分辨率要与光学望远镜媲美是不可能的。射电天文必须采用新的技术，即综合孔径技术 (详细将在最后得章节介绍)。(3) 也正由于射电望远镜有比光学望远镜长得多的工作波长，单个射电望远镜一次观测不可能同光学望远镜一样，在焦平面生成一个延展的成像。例如一架口径为 25m，焦比为  $f/D = 2$ ，工作在 1cm 波长的射电望远镜，指向的一个点源，在焦平面上所生成像的直径为 2cm！在天空  $1'.4$  范围内的点源的像，都与这个像重叠在一起。要获得天空一个区域的一幅射电图，不是用扫描观测模式，就是利用多束观测模式 (multiple beam operation) (详细将在下面介绍)。(4) 一个遥远恒星在望远镜焦平面成的是一个衍射像，描述这个衍射像强度分布函数是点扩散函数。利用光的可逆性原理，一个相反的光学系统，即在旋转抛物面的焦点上置一个点源，均匀照明孔径平面，它在各个方向发射的功率与点扩散函数完全相同，描述这个功率分布的是功率方向图 (下面将作详细讨论)。在光学望远镜里，我们很少用它来作为一个发射系统。但射电望远镜不同，许多射电望远镜有时作为一个雷达天线，配备相应的终端设备，将成为深空测控和通讯的有力工具。

### 3.1.3 射电望远镜的分类

射电望远镜，有的由一个天线，有的由多个天线组成。于是，与光学望远镜类似，射电望远镜可简单地分为单天线射电望远镜 (single dish radio telescope) 和多单天线组成的射电干涉仪 (interferometer)\*。有人从它们的工作原理，把它们分成总功率类射电望远镜和相关类射电望远镜。

---

\* 有的天文学家，如 W. N. Christiansen 和 J. A. Hoghom 把射电望远镜分成连续孔径 (filled aperture) 和非连续孔 (un-filled aperture) 射电望远镜。

这两个分类基本是一致的。单天线射电望远镜总是总功率测量，不管是连续辐射测量还是谱线观测(下面将详细讨论)。而多单天线组成的射电天线阵有的做总功率测量，有的做相关测量。在历史上，曾经用多个天线组成总功率射电望远镜，如Christiansen 栅型干涉仪，它非常类似多镜面光学望远镜。这类射电望远镜已不用。今天大部分由单天线组成的射电天线阵都是射电干涉仪。因此，现在把射电望远镜分成单天线射电望远镜和多单天线组成的射电干涉仪这两大类是基本合理的。

单天线射电望远镜从拦截射电辐射流的形式来分，又分成两类：线形天线射电望远镜和面（或称孔径）形的射电望远镜。线形天线有偶极和单极天线，原则上，单个偶极天线加上接收系统可以成为一架射电望远镜，但是，它的灵敏度和分辨率都很低，在射电天文里，很少用单个偶极振子天线射电望远镜，一般都用偶极天线阵（下面将详细地讨论）。于是，对于单天线射电望远镜而言，极大部分使用的是与可见光望远镜有类似光学系统的面形射电望远镜，特别是抛物面射电望远镜。因此，在下面单天线射电望远镜里，我们着重讨论抛物面射电望远镜。

表 3.1 波段代码和它代表的频率和波长

频率范围（GHz）	近似波长（cm）	波段代码
0.30-0.34	90	P
1.24-1.70	20	L
2.65-3.35	13	S
4.6-5.0	6	C
8.1-8.8	3.6	X
14.6-15.3	2	U
22.0-24.0	1.3	K
40.0-50.0	0.7	Q

上面我们已经提到，由于重力、风、热等等因素影响下的变形，目前世界上的射电望远镜可驱动的单天线口径不大于 100m，最大固定球面天线为 300m。不仅分辨率和辐射收集面积受到了严重的限制，而且一次只能观测一个点，不能做成图观测，即使射电望远镜工作在多天线束模式下，观测的点数也很有限。射电天文的相关理论和综合孔径技术，以及实际的多个单天线组成的射电干涉阵，使射电望远镜有了革命性的发展。射电干涉仪的分辨率和灵敏度与天线之间的最大间隔和所有天线面积之和有关，它大大提高了分辨率和灵敏度。天线阵可以一次成像，分辨率和有效面积可以任意地按要求调整。目前，地面的长基线干涉仪已达到毫角秒量级（厘米波 VLBI）。目前大多数射电干涉阵的单个天线都是由抛物面天线组成的。但在长波，射电干涉阵的单元是偶极振子。

正如上面讲的，射电窗比较宽，射电望远镜工作波长有：米波（ $\lambda > 1\text{m}$ ）、分米波（10cm — 1m）、

厘米波（1cm — 10 cm）、毫米波（1mm — 1cm）和亚毫米波（1mm — 0.35mm）。有些时候，有人用波段来称射电望远镜，以强调它的工作波长范围，暗含它可做的科学项目。由于通信雷达与射电天线相差无几，射电天文常借用无线电工程中的术语，如微波（0.7cm — 30cm）。在微波段大致分成 8 个波段，其频率范围、近似的波长和波段代码如表 3.1 所示。在射电天文里，经常有人讲波段代码、P 波段、X 波段等等，读者要熟知它代表什么。

### §3.2 射电天线一些基本理论和重要参数

#### 3.2.1 天线的互易定律

在下面的讨论里，为了便于理解天线的某些物理性质，我们往往把接收来自天体辐射的射电天线看成一架发射天线（雷达）。在天线理论里，互易定律（reciprocity theorem）指出：一架天线不管它是用来发射还是用来接收电磁波辐射，天线发射和接收的工作特性是一样的。在这里我们不准备对互易定律作详细理论证明，只给出定性说明。如读者希望进一步了解互易定律可参考有关书籍（K. Rohlfs 和 T. L. Wilson 著 《Tools of Radio Astronomy》）。

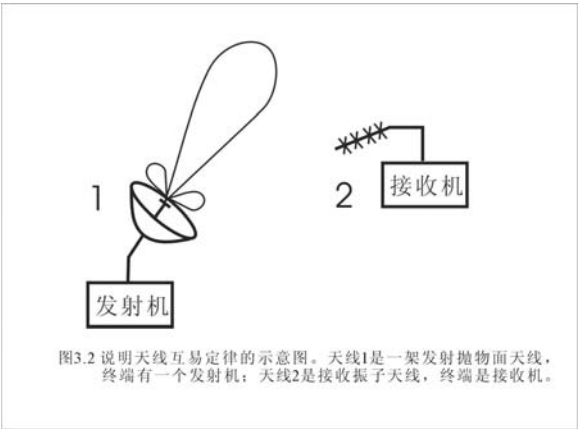


图 3.2 有两架天线，其中天线 1 终端有一个发射机，是一架无损耗的发射天线，它向四面八方发射生成周围的辐射场。而天线 2 是一架无损耗接收天线，终端有一个接收机，它指向天线 1，接收机测得与辐射场成正比的电流 $i_2$ 。假如天线之间的介质是各向同性的，按照天线的互易定律，天线 1 和 2 的发射机和接收机互换后，天线 1 测得的电流 $i_1$ 与互换

前天线 2 测得的电流相同，则有  $i_1 = i_2$ 。初看起来，很难把这个结论与互易定律联系起来。为了理解，我们举一个例子来说明。设天线 2 放在远离天线 1 并环绕天线它的各个方向位置上，天线 2 在不同位置上测得的电流反映天线 1 在各个方向上辐射场的分布（下面会谈到，它叫天线场方向图）。当天线 1 和 2 的发射机和接收机互换后，天线 1 测得的电流是它对各个方向辐射的响应。 $i_1 = i_2$  的结果意味着：天线 1 作为发射天线的场方向图与天线 1 作为接收天线时对各个方向辐射的响应是一致的，这也就是说，天线不管它是发射天线还是接收天线，它的物理性质一样。

### 3.2.2 天线有效面积和天线效率

从天线的功能来看，天线收集辐射的面积是天线一个重要物理参数。收集面积的直观大小称几何面积 $A_g$ ，例如一架抛物面天线它收集辐射的面积是 $\pi D^2/4$ ，其中 $D$ 是抛物面天线口径的直径。研究表明，由于各种原因射电望远镜真正收集到的辐射与几何面积收到的辐射是不同的，于是我们用有效面积来表征天线实际收集辐射的面积。假如射电望远镜观测一个流量密度为 $F_\nu$  ( $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ ) 的点源，在射电望远镜天线的输出端，输出功率为 $P_\nu$  ( $\text{W}$ )。这个输出功率应该与观测点源的流量密度和望远镜的观测带宽成正比，即

$$P_\nu = A_\nu^{\text{eff}} F_\nu^m \Delta \nu \quad (3.1)$$

其中 $A_\nu^{\text{eff}}$ 是一个比例常数，它表示射电天线在这个频率上，接收来自任何方向的辐射，把辐射变成输出功率的本领，量纲为 $\text{m}^2$ 。这个比例常数 $A_\nu^{\text{eff}}$ 叫做射电望远镜天线的有效面积 (effective area)。在上式中我们发现，在流量密度符号 $F_\nu^m$ 上多了一个上标 $m$ ，它表示具有偏振特性 $m$ 的射电望远镜天线接收到与这个偏振一致的辐射。 $\Delta \nu$ 为射电望远镜系统的工作带宽。

在前面我们讨论了一些偏振的最基本的概念。在这里，我们强调两点：(1) 一个射电波总可以分成两个互相垂直的偏振分量。对于完全非偏振波，有 $Q = U = V = 0$ ， $F_\nu^m = F_\nu^n = \frac{1}{2} F_\nu$ ，对于偏振波，一般来说，这两个偏振分量携带不同的能量，也无法把这两个分量简单地加起来，生成总的输出。(2) 射电望远镜的一个偏振接收系统只能接收与这个偏振相匹配的辐射。方程 3.1 的书写是严格的。

在方程 3.1 中，天线有效面积反映一个射电望远镜接收辐射的本领，它与射电望远镜的几何面积 $A_g$ 有密切的关系，但不完全相等。只有在特定的条件下，射电望远镜的有效面积才等于它的几何面积。除几何面积外，与天线有效面积有密切关系的还有馈源（在抛物面天线中，馈源一般为天线喇叭）。在讨论或实际制造射电天线时，总包括天线的反射面 (reflector) 和天线喇叭，那就是这个原因。射电望远镜在各个波段有不同的天线有效面积，但在一个窄的工作波段内，它的变化不大，可以认为是一个常数。在方程 3.1 中，可以把下标 $\nu$ 去掉，记为 $A_{\text{eff}}$ 。天线的有效面积与方向有关，则它应写为 $A_{\text{eff}}(l, m)$ ， $(l, m)$ 为天体的单位方向矢量在 $(x, y)$ 方向的方向余弦。原则上讲，只要知道一个校准源的天线输出，由于校准源的流量密度 $F_\nu^m$ 已知，则从方程 3.1 可以求得天线的有效面积。实际上，事情没有那么简单，在下面的章节中我们会对天线有效面积的具体测量作详细的描述。

为了表明天线几何面积和天线有效面积的关系，我们引进天线效率 (antenna efficiency)，有时也

称孔径效率（aperture efficiency），它定义为

$$\eta_A = \frac{A_{eff,0}}{A_g} \quad (3.2)$$

其中 $A_{eff,0}$  是天线有效面积的最大值。表 3.2 给出美国甚大阵（VLA）单个天线（25m）的有效面积。

表 3.2 美国甚大阵（VLA）单个天线（25m）的有效面积。

频率（MHz）	0.073-0.0745	0.3-0.34	1.24-1.70	4.5-5.0	8.1-8.8	14.6-15.3	22.0-24.0	40.0-50.0
近似波长(cm)	400	90	20	6	3.6	2	1.3	0.7
代号	4	P	L	C	X	U	K	Q
天线效率（%）	15	40	55	69	63	58	40	35

### 3.2.3 天线功率方向图和方向性

射电望远镜天线在各个方向有不同的接收（或发射）本领，描述天线这种接收本领与方向之间关系的物理参数是功率方向图。天线在 $(l, m)$  方向，单位立体角里接收的功率 $P_v(l, m)$ ，定义为天线的功率方向图。如果天线调准得很好，天线在光轴 $(l_0, m_0)$  方向的接收辐射的本领最大，若它在这个方向单位立体角里接收到的功率为 $P_v(l_0, m_0)$ ，天线归一化功率方向图（有时简称功率方向图）定义为

$$P_N(l, m) = \frac{P_v(l, m)}{P_v(l_0, m_0)}$$

如果我们观测的是一颗辐射强度为 $I_v$  的点源，有效面积为 $A_{eff}$  的天线在单位立体角里接收到的功率为

$$P_v(l, m) = A_{eff}(l, m) \cdot \int_{\Omega=1} I_v d\Omega \cdot \Delta v = A_{eff}(l, m) I_v \Delta v$$

天线在 $(l_0, m_0)$  方向的接收功率为

$$P_v(l_0, m_0) = A_{eff}(l_0, m_0) \cdot \int_{\Omega=1} I_v d\Omega \cdot \Delta v = A_{eff}(l_0, m_0) I_v \Delta v$$

则我们有

$$P_N(l, m) = \frac{A_{eff}(l, m) I_v \Delta v}{A_{eff,0} I_v \Delta v} = \frac{A_{eff}(l, m)}{A_{eff,0}} \quad (3.3)$$

或者写成

$$A_{eff}(l, m) = A_{eff,0} P_N(l, m)$$

即天线归一化功率方向图是天线任意 $(l, m)$  方向的有效面积与最大有效面积的比值，它同样表征望远镜天线接收辐射的本

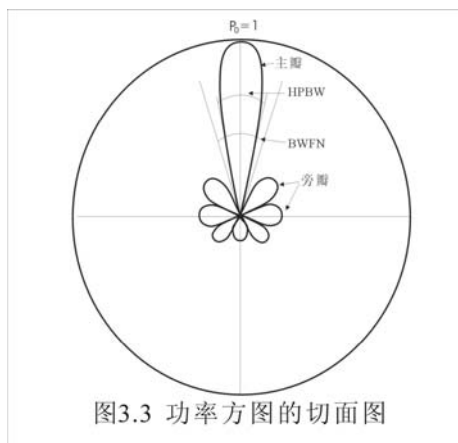


图3.3 功率方图的切面图

领与方向的关系。另外也可理解为，当射电望远镜观测一个四面八方都呈均匀辐射的背景时，射电望远镜对任意方向的响应与最大方向的比值。在方程 3.3 里，我们没有特指哪种类型的射电天线，它是一个普适的定义。在图 3.3 里，我们给出一架轴对称抛物面射电望远镜天线天线归一化功率方图的切面图，其中在光轴方向  $P(0) = 1$ 。天线功率方向图用极坐标归一化曲线表示，包括极大响应的叶瓣称作主瓣，其它为旁瓣。主瓣紧邻两个极小值之间且包含主瓣的角度定义为主瓣束宽或主瓣宽度（英文简称 BWFN, the beam width between first nulls）。主瓣强度 1/2 之内的角宽度称为半功率束宽(half power Beam Width, 简称为 HPBW)。对于抛物面天线，有  $HPBW \sim \lambda / D$ （下面将详细讨论这个问题）。通常用半功率束宽定义望远镜的分辨率。紧靠主瓣的那个旁瓣称作第一旁瓣，它的瓣极大值与主瓣极值之间的比值称做旁瓣电平。在功率方向图中，与主瓣位置相反的那些叶瓣叫做后瓣。

射电天文学家在讨论天线这种接收本领与方向之间的关系时，不仅用功率方向图来描述，有时也用场方向图来表征，按照功率和辐射场的关系，场方向图是功率方向图的平方根值。在工程设计里，天线方向图用它的分贝值来描述，即  $10\log P(l, m)$ ，如 -3dB 值之内主瓣所张的角度为半功率宽度。特别是讨论旁瓣电平时，用分贝值来描述对工程技术人员比较直观，第一旁瓣电平 -10dB 表示第一旁瓣极大值与主瓣极值之间的比值为 0.1 等等。

对于完全理想的射电望远镜天线，只有一个主瓣，没有旁瓣和后瓣，在主瓣里处处  $P(l, m) = 1$ 。实际上，功率方向图在某些立体角范围内值很大，接近 1 或等于 1，而某些方向却很小。为了描述这个特性，我们引入方向图立体角(pattern solid angle 或 beam solid angle)  $\Omega_A$ 、主波束立体角(main beam solid angle)  $\Omega_M$  和主波束效率  $\eta_M$ ，定义如下

$$\Omega_A = \iint_{4\pi} P_N(l, m) d\Omega \quad (3.4)$$

$$\Omega_M = \iint_{main\ beam} P_N(l, m) d\Omega \quad (3.5)$$

$$\eta_M = \Omega_M / \Omega_A \quad (3.6)$$

主波束效率  $\eta_M$  习惯上称波束效率，从上面的定义我们清楚，波束效率表明整个功率方向图立体角有多少是集中在主束之内，或者更明确地说，波束效率描述天线发射的总功率里有多少是集中在主束之内，当然应该是越高越好。在有些研究工作中，强调如何克服旁瓣对对天线成图的影响，这时会常用另一个天线参数杂散因子，它的定义为  $\eta_m = 1 - \eta_M$ 。值得注意的是，不管主波束效率或杂散因子，它们和主波束宽度都毫无关系。设想一个小天线，它可能有很高的主波束效率或很小的杂散因子，但它的主波束宽度却很大。

除了功率方向图以外，还有一个重要的参数是天线的方向性 (directivity)，它定义  $P(l, m)$  和

它的平均值之比，即

$$D(l, m) = \frac{P(l, m)}{\frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} P(l, m) d\Omega} = \frac{4\pi A_{\text{eff}}(l, m)}{\iint_{4\pi} A_{\text{eff}}(l, m) d\Omega} \quad (3.7)$$

如果把天线看作是一架发射天线，它实际上在各个方向都有发射，由于天线方向性的特征，它在某些方向大一些，而在某些方向小一些。方向性描述天线在某一方向单位立体角发射的功率与整个天线发出功率平均值的比。它的物理意义是很清楚的，它用来描述它在天线各个方向接收或发射辐射的能力。

在光轴方向  $P(0) = 1$ ，方向性最大值，其值为

$$D_0 = \frac{4\pi}{\iint_{4\pi} P(l, m) d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (3.8)$$

则功率方向图可以写为

$$P(l, m) = D(l, m) / D_0 \quad (3.9)$$

对于任何天线有

$$\iint_{4\pi} D(l, m) d\Omega = 4\pi \quad (3.10)$$

### 3.2.4 天线温度以及它和亮温度的关系

#### 天线温度定义

根据Nyquist定理，在热平衡条件下，一个电阻在单位频宽内提供的噪声功率  $P$  ( $\text{WHz}^{-1}$ )，只与其温度有关，而与电阻的阻值无关，也和频率无关，即有

$$P = kT \quad (3.11)$$

其中  $k$  为波尔兹曼常数 ( $\approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ WHz}^{-1} \text{ K}^{-1}$ )。这种噪声是电阻里的电子由于热运动引起的Johnson噪声，它与频率无关，是一种白噪声。天体的射电辐射是一种高斯噪声，不是一种平谱白噪声。但是相对于整个射电波段来说，射电望远镜工作带宽比较窄，它的谱有与电阻热噪声相似的特性，则我们可以用电阻的热噪声功率来表示天线的输出功率。

设有一个射电天线，它观测一个射电源时，天线接收到的功率为  $P$ ，定义该射电源的天线温度为

$$P = kT_A \Delta\nu \quad (3.12)$$

其中  $\Delta\nu$  为射电望远镜系统的带宽。从上式我们看到，天线温度仅仅是天线输出功率的另一种表示。正



如天体的亮温度与天体本身的温度无关一样，天线温度和天线的温度是风马牛不相及毫无关系。从上述式我们也发现，天线温度  $1^\circ\text{K}$ ，表明天线输出端的天线功率约为  $1.38 \times 10^{-23} \text{ WHz}^{-1}$ ，它与射电望远镜天线接收一个典型的射电源的辐射天线输出端的功率相近。这可能也是在射电天文里，常用天线温度的原由。

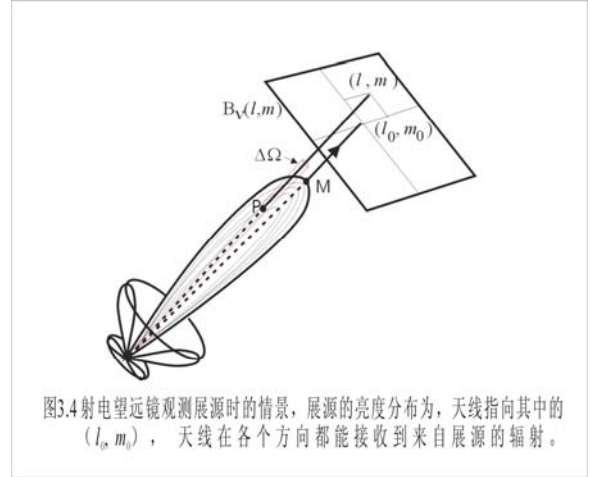
事实上，除了射电源的天线温度以外，即使射电望远镜指向没有射电源的天空背景，射电天线还有输出，这些功率输出也可以等效为温度，包括天空背景噪声温度  $T_{\text{bg}}$ （宇宙微波背景、银河系连续辐射背景等）、 $T_{\text{sky}}$ （大气微波辐射）、从射电望远镜旁瓣进入的地面辐射温度  $T_{\text{spill}}$ 、馈源和输入波导引起的  $T_{\text{loss}}$  等等，连同下一章要介绍的射电接收机噪声温度  $T_N$  统称为射电望远镜的系统噪声温度。即有

$$T_{\text{sys}} = T_N + T_{\text{bg}} + T_{\text{sky}} + T_{\text{spill}} + T_{\text{loss}} \quad (3.13)$$

射电望远镜系统噪声温度是一个很重要的参数，它描述包括射电天线在内的整个射电望远镜的工作性能，详细将在下面介绍。

### 射电源天线温度和亮温度关系

从上面的叙述我们知道，天线温度是射电望远镜观测射电源时天线输出功率等效一个电阻热噪声功率而确定的一种等效温度，而亮温度是该射电源发射强度（或亮度） $I_\nu$  的另一种表示形式，它们都用来描述一个射电源的射电辐射，在它们



之间应该有某种联系，本小节将讨论天线温度和亮温度之间的关系。

在上面定义天线有效面积时，我们没有指明射电望远镜观测的是点源还是面源。仔细考察方程 (3.1)，我们发现用该方程定义天线有效面积时，隐含射电天线观测的是一个点源。实际上，在很多情况下，射电望远镜观测的是面源（或称展源，extended source）。设所观测面源的射电亮度分布为  $B(l, m)$ （参看图 3.4），按定义我们有

$$B^\nu(l, m) = \Delta F^\nu / \Delta \Omega \quad (3.14)$$

其中  $\Delta \Omega$  表示在方向  $(l, m)$  的立体角元，而  $\Delta F^\nu$  是在这个立体角元里，与天线偏振匹配的射电流量密度元。考虑射电望远镜在  $(l, m)$  方向的天线有效面积为  $A_{\text{eff}}(l, m)$ ，则  $\Delta \Omega$  立体角元内射电辐射引起在天线输出端的输出功率为

$$\Delta P = A_{\text{eff}}(l, m) \Delta F^\nu \Delta \nu \quad (3.15)$$

结合方程 (3.14)，我们有

$$\Delta P = A_{eff}(l, m) B^m(l, m) \Delta \Omega \Delta \nu$$

考虑射电面源各个部分的辐射是互不相关的，射电望远镜在带宽  $\Delta \nu$  内接收到的总功率为

$$P = \int_{4\pi} A_{eff}(l, m) B^m(l, m) \Delta \nu d\Omega \quad (3.16)$$

正如上面谈到的那样，一般都可以认为天线的有效面积  $A_{eff}(l, m)$  和源的亮分布  $B^m(l, m)$ ，在带宽  $\Delta \nu$  内变化不大，则方程 (3.16) 可改写为

$$P = \Delta \nu \int_{4\pi} A_{eff}(l, m) B^m(l, m) d\Omega \quad (3.17)$$

结合方程 (3.12) 和 (3.17)，我们有

$$T_A = \frac{1}{k} \int_{4\pi} A_{eff}(l, m) B^m(l, m) d\Omega \quad (3.18)$$

考虑射电亮度和相应射电亮温度两者之间关系的 Rayleigh-Jean 定律  $B = 2kT_B / \lambda^2$ ，设我们观测的是一个非偏振的射电面源，其偏振亮度  $B^m = B/2$ ，则我们可把方程 (3.18) 改写成

$$T_A = \frac{1}{\lambda^2} \int_{4\pi} A_{eff}(l, m) T_B(l, m) d\Omega$$

把方程 (3.3) 代入，我们得到

$$T_A = \frac{A_{eff,0}}{\lambda^2} \int_{4\pi} P_N(l, m) T_B(l, m) d\Omega \quad (3.19)$$

上式中左边是我们测到的信号，右边  $A_{eff,0}$ 、 $P_N(l, m)$  和  $\lambda$  分别表示天线的最大有效面积、功率方向图和观测波长，而  $T_B(l, m)$  是射电源的亮度分布，上式建立起所要测射电源亮度分布、观测用射电天线和由它测到的信号之间的关系。上面我们讨论是一架无损耗的天线，实际上天线是有损耗的，这种损耗可以用天线辐射效率(radiation efficiency)来描述。如果把天线看成一架发射天线，天线辐射效率定义为

$$e_r = \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

其中  $P_{in}$  表示输入天线的功率，而  $P_{out}$  天线发射的功率。如果考虑天线的辐射效率，则方程 (3.19) 修正为

$$T_A = \frac{1}{e_r \lambda^2} \int_{4\pi} A_{eff}(l, m) T_B(l, m) d\Omega \quad (3.20)$$

由于精确的天线辐射效率值很难从实验上得到，这个我们对它不作详细讨论。从方程 (3.18) 或 (3.19) 看出，射电亮温度分布加权  $A_{eff} / \lambda^2$  后的全天空积分值等于射电望远镜的天线温度。由上面的方程我们可以推出下面一个很重要的关系式。设想一架射电天线的终端接有一个匹配负载电阻，并把这个系统放置在温度为  $T$  °K 黑体腔内。射电天线既可以接收来自黑体腔的辐射加热负载电阻，加热的负载电阻又可以通过天线发射，加热黑体腔。如图 3.5 所示，经过一段时间后射电望远镜天线接收和发射处于平衡，随即整个系统，包括射电天线、负载电阻和黑体腔处于热平衡状态，则有

$$T_A = T = T(l, m)$$

从上式我们发现，如果射电源是一个黑体源，或者说具有 Planck 函数谱的热源，当它空间尺度延展到足以覆盖整个天线束的时候，这时射电天线测得的天线温度才等于源的温度。于是方程 (3.19) 将简化为

$$\int_{4\pi} A_{eff}(l, m) d\Omega = \lambda^2 \quad (3.21)$$

把关系 (3.3) 代入上式，我们得到

$$A_{eff,0} = \lambda^2 / \int_{4\pi} P_N(l, m) d\Omega = \lambda^2 / \Omega_A \quad (3.22)$$

其中  $A_{eff,0}$  是天线的最大效率。考虑天线辐射效率后，方程 (3.21) 和 (3.22) 修正为

$$\int_{4\pi} A_{eff}(l, m) d\Omega = e_r \lambda^2$$

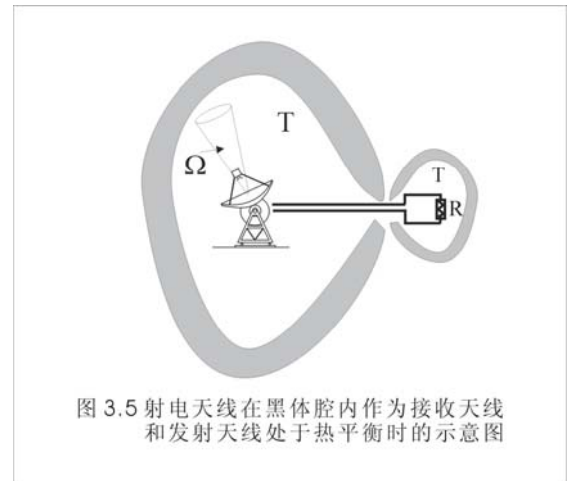
$$A_{eff,0} = e_r \lambda^2 / \int_{4\pi} P_N(l, m) d\Omega = e_r \lambda^2 / \Omega_A$$

从上面的方程我们发现，对于一架无损耗射电天线，它的有效面积理论上仅决定于该天线的功率方向图。

### 3.2.5 天线增益

#### 天线增益定义

在上面我们把天线作为一架接收辐射的射电天线来研究天线温度和射电源亮温度的关系，而在下面讨论天线增益时，为了便于理解我们反过来把天线看成一架发射雷达。设在天线的终端接一架发射机（或如图 3.5 所示接一个负载电阻），它输给天线的总的功



率为  $P_T$ ，对于一架无损耗雷达天线，它在  $(l, m)$  方向单位立体角发射的功率为

$$P(l, m) = G(l, m) \frac{P_T}{4\pi}$$

其中  $P_T/4\pi$  是天线向各个方向发射的平均值， $G(l, m)$  为天线在  $(l, m)$  方向的增益，它表示天线在这个方向比平均辐射大了多少倍，对于一架各向同性的发射天线有  $G(l, m) = 1$ 。上式对整个空间积分，我们有

$$\int_{4\pi} G(l, m) d\Omega = \frac{\int_{4\pi} P(l, m) d\Omega}{\frac{P_T}{4\pi}} = 4\pi \quad (3.23)$$

设  $G_0$  为天线增益的极大值，则归一化的天线增益为

$$G_N(l, m) = \frac{G(l, m)}{G_0}$$

它的物理意义是天线在任意方向发射功率与天线在某一方向最大的发射功率之比。从天线增益、方向性和功率方向图的物理意义，我们有

$$\frac{G(l, m)}{G_0} = \frac{D(l, m)}{D_0} = P_N(l, m) \quad (3.24)$$

很清楚这三个量它们都用来描述天线各个方向接收或发射辐射的能力。读者会有一个疑问，从物理上看天线方向性  $D(l, m)$  和天线增益  $G(l, m)$  有完全类似的定义，为什么用两个物理量来描述同一个天线参数？实际上天线方向性  $D(l, m)$  和天线增益  $G(l, m)$  是有差别的，天线方向性没有考虑天线本身输入功率转换为辐射功率的效率，强调的是天线发射的方向性；天线增益与天线方向性不同，着眼点是输入给天线的总功率它在各个方向发射的能力。从方程 (3.24) 可以看出天线增益和方向性与功率方向图只差一个常数。

### 天线增益和天线有效面积的关系

我们还是从图 3.5 来讨论这个关系，设在天线的终端接一个温度为  $T$  的负载电阻，它输给天线的总功率  $P_T = kT\Delta\nu$ ，如果传输过程中没有传输损耗，天线也没有辐射损耗，则天线在黑腔中辐射总功率为  $kT\Delta\nu$ 。黑体在  $\Omega$  立体角内吸收的功率为

$$\frac{P_T G(l, m)}{4\pi} \Omega = \frac{kT\Delta\nu G(l, m)}{4\pi} \Omega$$

天线在  $\Omega$  立体角内接收到的功率为

$$\frac{I_\nu}{2} \Omega \Delta \nu A_{eff} = \frac{kT \Delta \nu}{\lambda^2} \Omega A_{eff}$$

结合上面两个方程, 我们得到射电天线另一个重要关系式

$$G(l, m) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff}(l, m) \quad (3.25)$$

把上式代入方程 (3.19), 得到

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} G(l, m) T_B(l, m) d\Omega \quad (3.26)$$

于是, 对于确定工作波段的射电望远镜, 既可以用天线的有效面积来描述天线的工作特性, 也可以用天线增益来描述天线的工作特性, 它们是等价的。值得注意的是, 实际上我们平常讲的天线增益指的是有效面积最大方向的增益, 即

$$G_0 = \frac{4\pi A_0}{\lambda^2}$$

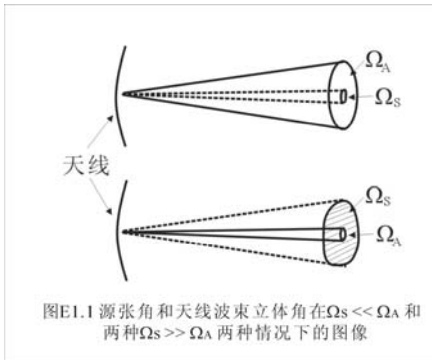
把方程 (3.2) 代入上式可改写为

$$G_0 = \eta_A \frac{4\pi A_g}{\lambda^2} = \eta_A \frac{4\pi^2 R_A^2}{\lambda^2} \quad (3.27)$$

其中 $A_g$ 为天线的几何面积,  $R_A$ 为天线半径。从上式我们发现, 天线增益与天线效率、天线口径和它的工作波长有关。对于一架确定的天线(天线口径和它的工作波长确定), 天线增益和天线效率仅差一个常数。于是, 在给出射电望远镜天线的物理参数时, 有的天文台给出的是天线增益, 有的给出天线效率。

**习题 3.1:** 方程 (3.19) 给出了天线温度和亮温度的关系, 在某些场合下, 给出它们的近似关系是很有用的。观测一个亮度分布为  $B_\nu(l, m)$  射电源, 射电望远镜天线接收到的流量密度的近似值为

$$F_s = \int_{\Omega_s} B_\nu(l, m) d\Omega \approx B_\nu \Omega_s \quad (E3.1-1)$$



其中 $\Omega_s$ 是射电源所张的立体角,  $B_\nu$ 为射电源亮度分布在源所张立体角内的平均值。考虑天线的最大有效面积为 $A_0$ , 射电源的辐射是完全非偏振辐射, 天线只收到这个辐射的一半, 利用方程 (E3.1-1) 并考虑射电辐射的 Rayleigh—Jean 近似关系, 则天线温度和亮温度之间有关系

$$T_A = \frac{F_s A_0}{2k} \approx \frac{B_\nu \Omega_s A_0}{2k} = \frac{2kT_B}{\lambda^2} \frac{\Omega_s A_0}{2k} = T_B \Omega_s \frac{A_0}{\lambda^2} \quad (E3.1-2)$$

我们也可以把方程（3.22）写成下面的近似式

$$\Omega_A = \frac{\lambda^2}{A_0} = \frac{\lambda^2}{\frac{\pi D^2}{4} \eta_0} = \frac{\lambda^2}{D^2} \frac{4}{\pi \eta_0} \approx \theta_A^2 \frac{4}{\pi \eta_0} \approx \theta_A^2 \approx \theta_B^2 \quad (\text{E3.1-3})$$

其中  $\theta_B$  是天线的半功率束宽。结合上面两式我们有

$$T_A = T_B \frac{\Omega_S}{\Omega_A} \quad (\text{E3.1-4})$$

其中  $\Omega_A$  是功率方向图立体角。看起来上面的近似式要比方程（3.19）意义要明确得多。

对于一个源立体角远小于功率方向图立体角（参看图），即  $\Omega_s \ll \Omega_A$  时，我们有

$$T_A = T_B \frac{\Omega_S}{\Omega_B} \quad (\text{E3.1-5})$$

$\Omega_B \approx \Omega_A$  为天线束宽。同时在这种情况下，方程(3.26)简化为

$$T_A = \frac{G_0}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(l, m) d\Omega = \frac{G_0}{4\pi} T_D \Omega_s \quad (\text{E3.1-6})$$

其中  $T_D$  为盘温度（disk temperture）,它定义为

$$T_D = \frac{1}{\Omega_S} \int_{4\pi} T_B(l, m) d\Omega$$

结合方程（3.4）、（3.24）和（3.27），我们有

$$\Omega_A = \iint_{4\pi} P(l, m) d\Omega = \frac{\lambda^2}{A_0} = \frac{4\pi}{G_0} \quad (\text{E3.1-7})$$

则方程（E3.1-6）可改写为

$$T_A = T_D \frac{\Omega_S}{\Omega_A} \quad (\text{E3.1-8})$$

它非常类似方程（E3.1-5）。在源立体角远小于功率方向图立体角的情况下，方程（2.19）也可简化为

$$T_A \approx \frac{A_0}{k} \int_{4\pi} B(l, m) d\Omega = \frac{A_0 F_s}{2k} \quad (\text{E3.1-9})$$

而对于一个源立体角远大于功率方向图立体角，即  $\Omega_s \gg \Omega_A$  时，这时观测到源的立体角简单等于功率方向图立体角，

则有

$$T_A = T_B \quad (\text{E3.1-10})$$

### 3.2.6 场方向图和孔径场分布

在上面，我们给出了射电天线有效面积、方向图、天线温度和天线增益的定义和它们之间的关系。注意它们都和射电天线功率方向图有关。细心的读者肯定会问：是什么因素决定了天线功率方向图？为了回答这个问题，我们还是利用天线的互易定律，用一架发射天线代替接收天线来讨论这个问题，并引入两个新的概念，场方向图（field pattern）和孔径场分布（或称孔径照明分布，grading）。

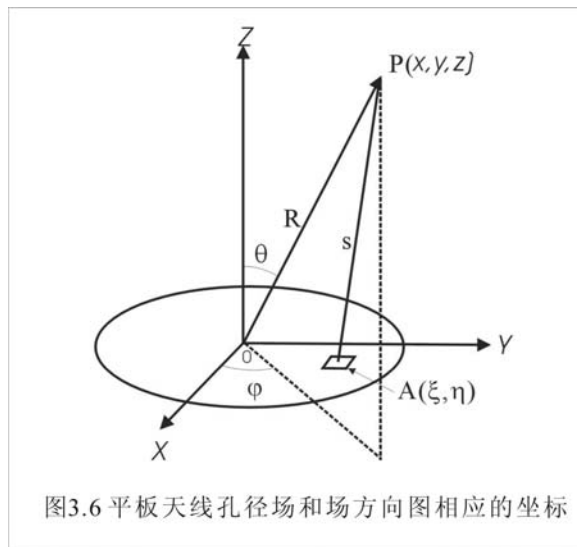


图3.6 平板天线孔径场和场方向图相应的坐标

回忆在电动力学里求偶极天线在远处辐射场的方法是很有益的，在那里，我们首先写出偶极天线里的电流，然后根据偶极天线的边界条件，解 Maxwell 方程得到离偶极天线很远地方的场分布。可以这样说，偶极天线里的电流分布称为“孔径场分布”，而偶极天线远场分布叫场方向图，其中孔径场分布和场方向图都是复数，包含振幅和相位。原则上，我们可以用上面的方法解出所有类型天线的孔径场分布和场方向图。但不幸得很，除了偶极天线和喇叭天线外，目前还没有可能给出其它类型天线孔径场分布和场方向图的严格解。我们只能在某些近似下得到一些近似解。

一架发射天线的辐射场在远处（ $R \gg a$ ，其中  $R$  是离天线的距离， $a$  是天线口径的半径）的分布称为场方向图；而该架发射天线在天线口径上的电场（或电流）分布称孔径场分布。它和场方向图都是复数，即包含振幅和相位。我们在附录里已详细地给出任意形状  $\zeta = f(\xi, \eta)$  天线孔径场分布和场方向图的关系[参看方程(E3.2-7)]

$$E(l, m) = \iint j(\xi, \eta) e^{ik\zeta} e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \quad (3.28)$$

其中  $E(l, m)$  是场方向图， $j(\xi, \eta)$  是归一化的孔径场分布（照明函数）， $(\xi, \eta, \zeta)$  是天线面板上的任意一点， $(x, y, z)$  是远场一点，它在  $(x, y)$  方向余弦为  $(l, m)$ 。从方程 2.27 我们发现，对于一架任意形状的天线，即使是一架抛物面天线，这个面积分也是很困难的，只有在很简单的情况下才有解析解。若设  $\zeta=0$ ，天线简化为在天线口径平面上的圆形平板天线，图 3.6 给出平板天线孔径场和场方向图相应的坐标，详细的可参看习题 3.2 的图 E3.2.1。对于这样一种简化的圆形平板天线，天线场方向图和天线孔径场分布的关系简化为

$$E(l, m) = \iint j(\xi, \eta) e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \quad (3.29)$$

从上面方程我们看到，平板天线孔径场分布和场方向图是 Fourier 变换对，

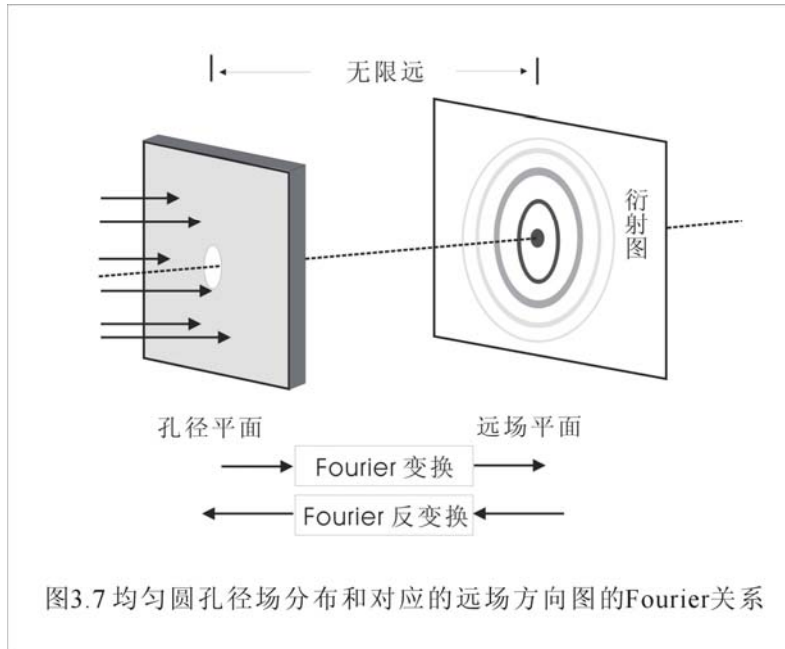
$$E(l, m) \Leftrightarrow j(\xi, \eta) \quad (3.30)$$

则功率方向图为

$$P(l, m) = E(l, m) E^*(l, m) \quad (3.31)$$

若这架平面的圆形平板天线有均匀的孔径场分布，即  $j(\xi, \eta) = 1$ ，上式进一步简化为

$$E(l, m) = \iint e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \quad (3.32)$$



在习题 3.2 里我们已给出均匀孔径场分布得到的场方向图和功率方向图。图 3.7 形象地给出均匀圆孔径场分布的场方向图，及它们的 Fourier 变换和反变换关系。

从上面的分析可以得到如下几点结论：(1) 如果能知道射电望远镜天线的孔径场分布  $j(\xi, \eta)$ ，原则上，我们就可以从方程 (3.28) 得到这个天线的功率方向图。可以假定各种各样的孔径场分布或照明函数，Fourier 变换求得对应的

功率方向图。习题 3.3 的图 E3.3.2 给出各种圆孔径场分布和对应的场方向图，以及场方向图随孔径分布函数变化的趋势。为了获得射电望远镜天线所要求的增益、分辨率和旁瓣电平，我们只要改变孔径分布函数就可以了。(2) 在获得关系式 (3.28) 时，着手于惠更斯原理，于是，把孔径场分布称为孔径照明分布，以及馈源称做照明器是颇有道理。射电望远镜的照明器，如馈源喇叭或偶极振子，它们发出的电磁辐射经射电望远镜主反射面反射在孔径平面上。处于远场的观测者来看，孔径场分布是由天线（包括主反射面、副面和馈源）的结构决定的，其中馈源起着决定性作用。归根结底，为了获得射电望远镜要求的增益、分辨率和旁瓣电平，我们要有天线的正确设计。(3) 从图 7 我们发现，均匀实圆孔径均匀的孔径场分布在远场平面形成的是一幅衍射图，很显然它是因为平面电磁波经过圆孔，由于电磁波本身的衍射性质引起的。射电望远镜接收来自遥远天体的射电辐射，在孔径平面上电场总是



均匀的，即有相同的电场振幅和相位。辐射信号经主反射面反射后聚集在焦平面上，如远场方向图一样，在焦平面上也是一幅衍射图。在光学望远镜里这幅衍射图称作点扩散函数（英文缩写为 PSF, point spread function），在射电天文里对它没有给一个特别的名词，我们不妨叫它“射电点扩散函数”，射电点扩散函数的半功率束宽就是功率方向图的半功率束宽，射电爱里斑的直径就是第一零点束宽。一架口径为  $D = 25$  米、焦比  $F = 0.3$  和工作波长为  $\lambda = 10$  厘米（S-band）的抛物面天线，在主焦平面的射电爱里斑有

$$2r_A = 1.22 \frac{\lambda}{D} f = 1.22 \lambda F = 3.66 \text{ cm} \quad (3.33)$$

其中  $f$  为天线的焦距。射电爱里斑如此之大，以至在射电望远镜的焦平面不可能像光学望远镜一样作成图观测，只可能做单波束（single beam）或多波束（multi-beam）观测（有关详细内容在下面介绍）。

（4）由于在孔径平面的射电辐射总是均匀的，因此在没有什么特殊要求的情况下，射电望远镜天线设计时要求整个孔径平面处处有相同的振幅和相位，如果不同，可能是由于天线的主反射面偏离了原设计的面形或其他原因。于是反过来，测量孔径平面的振幅和相位就可以推算天线的主反射面或其他误差，这就是下面将要介绍的天线面板调准全息技术的原理。

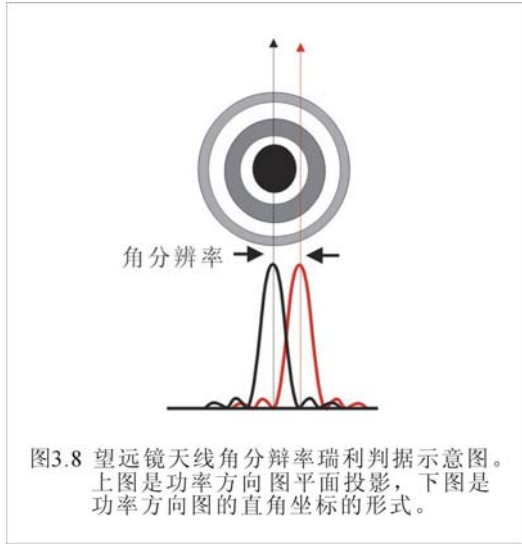
### 3.2.7 天线极化效率

我们在第一章讨论电磁波偏振特性时曾经指出，电磁波有完全偏振、非偏振和部分偏振电磁波，其中偏振电磁波按其电矢量端点的轨迹可以分线偏振、圆偏振和椭圆偏振，在天线工程里，喜欢称它们为线极化、圆极化和椭圆极化电磁波。当天线接收一个完全偏振电磁辐射时，天线实际接收该电磁辐射的能量与天线可能接收的最大辐射能的比值定义为偏振效率或极化效率（polarization efficiency）。极化效率表征一个天线对偏振辐射接收（或发射）的能力。如果把天线看成一架发射天线，天线对某个偏振辐射极化效率高说明天线对这个偏振辐射发射能力强，反之极化效率低，天线有较大的极化损失。极化效率低原因是很复杂的，其中一个原因是这个天线发射了与要求发射偏振分量不一致的辐射。我们把垂直于要求偏振辐射矢量的那部分偏振辐射称为交差极化分量，当然天线交差极化越小越好。

### 3.2.8 天线角分辨率和天线灵敏度（DPFU）

射电望远镜能区分两个射电点源所对应天空最小的张角称为角分辨率，有时叫空间分辨率。对于一架光学望远镜决定它分辨率的主要因素是大气的视宁度（seeing），而射电望远镜决定它分辨率的

主要因素是电磁辐射本身的衍射特性。



正如上面所讲的，射电望远镜里它的衍射图是功率方向图，当射电天线观测一颗点源时，它的响应不是一个 $\delta$ 函数，而是像衍射图一样的功率方向图，有主瓣、旁瓣和后瓣。同光学望远镜定义（瑞利判据）角分辨率一样，射电天线对一颗射电源响应的主瓣极大值处刚好与另一颗射电源紧邻主瓣的第一极小值重合，即值为主瓣宽度（BWFN）的一半，我们认为这两颗恒星刚好能分辨（如图 3.8 所示），这是射电望远镜天线角分辨率的瑞利判据。由于它的值与半功率束宽

（HPBW）接近，在射电天文里般都用半功率束宽来描述射电望远镜天线的角分辨率。不同射电望远镜天线乃至由许多天线组成的射电干涉仪有不同的功率方向图，也有不同的角分辨率，我们在下面介绍各种射电望远镜天线时将详细给出它们的功率方向图以及相应的角分辨率。

一架天线孔径面积为  $A_g$ ，效率为  $\eta_A$  的天线观测流量密度为  $F_s$  的射电源时，它接收到的总功率为  $\eta_A A_g F_s \Delta\nu / 2$ ，其中  $\Delta\nu$  为接收带宽，而因子  $1/2$  是天线只接收其中一个偏振射电辐射的缘故。这架天线观测该射电源得到相应的天线温度为  $T_A$ ，按照天线温度的定义我们有

$$kT_A \Delta\nu = \frac{1}{2} \eta_A A_g F_s \Delta\nu \quad \text{或者} \quad \frac{T_A}{F_s} = \frac{\eta_A A_g}{2k} \quad (3.34)$$

按照天线效率与天线增益的关系（参看方程 3.27），我们有

$$\frac{T_A}{F_s} = \frac{\lambda^2}{8\pi k} G_0 \quad (3.35)$$

上式的物理意义是一架天线对单位流量的射电源观测到源的天线温度（Degree Per Flux Unit，简称DPFU），有时称天线灵敏度，注意不要把它与后一章要介绍的射电望远镜灵敏度混淆起来。显然天线灵敏度是天线在工作波长为  $\lambda$  时天线（最大）增益的另一种表示。

### 3.2.9 指向精度和跟踪精度

天线的很重要的一个功能是随时能正确地指向天体，另外为了对一些弱源进行观测，天线能与天球同步地转动连续地跟踪源，描述天线这两个物理性质的参数是指向精度和跟踪精度。为了有很高

的角分辨率和灵敏度，一般射电望远镜总是做得很大，结果其重量也很重。如一架 25 米口径的小射电望远镜天线约有 300 吨，世界上最大可驱动单天线望远镜，如口径为 100 米的美国 Green Bank 射电望远镜（英文简称 GBT）重达 7300 吨，如此之重，要有很高的指向精度和跟踪精度是一项具有挑战性的技术。

指向精度是指望远镜的实际指向和预期指向之间的差。尽管在望远镜设计过程中，对机械误差、重力变形、温度效应等作了严格地考虑，安装以后对机械装置都作了仔细的校准，但指向仍有误差。这种误差在天球的各种位置都不尽相同。各个位置误差的均方根值（rms）定义为望远镜的指向精度（rms）。对某一个确定的天球位置，当望远镜每次指向这个位置时，由于各种因素的影响，每次都会有不同的误差，多次重复测量得到的位置误差的均方根值称为重复指向精度。研究发现，天线的指向误差是由系统误差和随机误差两部分组成的，系统误差是由一些固定的因素引起且按确定规律变化的误差，如蒙气差、轴系误差、蜗轮误差等引起的指向误差，它们可以通过观测，建立起指向系统误差的模型（下面将详细介绍）。用系统误差模型进行系统改正以后得到残差只包含随机指向误差部分，它称为经系统改正以后的指向精度（rms）。如果没有特别说明，我们讲的天线指向精度就是经系统改正以后的指向精度。一般为使指向误差引起的增益损失小于 3%，天线的指向精度应小于  $HPBW/10$ ，其中  $HPBW$  为半功率波束宽度。对于一个抛物面天线，它的半功率波束宽度约为  $\lambda/D$ ，则抛物面天线指向应小于  $0.1\lambda/D$ 。一架口径为 100 米的抛物面天线，它工作波长为 1 厘米，则要求指向精度要好于  $2''$ 。指向精度都与观测频率有关，因此在给出指向精度时应注明在什么工作频率下的指向精度。

由于天球的周日运动，射电望远镜天线的驱动系统将使它与天体的周日运动同步，使预定的观测目标一直保持在指向精度以内。与上一节讨论一样，现代射电望远镜的跟踪也可以作系统改正（如蒙气差、弯沉差、轴系差、蜗轮差等），这个称天线系统误差改正后的跟踪误差。由于现代射电望远镜都是地平式结构，跟踪天体的周日运动不可能用机械的方法来实现，它由计算机控制把所要观测天体的赤道坐标转换为地平坐标，作系统误差改正后，向天线发出指令使它指向观测位置。于是射电望远镜的跟踪误差应该与指向精度有同样的值。

在下面具体介绍各种天线时，我们将介绍天线指向校准和天线指向精度测量的方法。

---

**习题 3.2** 对于想了解更深内容的读者，认真读读这个习题可能是有帮助的。在这个习题里，我们比较详细地给出远场天线方向图和天线表面电场分布的关系[3.28]。在讨论之前，我们首先选取如图 E3.2-1 的坐标系，有一架半径为  $a$  的天线，孔径平面设在  $(\xi, \eta)$  平面上，天线主反射上的任意一点 A 的坐标为  $(\xi, \eta, \zeta)$ ，远场场点 P 的坐标为  $(x, y,$

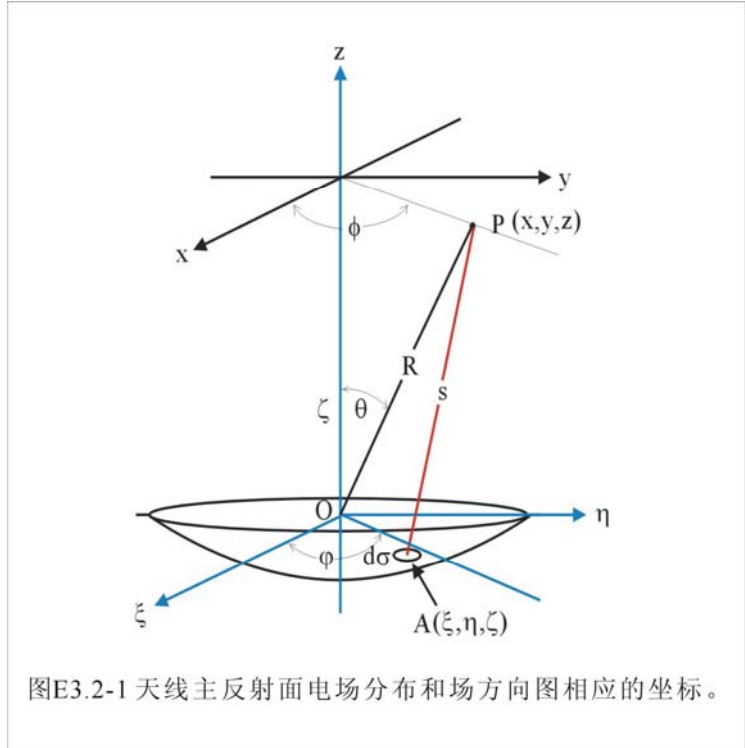
$z$ )，整个坐标系的原点设在孔径平面的中心  $O$ 。 $OP$  的距离为  $R$ ，天线表面任一点  $A$  到场点  $P$  的距离为  $s$ ，因为我们考虑是远场，则有  $s \gg a$  和  $R \gg a$ 。

按照惠更斯 (Huygens) 原理，孔径平面上的电场源都向空间发射球面子波。天线主反射面上的任意一点  $A$  有表面电场密度  $E_o \varepsilon(\xi, \eta)$  (也可以用电流密度来作计算，结果只差一个常数)，其中  $\varepsilon(\xi, \eta)$  是归一化的电场密度， $E_o$  是最大电场。天线表面  $A$  点为中心的面元  $d\sigma$  对  $P$  点的电场贡献为

$$E_A = E_o \varepsilon(\xi, \eta) e^{iks} d\sigma \quad (\text{E3.2-1})$$

其中  $k$  是通用符号波数  $k = 2\pi/\lambda$ ， $C$  为常数。当  $R \gg a$  和  $s \gg a$  时，我们有

$$s^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2$$



图E3.2-1 天线主反射面电场分布和场方向图相应的坐标。

$$s = R - \frac{x\xi + y\eta - z\zeta}{R} \quad (\text{E3.2-2})$$

若使把远场的坐标  $(x, y, z)$  用球坐标  $(\theta, \phi, R)$  表示，远场  $P$  点的位置可以表示为

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi = Rl \\ y &= R \sin \theta \sin \phi = Rm \\ z &= R \cos \theta = Rn \end{aligned} \quad (\text{E3.2-3})$$

其中  $l, m, n$  为  $P$  位置的方向余弦，有  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。则方程 (E3.2-2) 可改写为

$$s = R - (\xi l + \eta m - \zeta \cos \theta) \quad (\text{E3.2-4})$$

若  $\xi, \eta, \zeta$  以辐射波长为单位，上式代入方程 (E2-1)，考虑  $d\sigma = d\xi d\eta$ ，并对时间积分有

$$E_A = E_o e^{ikR} \varepsilon(\xi, \eta) e^{-ik(\xi l + \eta m - \zeta \cos \theta)} d\xi d\eta$$

其中  $C_0 = E_o e^{ikR}$  为一常数，指数项为天线  $A(\xi, \eta, \zeta)$  点的辐射在  $(l, m)$  方向的相位

$$PH = k(\xi l + \eta m - \zeta \cos \theta) \quad (\text{E3.2-5})$$

对整个孔径积分，我们有

$$\begin{aligned}
E(l, m) &= C_0 \iint \varepsilon(\xi, \eta) e^{ik\xi \cos \theta} e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \\
&= C_0 \iint \varepsilon(\xi, \eta) e^{ik\xi} e^{-ik\xi(1-\cos \theta)} e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{E3.2-6}$$

$E(l, m)$  是天线远场空间分布，称场方向图，其中常数  $C_0$  的取值以保证  $|E(l, m)|_{\max} = 1$ 。从上面方程我们看到，当天线的半功率束宽（HPBW）很小，即  $\theta \ll 1$ ，方程（E3.2-6）简化为

$$E(l, m) = C_0 \iint \varepsilon(\xi, \eta) e^{ik\xi} e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \tag{E3.2-7}$$

从上式我们发现天线场方向图  $E(l, m)$  和  $\varepsilon(\xi, \eta) e^{ik\xi}$  是 Fourier 变换对。

下面我们计算一些简单情况下天线孔径场分布和场方向图是 Fourier 变换得到的结论。为了讨论方便我们进一步简化方程（E3.2-7），忽略  $e^{ik\xi}$  项，即把天线看成平面孔径。由于我们考虑的是远场，这个近似非常接近实际的情况。方程（E3.2-7）简化为

$$E(l, m) = C_0 \iint \varepsilon(x, h) e^{-ik(lx + mh)} dx dh \tag{E3.2-8}$$

假如是一个均匀的矩形孔径场，孔径场分布值

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq a \quad |\eta| \leq b \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \tag{E3.2-9}$$

方程（E3.2-8）可以简化为

$$E(l, m) = C_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta \tag{E3.2-10}$$

考虑归一化因子  $C_0 = 4ab$ ，上式积分，可得场方向图

$$E_N(l, m) = \frac{\sin(2\pi la)}{2\pi la} \frac{\sin(2\pi mb)}{2\pi mb} \tag{E3.2-11}$$

则功率方向图为

$$P_N(l, m) = \left[ \frac{\sin(2\pi la)}{2\pi la} \frac{\sin(2\pi mb)}{2\pi mb} \right]^2 \tag{E3.2-12}$$

### §3.3 单天线及它们的基本特性

在上一节，我们给出了描述一般射电天线的物理参数和它们之间的关系，它们既适用于描述由单个天线组成的射电望远镜性质也能用来描述由多个天线组成的射电干涉仪性质，本节在此基础上具体地给出各类单天线和它们的基本物理性质。由于单天线射电望远镜仍是当前射电天文观测的重要工具，而它又干涉仪阵的基本组元，本节我们将对它们作详细介绍，把由多个天线组成的干涉仪阵的性质放到第十章去讨论。

正如上面我们提到的那样，从拦截射电辐射流的形式来区分，有线形天线和面形天线。在射电天文，我们经常使用的线形天线是偶极天线（dipole antenna），它们主要用于长波的接收，例如工作波长大于 1 米（近似地划分）的长波射电天文（radio astronomy at long wavelength）偶极天线。当波长接近或小于 1 米其基本上都用面形天线，这是因为面形天线的增益以  $\sim \nu^2$  因子增加。面形天线由接收面的形状来区分，如喇叭天线、抛物面天线、球面天线、柱面天线等等，其中喇叭天线在许多场合用于天线系统的馈源，而目前世界上主要使用的是抛物面和球面射电望远镜，则在面形天线中主要介绍这两类望远镜的结构、特性、以及有关校准的问题，其中一些方法和结果可以直接应用或稍作修改，就可以应用到其它类型的射电望远镜天线。

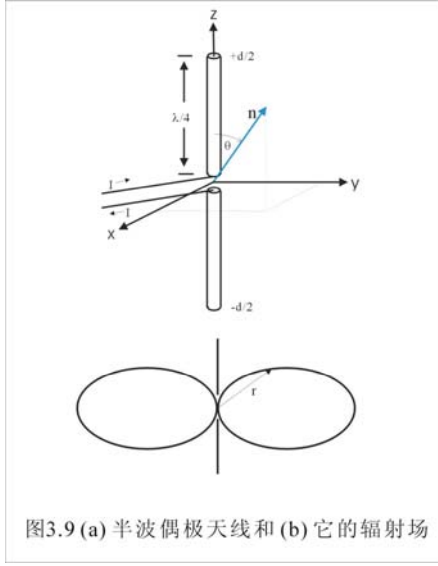
#### 3.3.1 偶极天线

在一般经典电磁辐射的教科书里（如《Classical Electromagnetic Radiation》，Marion, J. B. & Heald, M.K.）都比较详细地介绍了偶极天线的辐射，在这里不作详细介绍，只给出一些相关的结果，着重讨论射电天文感兴趣的问题。

图 3.9 (a) 给出中心驱动的半波偶极天线，天线由两小段组成，各长为  $d/2$ ， $d = \lambda/2$ ，电流从中间的两端输入，其中电流的值为

$$I = I_0 e^{-i\omega t}$$

则天线在  $\mathbf{n}$  方向每单位立体角发射的平均功率为



$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\pi I_0^2}{8c} \sin^2 \theta = P_0 \sin^2 \theta \quad (3.36)$$

这是一种轴对称分布发射场，图 3.9 (b)给出半波偶极天线发射功率的空间分布图。对整个空间立体角积分可以获得半波偶极天线的发射总功率为

$$P_T = \int_{4\pi} P(\theta, \phi) d\Omega = \frac{8\pi}{3} P_0 \quad (3.37)$$

按照上一节天线增益的定义，半波偶极天线的增益为

$$G(\theta) = \frac{P(\theta, \phi)}{\frac{P_T}{4\pi}} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (3.38)$$

按照方程 (3.25) 天线增益和天线有效面积的关系，半波偶极天线的有效面积为

$$A_{eff}(\theta) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta) = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (3.39)$$

方程 (3.36) 和 (3.37) 结合上一节天线物理参数的定义，我们可以推导出半波偶极天线如下重要的物理参数：

$$\text{最大有效面积} \quad A_0 = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \approx 0.12\lambda^2$$

$$\text{归一化功率方向图} \quad P(\theta) = \frac{A_{eff}}{A_0} = \sin^2 \theta$$

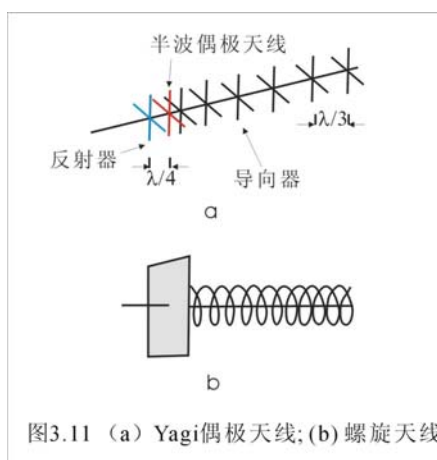
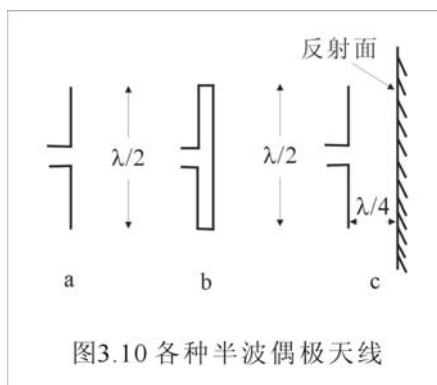
$$\text{天线方向图立体角} \quad \Omega_A = \frac{\lambda^2}{A_0} = \frac{8\pi}{3} \quad (3.40)$$

$$\text{天线温度} \quad T_A = \frac{A_0 F_s}{2k} = \frac{3\lambda^2}{16k} F_s \quad (3.41)$$

$$\text{天线半功率全宽} \quad HPFW = \frac{\pi}{2} \quad (3.42)$$

分析上面列出的重要结果我们可以发现：半波偶极天线 HPFW 很宽，而且与波长无关，抛物面天线主焦式射电望远镜当工作在长厘米波段时，半波偶极天线作为馈源能比较均匀地照明抛物主反射面，由于馈源喇叭也不可能做得太大，于是在  $P$  波段 ( $\lambda = 90 \text{ cm}$ ) 和  $L$  波段 ( $\lambda = 20 \text{ cm}$ ) 有些天线仍用偶极天线为馈源；另外，半波偶极天线的最大有效面积和天线温度与工作波长的平方成正比，长波越长有效面积越大，天线温度越高，制造也很简单，这就是为什么在长波都采用偶极天线的原因。20 MHz

( $\lambda=1.5$  米) 半波偶极天线有效面积约 0.27 平方米, 若最小可检测的天线温度为 0.01K, 则偶极天线的



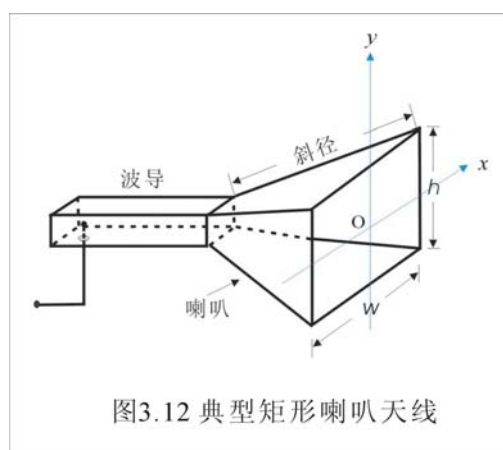
的灵敏度约为 33 Jy。由于偶极天线制造简单造价便宜, 可以制成由几千乃至上万个偶极天线组成的长波偶极天线阵, 灵敏度可以很高。

半波偶极天线的偏振特征是很清楚的, 它只能接收 (或发射) 平行于天线方向的偏振辐射, 则对于功率为  $P$  的完全非偏振辐射, 偶极天线只能接收到  $P/2$  的辐射。为了接收另外一个垂直方向的偏振辐射或圆偏振辐射, 可以在垂直方向再安装一个偶极天线。

图 3.10 给出各种半波偶极天线, 包括线偶极天线、折合偶极天线和带有反射器的偶极天线。图 3.11 (a) 所示的是八木 (也称 Yagi) 偶极天线, 它由两个相互垂直的偶极子组成, 因此它可以接收相互垂直的两个偏振的辐射。在它后面有一个反射器, 前面有一个导向器, 其中导向器由多个类似十字形偶极天线的十字金属架组成。反射器是为了削减后瓣, 导向器是为了提高 Yagi 偶极天线的方向性和增益。图 3.11 (b) 所示的是螺旋天线。

### 3.3.2 喇叭天线

喇叭天线是孔径类天线中最简单的一种天线, 也是理论上研究得最清楚最透彻并与实际观测符合得最好的天线。正由于这个特性, 喇叭天线在射电天文作出过很大的贡献。在 1965 年, Penzias 和 Wilson 两位美国射电天文学家利用贝尔电话实验室的喇叭天线发现了微波宇宙背景辐射, 这是继 Hubble 宇宙膨胀以后现代天文学中最重要的发现, 它是宇宙学的里程碑, 使宇宙学从无休止的理论探索跳跃到可以实验观测, 成为现代天文学的重要分支。鉴于微波宇宙背景辐射重大发现, Penzias 和 Wilson 在 1978 年获得诺贝尔物理奖, 他们的成功一部分应记在喇叭天线上。由于喇叭天线的有效面积和天线发现图理论上可以计算的很准确, 它是对射电天文校准源作绝对流量测量最好的射电望远镜天线。今天喇叭天线作为天线系统中的馈源





应用得非常广泛，与偶极天线馈源相比，它使天线有更大的增益，另外它也是决定天线照明函数的关键设备。

图 3.12 给出一个典型矩形喇叭天线的结构，它由单极线天线、波导和喇叭组成，波导起微波传输线的作用，如果一端开放，电磁波会从这个口子发射出去。为了提高发射增益，必须加大这个开放的发射孔径，加大波导口不是办法，它不仅会使干扰增大，而且也不经济。一个好办法是波导口慢慢地扩大形成喇叭，它既能到达增加天线增益，又能起防止干扰进入波导的作用。为了获得给定喇叭孔径有最大的增益，喇叭张大的锥度（taper）要很小，也就是说喇叭的斜径要足够长以至从波导发出的电磁波在喇叭口上有相同的相位。

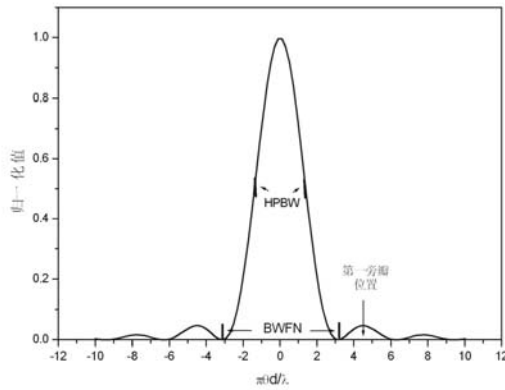


图3.13 喇叭天线方向的功率方向图

一个实际的矩形喇叭天线斜径不可能做得很长，从波导发射的一束球面波，到达喇叭孔径中心和喇叭边缘是不同的，在  $y$ （电子学中称  $E$  平面）方向可以近似地看成是均匀的，但在  $x$ （电子学中称  $H$  平面）方向则不然，一般可作余弦分布近似。研究表明，当喇叭孔径比波长大得多时，喇叭口面上得孔径场分布可以近似为均匀场。参考上一节习题 3.2 给出均匀矩形孔径场的场方向图方程（E3.2-12），在  $E$  平面（ $\phi = \pi/2$ ）和  $H$  平面（ $\phi = 0$ ）分别电场为

$$E_E = \frac{\sin(\pi w / \lambda)}{\pi w / \lambda} = \frac{\sin(\pi \sin \theta w / \lambda)}{\pi \sin \theta w / \lambda} \quad (3.43)$$

$$E_H = \frac{\sin(\pi h / \lambda)}{\pi h / \lambda} = \frac{\sin(\pi \sin \theta h / \lambda)}{\pi \sin \theta h / \lambda}$$

上式中  $w$  是矩形喇叭天线  $H$  平面的实际长度， $h$  是  $E$  平面的实际长度。若  $\theta$  很小，矩形喇叭天线在这两个平面的功率方向图为

$$P_E(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \theta w / \lambda)}{\pi \theta w / \lambda} \right]^2 \quad (3.44)$$

$$P_H(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \theta h / \lambda)}{\pi \theta h / \lambda} \right]^2$$

图 3.13 给出喇叭天线的功率方向图。正弦的第一零点发生  $\pm \pi$  的地方，则喇叭天线的主瓣宽度为

$$BWFN = \frac{2\lambda}{d} \quad (3.45)$$

上式中的  $d$  既可以用  $w$  代入也可以用  $h$  代入。由  $P_E(\theta) = 1/2$  可以解算得到喇叭天线半功率宽度为

$$HPBW = 0.8858 \frac{\lambda}{d} \quad (3.46)$$

第一旁瓣位于

$$\frac{4.5 \lambda}{\pi d} \quad (3.47)$$

旁瓣的值为 0.0472，对应分贝值为 13.3，旁瓣的水平是很高的。

在整个空间立体角里对功率方向图积分可以得到方向图立体角 $\Omega_A$

$$\Omega_A = \frac{\lambda^2}{wh} \quad (3.48)$$

则最大增益为 (参看方程 E3.1-7)

$$G_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A} = \frac{4\pi}{\lambda^2} wh = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eff,0} \quad (3.49)$$

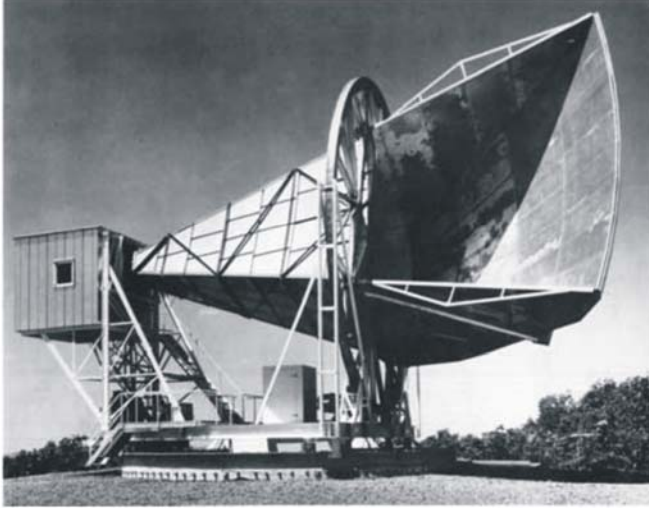


图3.14 位于美国新泽西州Holmdel镇贝尔电话实验的喇叭天线，它在美国国家宇航局（NASA）被动通讯卫星项目支持下在1959年建成。喇叭天线孔径约6.1米，长度约为15米，天线水平装置，喇叭天线支架底部安装在轮轨上，它整个能在水平位置上自由转动，天线的俯仰是通过直径近9米的高度轮转动来实现的。图中左边的小屋里的接收机直接地接在喇叭天线上，减少了传输线引起的噪声。

从上面的分析我们知道，矩形喇叭天线的优点是制造简单、增益大、工作带宽宽，可以接收或发射所需要某个偏振的电磁波，并可以在  $H$  平面和  $E$  平面设计不同的功率方向图。矩形喇叭天线是把矩形波导中的电磁能逐渐扩大发射到自由空间，或把自由空间的电磁能慢慢汇集输入矩形波导最好的传输工具，因此它作为馈源应用非常广泛。喇叭接收到的辐射送入波导，为了防止高阶波模引起干扰影响传播效率，

总是把波导最长边的尺寸  $w$  设计为  $\lambda/2 \leq w \leq \lambda$ ，为了提高喇叭天线的增益，喇叭的斜径又必须足够大，这就是波长越长要求喇叭天线越大的原因。矩形喇叭天线的缺点是旁瓣和后瓣水平高。

图 3.14 给出在 4.08 GHz 上，Penzias 和 Wilson 发现宇宙背景的喇叭天线。

### 3.3.3 抛物反射面天线

上面介绍的偶极天线和喇叭天线是接收电磁辐射并直接把它们转换成电流或输入到传输线的天

线，下面要介绍的抛物面和球面天线，它们只起到反射和聚集的作用，有的书中把它们称为反射天线（reflector antenna），它们一般都和偶极天线或喇叭天线组成天线系统。早在 1888 年，Heinrich Hertz 就建造了世界上第一架反射天线，大致可以这样说，射电天文观测波长小于 1 米（300 MHz）的天线大都用反射天线系统，它们广泛应用的原因是它们有很高的增益，一般都大于等于 1000（30dB）。反射天线系统中，抛物面和球面天线是射电天文应用中应用最普遍的两种反射天线，本节详细地介绍抛物面天线，下一节将介绍球面天线。

## 反射面天线几何光学

物像之间等光程性的费马原理是反射面天线系统结构的基础。图 3.15 是一面反射天线，它的物点是遥远的射电源，来自它的平面电磁波，经反射面反射，聚焦到离反射面顶点距离为  $f$  的焦点上。考虑其中一条离光轴  $y$  且平行于光轴的射线，它经  $P$  点反射到达焦点  $O$ ，根据费马原理的等光程性，要求  $2f = l + (f - \Delta)$  或者  $l = f + \Delta$ 。从图 3.15 我们有

$$l^2 = y^2 + (f - \Delta)^2$$

其中  $l$  是焦点到  $P$  点的向径， $\Delta$  是  $P$  在光轴上的投影到反射面顶点的距离。若用  $z$  代替  $\Delta$ ，则上式可简化为

$$y^2 = 4fz$$

如果反射面顶点的曲率半径为  $R$ ，则有  $f = R/2$ ，上式可以写改为

$$y^2 = 2Rz \quad (3.50)$$

方程（3.50）为抛物面方程，由于我们研究的是轴对称系统，只要在方程（3.50）中用  $x^2 + y^2$  代替  $y^2$ ，它就是一个旋转抛物面方程。从上面的讨论我们发现，要使入射到整个口径平行于光轴的射线成像于一点，整个口径的都应满足费马等光程性，则要求这个反射面为一个旋转抛物面镜。

如果用极坐标  $(l, \theta)$  来表示方程（3.50），我们有

$$l = \frac{2f}{1 + \cos \theta} = \frac{f}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (3.51)$$

$$y = l \sin \theta = \frac{2f \sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2f \tan \frac{\theta}{2}$$

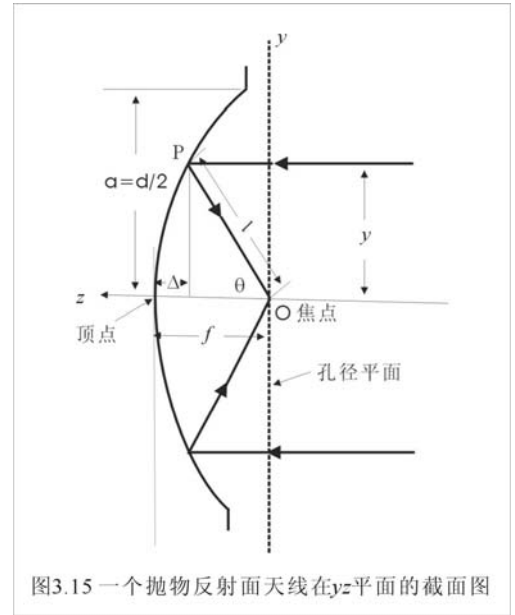
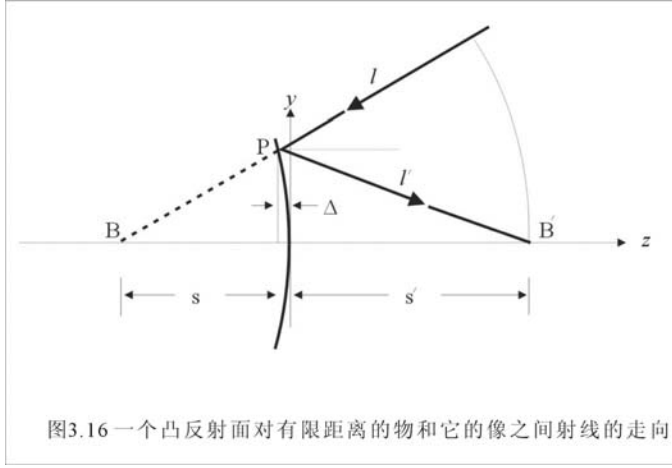


图3.15 一个抛物反射面天线在yz平面的截面图

其中  $\theta$  如图所示，是  $P$  点位置的极角。如果抛物反射面天线直径为  $D$ ，有  $|y| \leq D/2$ ，于是抛物反射面天线的直径  $D$  和焦距  $f$ （有时用焦比  $f/D$ ）是它的两个最基本的参数。



在反射天线系统中，为了提高天线的增益有时用两个反射面，其中一面是凹镜面，如抛物反射面，另一面是凸镜面。图 3.16 给出这样的凸反射面，其中虚物点在  $B$  点，而像在  $B'$ ，物点和像点都在光轴  $z$  上。入射是一个会聚的同心光束，中心是在  $B$  点，其中虚线弧是一段以  $B$  为圆心  $BB'$  为半径的圆弧。应用费马等光程原理，两条向着  $B$  点而交于  $B'$  的射线有

$$l + l' = 2s'$$

利用图 3.16 中的几何关系， $d^2 = y^2 + (s - \Delta)^2$ ， $l + d = s' + s$ ， $l'^2 = y^2 + (s' + \Delta)^2$  并把这些关系代入上式，消去  $l$ 、 $l'$  和  $d$ ，并考虑  $\Delta = z$ ，我们获得

$$y^2 - 4z \frac{ss'}{s + s'} + 4z^2 \frac{ss'}{(s + s')^2} = 0 \quad (3.52)$$

假如我们取  $b^2 = ss'$ ， $2a = s + s'$ ，方程 (3.52) 就可以化为顶点在  $(0, 0)$  的标准双曲面方程

$$\frac{(z - a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

或写成

$$y^2 + 2z \frac{b^2}{a} - z \frac{b^2}{a^2} = 0 \quad (3.53)$$

在上面方程中，用  $x^2 + y^2$  代替  $y^2$  就给出了光轴为对称轴的旋转双曲面。读者也很容易证明，当  $s = \infty$  时，即物是无限远处的恒星，这个光学面就变成了旋转抛物面。

从上面的分析我们清楚，如果反射天线只有一个反射面组成，这个反射面一定是旋转抛物面；如果反射天线由两个反射面组成，其中主反射面是抛物面，它反射来自射电源的一束平行于光轴的射线，并把它们汇聚起来，如图 3.17 所示，在没有到达主抛物反射面焦点以前，这束射线被一个旋转双曲面反射而交于它的另一个焦点，这个由抛物面和双曲面组成的双反射面天线系统就是经典的卡塞

格伦（Cassegrain，以下简称卡式）系统，口径比较小的双曲反射面称副面，口径比较大的抛物反射面称主反射面。从图 3.17 发现，我们把主反射面和副面同一个方向从实线移到虚线，设  $2\Delta z_1 = 2\Delta z_2$  保证物点到像点的光程没有变，这意味着各种偏心率的主镜和副镜的组合都可以构成一个卡塞格伦系统，这些系统叫修正的卡塞格伦系统。

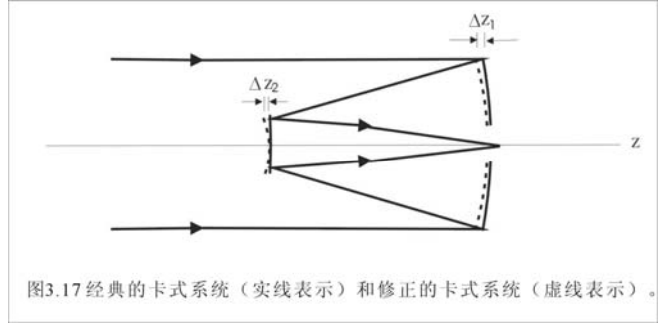


图3.17 经典的卡式系统（实线表示）和修正的卡式系统（虚线表示）。

最后提醒读者注意，反射面天线的几何光学处理应满足以下两个前提条件：（1）反射面（包括主面和副面）的曲率半径大于观测波长，在反射面上的每一个点都可以看成平面；（2）反射面是一个完全导体。

## 圆孔径天线的性质

在习题 3.3 里我们给出均匀圆孔径场分布的功率方向图[参看方程 (E3.3-4)]

$$P(\theta) = \frac{4J_1^2(\pi\theta D/\lambda)}{(\pi\theta D/\lambda)^2} \quad (3.54)$$

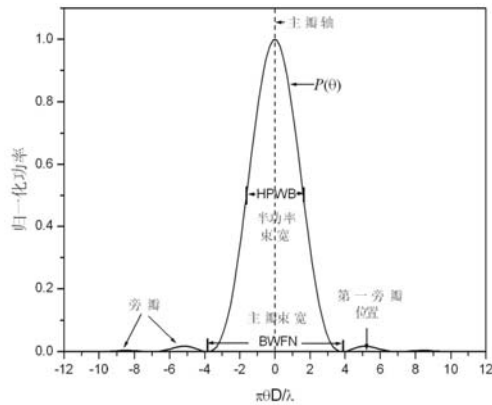


图3.18 均匀圆孔径远场功率方向图的直角坐标表示 瓣、主瓣宽度、半功率束宽、旁瓣等概念显示得很清楚。用  $P(\theta) = 1/2$  我们可以得到均匀圆孔径场功率方向图的半功率点的位置（参看图 3.18）

$$\pi\theta_{0.5} \frac{D}{\lambda} = 1.6162$$

于是半功率束宽为

$$HPBW = 2\theta_{0.5} = 1.02 \frac{\lambda}{D} \quad (3.55)$$

在上一节我们已经谈到，射电天文中一般用主瓣半功率束宽作为射电望远镜天线的空间分辨率，另外，

$J_1(x)$  的第一零点给出功率方向图的第一零点位置

$$\pi\theta_0 \frac{D}{\lambda} = 3.8317$$

于是第一零点束宽为

$$WBFN = 2\theta_0 = 2.439 \frac{\lambda}{D} \quad (3.56)$$

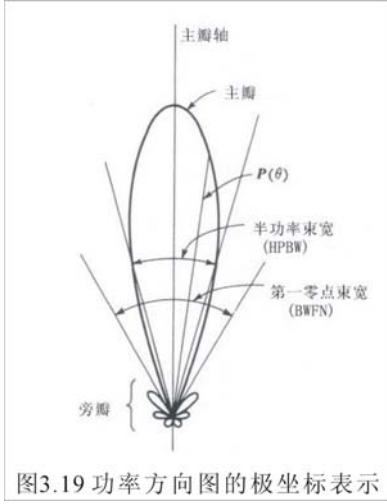


图3.19 功率方向图的极坐标表示

第一旁瓣的高度为 0.017，对应为 17.7 dB，有很高的旁瓣。

在整个空间对功率方向图表达式 (3.54) 积分，我们得到方向图立体角

$$\Omega_A = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\lambda}{D} \right]^2 \quad (3.57)$$

根据方向图立体角与天线增益和天线有效面积的关系 (E3.1-7)，我们有均匀圆孔径天线的最大有效面积为

$$A_{eff,0} = \pi \left[ \frac{D}{2} \right]^2 = A_g$$

它与均匀矩形孔径天线一样，最大有效面都等于孔径的几何面积。由此，均匀圆孔径天线最大的天线增益为

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_g = \left[ \pi \frac{D}{\lambda} \right]^2 \quad (3.58)$$

圆孔径天线的增益与  $\sim [D/\lambda]^2$  成正比，如一架 50 米的天线工作在 1 GHz ( $\lambda = 30$  厘米)，它的增益约为  $2.7 \times 10^5$ ，天线口径越大工作波长越短增益越高，这就是在射电天文里一般都用反射面天线的原因。

实际天线有效面积不可能等于它的几何面积，方程 (3.58) 应改写为

$$G_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \eta_A A_g \quad (3.59)$$

其中  $\eta_A \leq 1$  为上一节定义的天线效率。天线效率不等于 1 是由多种因素造成的，一般天线效率可以表示为以下四种效率的乘积

$$\eta_A = e_r \eta_t \eta_s \eta_a \quad (3.60)$$

其中  $e_r$  为辐射效率、 $\eta_t$  是削尖效率 (taper efficiency)、 $\eta_s$  为溢出效率 (spillover efficiency)、最后  $\eta_a$

为天线的技术效率（achievement efficiency）。上一节我们已经定义了辐射效率  $e_r$ ，如果是一架发射天线，辐射效率定义为天线发射的总功率与输给天线的总功率之比；实际天线孔径场分布不可能是均匀分布，一般总是中央比较高边缘比较小（tapering），这种不均匀分布引起天线效率的降低称作为削尖效率  $\eta_t$ ；如下面的图 3.18 所示，反射天线总是与馈源（偶极天线或喇叭天线）组合在一起构成一个天线系统，馈源的功率方向图总有一部分在反射天线的外面，这意味着反射面天线没有把馈源发出的功率全部截获，有一部分功率损失了，天线的这种功率损失称为溢出。天线的溢出效率  $\eta_s$  定义为反射面天线截获的功率与馈源发射的总功率之比。有的书中把削尖效率和溢出效率通称为照明效率（illumination efficiency）  $\eta_i = \eta_t \eta_s$ ；天线的技术效率是由多种因素造成的，包括天线面板随机误差、孔径遮挡、实际天线反射面偏离设计形状引起的反射面相位误差、馈源相位误差等等。好的天线设计将提供  $\eta_A \approx 0.65$  或更高的天线效率。

**习题 3.3** 本习题比较详细地导出均匀圆孔径场分布的功率方向图表达式（3.54）。在习题 3.2 中我们给出了孔径场（或孔径照明）分布和远场方向图之间的 Fourier 变换关系 [参看方程（E3.2-8）]

$$E(l, m) = C_0 \iint \varepsilon(\xi, \eta) e^{-ik(l\xi + m\eta)} d\xi d\eta$$

假如这个孔径是一个圆孔径，孔径平面圆心位于坐标系的原点，把直角坐标系变成极坐标系，有孔径场分布值

$$\varepsilon(\rho, \varphi) = \begin{cases} \text{有值} & \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

把孔径平面的笛卡尔坐标换成极坐标，有

$$\xi = \rho \cos \varphi$$

$$\eta = \rho \sin \varphi$$

注意上式的  $\rho$  以波长  $\lambda$  为单位。考虑方程（E3.2-3）方向余弦  $l$ 、 $m$ 、 $n$  的表达式，衍射积分可以简化为

$$E(\theta, \varphi) = C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \varepsilon(\rho, \phi) e^{-i\nu \cos(\phi - \varphi)} \rho d\rho d\phi \quad (\text{E3.3-1})$$

其中  $\nu = 2\rho \sin \theta$ ，当天线孔径场分布为常数时，即  $\varepsilon(\rho, \varphi) = 1$ ，则在孔径平面上，天线孔径场为均匀分布。上式与光学中的衍射积分方程类似。由于孔径圆对称，我们可以选取  $\varphi = 0$ 。考虑实孔径，方程（E3.2-8）可改写为

$$E(\theta) = C_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\nu \cos \phi} \rho d\rho d\phi \quad (\text{E3.3-2})$$

利用贝塞函数积分

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

考虑归一化因子  $C_0 = \pi a^2$ （注意这里的  $a$  以波长为单位），方程（E3.3-2）积分，可以得归一化场方向图

$$E(\theta) = \frac{2J_1(2\pi a \sin \theta)}{2\pi a \sin \theta} \quad (\text{E3.3-3})$$

和功率方向图

$$P(\theta) = E(\theta)E(\theta)^* = \frac{4J_1^2(2\pi a \sin \theta)}{(2\pi a \sin \theta)^2}$$

如果用天线实际直径来表示，我们有

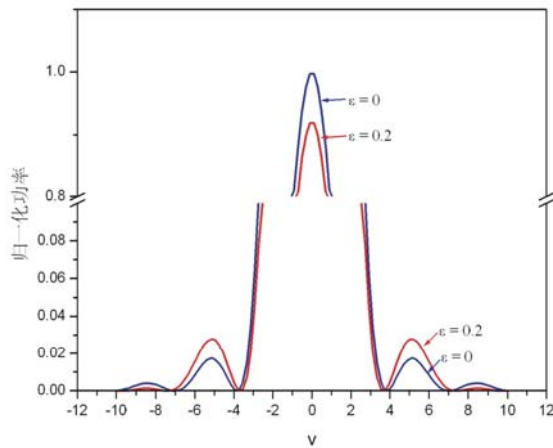
$$P(\theta) = E(\theta)E(\theta)^* = \frac{4J_1^2(\pi D / \lambda \sin \theta)}{(\pi D / \lambda \sin \theta)^2} \quad (\text{E3.3-4})$$

如果天线的直径  $D \gg \lambda$ ， $\theta \ll 1$ ，则功率方向图可以表示为

$$P(\theta) = \frac{4J_1^2(\pi \theta D / \lambda)}{(\pi \theta D / \lambda)^2} \quad (\text{E3.3-5})$$

如果是一个中空天线孔径场分布，孔径外半径为  $a$ ，内半径为  $\varepsilon a$ 。方程（E3-2）积分可以得功率方向图

$$P(v) = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left[ \frac{2J_1(v)}{v} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(\varepsilon v)}{\varepsilon v} \right]^2 \quad (\text{E3.3-6})$$



图E3.3-1  $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon = 0.2$ 两种不同情况下的功率方向图。红线表示 $\varepsilon = 0$ ，蓝线表示 $\varepsilon = 0.2$ 的功率方向图。为了能比较清楚地看见主瓣和旁瓣的变化，我们把纵轴的归一化值从0.1到0.8之间断开。

表 E3.3-1 前三个暗环的半径

$\varepsilon$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
0.00	$1.220\pi$	$2.233\pi$	$3.238\pi$
0.10	$1.205\pi$	$2.269\pi$	$3.182\pi$
0.20	$1.167\pi$	$2.357\pi$	$3.087\pi$
0.33	$1.098\pi$	$2.424\pi$	$3.137\pi$
0.40	$1.058\pi$	$2.388\pi$	$3.300\pi$

注意上式中 $v=2\pi a \sin \theta$ ，显然，当 $\varepsilon = 0$ 时，上式就简化为均匀实圆孔径的情形。表 E3.3-1 给出  $\varepsilon$  分别为 0、0.1、0.2、0.3 和 0.4 时前三个暗环的半径，图 E3.3-1 给出  $\varepsilon = 0$  和  $\varepsilon = 0.2$  两种不同情况下以直角坐标表示的功率方向图。从表 E3.3-1 和图 E3.3-1 我们发现，当 $\varepsilon = 0.2$ ，即孔径平面被遮挡 4% 时，主瓣窄了，但主瓣的极值变小第一旁瓣变大，这是我们不希望的，于是减小遮挡在天线设计里是一件很重要的事情。

从上面的讨论我们发现，天线孔径场分布决定着天线的方向图。如果想要改变天线的功率方向图，就得改变孔径场分布。作为特例，上面给出均匀孔径场分布的功率方向图。在一般的情况下，可以把孔径场分布写成如下的形式



$$g(\rho) = \begin{cases} k + \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right]^n & \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad (\text{E3.3-7})$$

实际需要的孔径场分布可以选取适当的  $k$  和  $n$  值。上面的孔径场分布经 Fourier 变换后，得到场方向图分布

$$E(v) = \pi a^2 k \Lambda_1(v) + \frac{\pi a^2}{n+1} \Lambda_{n+1}(v) \quad (\text{E3.3-8})$$

其中

$$\begin{aligned} v &= 2\pi a \sin \theta \\ \Lambda_n(v) &= \frac{n! J_n(v)}{(v/2)^n} \end{aligned} \quad (\text{E3.3-9})$$

如果在孔径场分布一般形式方程 (E3.3-7) 中，选择  $k = 0$  和  $n = 0$ ，则上面的结果就简化为均匀孔径场分布的结果。详细研究一般形式孔径场分布所对应的各种功率方向图，已超出本教程的要求。表 E3.3-2 给出不同的  $k$  和  $n$  值得到的 HPBW、BWFN、旁瓣低于主瓣的程度 (db) 和最大天线有效面积  $A_{\max}$  与几何面积  $A_g$  之比。结果是很有趣的，归纳起来有：(1) 各种功率方向图的 HPBW 都正比与  $\lambda/D$ ；(2)

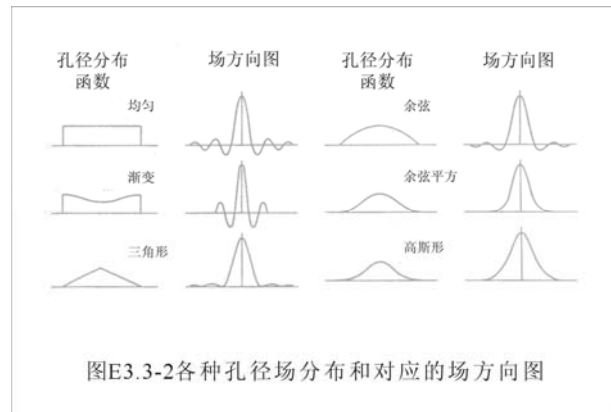


图 E3.3-2 各种孔径场分布和对应的场方向图

选取不同的  $k$  和  $n$  值，有不同的功率方向图，规律是主瓣宽则旁瓣低，而主瓣窄则旁瓣高。这个结果在预料之中，因为它遵循能量守恒原理。实际中，我们可以根据科学研究的目标来确定一个折衷的方案。

从理论上说，可以假定各种各样的孔径场分布或照明函数，可以用孔径场分布和远场方向图之间的 Fourier 变换求得对应的功率方向图，但除了一些特别的孔径场分布以外，多数情况下远场方向图的解析解是很难得到的。图 E3.3-2 给出为数不多几个孔径场分布和对应的场方向图。从图中可以发现，场方向图随孔径分布函数的改变而变化，为了获得射电望远镜要求的增益、分辨率和旁瓣电平，我们只要改变孔径分布函数就可以了。

表 E3.3-2 不同的  $k$  和  $n$  值所对应的功率方向图参数

N	k	HPBW	BWFN	旁瓣大小(db)	$A_{\max}/A_g^*$
0	0	$1.02\lambda/D$	$1.22\lambda/D$	17.6	1.00
1	0	$1.27\lambda/D$	$1.62\lambda/D$	24.7	0.75
2	0	$1.47\lambda/D$	$2.03\lambda/D$	30.7	0.55
1	0.25	$1.17\lambda/D$	$1.49\lambda/D$	23.7	0.87
2	0.25	$1.23\lambda/D$	$1.68\lambda/D$	32.3	0.81
1	0.5	$1.13\lambda/D$	$1.33\lambda/D$	22.0	0.92
2	0.5	$1.16\lambda/D$	$1.51\lambda/D$	26.5	0.88

\* 没有考虑天线的辐射损耗

## 抛物反射面天线的基本结构形式

上面我们已经谈到，抛物反射面天线是射电望远镜天线最基本的形式。按照反射面的个数，可分为单反射面天线和双反射面天线。单抛物反射面天线总是把馈源放在抛物反射面的主焦点上（参看图 3.20a），于是一般称它为主焦式射电望远镜天线。对于主反射面为抛物面的双反射面天线，从射电波射线的结构系统（光学望远镜中的光学系统）分（参看图 3.20b-f），有卡塞格林式、偏轴（offset）卡塞格林式、牛顿式（Naysmith）、波束波导式（beam waveguide）和双偏轴(dual offset) 卡塞格林式天线。

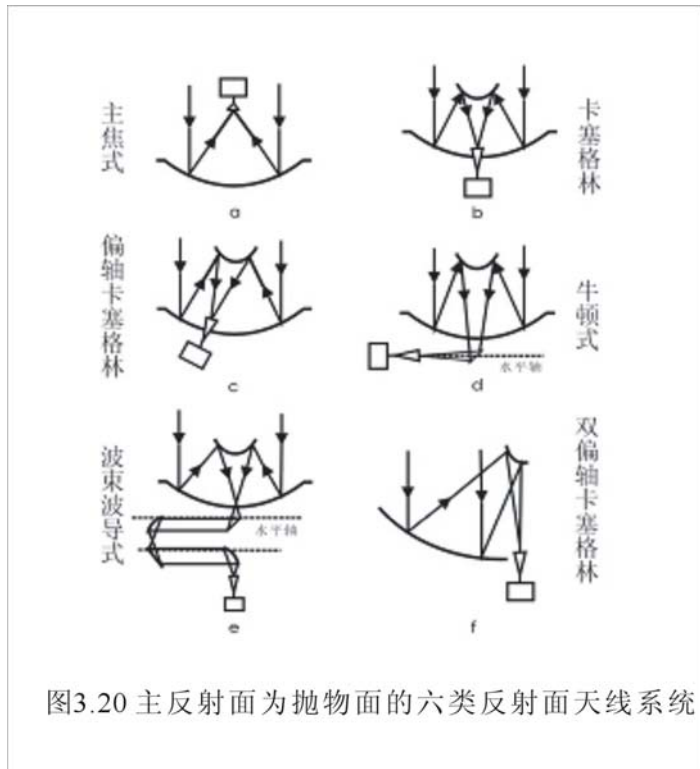


图3.20 主反射面为抛物面的六类反射面天线系统

主焦式望远镜的优点是它很简单，来自天体的辐射直接经抛物面聚焦到馈源，能量损失小。它的缺点是馈源不仅接收到来自天体的辐射，地面包括周围建筑物和人类活动的热辐射（温度约 300 K）都进入了馈源，这些不想要的能量产生的热起伏降低了天线的灵敏度。卡塞格林式天线系统的副镜改变射线的方向，把射电辐射聚焦到主反射面附近的第二焦点，在这个位置上的馈源指向天空（温度约 15 K），大大减少了地面的热噪声。

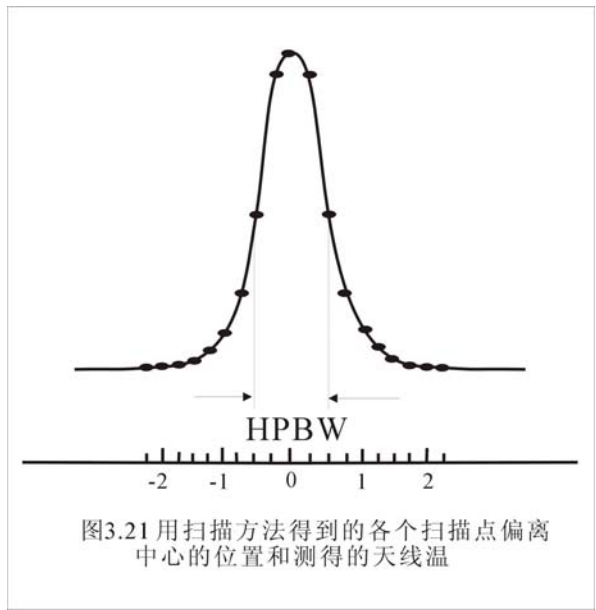
一般来说一架天线可以用于几个波段的观测，每个波段可能有不同的馈源，有的波段馈源很大很重，要把新换的馈源准确地放在焦点上并与天线的光轴对准是一件很费时的工作。偏轴卡式天线可以把不同频率的馈源放在焦点的一个圆盘内，稍稍转动付面或转动安装馈源的圆盘就可以完成切换观测频率。图 3.20 中的牛顿式和波束波导式天线是用一块平面镜或一组反射镜把由付面反射的射电辐射束转向并汇聚到馈源。它的好处是改变反射镜的方向就可以很简单地改变射电辐射束的走向，使它聚焦到不同观测波段的馈源。这种天线系统的缺点是射电辐射经过一次或多次的反射会有损耗，这种损耗对观测弱源影响特别大。双偏轴卡式天线是为了避免付镜遮挡提高天线增益的一种设计。

### 3.3.4 抛物反射面天线的指向校准

在上一节我们曾经谈到天线指向误差，它定义为天线实际指向与预期指向之间的差。讨论了抛物反射面天线的基本特性以后，可以对天线的指向误差给出更确切的定义。当天线处于工作状态时，天线增益最大的方向，或者说天线功率方向图最大的方向应准确地指向观测目标，实际上天线增益最大的方向不可能正好对准观测目标，它们之间的偏离定义为天线的指向误差。因此，为了测定天线的指向误差首先要确定天线的增益或天线的功率方向图。

#### 抛物反射面天线功率方向图的测定

测定天线的功率方向图有漂移法和扫描法两种。漂移方法是当射电源通过中天或大距之前把天线指向这两个位置，当射电源周日运动时自动漂移过天线，用一般的记录仪或数字记录系统记录下天线温度的漂移曲线，由于在这两个位置天线相对射电源近似地只在方位方向或仰角方向有运动，则得到的漂移曲线分别就是在这两个方向的功率方向图。由于漂移方法只能在中天和大距位置测天线的功率方向图，很不方便，而现代射电望远镜天线都是由计算机控制的地平式系统，可以随时算出天线指向位置，于是目前流行



测定天线功率方向图的方法是扫描法。方法首先是使天线指向射电点源并使它处于跟踪状态下，以天线指向源位置为中心，方位方向偏离范围约 $\pm 1.5-2$  HPBW 内，步长不大于  $1/5$  HPBW 进行跟踪观测，记录得到的各个扫描点偏离中心的位置和测得的天线温度值的曲线（参看图 3.21）。用适当的曲线拟合上述的扫描结果，我们就可以得到天线的功率方向图，同时我们也可以得到天线功率方向图半功率全束宽 HPBW。用同样方法可以测得仰角方向的天线功率方向图。

拟合曲线的函数形式可以用均匀圆孔径场分布的功率方向图表达式

$$P(x) = \frac{4J_1^2(x)}{(x)^2}。$$

但在实际测量时，一般都用高斯曲线拟合，高斯曲线的函数形式为

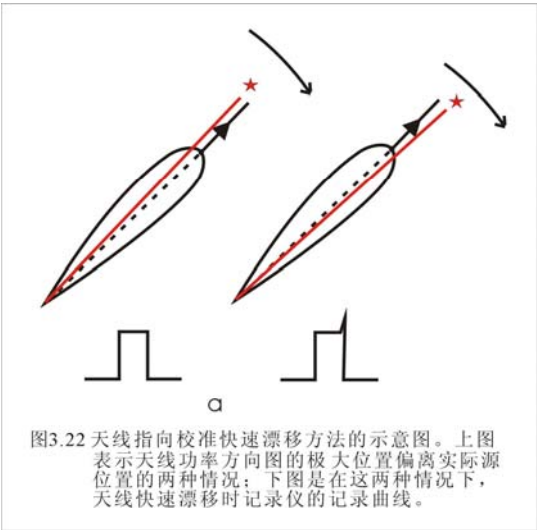
$$P(x) = \exp\left\{-2 \ln 2 \left(\frac{x}{HPBW}\right)^2\right\} \quad (3.61)$$

其中 *HPBW* 为半功率束宽。高斯曲线的极值对应天线增益或天线功率方向图极大的位置，其方向在工程上称为天线的电轴。

在上面的讨论里，我们假设天线电轴准确地指向观测目标，实际上它是不可能的。正如上面我们谈到的那样，天线在正式观测之前首先要做天线指向校准和天线指向精度测量。天线指向初步的校准可以用快速漂移法，但如果要精确得到天线指向误差要用扫描法和 5 点法。下面对这三种方法的原理作简单的介绍。

### 天线指向校准快速漂移法

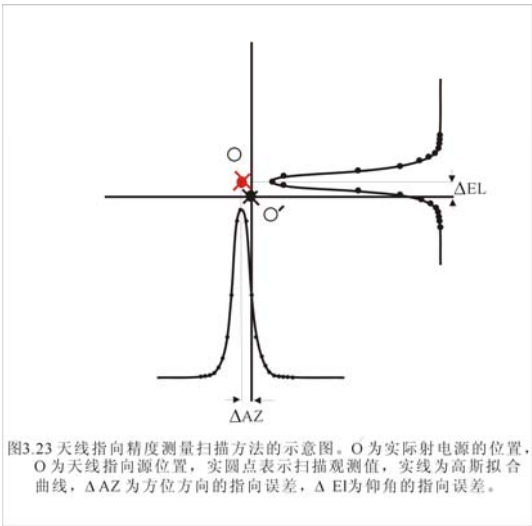
使用快速漂移法可大致获得天线指向与天体真正位置的差值。快速漂移方法中记录设备为记录仪，使天线处在跟踪状态下，指向射电辐射强、小角径（角径远小于天线的 *HPBW*）的射电源，待天线跟踪稳定以后，首先天线在方位正方向（也可以在俯仰方向）快动偏离射电源，如图 3.22 所示记录仪输出突然下降，说明天线基本对准源的方向或偏向方位正方向。如果记录输出先上升后突然下降（称小尖峰），说明天线偏向方位负方向，这时你可加一个修正量  $\delta AZ$ 。待天线



指向位置修正后，把天线重新指向并跟踪射电源，重复上述使天线快动和加修正量，直到记录输出没有小尖峰为止。这时把天线指向射电源，天线无论快动偏离方位正或负方向，记录仪输出都不会出现小尖峰，这时的天线指向和实际源的位置基本一致。这种快速漂移法的精度不会太高，它决定于天线的波束宽度、源角径的大小、记录仪的积分时间等等因素，作为天线指向校准的第一步，它可能是最好的办法。

### 天线指向精度测量扫描法

该测量方法与天线功率方向图的测定方法类同，但我们的目的是用高斯曲线拟合获得功率方向图极值位置（实际射电源的位置）与中心（指令天线指向的位置）的偏离（参看图 3.23），这个偏离就是天线在方位方向或仰角方向的指向误差。

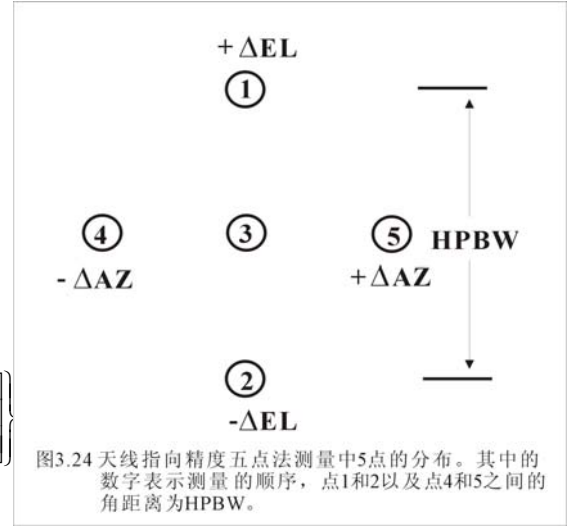


用扫描法测定天线指向的方法所观测的源要强，跟踪观测的积分时间要恰当。如果源比较弱，积分时间不足，观测信号信噪比差，会严重影响测量精度。扫描总的范围和扫描步长由天线的指向精度确定，如果初次进行指向校准，扫描的范围和步长可以大一点。

## 五点法

天线指向精度五点法测量与上面的扫描法非常类似，不同是它只测量 5 点（如图 3.24 所示），它包括源位置方向中心点、方位方向偏离为 $\pm\Delta AZ$ 的东西两点和在仰角方向偏离为 $\pm\Delta EL$ 的南北两点。一般取  $\Delta AZ$  和  $\Delta EL$  为  $HPBW/2$ 。如果我们测量是一个抛物面天线指向精度，天线的功率方向图可以用两维的高斯曲面来近似（参看方程 3.26）。如果天线指向经过了初调，实际射电源应在五点的中心点附近。天线处在跟踪状态下，五点法中每一点与实际源的相对位置是固定的，则五点的天线温度为

$$T_i = T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ_i}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL_i}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.62)$$



上式中， $T_p$  表示天线观测这个射电源测得的天线温度的极值， $\Delta AZ_i$  和  $\Delta EL_i$  分别表示在观测射电源时，方位和仰角方向天线电轴方向相对源的偏离， $HPBW_{AZ}$  和  $HPBW_{EL}$  分别表示天线功率方向图在方位和仰角方向的半功率束宽。根据方程（3.62）我们有

$$\begin{aligned} T_1 &= T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL + HPBW/2}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \\ T_2 &= T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL - HPBW/2}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \\ T_3 &= T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \\ T_4 &= T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ - HPBW/2}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \\ T_5 &= T_p \exp \left\{ -2 \ln 2 \left[ \left( \frac{\Delta AZ + HPBW/2}{HPBW_{AZ}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta EL}{HPBW_{EL}} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

从上面 5 个方程我们可以解出  $\Delta AZ$ 、 $\Delta EL$ 、 $HPBW_{AZ}$ 、 $HPBW_{EL}$  和  $T_p$ 。我们关心的是  $\Delta AZ$  和  $\Delta EL$  的解，它们是

$$\begin{aligned}\Delta AZ &= (\ln T_4 - \ln T_5) * \frac{HPBW}{4(\ln T_3 - \ln T_4 - \ln T_5)} \\ \Delta EL &= (\ln T_2 - \ln T_1) * \frac{HPBW}{4(\ln T_3 - \ln T_4 - \ln T_2)}\end{aligned}\quad (3.64)$$

五点法是目前天线指向精度测量用得最广泛的方法，为了提高它的测量精度，它必须预先做过天线指向的粗校准，天线的指向已足够小。另外，观测射电源要尽可能的强，有高的观测信噪比是得到可靠天线指向精度的保证。上面我们在讨论天线指向精度测量时，我们假定所观测的射电源都是点源，但在一些情况下，我们要用展源来做天线指向精度测量，这个问题留到这一章的最后来讨论。

### 天线指向系统误差模型

在上面讨论一般天线的指向误差时，我们曾经谈到天线的指向误差是由系统误差和随机误差两部分组成的，系统误差是由一些固定的因素引起且按确定规律变化的误差，如蒙气差、轴系误差、蜗轮误差等引起的指向误差，它们可以通过观测建立起指向系统误差的模型，简称指向模型（pointing model）。指向模型变化的特征时间大概是几个月，于是大的射电望远镜天线一年要做 2—3 次指向模型更新。除系统误差外，天线还有因热效应引起的，时标约为几十分钟的随机误差，

它不可能用指向模型来消除，只可能在待测天体附近的指向校准源来做指向改正。

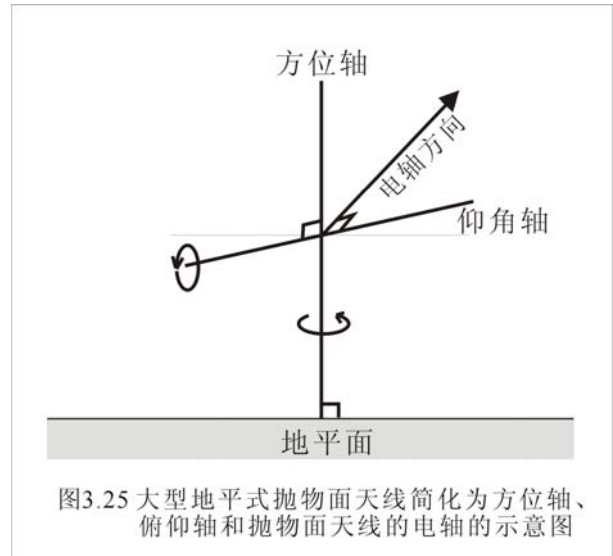


图3.25 大型地平式抛物面天线简化为方位轴、俯仰轴和抛物面天线的电轴的示意图

首先我们来考虑指向模型。引起天线指向系统误差的一个主要因素是轴系误差，一架大型地平式抛物面天线可以简化为如图 3.25 所示的三根轴，它们是方位轴、俯仰轴和抛物面天线的电轴。大型地平式抛物面天线支架的底部是轮轨，天线可在轮轨上自由地转动使天线指向任意方位的天体。整个抛物面天线支架的转动轴称为方位轴，在理想情况下，方位轴应指向天顶，也就是说整个抛物面天线应在垂直于方位轴的轮轨平面上转动。实际上方位轴偏离天顶方向，它会引起指向误差。俯仰轴的功能是使天线能观测不同高度的天体，显然它应严格地垂直于方位轴，它们不正交也会引起指向误差。天线电轴是天线增益或天线方向图最大的方向，如果要使天线指向正确的位置，天线的电轴要与俯仰轴正交，它们不垂直也会引起指向误差。研究表明这三个轴互不正交引起的指向误差都同观测源的方



位和高度有关。引起天线指向系统误差的另一个原因是重力变形，重力变形比较复杂，它可以展开成 1 次项，2 次项和高次项的改正。在一般情况下，只要取 1 次项就可以了，但如果要求高的指向误差改正，必须选取 2 次项和高次项。

如果只考虑轴系误差和重力变形的 1 次项，结合指示方位  $AZ$  和仰角  $EL$  码盘的零点误差，我们可以得到指向系统误差的模型，

$$\begin{aligned}\Delta AZ &= P_1 + P_2 \tan EL - P_3 / \cos EL \\ &\quad + P_4 \sin AZ * \tan EL - P_5 \cos AZ * \tan EL \\ \Delta EL &= P_4 \cos AZ + P_5 \sin AZ \\ &\quad + P_6 + P_7 \cos EL + P_8 \sin EL\end{aligned}\tag{3.65}$$

其中  $\Delta AZ$  和  $\Delta EL$  分别是天线在方位  $AZ$  和仰角  $EL$  方向的指向误差， $P_1$  和  $P_6$  分别表示方位和仰角码盘零点误差， $P_2$  表示俯仰轴与方位轴不正交引起的误差， $P_3$  表示天线电轴与俯仰轴不正交引起的误差， $P_4$  和  $P_5$  分别表示方位轴南北和东西向偏斜引起的误差，最后的  $P_7$  和  $P_8$  分别表示对称和非对称重力变形引起的误差系数。选择几十均匀分布天空的射电点源，用上述的五点法精确地测出每个源的指向误差，建立一组误差方程，就可以用最小二乘法就解出上式的 8 个待定系数  $P_1 \cdots P_8$ 。平时当天线观测方位和仰角分别为  $AZ$  和  $EL$  的天体时，就可以从方程（3.65）获得这个位置的指向的误差，经修正后使天线正真指向观测源的位置。

为了达到精确的天线指向模型，有的观测天体物理学家在上面模型的基础上再加入高次项解指向模型，类似模型方程有

$$\begin{aligned}\Delta AZ &= P_1 + P_2 \tan EL - P_3 / \cos EL \\ &\quad + P_4 \sin AZ * \tan EL - P_5 \cos AZ * \tan EL \\ &\quad + P_9 * AZ + P_{10} \cos AZ + P_{11} \sin AZ + P_{12} \cos(2 * AZ) + P_{13} \sin(2 * AZ) \\ \Delta EL &= P_4 \cos AZ + P_5 \sin AZ \\ &\quad + P_6 + P_7 \cos EL + P_8 \sin EL + \\ &\quad - P_{14} \sin EL * \cos AZ + P_{15} * EL + P_{16} \cos(2 * AZ) + P_{17} \sin(2 * AZ) \\ &\quad + P_{18} \cos(8 * EL) + P_{19} \sin(8 * EL) + P_{20} \cos AZ + P_{21} \sin AZ\end{aligned}$$

上面的精细模型有 21 个系数。观测实践表明模型参数越多就一定越好，最好的方法是先用模型方程（3.65）解出待定系数  $P_1 \cdots P_8$ ，然后用上式解其他参数，考察各项的贡献后再决定最终的模型。